BRIEFWECHSEL

zwischen

LEIBNIZ und HERMANN.

Jacob Hermann*) (geb. 1678, gest. 1733) war einer der vorzüglichsten Schüler von Jacob Bernoulli. Er hatte sich durch seine Responsio ad Considerationes secundas cl. Nieuwentiitii circa calculi differentialis principia, Basil. 1700, Leibniz bemerkbar gemacht, der einige Jahre später ihn für die erledigte Professur der Mathematik an der Universität Padua empfahl. Dies gab die Veranlassung zur vorliegenden Correspondenz, die vom Jahre 1704 bis zum Tode Leibnizens ununterbrochen fortdauerte.

Leibniz glaubte in Hermann einen jungen talentvollen Mann gefunden zu haben, wie er ihn schon lange suchte, der nämlich bereit und geschickt war, die Ideen, die in den ersten Entwürfen in seinen Papieren ruhten und zu deren Durcharbeitung ihm die Zeit mangelte, zu entwickeln und weiter zu führen. Er bringt deshalb in seinem ersten Schreiben sogleich zweierlei zur Sprache, worauf er Hermann's Aufmerksamkeit zu richten wünscht: die Dyadik, und wie der Begriff eines Differentials zu fassen sei. Was die Dyadik betrifft, so interessirte sich Leibniz für die Ausbildung derselben besonders insofern, als er sie mit algebraischen Untersuchungen in Verbindung gebracht hatte; er gebrauchte nämlich, um den Zusammenhang zwischen den unbekannten Grössen und ihren Coefficienten deutlicher darzustellen, für die letzteren eine eigenthümliche Bezeichnung durch Ziffern, und drückte z. B. zwei Gleichungen des zweiten Grades mit zwei Unbekannten so aus:

$$0 = 100 + 110x + 101y + 111xy + 120xx + 102yy$$
$$0 = 200 + 210x + 201y + 211xy + 220yy + 202yy$$

In den Ziffern 111, 211 u. s. w. bezeichnet die erste, also 1 oder 2, den Ursprung des Gliedes, ob es zur ersten oder zweiten Glei-

*) Professor der Mathematik in Padua, darauf Sturm's Nachfolger in Frankfurt an der Oder, alsdann Akademiker in Petersburg, in seinen letzten Lebensjahren Professor der Moral in Basel.

chung gehört; die beiden folgenden deuten die Beziehung zu den Unbekannten in demselben Gliede an, so dass also 120 ausdrückt, dass es zu den Unbekannten x^2y^0 gehört. Dadurch erhielt Leibniz nicht allein bei der Elimination sehr harmonisch gebildete Ausdrücke, in welchen man die erste Grundlegung zu der in neuester Zeit so wichtig gewordenen Theorie der Determinanten erkannt hat*), sondern auch gewisse Erleichterungen für die Bestimmung der Coefficienten in den Reihen, in welche er die Wurzeln der Gleichungen entwickelte. In Betreff des Letzteren hatte Leibniz eine kurze Andeutung am Schlusse der Abhandlung gegeben, in der er die Beschuldigungen Fatio's zurückwies**). Auf diese kommt er in seinen Briefen an Hermann zurück und spricht gegen ihn den Wunsch aus, die in Rede stehende Untersuchung weiter zu führen, namentlich zu ermitteln, ob es nicht möglich sei, unmittelbar aus der Reihe zu erkennen, ob die Gleichung unmögliche Wurzeln habe, und wie die verschiedenen Wurzeln der Gleichung in der Reihe selbst zu unterscheiden seien. Um Hermann zu dergleichen Studien zu veranlassen, bringt Leibniz aus seinen früheren Untersuchungen einzelnes zur Sprache, z. B. über die Kennzeichen der Convergenz und Divergenz der Reihen, einen Versuch das sogenannte Harriotsche Theorem zu beweisen u. s. w. Als Newton's Arithmetica universalis im Jahre 1707 erschien, erhielten diese algebraischen Discussionen eine neue Anregung. Leibniz übersendet sogleich an Hermann eine Abschrift der darin enthaltenen Methode, die Divisoren einer Gleichung zu finden und fordert ihn auf, Newton's Verfahren auf Ausdrücke von höheren als vom zweiten Grade auszudehnen. Zugleich deutet Leibniz ein Verfahren an, aus einer Gleichung eine andere abzuleiten, welche die Differenz zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung als Wurzel enthält. Endlich übersendet Leibniz selbst eine Methode in der Abhandlung: Methodus generalis investigandi divisores formularum rationalium integralium ex datis divisoribus numerorum rationalium integrorum. Die Grundzüge dieser Methode bestehen im Wesentlichen darin, dass die gegebene Gleichung in eine solche transfor-

*) Sieh. Leibnizens Schreiben an den Marquis de l'Hospital vom 28. April 1693, Bd. II. S. 236 ff. — Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1857, S. 4.

**) Sieh. Bd. V. S. 348 f.

mirt wird, deren Glieder sämmtlich positiv sind, und dass alsdann für x eine Zahl angenommen wird, die grösser ist als jeder einzelne in der transformirten Gleichung vorkommende Coefficient; diese Zahl an die Stelle von x in die Gleichung gesetzt wird eine Zahl hervorbringen, deren Factoren in Verbindung mit den Resten einer fortgesetzten Division durch die angenommene Zahl die Coefficienten der gesuchten Divisoren der gegebenen Gleichung ergeben.

Hiermit wird das Gebiet der Algebra verlassen. Vom Jahre 1709 an kommen in der Correspondenz zwischen Leibniz und Hermann fast nur Punkte aus der Dynamik zur Sprache. Aus Hermann's Briefe XLIII am Schlusse des Jahres 1708 geht hervor, dass Leibniz ihm die Gesetze des Stosses mitgetheilt hatte; Hermann, der in seinen Vorträgen an der Universität namentlich die Mechanik zu berücksichtigen und bereits den Plan zu seiner Phoronomia gefasst hatte, nahm hiervon Gelegenheit Leibniz um den Beweis a priori über das Maass der Kräfte zu bitten. Indem ihn Leibniz auf eine diesen Gegenstand betreffende Abhandlung verweist, die in den Actis Erudit. Lips. erschienen war, beginnt zunächst eine Discussion über die Centrifugalkraft, alsdann aber erörtert Leibniz selbst die Principien der Dynamik nach seinem System im Zusammenhang, so dass dieser Theil der Correspondenz zwischen Leibniz und Hermann einen äusserst wichtigen Beitrag zur Kenntniss der Leibnizischen Dynamik liefert.

