$= \frac{Ll \times Ll}{4HL}$. Donc on aura aussi pour lors $f . p :: Pl . \frac{Ll \times Ll}{4HL}$, ce qui donne encore $f = \frac{4p \times HL \times Pl}{Ll \times Ll} = \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$, comme dans le précendent art. 6.

VIII. Si l'on conçoit presentement que LC, lC soient deux rayons de la developpée de la courbe MLN, par exemple, que cette courbe soit un cercle dont C soit le centre; en ce cas Pl se trouvant $= \frac{Ll \times Ll}{LC}$, l'on aura de même $f = \frac{4ph}{LC}$ (en prenant r pour LC) $= \frac{4ph}{r}$, comme vous l'avez desja vu dans ma let. 1. art. 7 et 8, supposés ci dessus art. 5. Ce qui dans le cas de $f = p$, donne encore $h = \frac{r}{4}$, et non pas $h = \frac{r}{2}$: c'est à dire le quart du rayon du cercle de revolution, et non pas la moytié de ce rayon, pour la hauteur d'où le mobile tombant, acquieroit en vertu de sa seule pesanteur une vitesse égale à celle dont il parcourt le même cercle. D'où vous voyez encore l'erreur de ceux, qui ont cru que cette hauteur devoit être égale au demi-rayon de ce cercle.

IX. Vous dites cependant qu'apres avoir examiné la chose indépendemment de ma démonstration, vous avez trouvé par une voye assez simple (que vous voulez bien me communiquer) qu'il faut dire que la hauteur qui donne une force centrifuge égale à la pesanteur, est égale au demi-rayon de la circulation.

Je vous prie, Monsieur, de m'indiquer cette voye, vous promettant de l'examiner avec toutte la docilité d'un homme qui ne cherche que la vérité. C'est ainsy que j'en ay desja examiné une aussi tres simple par laquelle M. Bernoulli de Groningue a pretendu me prouver la même chose que vous: voici son objection avec ma réponse qui peut-être vous satisfera par avance.

Objection de M. Bernoulli.

Un corps pesant agité sur la circonférence d'un cercle horizontal d'une vitesse égale à celle qu'il acquieroit en tombant de la hauteur du demi-rayon de ce cercle a partout une force centrifuge égale à la pesanteur.

„Demonst. Soit (fig. 25) LMN une parabole que décrit le
„corps pesant L jetté librement en l'air suivant la direction hori-

„zontale LQ avec une vitesse égale à celle qu'il acquieroit en tom-
„bant de la hauteur de HL. Soit aussi RC la développée de la
„parabole MLN, MC une corde appliquée sur la développée qui par
„son développement décrit la parabole LMN. Il est d'abord mani-
„feste que si nous concevons le corps pesant attaché au bout de
„cette corde pendant qu'il décrit en l'air la parabole: il est, dis-je,
„manifeste que cette corde ne doit point être tendue par le corps
„pesant; puisqu'il la décrit, comme je suppose, sans être attaché à
„cette corde. Il faut donc que la force centrifuge que le corps
„aquiert en quelque point M que ce soit, et avec laquelle il tendrait
„la corde MC, si elle était seule, soit aneantie par la pesanteur,
„ou plus tost par une partie de la pesanteur; parceque sa direc-
„tion étant toûjours verticale suivant MO, si on la divise (tirant la
„perpendiculaire OS sur MC) en deux forces latérales OS, MS, ce
„n'est que celle suivant MS, qui est directement opposée à la force
„centrifuge; en sorte que cette force au point M sera égale (ayant
„nommé p la pesanteur absolue du corps pesant) à $\frac{p \times MS}{MO}$: d'où
„il suit qu'au sommet L la force centrifuge sera égale à la pe-
„santeur absolue entière. Or au sommet L le rayon de la déve-
„loppée LR est = au $\frac{1}{2}$ parametre: et partant si du centre R on
„décrit le cercle PLT, qui sera osculateur de la parabole, sur lequel
„on fait mouvoir un autre corps pesant d'une vitesse uniforme et
„égale à celle que le premier corps a au sommet de la parabole,
„il est clair que ces deux corps partant ensemble du point L, iront
„au premier instant de compagnie et sur des courbures égales, car
„le cercle PLT baise la parabole au point L, et par conséquent
„ils auront au point L des forces centrifuges égales, c'est à dire,
„chacune égale à la pesanteur absolue, comme je l'ay desja dé-
„monstré du premier corps. Il ne reste donc plus rien si non que
„je fasse voir que $HL = \frac{1}{2} LR$; ce que je prouve ainsy. Soit
„LQ double de HL, et soit menée QM parallele à l'axe LR. Puisque
„donc le corps pesant est porté suivant l'horizontale LQ d'une
„vitesse uniforme et égale (par l'hyp.) à celle qu'il acquieroit en
„tombant de H en L, il faut par la loy de l'accélération que le
„tems par HL soit égal au tems par LQ. Or dans le tems que le
„mobile parcourt en vertu du mouvement horizontal uniforme la
„ligne LQ, il parcourt aussi en vertu du mouvement vertical ac-
„céléré la ligne QM ou LK. Il faut donc que HL et LK soient

„égales, parcequ'elles sont parcourues en tems égaux d'un mou„vement également accéléré; et partant aussi LQ = 2LK. Or par „la nature de la parabole, LQ ou KM = $\sqrt{\text{param.} \times \text{LK}}$. Donc „$\sqrt{\text{param.} \times \text{LK}}$ = 2LK ou param. × LK = 4LK × LK; et par con„séquent LK ou HL = $\frac{1}{4}$ param. = $\frac{1}{2}$LR. Ce qu'il falait démontrer.

Jusque là ce sont les propres termes de M. Bernoulli: voici aussi les propres termes de la Réponse que je luy ay faite.

Réponse.

„Prenez y garde, Monsieur, vous voulez, sur la supposition „que je viens de démonstrer fausse: scavoir qu'au sommet L de „vôtre parabole LMN décrite par le concourt de la pesanteur du „corps L et d'une force qui le pousseroit suivant l'horizontale LQ „d'une vitesse égale à ce qu'il en acquieroit en L en tombant de „la hauteur HL du quart du parametre de cette parabole, seroit la „même en L ou en l infiniment près de L, que s'il decrivoit le „cercle osculateur PLT d'une vitesse égale à l'acquise de H en L. „Je demeure d'accord qu'en L ou en l la force centrifuge de ce „corps décrivant la parabole, seroit égale à sa pesanteur; mais je „prétend que s'il décrit le cercle osculateur suivant PLT de la „vitesse que nous supposons, sa force centrifuge en L ou en l et „ailleurs sera double de celle-là. Pour le voir, imaginons le côté „infiniment petit AL de ce polygone circulaire, prolongé vers BQ. „On demonstrera comme cydessus (c'est à dire, comme dans „l'art. 10 de ma lettre du 6. Decemb. 1704) que le prolonge„ment ne s'en doit point faire suivant LQ, mais suivant une autre „droite LB, en sorte que faisant LV parallele à LR, et qui ren„contre LQ, LB en X, V, l'on aura lV double lX pour l'espace „que la force centrifuge résultante de la rotation circulaire du „corps L, luy feroit décrire dans le tems que libre en L il par„courait LV, ou qu'il parcourt effectivement Ll. Or pour décrire „la parabole LMN par le concourt des mouvemens supposés, sa „pesanteur ne luy doit faire parcourir que Xl dans ce même tems. „Donc sa force centrifuge résultante de sa rotation circulaire sup„posée, doit être double de sa pesanteur, et non pas égale comme „vous l'avez supposé. Vous voyez bien que de là je pourois encore „démontrer la proposition que vous contestez.

