Primatem et res maximas apud Vos administrantem, ad quem jam de nostris votis retulisti, animum illis advertisse constabit.

Cum divinae gloriae communisque boni summam rationem habendam ipsa doceat altior philosophia, agnoscamque Religionem Protestantium recte intellectam digna Deo sensa verique cultus praecepta sanctissima continere, dandam operam nobis censeo, ut sarta tecta ad seram posteritatem transmittatur, inque id tanto magis incumbendum, quanto majora eam pericula novissimo rerum positu circumstant. Exploratum autem rerum peritis arbitror, nihil magis nocuisse, quam fatalem illam scissionem inter eos qui Evangelici et qui Reformati vocantur. Huic malo multi medelam afferre sunt conati, imprimisque ex Magna Britannia Duraeus olim rem singulari studio egit; sed sive quod Medici non satis perite morbum tractassent, sive potius quod nondum ad crisin ille maturuisset, nihil est actum.

Nunc autem mihi compertum est, eo res esse loco, ut Deo aspirante studiis virorum quorundam virtute et doctrina praestantium, qui serio in hanc curam incumbere volent, putem effici posse, quae omnem expectationem supergrediantur. Cujus rei haec argumenta habeo: quod Reformati quidem in Charentoniana olim Synodo, ubique inter ipsos probata, aliisque modis promtitudinem suam declaravere, neque videntur placita retractaturi. Ex parte autem Evangelicorum cognita mihi est insignium quorundam Theologorum prona mens et magnorum Principum enixa voluntas. Et quod est amplius, ex his Principibus unus, prudentia, zelo et autoritate egregius, etiam voluit, ut talia a me scriberentur.

Quanam igitur ratione his animorum inclinationibus rerumque momentis non semper redituris rite sit utendum, viris sapientia et pietate praestantibus arbitrandum relinquo; et facta jam pace talia agere, opportunum Magnaeque Britanniae Regi et Nationi Theologis doctissimis et moderatissimis abundanti inprimis gloriosum fore puto.

XIX.

Wallis an Leibniz.

Oxoniae Nov. 5, 1700 stil. Juliano.

Literas Tuas Brunsvici datas Sept. 3 accepi tandem Sept. 30 stilo nostro. Quibus quod non prius responderim, causa est, quod nihil habuerim Te dignum, quo Te detinerem: necdum habeo. Gratulor ego Vobis novam Vestram Societatem Brandeburgicam, rebus tam Naturalibus quam Religiosis (ut videtur) accommodam: Tibique speciatim gratulor, cujus curae res ea potissimum demandatur. Cui ego (si res haberet) lubenter vellem inservire, si quidem penes foret quod huc conducat; verum in tanta locorum distantia haud quicquam praestare valeo, praeter vota mea. Meminisse forte poteris, Vir Nobilissime, quid Flamstedius noster (in ejus ad me Epistola, typis edita) ab ipso observatum ostendit de Parallaxi Orbis Annui Telluris ope cujusdam Instrumenti sui, cujus Radius pedum sex circiter. Si Serenissimus D. Elector Brandeburgicus Instrumentum condi curaret (isti non absimile) cujus Radius sit Pedum 12 aut 20 (in usum novae suae Societatis) specillis Telescopicis rite instructum, mirum est, quam illud conducere possit vero Mundi Systemati patefaciendo. Quid id sit de Tuo, quod innuis Actis Lipsicis (nuperis credo) insertum, de Centro Gravitatis nova Methodo adhibito, nondum vidi; quippe locorum distantia facit, ut tardius huc appellant talia. Vale etc.

XX.

Leibniz an Wallis.

Absentia Aulae Brandeburgicae in Prussiam profectae, unde Fridericus Rex vix demum solenni in Metropolin ingressu reversus est, fecit ut Societatis novae res lentius procederent: nunc tamen urgebitur acrius, cogitabiturque etiam de instrumentis quae sint digna Instituto, inprimis ut, si potest, parallaxis Orbis annui sensu ipso porro comprobetur.