Die Briefe Leibnizens an Hermann — mit Ausnahme einiger, die hier zum ersten Male gedruckt sind — erschienen zuerst in den Memoiren der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1757 nach Abschriften, welche von den im Nachlasse Hermann's befindlichen Originalen genommen waren, und sodann von Dutens nach der Zeitfolge geordnet in dem dritten Bande der sämmtlichen Werke Leibnizens. Veranlassung dazu gab ein Prioritätsstreit über das Princip der kleinsten Kraft, den König gegen Maupertuis erhob auf Grund eines Bruchstückes aus einem angeblich an Hermann gerichteten Briefe Leibnizens vom 16. Octobr. 1707, wonach dem letzteren der erste Gebrauch des genannten Princips zu vindiciren ist. Nachdem die Berliner Akademie für ihren Präsidenten Partei genommen, und da der von König vorgelegte vollständige Brief unter den Papieren Hermann's im Original sich nicht vorfand, so wurde der ganze Brief durch einen Beschluss der Akademie für untergeschoben erklärt. Er erschien später in der von König herausgegebenen Schrift: Appel au Public du jugement de l'Académie Royale de Berlin; zugleich mit drei anderen Leibnizischen Briefen*). Es unterliegt keinem Zweifel, dass die Akademie insofern Recht hatte, dass der Brief nicht an Hermann gerichtet sein konnte; auch aus der vorliegenden, bis auf wenige Briefe vollständigen Correspondenz geht unzweideutig hervor, dass der in Rede stehende Brief weder hinsichtlich seiner Form noch seines Inhalts hineinpasst**); auf der anderen Seite indess verräth die Haltung und Ausdrucksweise des ganzen Briefes die Feder Leibnizens. Der Herausgeber der mathematischen Schriften Leibnizens steht auf Seiten Königs: der Brief ist leibnizisch, obwohl bisher trotz wiederholter Nachsuchungen unter den Papieren Leibnizens ihm nicht gelungen ist das Original aufzufinden.

Auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover sind nur wenige von den Briefen Leibnizens an Hermann im Original vorhanden; sie mussten deshalb grösstentheils nach den oben erwähnten Drucken, die aber nicht selten lückenhaft sind und auch unklare Stellen enthalten, hier wiedergegeben werden. In den Briefen Hermann's, die zum ersten Mal gedruckt vorliegen, ist alles das weggelassen, was ohne wissenschaftliches Interesse ist.

---

*) Eine deutsche Uebersetzung der genannten Schrift findet sich in: Vollständige Sammlung aller Streitschriften, die neulich über das vorgebliche Gesetz der Natur von der kleinsten Kraft in den Wirkungen der Körper zwischen dem Herrn Präsidenten von Maupertuis zu Berlin, Herrn Professor König in Holland, und anderen mehr, gewechselt worden. Unparteyisch ins Deutsche übersetzt. Leipzig, 1753.

**) Auch aus Hermann's Brief vom 7. Jul. 1712 geht hervor, dass Leibniz ihm bis dahin noch keine nähere Mittheilung über das Princip der Continuität gemacht hatte; er schreibt darin in Bezug auf Leibnizens Theodicee: Nodus Liberi et Necessarii ibi, quantum humanitus sperari poterat, solutus videtur, adeo ut alter philosophicus circa Continuum et Indivisibilia adhuc extricandus videatur.

I.

Hermann an Leibniz.

Diu est ex quo Amplitudini Tuae propius innotescere in votis habui, quanquam inconcinno epistolio tempora Tua morari hactenus non sim ausus, multifaria quibus domi forisque assidue occuparis negotia identidem mecum perpendens. Humanissimae autem litterae ad Cel. nostrum Profess. Bernoulli nuperrime datae, ex quibus non sine stupore, laetus tamen, percepi a Tua Ampl. Illustrissimis et Generosissimis Curatoribus Academiae Patavinae perhumaniter me commendatum esse, ad scribendum ita me invitare videntur, ut citra ingrati animi vitium ulteriores moras nectere mihi nequaquam liceat. Gratias itaque Tuae Amplitudini persolvo non quidem quas debeo, sed quas possum maximas pro tanto honore quo me afficere voluit mei commendatione Illustriss. illis Viris ad honorificam adeo stationem: et merita mea longe inferiora sunt illis laudibus quibus me in praefatis litteris largius cumulas, quibusque propensum Tuum erga me animum testatum voluisti. Hac igitur Tua erga me benevolentia ceu luculento iterum ostendis argumento, non satis Tibi esse tot sublimium inventorum publicatione, inter quae incomparabilis ille differentialis eminet calculus, tantum de mathematicis aliisque studiis meruisse, verum scientiarum incrementa adeo cordi Tibi esse, ut eos qui promovendis scientiarum pomoeriis apti Tibi videntur consilio juves, et ne a coeptis deterreantur humanitate Tua erigas et animes, verbo, ad strenuum cursum eos incites. Tot igitur curis et pro bono rei litterariae exantlatis laboribus non solum maximam Eruditorum partem, sed me inprimis, tametsi in eorum numero recenseri non merear, ita obstrinxisti, ut merito omnes pro Incolumitate Tua et Longaevitate ardentissima Deo vota faciamus. Nunc tandem studiis meis multum me profecisse arbitror, quod ea ab Amplitudine Tua probari videam. Hocque efficacissimum mihi subdet stimulum in studiis meis gnaviter pergendi, et nullis laboribus nullisque vigiliis parcendi, ne tanto Patrocinio et Favore absolute indignus censear, sed potius de continuatione ejus, quam humillime a Tua Amplitudine efflagito, spem concipere valeam.

Sed tandem ad ea veniendum quae de me scire cupis. Quanquam reconditior Geometria prae omnibus aliis scientiis mirifice mihi placuerit, ei tamen non ita unice incubui ut reliquas seu practicam mathesin negligerem, quam a quadriennio jam studiosos doceo; paucissimi enim sunt quorum palato analyticum studium sapiat, aut qui dotibus ad id polleant, ita ut pleraque mea collegia sint mere practica. Non ausim tamen me in Doctrina aquarum in Italia praeprimis florentem multis exercitatum dicere, eo quod ea quae in variis autoribus circa has res jam legeram et quibus non parum delectabar, ad praxin deducendi occasio omnis mihi defuerit, non tamen vererer tale quid in me suscipere, persuasus me ipsam praxin aut quae eo pertinent paucarum septimanarum decursu addiscere posse. Nihil itaque gaudium meum et ardorem ad stationem illam obtinendam imminuere posset, nisi eos, a quibus dependeo, difficiliores hac in re deprehenderem conscientiae libertatem periclitantem et Religionis exercitium intermissum ob oculos mihi ponentes, quorum sane rationibus nullo modo resisti posse mihi videtur. Nisi, inquam, recensita modo obstarent, omnibus modis eo pervenire conarer, ob magnum quo ardeo desiderium Analysin Tuam infinitorum in sola ferme Italia neglectam propagandi, ut eo cognito Itali pariter clarius intelligant, quantum sublimia haec studia Amplitudini Tuae debeant, postquam elegantissima ista Analysis in Germania, Belgio, Gallia aliisque regionibus innotuit et egregios cultores nacta est. Ne tamen quicquam dissimulem, mallem operam meam tali in loco et statione impendere, ubi integra Religionis exercitio et libertate gaudere possem ut in Germania, Belgio, alibique locorum; quapropter, cum Amplitudo Tua, ubicunque studia florent, tantam Auctoritatem et Existimationem nacta sit, ut quemcunque Ipsi commendare visum fuerit, ejus commendatione eos staturos ad quos facta fuerit, persuasum habeam, me meaque studia ejus benevolentiae qua par est observantia de meliore nota commendo, hocque tenue specimen Analyticum pro inveniendis Radiis Osculi ejus judicio subjicio, ut si dignum judicetur, Actis Erudit. inseri patiatur, aliud, ut jubet,

scriptum propediem missurus, in quo usum reconditioris Geometriae in rebus ad praxin spectantibus ostendere satagam. etc.