X. Telle est ma réponse à la précedente objection de M. Bernoulli que vous voyez manquer comme les autres, en ce qu'il

prend LQ perpendiculaire au rayon LR du cercle PLT, au lieu de son élément AL prolongé vers LB, pour la ligne que suivroit le corps qui le décrit, abandonné à lui même en L. Quant à la conséquence considérable que vous dites avoir tirée de cette pensée de prendre ainsy la droite ALB (ou MLP dans les fig. de ma let. 1.) par laquelle le mobile tend à aller, non pas perpendiculaire au rayon, mais oblique, quoyque la différence de l'angle droit soit infinitesimale, j'accepte avec reconnaissance l'offre que vous avez bien voulu m'en faire. Je vous prie donc de vouloir bien en joindre l'explication au jugement que j'attend de vous sur tout ceci.

Le P. Malbranche, le P. Lelong, M. de Fontenelle et M. des Billetes m'ont fort chargé de vous bien faire leurs complimens, et M. Saurin aussi qui vous remercie avec moy de l'attestation que vous luy avez envoyée. M. de Fontenelle me réitera encore, il n'y a que peu de jours, de vous bien faire ses complimens. Il y a environ 3 semaines que M. Bernoulli de Groningue arriva à Basle avec toutte sa famille en bonne santé Dieu merci: je suis dans une tres grande affliction de la perte que nous venons de faire de M. son frère. Je vous prie de me faire scavoir le geometre que vous aurez honoré de sa place dans vôtre Academie de Berlin: nous ne luy choisirons de successeur dans la nôtre qu'au retour des vacances, vers la fin de Novembre; je ne manqueray pas de vous le faire scavoir aussi. Je suis avec bien respect etc.

XI.

Varignon an Leibniz.

I. Peu de jours apres ma lettre du 9. Octob. dernier, la question des pesanteurs des corps comparées à leurs forces centrales sur touttes sortes de Courbes décrites par ces corps avec telle varieté ou variation de vitesses que ce soit, me repassa par la teste en me promenant; et il me vint aussi tost en pensée qu'en regardant (ainsy que j'ay fait art. 4 de ma lettre du 6. Decemb. 1704) l'élément Ll (fig. 26) de la courbe MLN, comme décrit par le concours de deux mouvemens, l'un uniforme suivant LQ, et l'autre uniformément accéléré suivant Pl, cet élément Ll doit être ici regardé comme courbe, et comme un véritable arc, le long duquel la courbe MLN est baisée par son cercle osculateur en cet endroit; par conséquent aussi comme un véritable arc de cercle, et non comme un côté droit de polygone, ainsi que je le regardois, et qu'on l'a regardé jusqu'ici pour trouver la longueur du rayon de ce cercle osculateur. Ce qui m'empêche pour tant pas que la Regle générale $f = \frac{4p \times HL \times Pl}{Ll \times Ll} = \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$ de l'art. 5 de ma lettre du 6. December. 1704 ne soit excélente: le defaut des conséquences n'étant que dans l'application que j'y ay faite du rayon osculateur en prenant à l'ordinaire la courbe MLN comme un véritable Polygone à côtés droits, quoyqu'infiniment petits, au lieu qu'il en faut ici regarder chaque élément Ll comme un véritable arc de son cercle osculateur en cet endroit, ainsy que l'exigent les deux mouvemens du concours desquels il est parcouru.

II. En effet en prenant ainsy Ll pour un véritable arc du cercle qui baise la courbe MLN en cet endroit, R pour le centre de ce cercle osculateur, RL pour un de ses rayons perpendiculaire à sa touchante en L et Rl pour un autre rayon infiniment près de celui-là, et qui prolongé rencontre en E cette même touchante LQ, la prop. 36 du Liv. 3. d'Euclide donnera $LE \times LE = El \times \overline{ER + lR} = 2LR \times El$, ou $El = \frac{LE \times LE}{2LR} = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$.

Or en faisant lF perpendiculaire en F sur la tangente LQ, et LD perpendiculaire en D sur l'ordonnée Cl, laquelle prolongée rencontre en B cette même tangente LQ, les triangles rectilignes semblables EFl, ELR, et BPl, BLC donneront El.Fl::ER.LR, et Bl.Pl::BC.LC, et par conséquent aussi $El = Fl$ et $Bl = Pl$, à cause que l'arc infiniment petit Ll rend $ER = LR$, et $BC = LC$. De plus les triangles rectilignes semblables BFl, BDL donneront pareillement LB ou Ll.LD::Bl ou Pl.Fl ou $El = \frac{LD \times Pl}{Ll}$.

Donc ayant desja $El = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$, l'on aura pareillement $\frac{LD \times Pl}{Ll} = \frac{Ll \times Ll}{2LR}$, ou $Pl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{2LR \times LD}$. Donc enfin en substituant cette valeur de Pl dans la formule générale $f = \frac{4ph \times Pl}{Ll \times Ll}$, de sorte que si presentement on appelle LR, r; Ll, ds et DL, dx,

l'on aura de même en général $f = \frac{2phds}{rdx}$ pour la Regle de comparaison de touttes sortes de forces centrales avec les pesanteurs des corps.

III. Corol. On voit de là que lorsque C est en R, comme lorsque la courbe MLN est un cercle dont le centre R est aussi celui des forces centrales cherchées, alors LD (dx) devenant égal a Ll (ds), l'on aura $f = \frac{2ph}{r}$, ou $f.p::h.\frac{r}{2}$, et par conséquent $h = \frac{r}{2}$, lorsque $f = p$, conformément à ce que vous prétendez avec M. Hugens et les autres.

IV. Remarq. Il est à remarquer que la manière dont je viens de trouver la valeur de Pl sans considérer les courbes comme des Polygones, m'a aussi donné des formules ou valeurs des rayons osculateurs, lesquelles sont aussi générales que celles que j'ay tirées de cette consideration dans les Mem. de 1701 pag. 20 etc.

Autre solution.

V. Touttes choses demeurant les mêmes que cy dessus, soit seulement de plus DV perpendiculaire en V sur la tangente LQ. Cela posé avec $Fl = El = \frac{Ll \times Ll}{2LR} = \frac{ds^2}{2r}$, trouvée cy dessus art. 2, les triangles réctilignes semblables BDL, BVD donneront BL ou lL (ds).DL (dx)::BD.VD::f (force suivant lC ou LC). $\frac{fdx}{ds}$ (force suivant VD). Or à cause de VD et Fl touttes deux (hyp.) perpendiculaires sur LQ, l'espace Fl $\left(\frac{ds^2}{2r}\right)$ est ce qu'il y en a de parcouru en vertu de cette force $\left(\frac{fdx}{ds}\right)$ pendant l'instant dt que le corps L décrit l'arc élémentaire Ll au lieu de suivre la tangente LQ, comme il auroit fait sans cette force ou sans f. Donc cette force instantanée $\left(\frac{fdx}{ds}\right)$ lui ayant été continuellement appliquée pendant ce tems dt, et d'ailleurs étant constant que des espaces ainsi parcourus en vertu des forces toûjours les mêmes et toûjours appliquées (ainsy qu'on le pense ordinairement de la pesanteur) sont comme les produits de ces forces par les quarrés des tems de leur application non interrompue, l'on aura desja $\frac{ds^2}{2r} = \frac{fdx}{ds} \times dt^2$, ou $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$ pour une Regle générale du raport des forces centrales entr'-elles, tendantes vers C, ou directement à contre sens, quelques variées qu'elles soient sur une même courbe quelconque MLN, à raison de la varieté des vitesses avec lesquelles cette courbe peut être décrite par un même corps aussi quelconque.