Observatio mea Centrobaryca dudum inserta Actis Lipsiensibus huc redibat, ut consideraretur, viam centri gravitatis ductam in mobile dare aream motu totius debite generatam, licet durante motu mobile frangatur in partes diversi motus, earumque pars etiam quiescat, nihilominus enim centrum gravitatis totius moveri intelligetur. Exempli causa si (fig. 11) filum ex arcu ABC evolvatur et extremitate describat curvam CDE more Hugeniano, patet cum filum est in situ ABD, parte quiescente in arcu AB, parte mota et in rectam BD extensa, centrum gravitatis totius in eo situ haberi, si G centrum arcus AB, et R medium rectae BD jungantur recta GR, eaque secetur in K, sic ut fiat RK ad GK, ut AB ad BD, et idem semper fiet usque ad H medium ipsius AE, ita ut KH sit linea centri, erit rectangulum ex AE (id est ABC) ducta in curvam KH duplum quadrilinei DBAED.

Utinam Tomum adhuc novum Operum Tuorum videre liceat, ibique Tua arcana Cryptolytica explicentur nihil id nocebit...... nam his artibus defectis quaerentur imposterum aliae difficilius deprehendendae, et interea tanto ingenii humani specimine ars inveniendi provehetur. Ego in id ipsum et alia profutura Tibi pristinum adhuc diu vigorem opto. Vale et fave etc.

P. S. Quaesivi de origine quadraturae Brunkerianae per fractiones in fractione replicatas ex Wallisiana quadratura ductae.

BRIEFWECHSEL

zwischen

LEIBNIZ und VARIGNON.

In Frankreich zählte die von Leibniz geschaffene neue Analysis anfangs nur zwei namhafte Anhänger, den Marquis de l'Hospital und Varignon (geb. 1654, gest. 1722). Es ist bereits erwähnt worden*), dass der erstere den Angriff auf die neue Lehre, welcher von den Cartesianern, namentlich durch den Abbé Catelan, erhoben wurde, mit leichter Mühe beseitigte; dagegen hatte der letztere einen bei weitem hartnäckigeren Kampf, der im Schoosse der französischen Akademie der Wissenschaften ausbrach, zu bestehen und abzuwehren, und zwar allein, da in Folge anhaltender Kränklichkeit der Marquis de l'Hospital vom literärischen Kampfplatz sich bereits zurückgezogen hatte. Diesem Streit, in welchen der Anfang der Correspondenz zwischen Leibniz und Varignon mitten hineinversetzt, lagen keineswegs wissenschaftliche Motive zu Grunde; es war vielmehr eine Intrigue, die von den Gegnern der neuen Analysis aus Missgunst und Neid über die hohen Verdienste Fremder und Ausländer um die Wissenschaft angezettelt wurde, um ihnen den Eintritt in die Akademie der Wissenschaften zu verwehren. Freilich bot dazu das noch wenig begründete Fundament der höheren Analysis den besten Angriffspunkt, die ganze Lehre als unsicher und zu ungenauen Resultaten führend darzustellen. Da die Gegner Erklärungen Leibnizen's zu ihren Gunsten deuteten, so sahen sich die Freunde des letzteren

*) Sieh. Bd. II. S. 211.

genöthigt, ihn um bestimmtere Auskunft, wie seine Ausdrücke zu verstehen seien, aufzufordern, und es dürften von dem ganzen Streite eben diese Explicationen allein gegenwärtig noch einiges Interesse verdienen, insofern Leibniz hier eine Veranlassung hatte, seine Ansichten über die unendlichkleinen Grössen ausführlich zu entwickeln. Indess, man muss es offen gestehen, enthalten weder die von Leibniz beigebrachte „Justification du Calcul des infinitesimales par celuy de l'Algebre ordinaire", noch die späteren Erläuterungen, namentlich in dem Briefe vom 20. Jun. 1702, irgend welche feste Anhaltspunkte für solche, die noch nicht mit dem Wesen der höheren Analysis vertraut sind; sie sind nur für diejenigen verständlich, die sich bereits durch die Anwendung der höheren Analysis von der Zuverlässigkeit ihres Fundamentes überzeugt haben. Keineswegs aber kann die Art und Weise, wie Leibniz über die Natur der unendlichkleinen Grössen sich ausdrückt, die Ansprüche der Wissenschaft befriedigen; es fehlt in seinen Auslassungen zum mindesten die Bestimmtheit, wie sie die Mathematik verlangt. Wenn man nun auch nicht zu der Behauptung sich hinreissen lassen darf, als habe Leibniz selbst das Fundament der höheren Analysis nicht klar erkannt — lediglich vermag ihn das Gesetz der Continuität, das er zuerst aufstellte, vor diesem Vorwurf zu schützen — so lässt sich auf der anderen Seite doch nicht leugnen, dass die schwankenden Ausdrücke, in welchen Leibniz über die unendlichkleinen Grössen spricht, hinreichend darthun, dass er vergebens nach einem passenden Zeichen suchte, um den Begriff des Continuirlichen in den Calcul einzuführen. —