Dabam Basileae die 15 Octobris 1704.

Beilage.

Modus expedite inveniendi Radium Osculi in qualibet Curva.

In Schediasmate meo de Methodo inveniendi Radios Osculi in Curvis ex Focis descriptis Mens. Nov. Act. Erudit. 1702 pag. 501 inserto oblitus sum ostendere, eandem Methodum mutatis tantum mutandis omnibus indiscriminatim Curvis applicari posse, ea enim mediante elegans sese obtulit Cel. Dn. Jac. Bernoulli expressio Radii osculi in quibusvis algebraicis Curvis, quam singulari super differentiali calculo observationi acceptam refert, et in Actis Erudit. 1700 pag. 508 publicavit. Ad talem vero formulam non facile quisquam nisi visa prius Bernoulliana formula, trita via aut reapse pervenit, aut perventurus videtur. Et si Celeber. Varignonus voti compos factus est, veritati asserti mei id nihil derogabit; nisi enim Calculi differentialis fuisset callentissimus, calculum pro ea expressione radii osculi institutum eumque satis prolixum ad optatum finem nunquam perduxisset, quod manifestum fiet, statim atque suam analysin publici juris fieri permittet. Mediocriter contra in Calculo versati, viam hic praemonstrandam ineuntes facillime simul et brevissime intentum assequentur. Caeterum hic obiter monebo Bernoullianam methodum ad eandem expressionem ducentem a mea toto coelo diversam esse, quod Clarissimus Ille Vir suo loco ostendet. Verum ad rem.

Radius Osculi generaliter vocetur litera R; demonstravit Cl. Jac. Bernoulli, existentibus Curvae elementis ds constantibus, fore tum $R = \frac{-dxds}{ddy}$, tum etiam $R = + \frac{dyds}{ddx}$ (vid. Act. Lips. A. 1694 pag. 264), fient $ddx = + \frac{dyds}{R}$, $ddy = \frac{-dxds}{R}$. Redacta itaque aequatione curvae ad secunda differentialia, substituendi sunt hi valores ddx, ddy in ea aequatione, et loco elementorum abscissae, applicatae, et Curvae sive dx, dy et ds, eorum proportionales applicata, subnormalis, et normalis Curvae surrogandae, aequatio inde emerget quae debite reducta valorem ipsius R in puris ordinariis dabit quantitatibus. Q. E. I.

Sit brevitatis causa aequatio $hx^r y^s + a = 0$, unde $hrx^{r-1}y^s dx + hsx^r y^{s-1} dy = 0$, adeoque $h,\overline{rr-r}\,x^{r-2}y^s dx^2 + 2hrsx^{r-1}y^{s-1}dxdy + h,\overline{ss-s}\,x^r y^{s-2} dy^2 + hrx^{r-1}y^s ddx + hsx^r y^{s-1} ddy = 0$, sive $hrx^{r-1}y^s ddx + hsx^r y^{s-1} ddy = h,\overline{r-rr}\,x^{r-2}y^s dx^2 + h,\overline{s-ss}\,x^r y^{s-2} dy^2 - 2hrsx^{r-1}y^{s-1}dxdy$, unde si substituatur $+\frac{dyds}{R}$ pro ddx, et $\frac{-dxds}{R}$ pro ddy, fiet $\frac{+hrx^{r-1}y^s dyds - hsx^r y^{s-1} dxds}{R} = h,\overline{r-rr}\,x^{r-2}y^s dx^2 + h,\overline{s-ss}\,x^r y^{s-2}dy^2 - 2hrsx^{r-1}y^{s-1}dxdy$, et reducta hac aequatione erit

$$R = \frac{-hsx^r y^{s-1} dxds + hrx^{r-1}y^s dyds}{h,\overline{r-rr}\,x^{r-2}y^s dx^2 + h,\overline{s-ss}\,x^r y^{s-2}dy^2 - 2hrsx^{r-1}y^{s-1}dxdy},$$

ubi si loco dx, dy, dz substituantur y, z et p (existentibus z et p s u b n o r m a l i et n o r m a l i), habebitur aequatio in finitis quantitatibus

$$R = \frac{-hsx^r y^s p + hrx^{r-1}y^s zp}{h,\overline{r-rr}\,x^{r-2}y^{s+2} + h,\overline{s-ss}\,x^r y^{s-2}zz - 2hrsx^{r-1}y^s z}.$$

Quodsi autem Radius Osculi expetatur curvae, cujus aequatio $fx^m + gy^n + hx^r y^s + a = 0$ (in qua x abscissas, y applicatas ut in priore exemplo, m, n, r, s exponentes et f, g, h coefficientes designant), novo calculo non opus erit, sed praecedens formula abunde sufficiet. Sit primo fx^m ubi sola x indeterminata occurrit, ad quem casum superior aequatio pro radio osculi reducatur, viz. ponendo $s = 0$, $r = m$, $h = f$, quaeque adeo in hanc degenerabit fractionem $+\frac{fmx^{m-1}zp}{f,\overline{m-mm}\,x^{m-2}yy}$; sic pro membro gy^n fiet fractio $-\frac{gny^n p}{g,\overline{n-nn}\,y^{n-2}zz}$; pro membro vero $hx^r y^s$ utique retinetur fractio primitus inventa: unde Radius Osculi nostrae Curvae erit Fractio, cujus Numerator erit summa Numeratorum fractionum harum partialium, Denominator vero summa eorundem Denominatorum, hoc est

$$R = \frac{\overline{fmzx^{m-1} + hrx^{r-1}y^s z - gny^n - hsx^r y^s},p}{\left\{\begin{matrix} f,\overline{m-mm}\,yyx^{m-2} + g,\overline{n-nn}\,zzy^{n-2} + h,\overline{r-rr}\,x^{r-2}y^{s+2} \\ + h,\overline{s-ss}\,x^r y^{s-2}zz - 2hrsx^{r-1}y^s z \end{matrix}\right\}}$$

plane ut invenit Clar. Bernoulli.

Pari modo si ponatur $Mdx = Ndy$ omnes curvas tam Algebraicas quam transcendentes denotare, ubi M et N quantitates

utcunque datae per x, y et constantes, invenietur Radius Osculi differentiando aequationem, usque dum ad secunda differentialia perventum sit:

$dxdM + Mddx = Nddy + dydN$, unde $dNdy - dMdx = Mddx - Nddy$. Verum pro ddx ponendo $\frac{dyds}{R}$ et pro ddy, $-\frac{dxds}{R}$, fiet aequatio $\frac{Mdyds + Ndxds}{R} = dNdy - dMdx$, ex qua elicitur $R = \frac{Mdyds + Ndxds}{dNdy - dMdx}$, vel quia dx, dy, ds proportionalia sunt ipsis y, z et p (quibus eaedem lineae designantur ut supra) et ponendo $dM = Sdx$ et $dN = Tdy$, fiet $R = \frac{\overline{ZM + yN},p}{zzT - yyS}$, quae expressio finitis tantum constat quantitatibus, omnibusque Curvis adaptari potest.