VI. Autrement. Soient de plus les ordonnées CL, Cl etc. appelées y, et par conséquent $Dl = dy$. Les triangles rectilignes semblables BDL, BFl, BVD donneront ici LD (dx). BD ou lD (dy) :: lF $\left(\frac{ds^2}{2r}\right)$. $BF = \frac{dyds^2}{2rdx}$, et BL ou lL (ds). BD ou lD (dy) :: BD. BV :: f (force suivant lC ou LC). $\frac{fdy}{ds}$ (force suivant BV ou BF). Donc on aura encore (comme cydessus art. 5) $\frac{dyds^2}{2rdx} = \frac{fdy}{ds} \times dt^2$, ou $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, c'est à dire, encore la même Regle que dans le précedent art. 5.

VII. Autrement encore. Les triangles rectilignes semblables BDL, BFl donneront aussi DL (dx). BL ou lL (ds) :: Fl $\left(\frac{ds^2}{2r}\right)$. $Bl = \frac{ds^3}{2rdx}$. Donc on aura encore (comme cy dessus art. 5.) $\frac{ds^3}{2rdx} = fdt^2$, ou $f = \frac{ds^3}{2rdxdt^2}$, c'est à dire, encore la même Regle que dans les deux derniers art. 5 et 6.

VIII. Concevons presentement, comme dans la première solution, que HL est une hauteur d'où le corps tombant, il acquieroit en L une vitesse égale à ce que sa rotation suivant MLN lui en donne en L suivant LQ. Cela étant, si l'on suppose aussi LQ double de HL, non seulement cette vitesse uniforme pouroit porter ce corps de L en Q, dans le tems qu'il auroit mis à tomber de H en L en vertu de sa seule pesanteur, mais encore ce tems seroit à ce qu'il en auroit mis à parcourir LF ou LB de cette même vitesse uniforme, c'est à dire, à ce qu'il en met à parcourir effectivement Ll, comme LQ est à LF ou LB ou Ll: de sorte qu'en prenant LQ pour le tems que le corps L mettroit à tomber de H en L, l'on aura aussi Ll pour l'instant qu'il employe à parcourir cet élément de la courbe MLN qu'on le suppose décrire. Donc

si l'on prend cet instant pour le premier de sa chutte, pendant lequel il parcoure $H\lambda$, l'on aura $\overline{LQ}^2 . \overline{Ll}^2 :: HL . H\lambda = \frac{HL \times \overline{Ll}^2}{\overline{LQ}^2}$ (à cause qu'on suppose ici $Ll = ds$, et $LQ = 2HL = 2h) = \frac{ds^2}{4h}$.

Mais cet instant que le corps L employe à parcourir Ll est aussi celui que ses forces (art. 5, 6, 7) $\frac{fdx}{ds}$, $\frac{fdy}{ds}$, f employent à lui faire parcourir Fl, BF, Bl d'un mouvement accéléré à la maniere de celui que sa pesanteur lui donneroit de H en λ pendant ce même instant. Donc sa pesanteur (appelée p) est à chacune de ces forces, comme $H\lambda \left(\frac{ds^2}{4h}\right)$ est à chacune des longueurs Fl $\left(\frac{ds^2}{2r}\right)$, BF $\left(\frac{dyds^2}{2rdx}\right)$, Bl $\left(\frac{ds^3}{2rdx}\right)$, qui leur repondent, c'est à dire

1. $p . \frac{fdx}{ds} :: H\lambda \left(\frac{ds^2}{4h}\right) . Fl \left(\frac{ds^2}{2r}\right)$
2. $p . \frac{fdy}{ds} :: H\lambda \left(\frac{ds^2}{4h}\right) . BF \left(\frac{dyds^2}{2rdx}\right)$
3. $p . f :: H\lambda \left(\frac{ds^2}{4h}\right) . Bl \left(\frac{ds^3}{2rdx}\right)$.

Et chacune de ces Analogies donne $f = \frac{2hpds}{rdx}$, qui est la même Regle de comparaison des forces centrales des corps avec leurs pesanteurs, trouvée cy dessus art. 2. Ce qu'il falait encore trouver.

IX. Remarq. On voit dans cette seconde solution, non seulement (art. 8) le raport de la pesanteur d'un corps quelconque aux forces centrales qu'il auroit sur une courbe aussi quelconque qu'il décriroit de telle vitesse qu'on voudroit, uniforme ou variée à discretion, en tendant toûjours vers un même point (quelqu'il fust) du plan de cette courbe; mais encore (art. 5, 6, 7) le raport de ces mêmes forces entr'-elles, lequel s'exprimant ici par $f = \frac{ds^3}{2rdx\,dt^2}$, marque que ces forces centrales (f) doivent toûjours être entr'-elles comme les fractions correspondantes $\frac{ds^3}{rdxdt^2}$; ce qui s'accorde avec le Regle $f = \frac{ds^3}{rdxdt^2}$, que j'ay desja donnée de ce dernier raport dans les Mem. de l'Academie de 1701, le signe de l'égalité dans les choses disparates et heterogenes (telles que sont ces forces et les grandeurs qui les expriment) ne signifiant que des égalités de raports.

Au reste, quoyque la courbe MLN ne doive point être ici regardée comme un polygone, à cause que ses élémens Ll n'y sont point regardés comme des lignes droites décrites par le concours de deux mouvemens uniformes, ou du moins semblables, cela n'empêche pourtant pas qu'en les regardant ainsy décrits, comme on le peut toûjours en réduisant les mouvemens variés à d'uniformes, la forme de polygone qui en résulteroit alors à cette courbe, ne donne toûjours Pl double de LK dans fig. 20. 21. 23 de ma lettre du 6. Decemb. 1704, ny par conséquent que ce que vous avez trouvé en conséquence de cette hypothese ne subsiste toûjours: vous m'avez promis de m'en faire part, je vous la demande en grace. En attendant, voici encore une troisième solution que j'ay tirée de cette reduction des mouvemens variés en d'uniformes.

Troisième solution.

X. Jusqu'ici nous avons regardé la force centrale du corps L (fig. 27) en chaque point L de la courbe MLN qu'on le suppose décrire, comme une espece de pesanteur ou de force constante tendante suivant LC, laquelle agissant incessamment sur ce corps, lui feroit parcourir d'un mouvement uniformément accéléré, le côté LK du parallelogramme PK, ou son opposé Pl, pendant l'instant que libre en L, sa vitesse de rotation en ce point L suivant LQ luy feroit parcourir d'un mouvement uniforme la partie infiniment petite LP de cette tangente LQ; et le mouvement résultant de ces deux-là suivant l'élément Ll, devant se faire en ligne de courbe, nous avons été obligés de regarder cet élément et les autres de la courbe MLN, comme véritablement courbes en ces endroits, et la tangente lLQ au seul point L, comme celle suivant laquelle la vitesse de rotation du corps en L tend à l'emporter.