Varignon hatte in seiner Schrift „Projet d'une nouvelle mécanique", die im Jahre 1687 erschien, die Zusammensetzung der Kräfte zu einem allgemeinen Princip für die Behandlung der Statik erhoben; es scheint, dass fortan seine wissenschaftliche Thätigkeit vorzugsweise auf die Lösung mechanischer Probleme gerichtet war. Die höhere Analysis gab ja ein treffliches Hülfsmittel an die

Hand, die wichtigen Theorieen von Hugens und Newton zu prüfen und zu erweitern. Da darf es nicht befremden, dass Mathematiker zweiten Ranges hierbei zu Theoremen gelangten, die mit früheren, durch die Synthese wohl begründeten in Widerspruch standen; sie waren in dem Gebrauch der höheren Analysis noch nicht hinreichend geübt, oder aber sie legten ihren Untersuchungen andere Hypothesen über die Natur der Kräfte zu Grunde, als jene oben genannten Heroen. Von dieser Art sind nun auch die Mittheilungen, die Varignon über die Centralbewegung eines Körpers in der vorliegenden Correspondenz an Leibniz übersendet. Sie verdienen gegenwärtig hier nur eine Stelle, insofern sie zum Verständniss der Leibnizischen Briefe nothwendig sind, und weil Leibniz dadurch veranlasst wurde, einiges in seinen dynamischen Bestimmungen zu rectificiren. Dagegen beweisen die Briefe Leibnizens in einzelnen hingeworfenen Bemerkungen, wie vollkommen er das gesammte Gebiet der Dynamik beherrschte, und wie weit er mit wahrhaft überlegenem Geiste auch hierin seiner Zeit vorauseilte. Besonders erhellt dies aus den Aufgaben, die er als zunächst zur Lösung zu bringen bezeichnet: die Bestimmung der Bahn eines sich bewegenden Körpers, der von mehreren Anziehungsmittelpunkten afficirt wird, und wenn die Anziehungsmittelpunkte beweglich sind; ferner die Bewegung eines Körpers im widerstehenden Mittel, welche Annahme auch über die Natur des Widerstandes zu Grunde gelegt werde — sämmtlich Aufgaben, zu deren vollständiger Lösung weder die Astronomie zu damaliger Zeit hinreichendes Material geliefert hatte, noch die Kräfte der Analysis ausreichten, die aber im Laufe des 18. Jahrhunderts die Aufmerksamkeit der grössten Geometer unausgesetzt in Anspruch nahmen und zur Erweiterung und Vervollkommnung des Gebietes der höheren Analysis mächtig beigetragen haben. Als besonders wichtig, namentlich im Interesse der Schifffahrt, bezeichnet Leibniz die genaue Bestimmung der Mondsbahn, die Newton in den Principiis nur unvollständig behandelt hatte, so dass er selbst einmal seine

Kräfte daran versuchen wollte, wenn ihm Muse dazu würde, die er jedoch vergeblich ersehnte.

Von der Correspondenz zwischen Leibniz und Varignon war bisher nur ein Brief Leibnizens gedruckt; Dutens erhielt ihn, als er die sämmtlichen Werke Leibnizens zum Druck vorbereitete, von d'Alembert zugesandt (Leib. op. omn. Tom. III. p. 404sq.).