II.

Leibniz an Hermann.

Cum dudum magnifecerim praeclara studia tua, nunc et notitia personae delector, ex quo literas humanitatis et doctrinae plenas a te accepi. Cum te commendavi Excellentissimis viris Reformatoribus studii Patavini, vel potius Amico apud eos valido, feci quod tua eruditione ac virtute dignum putavi, et conveniens officio meo. Judicavi etiam in publicum utile, et tibi honorificum fore, si nova Analysis nostra tuo ingenio ornata in Italiam introduceretur. Itaque cum te excusasses religionis causa, dissimulavi responsum tuum apud Amicum Italum, dilato tempore ut cogitandi tibi spatium relinqueretur, praesertim cum expectandum videretur, quid Cl. Naudaeo nostro responsurus esses. Is ergo cum nuper a te literas mecum communicaverit, quibus re amplius deliberata, sententiam ut mihi quidem videtur, in melius mutasti; jam et Amico illi significo, te a conditione oblata non abhorrere, et tibi suadeo, ut recta ad illum des literas, tum quod ita evitatur ingens circuitus, tum quod vestra interest amborum, quam primum invicem nosci. Est ille V. Cl. Mich. Angelus Fardella Siculus, scriptis in re Mathematica et Philosophica elegantibus notus, cujus amicitia mihi conciliata Venetiis, ubi ille apud nobilissimos Viros gratia et eruditionis fama florebat, ex eo tempore semper sum usus. Cathedram Meteorologicae professionis apud Patavinos tenet ipse, et licet juvenes generosos ex patriciis Venetis Mathesin theoreticam practicamque docuerit, maluit tamen hanc spartam Patavii deferri Viro erudito Transalpino; amat enim nostros mirifice, et officiis colit. Itaque habebis in eo Amicum fidum, et cujus consiliis niti possis. Literas, quas ad eum destinabis, ita inscribere licebit:

All' Illustr. Signor mio, e Padrone Colendissimo Il Sig. Abbate Fardella Lettore publico nello Studio di Padoa.

Huic ergo potissimum ages gratias, et tanquam cum Viro praeclaro et candido ages, ut par est. Nec dubito ejus opera, quae ad stipendium et reliqua pertinent, rite confectum iri. De religione non est, cur in literis mentionem ullam facias. Nemo ignorabit, quis cujasve sis; sed nemo curabit, si, ut credere de te par est, prudenter agas, nec temere mentionem rei injicias, quae ad rem, cujus causa accersitus es, non facit. Satis ad amplificandam Dei gloriam, verumque cultum propugnandum facies, si scientiis auctis admiranda Dei magis magisque detegantur, et apud gentem, ubi inconsulta superstitio hactenus cum Copernico verum Mundi systema interioremque rerum notitiam proscripsit, aditus novus ad haec arcana postliminio aperiatur. Caeterum Venetiis scio Reformatae Religionis exercitia frequentari, non publice quidem, non ita tamen ut rem publicam fallant. Duos alios Viros egregios et mihi amicos Patavii reperies, Medicos insignes et scriptis celebres, priorem etiam in re Mathematica praeclarum, Dominicum Gulielminum, et Bernardum Ramazzinum. Hi vel in mei gratiam tibi faviturі essent, quanquam (sat scio) tute per te facile tales conciliare tibi possis. Gulielminus de aquis decurrentibus librum egregium et practicum Italica lingua edidit, quo in summa plurimum sum delectatus ob multam et curiosam observationem variorum accidentium in fluminum cursu, prudentemque considerationem incommodorum et remediorum, quae Bononiae publico nomine aquas curanti per multos annos sese obtulere, tametsi quaestiones quasdam θεωρητικωτέρους ad Analysin nostram ex parte pertinentes examinare non vacarit.

Elegans calculus tuus circa Radios Osculi perplacuit. Nec dubito quin novis in dies inventis egregiis aucturus sis scientiam.

Viros doctos apud vos, qui mihi favent, a me saluta, inprimis Cl. Battierium, tum vicinos vobis Fatium atque Ottium, quorum illum novam quandam seriem tetragonisticam ex mea eruisse V. Cl. Jac. Bernoullius ad me perscripsit; id, qua ratione factum sit, forte ex te discam. Vale, et me ama.

Dabam Berolini 24. Novemb. 1704.

P. S. Parisiis Fascis expectatur Basileam mittendus, atque inde Augustam. Ei inerit Tabula aenea iconem continens Sereniss. Electoris Brunsvicensis. Scripsi, ut ad Dominum Bernoullium dirigatur, et hunc rogo, ut inde Augustam curare velit. Sed dum vereor ne forte absit domo, rogo, ut favere velis, et aliquam si opus rei curam gerere. Augustam deferri debet ad Dn. Schröck, Agent de Brunsvick.

Beilage.

Ante multos annos excogitavi Arithmeticae genus novum tanquam ipsius Analyseos transcendentis instrumentum inexpectatum. Publicavi nondum, quod usus ejus reapse ostendere non vacarit, volui tamen, ut nescius ne esses. Binariam voco hanc Arithmeticam, vel dyadicam imitatione decadicae, nam ut alii progressione denaria, ita ego dupla utor, eaque ratione non aliis egeo notis quam 0 et 1, ut in tabula adjecta vides, quae utcunque continuari potest. Ex hac scribendi ratione statim constat, quod alicubi per ambages demonstravit Schotenius, et norunt Examinatores monetarum paucis ponderibus progressionis geometricae duplae multa ponderari posse. Caeterum usus hujus scribendi rationis non esse debet in populari computo, sed Numerorum arcanis eruendis. Habet enim id praeclarum haec expressio, quod cum sit simplicissima, statim miras exhibet connexiones, dum series omnes numericae ordinatim procedunt. Vides numerorum naturalem seriem periodis constare scriptu facillimis, primaeque columnae periodum esse 01, 01, 01 etc., secundae 0011, 0011 etc., tertiae 00001111, 00001111 etc., atque ita porro. Demonstravi autem, quod momenti est maximi, seriem numerorum triangulorum, quadratorum, cubicorum, biquadraticorum, surdesolidorum etc. et ut verbo dicam, potentiae cujuscunque quantumvis altae similiter periodum habere in una-