Mais si l'on veut regarder cette courbe MLN comme un Polygone infiniti-latère dont les élémens ML, Ll etc. soient autant de petits côtés droits les plus petits qui se puissent supposer; en ce cas le petit côté ML prolongé vers T, devenant la tangente suivant laquelle la vitesse de rotation en L du corps décrivant, tend à l'emporter d'un mouvement uniforme, il luy faut supposer encore

une autre force suivant LC, capable de luy faire parcourir aussi d'un mouvement uniforme le côté LG du parallelogramme YG, ou son opposé Yl, pendant le même instant que sa vitesse de rotation employroit à lui faire parcourir LY, ou qu'il employe effectivement à parcourir Ll. Or si l'on considére que la vitesse précédente (Solut. 1 et 2) du corps L, accélérée de P en l à la maniere de celle des chuttes des corps pesans, devroit lui donner en l une vitesse qui uniforme seroit capable de lui faire parcourir Yl double de Pl, dans un instant égal à celui qu'il auroit mis à tomber (pour ainsi dire) de P en l en vertu de la seule force centrale regardée comme une espece de pesanteur tendante en C, ou qu'il a effectivement mis à parcourir Ll, on verra que du concours de cette vitesse uniforme en L suivant LG, avec celle de rotation suivant LY, ce corps non seulement parcouroit la diagonale Ll du parallelogramme YG pendant ce même instant; mais aussi qu'il arriveroit en l avec la même vitesse que s'il y arrivoit (comme cy dessus Solut. 1 et 2) par le concours de la vitesse de rotation suivant LQ, avec la précédente vitesse accélérée de P en l. Donc ce corps L décrira l'élément Ll dans des instans égaux, et avec une même vitesse en l, soit qu'il le décrive par le concours de cette vitesse accélérée de P en l, avec la vitesse uniforme de rotation suivant LQ, ou qu'il le décrive par le concours de cette vitesse uniforme suivant LT, avec une autre pareillement uniforme suivant LG ou Yl, égale à l'acquise en l par cette accélération. Donc aussi les deux côtés LY, LG du parallelogramme YG sont entr'-eux comme ces deux vitesses uniformes, ou (ce qui revient au même) comme les forces productrices de ces vitesses: c'est à dire que LY est à LG, comme la force acquise en L par la chutte de H en L du corps L en vertu de sa seule pesanteur, est à sa force acquise en l par une semblable chutte de P en l en vertu de sa seule force centrale.

XI. Or il est manifeste que la pesanteur d'un corps, agissant également sur lui dans tous les instans de sa chutte, et tous ces efforts égaux chacun à sa pesanteur, se conservant et s'acumulant (pour ainsy dire) dans toute la durée de sa chutte, leur nombre à chaque instant doit être comme le nombre des instans écoulés depuis le commencement de cette même chutte jusqu'à cet instant, et par conséquent leur somme, c'est à dire, la force acquise de ce corps à chaque instant doit être égale au produit de sa pesanteur par le nombre de ces instans, ou par la durée de sa chutte jusqu'à ce même instant.

On scait aussi, que la force totale de ce corps en L, acquise par la chutte de H en L en vertu de sa seule pesanteur, seroit seule capable de lui faire parcourir LT double de HL d'une vitesse uniforme égale à ce qu'il en auroit acquis en L en vertu de sa chutte, et dans un tems égal à celui de cette chutte de H en L. Donc la force totale de ce corps à la fin de sa chutte en L en vertu de sa seule pesanteur, est égale au produit de sa pesanteur par le temps qu'il employroit à parcourir LT double de HL d'une vitesse uniforme égale à ce qu'il en auroit ainsi acquis en L, c'est à dire (hyp.) égale à sa vitesse de rotation en L.

On prouvera de même que la force de ce corps acquise en l par son espece de chutte de P en l en vertu de sa seule force centrale, doit aussi être égale au produit de cette force centrale par le tems qu'elle employroit à le faire ainsy tomber de P en l, ou (hyp.) que sa vitesse uniforme de rotation employroit à lui faire parcourir LP ou LY.

Donc en prenant les longueurs LT, LY pour les tems que le corps L employroit à les parcourir de cette vitesse uniforme de rotation, p pour la pesanteur de ce corps, et f pour sa force centrale en L, l'on aura $p \times LT$ pour la force totale de ce corps acquise en L par sa chutte de H en L en vertu de sa seule pesanteur; et $f \times LY$ pour sa force totale pareillement acquise en l par une semblable chutte de P en l en vertu de sa seule force centrale. Donc aussi (art. 10) $LY . LG :: p \times LT . f \times LY$, ou $f = \frac{p \times LT \times LG}{LY \times LY}$ (à cause qu'on suppose ici $LT = 2HL$, et $LG = Yl$) $= \frac{2p \times HL \times Yl}{LY \times LY} = \frac{2p \times HL \times Yl}{Ll \times Ll}$.

XII. Cela étant si l'on prend (comme l'on vient de faire art. 10) la courbe MLN pour un Polygone infiniti-latère, dont RL, Rl soient deux rayons de sa developpée et que lZ soit un arc de cercle décrit du centre L, la ressemblance des triangles LRl, lLZ donnera $RL . Ll :: Ll . lZ = \frac{Ll \times Ll}{RL}$. Et si l'on prolonge Cl jusqu'à la rencontre en X de la tangente LT, la ressemblance des triangles XDL, XZl donnera aussi $DL . LX$ ou $Ll :: Zl \left(\frac{Ll \times Ll}{RL}\right) . Xl$

$= \frac{Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL}$. Mais les triangles XYl, XLC, que Yl (hyp.) parallele à LC rend semblables, donnant $Xl . Yl :: XC . LC$, et l'angle XCL (hyp.) infiniment petit, rendant de plus $XC = LC$; l'on aura pareillement $Xl = Yl$, donc aussi $Yl = \frac{Ll \times Ll \times Ll}{RL \times DL}$. Par conséquent en substituant cette valeur de Yl dans la formule $f = \frac{2p \times HL \times Yl}{Ll \times Ll}$, qu'on vient de trouver à la fin de l'art. 11, l'on aura de même $f = \frac{2p \times HL \times Ll}{RL \times DL}$. Donc en appelant encore HL, h; RL, r; Ll, ds et DL, dx, l'on aura encore ici $f = \frac{2ph\,ds}{r\,dx}$ pour Regle de comparaison des forces centrales avec les pesanteurs des corps, comme dans les art. 2 et 8 cy dessus. Ce qu'il falait encore trouver.

Voila, comme vous voyez, Monsieur, un Regle générale du raport des forces centrales aux pesanteurs des corps, laquelle s'accorde presentement avec ce que vous prétendez touchant la force centrifuge circulaire, et comme cette Regle se trouve ici démontrée dans l'une et dans l'autre hypothese des courbes regardées comme courbes en tout, ou comme polygones, j'espere que vous en serez content. Je vous prie de me le faire scavoir et de me croire toûjours avec bien du respect etc.

P. S. Voici encore quelques articles de votre dernière lettre du 26. Juillet, sur lesquels je me souviens de ne vous avoir point fait reponse dans ma dernière du 9. Octob.

C'est M. de l'Isle le cadet qui a travaillé aux notices des Gaules et aux familles de ce pays pour s'instruire de ces choses-là seulement, et non pas dans la vue d'en rien faire imprimer. C'est M. de l'Isle l'aîné qui est de l'Academie.

M. Homberg m'a dit que depuis que M. Tschirnhausen est parti de ce pays-ci, il n'a reçu aucune lettre de lui. Pour ce qui est de la production artificielle du Mercure, M. Homberg m'a dit qu'il la donnera dans quelque temps. Il m'a chargé de vous saluer de sa part: permettez moy de saluer aussi ici M. Tschirnhausen.

Il y a environ 15 jours que je trouvay M. Pinson dans une maison, où je fus faire visite, et lui ayant dit que je vous écrivois, il me chargea de vous dire qu'il vous avoit écrit par un étranger qui alloit dans vos quartiers, et à qui il avoit donné un fort gros paquet pour vous.

L'Instrument de M. de la Hire pour trouver les Eclipses se vend ici 4 ₶ en carton; il couteroit 8 ou 10 pistoles pour le faire faire en cuivre.