Von den Briefen Leibnizens fehlen einige; sie waren in seinem Nachlass nicht aufzufinden. Ihr Inhalt ergiebt sich jedoch zum Theil aus den Briefen Varignon's, der mit grosser Genauigkeit auf alles eingeht, was Leibniz in seinen Briefen berührt.

Die Briefe Varignon's sind nicht vollständig mitgetheilt; es ist alles das ausgeschieden, was ohne wissenschaftliches Interesse ist.

I.

Varignon an Leibniz.

A Paris ce 28. Novembre (1701).

Soufrez que je prenne la liberté de vous asseurer moy même de mes tres humbles respects, et de vous donner avis d'un Ecrit qu'on répand ici sous vôtre nom par raport à la contestation que vous sçavez être entre M. Rolle et moy sur votre calcul qu'il prétend fautif et paralogistique. M. l'Abbé Galloys, qui est celuy qui le fait agir, repand ici que vous avez déclaré n'entendre par differentielle ou Infinement petit, qu'une grandeur à la verité tres petite, mais cependant toujours fixe et determinée, telle qu'est la Terre par raport au firmament, ou un grain de sable par raport à la Terre: au lieu que j'ay appelé Infiniment petit ou differentielle d'une grandeur, ce en quoy cette grandeur est Inépuisable. J'ay, dis-je, appelé Infini ou Indéfini, tout Inépuisable; et Infiniment ou Indéfinement petit par raport à une grandeur, ce en quoy elle est inépuisable. D'ou j'ay conclu que dans le calcul differentiel, Infini, Indéfini, Inépuisable en grandeur, plus grand que quelque grandeur qu'on puisse assigner, ou Indéterminablement grand, ne signifient que la même chose, non plus que Infiniment ou Indéfiniment petit, plus petit que quelque grandeur qu'on puisse assigner, ou Indéterminablement petit. Je vous supplie, Monsieur, de vouloir bien m'envoyer vôtre sentiment sur cela, affin d'arrêter les ennemis de ce calcul, qui abusent ainsy de vôtre nom pour tromper les Ignorans et les Simples. Le Professeur des Mathematiques des Jesuites d'ici, m'a fait voir cet Ecrit qu'il m'a dit leur avoir été envoyé de vôtre part pour être inseré dans les Journaux de Trevoux, comme un éclaircissement des difficultés qu'on y a faites sur l'Infini à l'occasion de la nouvelle Methode de M. Bernoulli de Bâle pour trouver les rayons osculateurs des courbes Algebraiques, qu'on y a aussi inséré avec beaucoup de fautes. J'ay vu, dis-je, cet Ecrit, lequel n'est point de vôtre main, à la reserve de quelques corrections entre-lignes, qui m'ont paru de vôtre écriture. Vous y dites seulement (autant que je m'en peux souvenir) que vos differens genres d'infinis, ou d'infinement petits, se doivent regarder comme l'on fait d'ordinaire le firmament par raport à la Terre, et la Terre par raport à un grain de sable: de sorte que par raport au firmament la Terre seroit une differentielle du premier genre, et un grain de sable, une du second. Comme je ne pus nier que cet Ecrit ne fust de vous, je dis à ce Pere, que ce n'étoit là qu'une comparaison grossière pour vous faire entendre à tout le monde. Les ennemis de vôtre calcul ne laissent pourtant pas d'en triompher, et de répandre cela comme une déclaration nette et précise de vôtre sentiment sur cette matière. Je vous supplie donc, Monsieur, de vouloir bien nous envoyer au plustost cette déclaration nette et précise de vôtre sentiment sur cela, adressée à nôtre illustre Ami M. Bernoulli de Groningue, ou à moy si vous me jugez digne de cet honneur, affin de faire taire, s'il est possible, ou de moins de confondre ces ennemis de la vérité. M. Bernoulli vous aura parlé sans doute des paralogismes grossiers de M. Rolle: je luy en envoye encore un paquet de cette fois, dont il poura vous faire part. Mais comme ils deshonoreroient l'Academie, je vous demande, s'il vous plaist, le secret sur cela.