0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15
10000	16

quaque columna seu finitum intervallum, quo decurso redeunt notae priores. Dantur et in aliis praeter dyadicam progressionibus haec intervalla, sed propter multiplicitatem notarum non facile erui possunt, et longius differuntur; hic in summa simplicitate notarum, quae non aliae quam 0 et 1, facillimus aditus patet. Vellem vacaret eruere cujusque potentiae periodos; fortasse succurrerent amici tui meique. Et ne putes rem esse exigui momenti, considerandum est pro seriebus infinitis generalibus, ubi scilicet indeterminata inest, et pro determinatis, sed per fractos, qualis est mea tetragonostica $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ etc., superesse series in integris investigandas tanquam ultimum, quod in quantitatibus transcendentibus determinatis per numeros exprimendis quaeri potest. Ita si haberemus, qua ratione continuari in infinitum posset series Ludolphina pro circulo, nihil amplius in numeris rationalibus pro circuli magnitudine quaerendum superest. Quod autem difficile erit, dum notis utemur decadicis; id facilius (opinor) obtinebimus per dyadicas, ubi non aliae erunt notae quam 0 et 1. Et viam eo perveniendi commodissimam video, ubi constituta erunt, prout par est, novae hujus scientiae Numerica Elementa; quae cum ita sint, nolim suadere, ut tempus teras Ludolphinis calculis extendendis, ubi nec magna laus ingenii, nec artis inveniendi augmentum apparet. Unum adhuc adjicio, cum crebris objectionibus Virorum doctorum pulsatus fuerim, qui nostra infinite parva, abjectionemque eorum pro nullis concoquere non possunt, convincendis illis subinde methodum meam hanc esse, ut tantum postulem, casum quo quantitas aliqua fit 0, in generali calculo comprehendi, ubiubi est quantacunque aut quantulacunque. Hoc uno enim admisso (quod est postulatum, quo vulgares etiam Analystae sunt usi) necesse est incidi in calculi nostri leges. Caeterum revera ita sentio, quantitates infinitas et infinite parvas non magis reales esse quam sunt radices imaginariae, nec minus tamen quam has usum in Analysi praestare; caeterum pro ipsis facile substitui utcunque magnas aut utcunque parvas, ut scilicet error minor sit quovis dato.

III.

Hermann an Leibniz.

Amicus quidam Marburgo nupere ad me scripsit, Cathedram ibi Mathematicam jam vacare, eo quod Cl. Papinus Principis sui jussu Cassellis perpetuo esset mansurus: eaque propter Seren. Principem ad Academiam Marburgensem dedisse literas quibus significabat, sibi pergratum fore, si aliquis sibi proponeretur, qui ei Professioni praefici posset; subjunxitque Amicus Histor. ibi Professor ad id Munus me pertrahendi cupidus, se ea quidem jam excogitasse et partim egisse quae apta videbantur ad id ut vacans Professio mihi decernatur, longe plus tamen ponderis Tuam commendationem isti negotio allaturam esse. Nescius utique erat Amicus eorum quae pro incomparabili Tua humanitate in mei gratiam apud Patavinos egisti, item quod fidem meam et Tibi et Cl. Fardellae jam obstrinxerim de acceptanda conditione Patavina, quorum omnium certiorem Eum reddidi. Non tamen dubito, quin Ampl. Tua a me humillime rogata et apud Marburgenses me commendare de meliore nota esset dignatura, et quin tam honorifica commendatio optatum habitura esset successum, si forsan Excell. et Generosiss. Reformatores studii Patavini sententiam suam de me vocando mutassent, quod quantocyus rescire oporteret, antequam videlicet Marburgensis Professio cuiquam decernatur.

Mallem vero caeteris paribus Patavii insignibus Viris Dn. Dn. Fardellae, Gulielmino, Ramazzino etc. adjungi, cum quibus frequentissima daretur occasio de excellentissimis Tuis repertis sermocinandi, quam Marburgensi Professioni praefici.

Quantum ad Tetragonisticam Fatianam, ea consistit in pluribus seriebus, quas ex Tua elicuit; artificium ipsum, quod ille in sua charta ab ipsius Fratre natu majore mihi transmissa subticuit, non difficulter detexi, quod hoc est: Sit series pro Area Circuli $0 + \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} -$ etc.

1. Si summae ex singulis vicinis terminis accipiatur dimidium (ut sumendo dimidium ex $0 + \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ fit $\frac{\frac{1}{2}}{1}$; ex $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{1.3}$ fit $\frac{1}{1.3}$; ex $-\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = -\frac{2}{3.5}$ fit $\frac{1}{3.5}$; ex $+\frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{5.7}$ fit

$\frac{1}{5.7}$ etc.), oritur secunda series $0 + \frac{\frac{1}{2}}{1}; + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} + \frac{1}{9.11} -$ etc. aequalis primae.

2. Tractando hanc secundam eodem modo, quo primam, sed incipiendo a termino affirmativo $+\frac{1}{1.3}$, cujus dimidium sumitur $\frac{\frac{1}{2}.1}{1.3}$ (reliquis terminis affirmative adjiciendum), oritur series tertia

$$0 + \frac{\frac{1}{2}}{1} + \frac{\frac{1}{2}.1}{1.3}; + \frac{1.2}{1.3.5} - \frac{1.2}{3.5.7} + \frac{1.2}{5.7.9} - \frac{1.2}{7.9.11} + \text{etc.}$$

Ita fit quarta series

$$0 + \frac{\frac{1}{2}}{1} + \frac{\frac{1}{2}.1}{1.3} + \frac{\frac{1}{2}.1.2}{1.3.5}; + \frac{1.2.3}{1.3.5.7} - \frac{1.2.3}{3.5.7.9} + \text{etc.}$$

Et ita elicitur series terminis mere affirmativis constans, pro area Circuli $\frac{\frac{1}{2}}{1} + \frac{\frac{1}{2}.1}{1.3} + \frac{\frac{1}{2}.1.2}{1.3.5} + \frac{\frac{1}{2}.1.2.3}{1.3.5.7} +$ etc. Ita mutavi quoque hanc seriem pro hyperbola $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ etc. in hanc

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} + \frac{1}{6.64} + \text{etc.}$$

Insignis Tua observatio circa abjectionem infinite parvorum, pro qua gratias ago maximas, mihi apprime utilis erit in Tractatu quem conscribere mihi proposui Deo annuente de Veritate et Infallibilitate Calculi Tui differentialis more antiquorum demonstrando.

Fascem quem Parisiis Basileam mittere jussisti, Cl. noster Bernoulli nondum accepit; quam primum autem is huc pervenerit, Augustam curabit; Cl. is Vir suum Cultum Tibi ut deferrem aeque ac Cl. Battierius aliique jusserunt.

Basileae die 21 Januarii 1705.

IV.

Leibniz an Hermann.

Literae tuae 21. Januarii datae heri demum ad me pervenere: nam tristissima morte Reginae Borussorum factum est, ut paulo diutius Berolini haeserim, quam destinaram. Plurimum me affecit

nuntius hujus facti tam immaturi atque acerbi; nam Princeps erat omnibus virtutibus decoribusque cumulata, et quae mihi mirifice favebat, ut quando in ejus Aula versabar, vix unum mihi diem ab ea abesse liceret: colloquio ejus nihil suavius fingi poterat, aut magis conditum ingenii sale. Ita bono ingenti mihi imposterum carendum est, quod in omne reliquum vitae tempus jure quodam meo mihi spondebam; sed haec apud te ἀπροσδιόνυσα mihi nescio quomodo excidere, quando cogitationem rei funestae renovat apparatus feralis corporis Berolinum transvehendi. Ut ad res tuas redeam, mirabar equidem nihil amplius a Cl. Fardella ad me perscribi, credebamque rem inter vos transigi. Nunc vero pene vereor, ne quid ipsi acciderit, itaque proximo pulsore non tantum ad ipsum mittam literas, sed etiam ad Dn. Zanovellum nostras res Venetiis agentem, cui Dn. Abbas Fardella non est ignotus, ut discam tandem, quo res sit loco. Si quid possum Cassellis per amicos, non deero quidem, interim inquiram, an id agatur ut Dn. Papinus professione sese abdicet.