Le Samedy 14. Novembre à l'assemblée publique de l'Academie, au retour des vacances, M. de Fontenelle fit deux fort beaux éloges funebres, l'un de M. (Jaq.) Bernoulli, et l'autre de M. Amontons, un de nos éléves fort singulier aussi dans son espece. L'eloge de M. Bernoulli en contenoit aussi un fort beau des infiniment petits.

A propos d'infiniment petits, il ne s'est rien passé par raport à la contestation sur leur sujet, depuis ma derniere lettre du 9. octob. M. l'Abbé Bignon n'a point encore prononcé sur les jugemens de Mrs. les conseillers, qu'il s'est fait donner par écrit de chacun deux. Dès qu'il y aura quelque chose de nouveau par raport à cela, je ne manqueray pas de vous le faire scavoir.

Je n'étois ici de cette lettre Lundi dernier, lorsque relisant la votre du 26. Juillet, pour voir si je n'avois rien oublié de ce que vous m'y demandiez d'être informé, j'y apercu qu'en demandant à M. de l'Isle ce que vous me marquiez souhaiter scavoir de lui, j'avois oublié à lui parler de la geographie de l'Arabe de Nubie: je remis au Mecredy suivant, qui étoit hier, à lui en parler à l'Academie; et le soir, au retour de l'Academie, votre lettre de 6. de ce mois me fut rendue. J'auray l'honneur d'y repondre le plus tost que je pouray, celle-ci n'étant desja trop longue. En attendant voici la liste que M. de l'Isle me vient d'envoyer de ses ouvrages pour vous, avec ce qu'il me dist hier touchant la geographie de Nubie.

Il a fait (dit-il) des cartes itineraires sur la geographie de l'Arabe de Nubie, et il croit avoir dechifré cet Auteur qui est très difficile à entendre. Il dit qu'il s'est servi très utilement de cet ouvrage, tant pour la geographie ancienne, que pour le moyen âge et l'état present du monde. Il ajoute qu'il n'a pas û dessein de faire imprimer ces cartes de l'Arabe de Nubie; mais que quand il fera les cartes du moyen âge, cet Auteur y aura beaucoup de part.

A Paris, ce 26. Novemb. 1705.

XII.

Varignon an Leibniz.

Il y a quatre mois que je dois réponse à votre lettre du 21. Decembre dernier, et il y en a cinq que je ne suis presque capable de rien. Je fus attaqué le 20. Novemb. de maux de teste accompagnés de foiblesses qui à peine me permirent d'achever la lettre que je vous envoyay le 26. du méme mois, et de lire celle que je reçu alors de vous en datte du 6. même mois aussi, sans oser m'appliquer aux demonstrations qu'elle contenoit. Je ne vous dis rien de mon mal dans ma lettre croyant qu'il n'auroit pas de suites, mais j'en ay été tellement maltraité depuis ce tems-là que toutte application m'a été interdite: de sorte que je n'ay seulement osé jetter les yeux sur vos deux démonstrations de la force centrifuge, que vers la semaine sainte que je me trouvay assez de nétété de teste pour oser m'y appliquer. Elles me parurent tres bonnes; mais celles qui sont fondées sur ce que la force centrifuge meut le corps d'un mouvement accéléré dans ce qu'elle lui fait parcourir d'espace à chaque instant, ne le sont pas moins; et bien loin qu'il y ait là aucune erreur qui en corrige une autre, ce chemin me paroist le véritable, et celui des mouvemens uniformes, que vous avez suivi, ne me paroist qu'un équivalent supposé, puisque la force centrifuge ou l'opposée qui lui est égale, est réellement constante pendant chaque instant, et continument appliquée au corps sur lequel elle agit, de même que la pesanteur sur les graves pendant quelque tems que ce soit. Ainsy le mouvement de la tangente vers la courbe, résultant de la force centrifuge ou centripete, doit être arithmetiquement accéléré pendant chaque instant de même que celui des corps graves pendant quelque tems que ce soit, de sorte que cette hypothese me paroist la véritable, et celle des mouvemens uniformes seulement équivalente en ce qu'elle donne le même raport des forces dont il est ici question. Aussi les courbes sont elles courbes en tout dans la première de ces hypotheses, au lieu qu'elles ne sont que des Polygones équivalents dans la seconde. Et ça été pour m'accommoder à touttes les deux que j'ay cherché pour l'une et pour l'autre les demonstrations que je vous ay envoyées du raport des forces centrales aux pesanteur des corps.

Voici un petit Memoire de M. Geofroy par raport à ce que vous m'avez écrit de l'experience de Becherus.

Je ne scais ici personne qui ait rien trouvé sur les jeux de hazard: sans doute que le traité De arte conjectandi que feu M. Bernoulli a laissé presque achevé, donnera des lumieres sur cela. Le procès des infiniment petits est pendu au croq.

Quant à la Machine des Eclipses de M. de la Hire, et au Niveau que vous me marquez souhaiter, ma maladie est cause, que je n'ay point encore exécuté cette commission. Je ne manqueray pas de m'en aquiter au retour des Eaux de Vichy et de Bourbon, pour lesquelles je pars mecredy prochain par le conseil des Medecins qui me les ordonnent pour le retablissement de ma santé, qui est toûjours tres mauvaise, quoyqu'elle le soit beaucoup moins qu'elle ne l'étoit pendant l'hiver. Le beau tems qu'il fait presentement, me soulage fort; mais le froid ou le mauvais tems me tue. J'espere être de retour ici, au plus tard dans deux mois, et être en état de profiter de la remarque que vous m'avez promise, si vous voulez bien me l'envoyer. Vous obligerez sensiblement etc.

A Paris ce 29. Avril (1706).

XIII.

Leibniz an Varignon.

10 Octobr. 1706.

Je suis ravi d'apprendre vostre heureux retour et le retablissement de vos forces. Cependant vous ferés bien sans doute, de vous menager encor beaucoup. En attendant que vous soyés entierement remis, je vous felicite, et le public aussi d'un amendement si considerable, et en souhaite de tout mon cœur l'accomplissement et la durée.

C'est à present le temps des vacances de l'Academie. Cependant j'espere que M. l'Abbé Bignon aura receu de moy une lettre avec un Memoire physique contenant quelque chose qui se remarque dans nos mines et dans les mines voisines. J'y avois joint aussi une lettre à M. de Fontenelle.

J'avois envoyé il y a quelques années à Mons. de Fontenelle un Memoire, où je comparois mon Arithmetique binaire nouvelle (qui n'a point d'autres notes que 0 et 1) avec les caracteres anciens attribués à Fohy, Roy et philosophe de la Chine: ce Memoire estoit destiné à estre inseré dans les Memoires de l'Academie, mais je n'ay pas appris, si on l'a fait ou si on a encor dessein de le faire. Ainsi je vous supplie, Monsieur, de vous en informer dans l'occasion, aussi bien que de ce qu'on pense de mon Memoire physique.

Ma remarque où j'employe utilement vostre maniere d'exprimer la force centrifuge, a esté envoyée à Leipzic pour y entrer dans les Actes*). Elle ne me sert pas à trouver quelque chose, mais à mieux exprimer ce que j'avois trouvé. Une erreur avoit corrigé l'autre aupres de ceux qui avoient conclu vray et supposé faux, ils avoient raison dans la conclusion, mais vous refusiés avec raison leur principe, lorsque vous combattiés encor leur conclusion. La voye est plus simple qui ne met pas l'acceleration dans les elemens, lorsqu'on n'en a point besoin. Je m'en suis servi depuis plus de 30 ans. Il y a d'autres cas, où il est necessaire de concevoir de la courbure dans les Elemens des courbes, cependant le detour non necessaire ne laisse pas de mener enfin à la même conclusion.