Pardon, Monsieur, de la liberté que je prend de vous écrire ainsy recta: c'est pour épargner à nôtre illustre et prétieux Ami M. Bernoulli la peine de vous copier une si longue lettre. Il a eu la bonté de vous presenter de tems en tems mes tres humbles respects, de vous asseurer de la profonde vénération que j'ay pour vôtre rare mérite. Je vous prie d'estre persuadé que ce sont véritables sentimens de mon coeur, et ce qui me rend entièrement etc.

II.

Leibniz an Varignon.

Hanover 2 Fevrier 1702.

C'est un peu tard que je reponds à l'honneur de vostre lettre du 29 Novembre de l'année passée, que je n'ay receue qu'aujourdhuy. C'est que M. Bernoulli me l'ayant envoyée de Groningue, elle n'est arrivée à Berlin que lorsque j'en fus parti pour retourner à Hanover avec la Reine de Prusse, Sa Majesté m'ayant fait la grace de vouloir que je fusse de sa suite, ce qui avoit retardé mon retour. Je vous suis bien obligé, Monsieur, et à vos savans, qui me font l'honneur de faire quelque reflexion sur ce que j'avois écrit à un de mes amis *) à l'occasion de ce qu'on avoit mis dans le Journal de Trevoux contre le calcul des differences et des sommes. Je ne me souviens pas assez des expressions dont je m'y puis estre servi, mais mon dessein a esté de marquer, qu'on n'a point besoin de faire dependre l'analyse Mathematique des controverses metaphysiques, ny d'asseurer qu'il y a dans la nature des lignes infiniment petites à la rigueur, ou comparaison des nostres, ny par consequent qu'il y a des lignes infiniment plus grandes que les nostres [et pourtant terminées, d'autant qu'il m'a paru, que l'infini pris à la rigueur doit avoir sa source dans l'interminé, sans quoy je ne voy pas moyen de trouver un fondement propre à le discerner du fini] **). C'est pourquoy à fin d'eviter ces subtilités, j'ay cru que pour rendre le raisonnement sensible à tout le monde, il suffisoit d'expliquer icy l'infini par l'incomparable, c'est à dire de concevoir des quantités incomparablement plus grandes ou plus petites que les nostres; ce qui fournit autant qu'on veut de degrés d'incomparables, puisque ce qui est incomparablement plus petit, entre inutilement en ligne de compte à l'egard de celuy qui est incomparablement plus grand que luy, c'est ainsi qu'une parcelle de la matiere magnetique qui passe à travers du verre n'est pas comparable avec un grain de

*) Siehe die Beilage zu diesem Briefe.

**) Diese eingeklammerte Stelle sollte in der Abschrift des Briefes ausgelassen werden.

sable, ny ce grain avec le globe de la terre, ny ce globe avec le firmament. Et c'est pour cet effect que j'ay donné un jour des lemmes des incomparables dans les Actes de Leipzic, qu'on peut entendre comme on vent, soit des infinis à la rigueur, soit des grandeurs seulement, qui n'entrent point en ligne de compte les unes au prix des autres. Mais il faut considerer en même temps, que ces incomparables communs mêmes n'estant nullement fixes ou determinés, et pouvant estre pris aussi petits qu'on veut dans nos raisonnemens Geometriques, font l'effect des infiniment petits rigoureux, puis qu'un adversaire voulant contredire à nostre enontiation, il s'ensuit par nostre calcul que l'erreur sera moindre qu'aucune erreur qu'il pourra assigner, estant en nostre pouvoir de prendre cet incomparablement petit, assez petit pour cela, d'autant qu'on peut tousjours prendre une grandeur aussi petite qu'on veut. C'est peut-estre ce que vous entendés, Monsieur, en parlant de l'inépuisable, et c'est sans doute en cela que consiste la demonstration rigoureuse du calcul infinitesimal dont nous nous servons, et qui a cela de commode, qu'il donne directement et visiblement, et d'une maniere propre à marquer la source de l'invention, ce que les anciens, comme Archimede, donnoient par circuit dans leur reductions ad absurdum, ne pouvant pas faute d'un tel calcul, parvenir à des verités ou solutions embarassées, quoyqu'ils possedassent le fondement de l'invention. D'où il s'ensuit, que si quelcun n'admet point des lignes infinies et infiniment petites à la rigueur metaphysique et comme des choses reelles, il peut s'en servir seurement comme des notions ideales qui abregent le raisonnement, semblables à ce qu'on appelle racines imaginaires dans l'analyse commune (comme par exemple $\sqrt{-2}$), lesquelles toutes imaginaires qu'on les appelle, ne laissent pas d'estre utiles, et même necessaires à exprimer analytiquement des grandeurs reelles; estant impossible par exemple d'exprimer sans intervention des imaginaires la valeur analytique d'une droite necessaire à faire la trisection de l'angle donné, comme on ne sçauroit etablir nostre calcul des Transcendentes sans employer les differences qui sont sur le point d'evanouir, en prenant tout d'un coup l'incomparablement petit au lieu de ce qu'on peut assigner tousjours plus petit à l'infini. C'est encore de la même façon qu'on conçoit des dimensions au delà de trois, et même des puissances dont les exposans ne sont pas des nombres