Placet methodus, quam excogitavit Dn. Fatius, et tu quoque tuo Marte detexisti, seriem propositam in aliam convertendi. Si tres termini, aus plures in unum adderentur, et assumeretur semper pars tertia, vel alia adhuc minor, totidem aliae series prodirent. In expressione numerorum dyadica plura latent, quam quis facile suspicetur. Quidam Pater Congregationis Oratorii Parisiis Algebram novam edet, cujus conspectus aliquis ad me fuit transmissus. In ea mentionem quoque faciet meae novae cogitationis characteristicae, cujus specimen aliquando dedi in Actis Eruditorum, cum exposui extractionem universalem radicis ex aequatione per seriem, quod nescio an animadverteris, nempe pro literis a, b, c, d etc. non exprimentibus satis habitudinem ipsorum ex datis, exhibeo numeros eam exhibentes. Idque praeclari usus esse deprehendo ad Canones calculandos. Exemp. gr. si ex duabus aequationibus duarum incognitarum reperienda sit una unius incognitae, sic procedo in ipsis aequationibus generatim formandis, et quidem pro secundo gradu

$$0 = 100 + 110x + 101y + 111xy + 120xx + 102yy$$
$$0 = 200 + 210x + 201y + 211xy + 220xx + 202yy$$

ubi numeri, velut 111, 211 etc. significant prima nota sua (1 vel 2) utrum ex prima an secunda aequatione sint sunti; duabus vero seqq. notis exprimitur, quomodo se habeant x et y in termino, cujus sunt coefficientes, sic 111 vel 211 coefficiens est termini $x^1 y^1$ vel xy, sed 120 coefficiens est termini $x^2 y^0$ seu xx, et ita porro. Hoc modo jam calculando prodeunt semper Canones quam maxime regulares, et harmoniam quam continent prodentes. Optandum esset, incipiendo a simplicibus hoc modo constitui progressionem Canonum pro tollendis incognitis. Ita magno calculi labore imposterum levaremur, nec contemnendi usus theoremata acquireremus. Sed de his, et similibus aliis plura. Nunc vale, et me ama. Dabam Hanoverae 10. Martii 1705.

P. S. Insignem Virum Dn. Bernoullium vestrum, imo nostrum, a me saluta. Optarem vel ipse vel alius varia ludendi genera Mathematice tractaret.

V.

Hermann an Leibniz.

Gaudeo quod Dn. Reynaltus, Praesbyter Oratorii, quem Parisiis apud Cl. Malebranchium vidi, in Algebra sua quam evulgandam parat, Tuae Arithmeticae dyadicae mentionem sit facturus, hancque ob rem tanto avidius eum librum expecto. Aliquot jam retro annis jam animadverti hujusmodi expressionibus, quarum in Epistola meministi, Te usum esse Act. Erudit. 1700 Mens. Majo, ubi occasione quorundam theorematum Moyvraeanorum ex generali aequatione aut potius serie radicem extrahere docuisti: at libenter fateor, me non satis bene tunc percepisse, quem in finem novum illud designationis genus adhiberetur; nunc vero ex explicatione quam Ampl. Tua impertiri mihi voluit et pro quo gratias ago humillimas, usum illius nonnihil clarius perspicio, credoque clarissimam mihi affulsuram esse lucem ex iis quae adhuc circa hoc argumentum se communicaturum promittit.

Nondum examinare licuit, quaenam prodire debeant series, si tres aut quatuor termini in unum adderentur, et postea summarum tertia vel quarta pars caperetur.

Jam diu est, quod Gregorii Astronomiam geometricam cum Cheynaei libro de Calculo fluxionum inverso ex Belgio acceperim, quibus libris plura egregia inesse nemo equidem inficiabitur, mihi tamen nihilo secius videtur, plurima quae Gregorius prolixius in

sua Astronomia demonstrat, analysi facilius et brevius demonstrare posse, neque de suo multum in ea contineri videtur, sed omnia fere ex Newtono mutuata sunt, ut rectius commentarius, quamquam non absolutus, Cl. Newtoni Principiorum Phil. Naturalis dici possit.

Clariss. noster Bernoullius, cujus cultum Tibi pariter defero, suum librum de Arte conjectandi ad umbilicum fere perduxit, inibique pleraque fere ludendi genera pertractat. Nuper cum multum operae insumeret percurrendis curvis primi generis supra Sectiones Conicas, plurimarumque curvaturas et varios flexus definiisset, incidit in aliquem Act. Lips. Newtoniani libri de Specie et Quadratura Curvarum Opticae suae per modum appendicis adjecti recensionem continentem, seque a Cel. Newtono praeoccupatum attonitus invenit. Vale etc.

Basileae 4. Aprilis 1705.

VI.

Leibniz an Hermann.

Gaudeo rem Patavinam eo loco esse, ut spes sit omnia rite, et ex animi tui sententia constitutum iri. Id ex Domini Bernoullii vestri, aut potius nostri, literis non ita pridem Basilea ad me datis intellexi. Interea meas quoque tibi redditas puto, quas scripseram cum nondum scirem Cl. Fardellam tibi respondisse. Caeterum rogo, ut mature mihi indices, quandonam in Italiam sis abiturus, ut antequam id fiat, deliberare possim, quae forte e re esse queant. Si vacat, rogo ut cogites de quadam Analytica inquisitione, quam et Dn. Jacobo Bernoullio, acuminis insignis Viro, commendavi. Scis omnium aequationum radices posse exprimi rationaliter per Seriem infinitam. Idque etiam in eo Schediasmate, quo Dn. Fatio in Actis Eruditorum respondi, generali canone praestare docui. Sed quid fiet, si aequatio habeat omnes radices impossibiles, et praeterea quomodo diversae ejusdem Aequationis radices in serie illa a se invicem destinguerentur? Hoc nondum quisquam satis exposuit. Vellem autem inprimis explicari caput illud de impossibilitate quantitatis ex valore ejus rationali per seriem infinitam expresso agnoscenda, et quidem ex ipsa serie independenter ab aequatione, ex qua deducta est. Interdum enim ignoratur haec aequatio, interdum nulla plane datur, cum quantitas est transcendens. Et quidem in casu impossibilitatis necesse est seriem non esse advergentem, seu si pars ejus semper major atque major sumatur, necesse est differentiam a quaesita quantitate non fieri minorem quantitate data; sed hoc praevidere ex constructione seriei, et cum series illa ex generali sui aequationis gradu deducta est, velut ex $xx + bx + ac = 0$, invenire ex ipsa serie, seu ex defectu advergentiae, limites seu quandonam incipiat aut definiat impossibilitas, id inquisitione dignum puto. Quodsi id ex seriebus eruere possumus, quae ex aequationibus sunt deductae, facilius etiam deinde idem praestabimus in seriebus itidem generalibus, sed valorem quantitatis transcendentis exprimentibus. De caetero me ad priores refero. Vale, et me ama. etc.