Je n'ay pas encor employé vos billets pour M. de l'Orme (dont je vous fais des remercimens) en ayant egaré un. Mais j'espere de le retrouver. Je vous en suis obligé, Monsieur, mais cela ne doit pas vous couster, autrement il faut vous en tenir compte.

Je souhaite que M. Geofroy tire du fer effectif de cette argille magnetique, apres quoy son probleme se pourra mieux proposer trouver des cendres sans fer. On aura vû à Paris le livre de M. Guglielmini des Sels, où il soutient contre M. Homberg et autres Chymistes de l'Academie, qu'on ne peut point changer les sels.

---

*) Excerptum ex epistola Auctoris, quam pro sua Hypothesi physica motus planetarii ad amicum scripsit (Act. Erudit. Lips. an. 1706).

XIV.

Varignon an Leibniz.

Voici une proposition que vous verrez dans les Memoires de l'Academie, touchant les resistances des milieux où les corps se meuvent, laquelle me paroit des plus générales et des plus simples, en ayant deduit fort aisément tout ce que Vous, M. Newton, M. Hughens et M. Wallis avez donné sur cette matière, en l'appliquant à vos hypotheses: je l'ay aussi appliquée à plusieurs autres dans lesquelles tout cela m'est aussi venu et avec la même facilité. La voici cette proposition précédée de deux lemmes dont le premier sert à la demonstrer, et le second à en tirer les conséquences.

Lemme I.

Les resistances instantanées continues d'un milieu quelconque à une mouvement fini quelconque, et d'une durée finie, sont infiniment petites.

Lemme II.

La somme des vitesses instantanées d'un corps mû de quelque maniere que ce soit, est toûjours proportionelle à la longueur du chemin qu'elles lui font parcourir l'une apres l'autre par instant.

J'omets ici les demonstrations de ces deux lemmes, comme inutiles par raport à vous. Je dis seulement que j'appelleray dans la suite vitesses primitives, ou primitivement telles ou telles, ce que le mobile en auroit dans un milieu sans resistance ny action, tel qu'on imagine d'ordinaire le vuide.

Propositon.

Soit un corps quelconque qui dans un milieu sans resistance ny action, fust mû pendant les tems AT avec des vitesses qui fussent à la fin de ces tems, comme les ordonnées correspondantes TV d'une courbe quelconque FVC dont l'axe soit AC; trouver en général les resistances de ce milieu, ce qu'elles laisseroient de vitesse au mobile à la fin des tems AT, ce

que ces vitesses restantes lui seroient parcourir d'espace pendant ces temps etc.

Solut. Soient les droites EV, eu (fig. 28) infiniment proches l'une de l'autre, perpendiculaires en T, t, de même que KF en A, sur l'axe AC; et dont les parties TR, tr expriment les resistances que le milieu aura faites au corps mû pendant les tems AT, At; soit aussi la courbe ARC, à laquelle se terminent touttes ces resistances totales TR, tr, égales aux forces ou aux vitesses perdues pendant ces tems AT, At correspondans. Soit aussi la courbe HWC, laquelle ait partout ses ordonnées WT = RV correspondantes, lesquelles expriment les vitesses restantes à la fin des tems AT, et jointes aux perdues TR, donneront les ordonnées TV de la courbe FVC pour les vitesses primitives corrrespondantes.

Il est manifeste par le lem. I. que chaque difference Pr des resistances totales TR, tr exprimera la resistance que le milieu doit faire pendant chaque instant Tt, à la force ou à la vitesse restante RV à la fin de chaque tems correspondant AT. Donc en prenant les ordonnées TE, te de la courbe KEC pour les puissances, ou plus généralement pour les affections quelconques des vitesses etc. que suivent ces resistances instantanées, l'on aura partout Pr en raison constante à TE, c'est à dire que la fraction $\frac{Pr}{TE}$ sera constante; et conséquemment aussi que $\frac{Pr}{TE} = \frac{Tt}{a^m}$ sera l'équation générale des courbes ARC, HWC, en prenant les instans Tt constans de même que la grandeur a et m indéterminée pour fournir à l'homogeneité requise.

Donc en appelant AT, t; TR, r; TE, z; TV, v; RV ou (hyp.) TW, u; et conséquemment aussi Tt, dt, et Pr, dr; outre $r = v - u$, et $dr = dv - du$, l'on aura en général $\frac{dr}{z} = \frac{dt}{a^m}$, ou $\frac{dv - du}{z} = \frac{dt}{a^m}$ pour l'équation des courbes ARC, HWC, laquelle caracterisée pour chacune par l'introduction de ce que les courbes données FVC, KEC, leur assigneront de particulier, donnera tout ce qu'il faloit, ainsi qu'on le verra dans la suite.

Pour éviter la confusion dans l'usage qu'on va faire des quatre courbes que voici, la premiere ARC s'appellera courbe des resistances; la seconde FVC, courbe des vitesses primitives; la troisième HWC, courbe des vitesses restantes; et la quatrieme KEC, courbe des affections sur lesquelles les resistances se reglent. Cela posé, voici quelques conséquences de la solution précédente.

Corol. I. Puisque (hyp.) TW est partout ici égale à RV correspondante, il est manifeste que lorsque la courbe FVC des vitesses primitives passera par A, c'est à dire, lorsque ces vitesses commenceront à zero, la courbe HWC des vitesses restantes passera aussi par A, ces vitesses commençant de même à zero: de sorte que AF et AH seront alors également nulles ou zero.

Corol. II. De ce que (hyp.) les courbes FVC, ARC, HWC donnent partout RV = TW, il suit manifestement aussi que les aires correspondantes ARVF, ATWH seront de même partout égales entr'-elles.

Corol. III. Puisque (lem. 2) chaque espace parcouru est toûjours comme la somme des vitesses instantanées RV ou TW employées à le parcourir, les espaces parcourus pendant les tems AT seront toûjours ici entr'-eux comme les aires ARVF ou ATWH correspondantes, et ce qu'il en reste à parcourir, comme les aires restantes CRVC ou CTWC.

Corol. IV. Donc aussi (lem. 2) l'espace parcouru pendant chaque tems AT(t) avec les vitesses retardées par la resistance du milieu dont il s'agit ici, sera toûjours à ce qui en auroit été parcouru sans cette resistance pendant ce même tems, comme ARVF ou ATWH est à ATVF.

Corol. V. Ainsi ce que la resistance du milieu en empêche d'être parcouru pendant chaque tems AT, est toûjours comme l'aire correspondante ART, c'est à dire, comme la somme des resistances totales TR qui se sont trouvées pendant tout ce tems AT.

Corol. VI. Puisque dr (Pr) est à z (TE), ou à z dt (ETte) en raison constante, à cause de dt supposée par tout ici constante, l'on aura aussi toûjours r (TR) proportionelle à $\int z\,dt$ (ATEK): c'est à dire les resistances totales ou les vitesses perdues à la fin des tems AT, comme les aires correspondantes ATEK.

Voila en général pour toutes sortes de mouvemens retardés par des resistances en raison quelconque du milieu, quelques fussent aussi ces mouvemens primitivement et sans aucune resistance.

Voici presentement en particulier pour ceux qui primitivement et sans resistance seroient uniformes.