Dabam Hanoverae 7. April. 1705.

VII.

Leibniz an Hermann.

Ipse ad me scripsit D. Abbas Fardella, literas inter vos tarde commeare; id difficultati itinerum tribui debet turbulentis his temporibus, ex eaque mora id natum incommodi, quod Ill. Marcellus, qui rebus Academiae Patavinae praeerat, apud quem non parum potest Fardella, abiit magistratu. Spero tamen non ideo minus rem processuram, et mirum non est, si Residenti id negotii datum ut ad Dominos referat.

Videtur mihi determinatio limitum pars esse essentialis doctrinae de seriebus infinitis plene tradendae. Nam utique nisi demonstretur seriem advergere quaesito, ita ut continuatione reddere queamus errorem minorem data quantitate, non possumus pronuntiare ipsam seriem totam dare quaesitum. Hac autem demonstratione habita, via utique strata est ad determinandum limitem, seu ultimum casum advergentiae, qui utique ultimus est casus possibilitatis. Inter alias vias haec incidit: Quoties talis est series, aut

in talem transformata, ut constet ex partibus $a - b + c - d + e - f$ etc. ubi scilicet plus et minus alternant (sive quaevis harum partium a, b, c etc. quam quantitatem positivam significare suppono, sit simplex, sive rursus ex aliis partibus constet), tunc ad sciendum, utrum series advergat quaesito, tantum opus est videre, an ipsa membra a, b, c etc. advergant nihilo, seu fiant minores quantitate quavis data. Hoc theorema olim demonstravi, cum meam quadraturam arithmeticam in Gallia edere vellem. Nempe si series $a - b + c - d + e - f$ etc. $= y$, et fiat

$$\begin{array}{ll}
y = a & \\
y = a - b & \text{erit} \\
y = a - b + c. & \text{valor} \\
y = a - b + c - d & \text{justo} \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
\left\{\begin{array}{l}\text{major}\\ \text{minor}\\ \text{major}\\ \text{minor}\\ \text{etc.}\end{array}\right\}
\begin{array}{l}\text{ita tamen}\\ \text{ut sit error}\\ \text{minor quam}\\ \\ \\ \end{array}
\left\{\begin{array}{l}b\\ c\\ d\\ e\\ \\ \end{array}\right.$$

semper scilicet minor termino proximo post eos, quos habemus. Itaque ubi transformaretur proposita series in aliam, in qua + et — in membris alternarent, tunc limes vel transformationis qui possibilitatem ejus restringeret, vel advergentiae ad nihilum in ipsis terminis foret limes possibilitatis seriei. In radicibus aequationum limites aliunde, nempe ex ipsa aequatione, nobis noti sunt, et possumus etiam transformare aequationes pro arbitrio; itaque in ipsis opinor facilius dabitur modus ex ipsa lege seriei limitem possibilitatis deducendi, et res deinde facilius promovebitur ad series quarum origo ex aequatione aliqua ordinaria nobis non est explorata. Sed sunt multae aliae viae perveniendi ad quaesitum, una alia commodior pro re nata. Sufficit in genere nos ob oculos id habere, ut demonstremus seriem revera advergere, et suspicor rem Dn. Bernoullio vestro expensam, qui in argumento serierum infinitarum plurimum studii posuit. Caeterum ad demonstrandam possibilitatem advergentiae necesse est, ut determinemus legem seu progressionem seriei, vel etiam ut determinemus terminum quemcunque progressionis. Exempli causa in serie $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$ etc. lex progressionis est, ut posito Terminum esse T et numerum seu locum Termini esse n, sit $T = x^n : n$, ubi x est constans, T et n variantes, neque vero nisi cognita lege seriei ad demonstrationem advergentiae potest perveniri.

Quod de Arithmetica dyadica illustranda cogitas, gaudeo.

Omnino sentio in ea latere non tantum perfectionem scientiae numerorum, sed etiam applicationis Numerorum ad Geometriam, ut scilicet determinatas quantitates sive irrationales, sive etiam transcendentes quam optime in numeris, serię scilicet bimalium, ut vulgo decimalium, exprimamus, definiamusque (quod in eo genere primarium est) legem progressionis. Putem autem post Algorithmum esse veniendum ad determinationem periodorum, quas habent columnae seriei numerorum Arithmeticae progressionis, et potentiarum ab iis quarumcunque aut formularum inde conflatarum. Eumque in finem dedi demonstrationem, qua ostendo quaslibet talium serierum columnas esse periodicas, ita ut priores notae constanter redeant post aliquod intervallum. Haec demonstratio simul viam aperit ad periodos has determinandas. Itaque communicare eam volui, tanquam potissimum ni fallor profuturam. Ignosci autem peto lituris, nam ut rursus describeretur, nunc commode et statim fieri non potuit.

Si numerorum naturalium columnae primae terminos quoslibet vocemus 10, columnae secundae vocemus 11, tertiae terminos quoslibet 12, quartae 13 etc., periodus columnae terminorum 10 est 010101, seu breviter 01, columnae ipsorum 11 est 0011, columnae ipsorum 12 est 00001111 seu 0414, columnae quartae seu pro 13 est 0818 etc., et generatim columnae $(n-1)^{\text{mae}}$ seu terminorum 1n est $0.2^n\,1.2^n$ seu nullarum 2^n et deinde unitatum totidem. Hinc porro indago, quas periodos faciant 10.11 (seu factum ex 10 in respondentem 11), 10.12, 10.13, 10.14 etc. Nempe 10.11 habet periodum 0.2(01)1 seu nullarum duarum et deinde 01 semel; et 10.12 habet periodum 0.4(01)2 seu nullarum 4 et deinde 01 bis seu 0101, ut tota periodus sit 00000101; 10.13 dat 0.8(01)4, et generaliter 10 in 1n dat periodum $0.2^n(01)2^{n-1}$. Et similiter 11 in 1n dat periodum $0.2^n(0.2.1.2)2^{n-2}$, et generalissime 1m in 1n dat $0.2^n.(0.2^m.1.2^m)2^{n-m-1}$, id est si terminus columnae, cujus periodus habet 2^m nullas et deinde 2^m unitates, multiplicetur in terminum respondentem columnae, cujus periodus est nullarum 2^n et unitatum totidem, posito n esse majorem quam m, periodus columnae productae erit primum nullarum 2^n, deinde repetet ipsam periodum columnae 1m tot vicibus, quot in 2^{n-m-1} sunt unitates. Eodem modo pergi potest ad productum ex quibuscunque naturalium columnis tribus, quatuor etc., Regulaque condi

generalis. Id jam prodest ad potentiarum periodos determinandas, nam numeri etc. 13 | 12 | 11 | 10 quadratum est

	*	12	*	11	*	10
etc.	10.14	10.13	10.12	10.11		
etc.	11.13	11.12				
	etc.	etc.				

Haec in speciem perplexa aggredienti facillima comperientur.

Hanoverae 26. Junii 1705.