Corol. VII. Si presentement on suppose que le mouvement qu'on a regardé jusqu'ici d'une variation de vitesses à volonté quand même le milieu ne lui auroit fait aucune resistance, fust ici uniforme primitivement et sans la resistance de ce milieu; il est manifeste, que la courbe FVC, qui par ses ordonnées TV exprimoit ci dessus les vitesses primitives variées (v) telles que ce mouvement les auroit eues sans la resistance du milieu, doit ici dégénerer en une ligne droite parallele à AC (fig. 29) et touttes ses ordonnées TV (v) devenir chacune égale à la constante AF, que j'appelle ici a, laquelle y doit exprimer la premiere vitesse du corps mû, au commencement A du tems AT, ce qui donnant ici v = a constante, et conséquemment dv = 0, et dr (dv — du) = — du, la seconde $\frac{dv - du}{z} = \frac{dt}{a^m}$ des deux formules generales trouvées dans la solution précedente, se changera ici en $\frac{-du}{z} = \frac{dt}{a^m}$. Pour la premiere $\frac{dr}{z} = \frac{dt}{a^m}$, elle demeurera ici la même que là, avec cette seule difference que r qui étoit là = v — u, sera isi = a — u.

Corol. VIII. Puisque (cor. 7) on a ici dr = — du, il est manifeste que la courbe ARC des resistances doit être ici la même par raport à l'axe FC, que celle HWC des vitesses restantes (u) étoit dans fig. 28 par raport à l'axe AC; et qu'ainsi ARC sera ici tout ensemble la courbe des resistances (r) par raport à l'axe AC, et des vistesses restantes (u) par raport à l'axe FC, sans qu'il soit besoin d'y marquer HWC. Quant à la courbe KEC des affections, on la suppose ici à droite sur l'axe FC, ce qu'elle étoit ci-devant à gauche sur l'axe AC: ce renversement de position se fait ici pour ne rien changer aux figures des exemples qui avoient été resolus sur celle-ci avant que la premiere me fust venu en pensée. Voici quelques uns de ces exemples.

Exemple I. (fig. 29.)

Trouver la courbe ARC etc. dans l'hypothese des resistances instantanées en raison des vitesses restantes de primitivement uniformes.

Solut. Cette hypothese donnant RV (u) = VE (z), la premiere équation $\frac{-du}{z} = \frac{dt}{a^m}$ du corol. 7. de la prop. génér. se réduira ici à

$\frac{-du}{u} = \frac{dt}{a}$, en faisant $m = 1$ suivant la loy des homogenes. Ce qui fait voir tout d'un coup, que la courbe ARC doit être ici une logarithmique d'une soutangente = a (AF) constante, et dont FC doit être l'asymptote. Tout le reste s'en déduit sans peine, et même par le moyen de l'hyperbole à la maniere de M. Newton.

Exemple II. (fig. 28.)

Trouver les courbes ARC des resistances, HWC des vitesses restantes etc. dans l'hypothese 1. des resistances instantanées en raison des vitesses restantes; et 2. des vitesses primitives accélérées en raison des tems écoulés depuis le commencement du mouvement, ainsi que dans l'hypothese de Galilée sur la pesanteur des corps qui tomberoient en lignes droites dans un milieu qui n'aideroit ny resisteroit à leur mouvement.

Solut. Suivant la solut. de la prop. génér. et les noms qui s'y trouvent, la premiere de ces hypotheses-ci donnera TE (z) = WT = RV (u) = TV — TR (v — r); et la seconde, TV (v) = AT (t); d'où resulte $t - r = v - r = u = z$, et $dv = dt$. Donc en subsistant ces valeurs de z, dv dans les deux formules générales $\frac{dr}{z} = \frac{dt}{a^m}$, $\frac{dv - du}{z} = \frac{dt}{a^m}$ de cette solution, la premiere de ces deux équations se changera ici en $\frac{dr}{t - r} = \frac{dt}{a^m}$ (en faisant $m = 1$ suivant la loy des homogenes, $= \frac{dt}{a}$ pour la courbe ARC des resistances) et la seconde, en $\frac{dt - du}{u} = \frac{dt}{a}$ pour la courbe HWC des vitesses restantes: d'où resulte aussi $\frac{dt}{a} = \frac{du}{a - u}$ pour l'équation de cette courbe HWC; ce qui fait voir qu'elle doit être encore ici une logarithmique qui passe par A (fig. 30) d'une soutangente = a, et d'une asymptote BC parallele à AC, et distance d'elle de la valeur de AB = a; d'où se construit tout d'un coup la courbe ARC des resistances, en prenant par tout RV = TW. Tout le reste s'en déduit aussi sans peine, et même encore par le moyen de l'hyperbole à la maniere de M. Newton.

Exemple III. (fig. 29.)

Trouver la courbe ARC etc. dans l'hypothese des resistances instantanées en raison des quarrés des vitesses restantes de primitivement uniformes.

Solut. Cette hypothese donnant RV × RV (uu) = VE (z), l'équation $\frac{-du}{z} = \frac{dt}{a^m}$ du corol. 7 de la prop. génér. se réduira ici à $\frac{-du}{uu} = \frac{dt}{aa}$, en faisant $m = 2$ suivant la loy des homogenes; et l'intégrale de cette derniere équation sera $tu = aa - au$: d'où l'on voit que la courbe ARC qu'elle exprime, doit être ici une hyperbole équilatère entre asymptotes, une desquelles est FC prolongée jusqu'à son centre distant de son sommet A de la valeur $a\sqrt{2}$. Et delà tout le reste se déduit encore sans peine.

On le pouroit encore trouver par le moyen de deux arcs indefinis ARC, FGC (fig. 31) d'une logarithmique qui ait sa soutangente = AF (a), en sorte que FC soit l'asymptote du premier et AC celle du second. Car si l'on prend encore RV (u) pour les vitesses restantes de la premiere AF (a), l'on aura presentement VG pour les tems (t) écoulés depuis le commencement du mouvement, et AT ou FV pour les espaces parcourus pendant ces tems. FGC est ici la continuation AB de RCA dans une autre position.

Exemple IV. (fig. 28.)

Trouver les courbes ARC des resistances, HWC des vitesses restantes etc. dans l'hypothese 1. des resistances instantanées en raison des quarrés des vitesses restantes; et 2. des vitesses primitives accélérées en raison des tems écoulés depuis le commencement du mouvement, ainsi que dans second exemple.

Solut. Suivant la solut. de la prop. génér. et les noms qui s'y trouvent, la premiere de ces deux hypotheses-ci donnera TE (z) $= \overline{WT}^2 = \overline{RV}^2$ (uu) $= \overline{TV - TR}^2 = \overline{v - r}^2$; et la seconde, TV (v) = AT (t); d'où resulte $t - r = v - r = u$, et $dv = dt$. Donc en substituant ces valeurs de z, dv dans les deux formules générales $\frac{dr}{z} = \frac{dt}{a^m}$, $\frac{dv - du}{z} = \frac{dt}{a^m}$ de cette solution, la premiere de ces deux équations se changera ici en $\frac{dr}{t-r^2} = \frac{dt}{aa}$, en faisant $m = 2$ pour la courbe ARC des resistances; et la seconde en $\frac{dt - du}{uu} = \frac{dt}{aa}$, d'où resulte $\frac{dt}{a} = \frac{adu}{aa - uu}$ pour la courbe HWC des vitesses restantes. Ces deux courbes se construiront par le moyen d'une logarithmique d'une soutangente $= \frac{1}{2}a$. Tout le reste s'en déduit encore sans peine, et même encore par le moyen de l'hyperbole à la maniere de M. Newton.

Voila, Monsieur, des fruits de votre admirable calcul. J'ay encore appliqué la proposition precedente aux mouvemens primitivement retardés, et à plusieurs autres hypotheses des resistances. Mais ce serait abuser de votre tems que de vous en dire ici d'avantage: je crains même de n'en avoir desja que trop dit pour un aussi habile homme que vous. Je finis donc en vous asseurant du profond respect avec lequel je suis toûjours etc.