P. S. Insigni viro Dn. Bernoullio vestro proximis scribam; nunc saluta quaeso quam officiosissime, et significa pecuniae refusionem et quae ad transitum vectarum rerum pertinent, mox curatum iri; interea me multas gratias agere. Vale, et me ama. *)

VIII.

Hermann an Leibniz.

Aliquot jam sunt anni, ex quo Problema de eliciendo valore finito radicum ex data aliqua serie, qua aequationis cujusdam radices exprimuntur, aggressus sim, verum calculi prolixitas summa

*) Auf dem ersten Entwurf dieses Briefes ist von Leibniz noch Folgendes bemerkt: Exemplar meum novissimi Newtoniani operis non a Bibliopola accepi, sed ex Anglia ipsa missu amici et mei et autoris. Sed facile opinor procurabit Dn. Menkenius, qui quotidie ex Anglia accipit libros quos deinde in Actis recenset. Hoc interim Dno. Jacobo Bernoullio cum multa a me salute ut nunties peto, qui videtur nuperis meis suboffensus, quanquam immerito, quantum certe mihi videtur. Virum et facio et semper feci maximi. Sed interdum deprehendo paulo difficiliorem aut morosiorem ac querulum etiam praeter modum. Ego nihil magis valetudini adversum judico, quam velim ut curet diligenter, famaque sua ac laude fruatur, quam magnam et meretur et habet. Velim ne supprimat multa praeclara quae habet. An non consideravit limites possibilitatis in seriebus infinitis, de quibus aliquot dissertationes edidit?

Solutionem meam problematis Bernoulliani alia vice libenter mittam, si tanti videtur. Semper solvo infinitis modis.

et ipsa rei difficultas ab hoc labore vel in ipso limine me sempe deterrebant; nunc autem accedente humanissima Tua invitatione pristinam speculationem resumam, quam sane utilissimam esse nemo Analystarum negare poterit. Nam invento modo quo in data aliqua serie radices ab invicem discriminari possint, multum haud dubie luminis affulgebit simile quid praestandi in seriebus transcendentes quantitates exprimentibus; verum haec disquisitio magnis difficultatibus urgeri videtur, et quanquam aliquatenus assignari possit, quandonam series radices imaginarias aut impossibiles involvet, supponendo imaginariam non dare seriem advergentem sed potius in infinitum excurrentem, hoc est cujus termini fiant tandem quavis data majores. Si verbi gr. detur haec series $x = \frac{q}{p} + \frac{qq}{p^3} + \frac{2q^3}{p^5} + \frac{5q^4}{p^7} + \frac{14q^5}{p^9} + \frac{42q^6}{p^{11}} + \frac{132q^7}{p^{13}} +$ etc. ubi si $q = pp$, series non fiet advergens, adeoque involvet radices impossibiles, sed si $\frac{1}{2}p \sqsubset, = \sqrt{q}$, apparebit eam fieri advergentem atque adeo radices esse reales, sed has radices in seriebus magis implicitis finitis exprimere valoribus maxima difficultas est: nonnunquam facile succedit, ut in hoc exemplo, ubi observo hanc seriem multiplicatam per p producere quantitatem quae litera aut valore q quadratum seriei excedet, adeoque si a serie dematur $\frac{1}{2}p$ et residuum $x - \frac{1}{2}p = \frac{q}{p} + \frac{qq}{p^3} + \frac{2q^3}{p^5} + \frac{5q^4}{p^7} + \frac{14q^5}{p^9} + \frac{42q^6}{p^{11}} + \frac{132q^7}{p^{13}}$ etc. quadretur, fiet $\Box\, x - \frac{1}{2}q = \frac{1}{4}pp - q$, adeoque $x - \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$, quod indicat, superiorem seriem radices designare aequationis quadraticae $xx - px + p = 0$. Verum radices similiter ex seriebus eruere altiorum dimensionum, perquam prolixum nequirit calculum.

Nuper Animum subiit inquirere, quo pacto Algorithmus in Arithmetica Tua Dyadica instituendus esset, et non sine voluptate deprehendi, omnes quatuor ut vocant regulas tam facile peragi posse, ut ferme infans iis addiscendis par esset, nam quia solummodo 1 et 0 in ea adhibentur, fit ut multiplicatio degeneret in meram additionem, divisio vero et radicis quadratae extractio in subtractionem, adeo ut, si haec arithmetica Dyadica primitus loco Decadicae introducta fuisset, Logarithmis haud opus fuisse videtur. Ego curiositatis et utilitatis gratia istam Arithmeticam Binariam Tua Ampl. dignam praeceptis comprendere constitui, quo Amicis et aliis quoque innotesceret; eaque propter T. Ampl. humillime rogo, ut

quae in hac Arithmetica hactenus observavit, mecum communicare non dedignetur, de quibus tamen ita utar, ut nemo non videat, quantum Ampl. Tuae debeam.

Lites circa Calculum Tuum differentialem, quae Parisiis antea fervebant inter Cl. Varignon et Dn. Rollium, calculi hujus hostem acerrimum, et quae ab aliquo tempore sopitae videbantur, iterum sunt exortae, Rollio calculum insimul integralem aggrediente, qua in re perpetuis suis hallucinationibus nil nisi ignorantiam suam in hoc argumento prodidit. Cl. Varignon varia scripta eristica Parisiis mihi misit tum a Dn. Rollio, tum a Cl. Saurino, qui Calculi differentialis partes sustinet, in publicum emissa, in hujus ultimo Rollius tam arcte constringitur, ut nulla elabendi rima parere ipsi videatur.

Prodiit nuper in Act. Eruditorum M. Apr. Cl. Craigii solutio curiosi Problematis a Cel. nostro Joh. Bernoullio in Diario Gallico Febr. 1703 propositi, de inveniendis innumeris Curvis algebraicis propositae cuivis algebraicae longitudine aequalibus, sed in antecessum dicere possum, eam Cl. Bernoulli non esse satisfacturam propter defectum universalitatis. Nam antehac similem solutionem ipsi transmisi, quam eo nomine non approbavit, quod universalis non esset, sed tantum peculiaribus quibusdam casibus applicabilis: at subjunxit se Tuam ejusdem solutionem universalem accepisse seque generalissimam constructionem adinvenisse, quae suo tempore magna cum voluptate me visurum spero.

Cel. nostri Professoris Cultum nunc Tibi defero, qui non dubitat, quin epistolam, quam suo Filio Augustae nunc habitanti miserat Excell. Dn. Schroeckio tradendam qui eam ad Te curaret, in qua Te certiorem facit se fascem jam diu anxie expectatum Basilea dimisisse; in iis literis oblitus est Te etiam atque etiam rogare, ut, si fieri posset, Newtoni Tractatum de Coloribus et speciebus Curvarum tertii generis, quem aliquoties frustra a Belgis Bibliopolis meis Amicis pro Cl. Bernoullio et pro me petieram, aut commodare aut venalem procurare velis, de quo petito nimium libero ut ignoscas humillime rogo, quod sane nunquam apud tantum Patronum fecissem, nisi ut alio Patrono ut Amico gratificarer qui summo eum Tractatum Newtonianum videndi tenetur desiderio etc.

Basileae 13 Juli 1705.