P. S. La mort de M. l'Abbé Galloys a enfin réduit M. Rolle à se taire: non seulement il ne pense plus à rien dire contre les infiniment petits, mais même il m'a marqué être très faché d'y avoir jamais pensé, sentant bien le tort qu'il a fait en cela à sa reputation. Il se plaind d'y avoir été engagé par cet Abbé qui a toujours été assez habile pour n'exposer que celui-ci sans rien engager du sien, se contentant de crier...... sans jamais rien donner par écrit: il battoit la caisse, et M. Rolle allait au feu, ne pouvant (dit-il) resister aux sollicitations de l'autre: c'est ainsi qu'il fait le proces à son cour en voulant justifier son esprit.

XV.

Leibniz an Varignon.

12 Aoust 1707.

Comme je dois partir pour Bronsvic, je reponds à la haste à l'honneur de votre lettre et me conjouis premierement avec vous et avec nos amis sur votre heureuse reconvalescence. Il faudra se

bien menager de peur de recheute, et sur tout se moderer en fait de meditations. J'ay parcouru la partie generale de votre discours sur les resistences, où il n'y a rien à dire dans le fonds. Il y a seulement certaines expressions, que j'aurois changées, si j'avois en à parler de cette matiere. Premierement j'aurois defini les Resistences, en disant que ce sont des diminutions de la vistesse d'un corps agissant venues d'un corps patient, tel que le milieu.

Pour dire dans ce lemme, que les resistences sont infiniment petites, il faut exprimer en comparaison de quoy, savoir en comparaison des vistesses d'un corps, qui est en mouvement, que j'appelle quelque fois aussi des impetuosités, pour les distinguer de ces vistesses imparfaites ou embryonnées telles, qu'un corps pesant a au premier instant de la cheute et reçoit à chaque moment. C'est pourquoy Galiléi l'a renversé, et prenant la pesanteur pour quelque chose d'ordinaire, il a dit, que l'impetuosité, item la percussion étoit infinie, au lieu que prenant la vistesse pour une grandeur ordinaire, la pesanteur et aussi la resistance instantanée, qui luy est homogene, sera infiniment petite.

Dans le lemme second, je n'aurois point dit vistesses instantanées, mais simplement vistesses. Car toute vistesse est instantanée.

Dans la solution de la proposition générale, je n'aurois point parlé de forces, car les forces vives (dont il s'agit là) ne sont point proportionelles aux vistesses, comme j'ay demonstré. Et Mons. Jean Bernoulli ayant parfaitement bien compris mes raisons, et en demeurant d'accord, pourra vous en dire d'avantage. Il me semble aussi, que dans cette solution vous n'avés point besoin de la lettre m. Il suffit de dire $Pr : TE = Tt : a$, car puisque Pr, Te, Tt sont des simples lignes, *a* en sera aussi une, et par consequent de nulle puissance. Il me semble que la Courbe KEC (fig. 30) auroit merité le nom de Courbe de Resistences: car ses ordonnées sont proportionelles aux resistences Pr. Mais pour parler plus clairement, on pourroit dire, que KEC est la Courbe des Resistences Elementaires ou instantanées et AKC la courbe des resistences totales.

Je ne say, Monsieur, si vous avés examiné mon Schediasma sur les resistences du milieu dans les Actes de Leipzic. Peut estre y trouvés vous quelque chose à dire, puisque vous n'en parlés point. Mon langage est un peu different de celui de Monsieur Newton, autant que je m'en souviens, parceque je fais abstraction de la progression des temps, qui peut estre prise uniforme ou difforme. Mais je crois, que dans le fonds nos conclusions s'accordent.

J'ay employé alors un moyen de rendre les lignes sensibles. Imaginés vous, Monsieur, que la Regle RG (fig. 32) avec son point R coule le long d'une ligne immobile AT, d'un mouvement uniforme et parallele, et que cependant un mobile M coure sur la regle avec une vistesse, qui soit déminuée selon certaines resistances, les ordonnées RM de la ligne MM representeront les espaces, les differences ou tangentes donneront les vistesses restantes, et les differences secondes ou osculations determineront les resistances. Il me semble aussi d'avoir remarqué, que si la resistance est d'une diminution uniforme et absolue, qui n'a aucune relation à la vistesse du mobile, comme je le conçois dans un globe, qui roule sur un tapis, et perd à chaque moment sensible la vistesse, qu'il doit employer pour plier un certain petit poil, qui est tousjours la même, comme il est peut-être aussi à peu pres dans les frictions; j'ay trouvé, que la ligne MM est la logarithmique. Soit AT, t, et TM soit m, et la vistesse restante soit v, et la resistance totale ou vistesse perdue r, et la vistesse initiale V, que je suppose n'avoir point esté changée, que par la resistance dont il s'agit, donc v sera $V - r$. Or dr resistance elementaire dependant de la longueur elementaire de l'espace ex hypothesi, sera proportionelle à dm, et nous marquerons le degré de la resistence, qui est tousjours le même, par le nombre π et dirons, que $dr = \pi dm$ et $r = \pi m$. C'est ce, que j'aurois pû dire aussi d'abord, la resistance estant en raison composée ici de l'espace parcouru, et du degré de l'apreté de l'espace marqué par π; d'ailleurs $dm = vdt : a$, c'est à dire, dm est à dt, comme la vistesse restante v, est à une constante a. Or $v = V - r = V - \pi m$, donc nous aurons $dm = V - \pi m, dt : a$, ou bien $dt = adm, :, V - \pi m$, c'est à dire dt est à dm, comme a est à $V - \pi m$. Or a, V et π estant constantes, il est manifeste, que la ligne est Logarithmique, et depend de la quadrature de l'Hyperbole.

XVI.

Varignon an Leibniz.

A Paris ce 3. Sept. 1707.

Votre lettre du 12. Aoust me fut rendûe il y a 10 jours par le P. Lelong. Je vous rend mil graces de la part que vous voulez bien prendre à ma santé: je prie Dieu d'en conserver une aussi pretieuse que la vôtre. Je suis bien aise que ma proposition générale des resistances ne vous ait pas déplû. Je croy comme vous

1. Que dans le Lem. 2 il faut marquer par raport à quoy ces resistances sont infiniment petites: je ne manqueray pas de le faire.

2. Il est vray que toutte vitesse étant instantanée, il suffist de dire simplement vitesses: c'est aussi ce que j'ay marqué dans les définitions que je ne vous ay point envoyées; et pour en faire ressouvenir, je me suis servi tantost de l'une et tantost de l'autre de ces expressions.

3. Si vous entendez par forces vives ce que la cause motrice en employe à chaque instant, par exemple la pesanteur, je conviens que les vitesses actuelles qui sont l'effet de tout ce que cette cause en a desja produit et en produit encore à chaque instant, ne sont point proportionelles à ces sortes de forces qui ne le sont qu'à ce qu'elles produisent actuellement de mouvement. Mais ces vitesses entieres instantanées dans un même corps le sont toûjours aux forces totales requises pour les produire telles qu'elles sont en tout à chaque instant; tel est le produit de la pesanteur constante d'un corps par la durée de la chutte, cette force totale est toûjours proportionelle à sa derniere vitesse dans un milieu sans resistance ny action; ou si le milieu resiste, la difference de cette force totale à la resistance totale du milieu, laquelle difference est alors la force totale productrice de la vitesse, sera toûjours proportionelle à cette vitesse actuelle de ce corps, comme la cause à l'effet: aussi cette force totale, que vous appellez peut-être impetuosité, se fait elle d'autant plus sentir que le corps a plus de vitesse.

4. Il est vray, qu'au lieu de a^m on peut mettre simplement a dans la formule $\frac{dr}{z} = \frac{dt}{a^m}$, en sauvant l'homogeneité sur la valeur