ordinaires, le tout pour établir des idées propres à abreger les raisonnemens et fondées en realités.

Cependant il ne faut point s'imaginer que la science de l'infini est degradée par cette explication et reduite à des fictions; car il reste tousjours un infini syncategorematique, comme parle l'ecole, et il demeure vray par exemple que 2 est autant que $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ etc. ce qui est une serie infinie, dans laquelle toutes les fractions dont les numerateurs sont 1 et les denominateurs de progression Geometrique double, sont comprises à la fois, quoyqu'on n'y employe tousjours que des nombres ordinaires et quoyqu'on n'y fasse point entrer aucune fraction infiniment petite, ou dont le denominateur soit un nombre infini. De plus comme les racines imaginaires ont leur f u n d a m e n t u m i n r e, de sorte que feu Mons. Hugens, lorsque je luy communiquay que $\sqrt[2]{1+\sqrt{-3}}+\sqrt[2]{1-\sqrt{-3}}$ est egal à $\sqrt[2]{6}$, le trouva si admirable, qu'il me repondit, qu'il y a là dedans quelque chose qui nous est incompréhensible; on peut dire de même, que les infinis et infiniment petits sont tellement fondés que tout se fait dans la Geometrie, et même dans la nature, comme si c'estoient des parfaites realités, temoins non seulement nostre Analyse Geometrique des Transcendentes, mais encor ma loy de la continuité, en vertu de laquelle il est permis de considerer le repos comme un mouvement infiniment petit (c'est à dire comme equivalent à une espece de son contradictoire), et la coincidence comme une distance infiniment petite, et l'egalité comme la derniere des inegalités etc. loy que j'ay expliquée et appliqué autres fois dans les Nouvelles de la Republique des Lettres de M. Bayle, à l'occasion des regles du mouvement de des-Cartes et du R. P. de Malebranche, et dont je remarquay depuis (par la seconde edition des regles de ce Pere faite par apres) que toute la force n'avoit pas esté assez considerée. Cependant on peut dire en general que doute la continuité est une chose ideale et qu'il n'y a jamais rien dans la nature, qui ait des parties parfaitement uniformes, mais en recompense le reel ne laisse pas de se gouverner parfaitement par l'ideal et l'abstrait, et il se trouve que les regles du fini reussissent dans l'infini, comme s'il y avait des atomes (c'est à dire des elemens assignables de la nature), quoyqu'il n'y en ait point la matiere estant actuellement sousdivisée sans fin; et que vice versa les regles de l'infini reussissent dans le fini, comme s'il y avoit des infiniment petits metaphysiques, quoyqu'on n'en ait point besoin; et que la division de la matiere ne parvienne jamais à les parcelles infiniment petites: c'est par ce que tout se gouverne par raison, et qu'autrement il n'y auroit point de science ny regle, ce qui ne seroit point conforme avec la nature du souverain principe.

Au reste lorsque la lecture du Journal de Trevoux me fit écrire quelque chose sur ce qu'on y disoit contre le calcul des differences, j'avoue que je ne pensay pas à la controverse que vous, Monsieur, ou plustost ceux qui se servent du calcul des differences, ont avec M. Rolle. Ce n'est pas aussi que depuis vostre derniere que j'ay sû, que M. l'Abbé Galloys que j'honnore tousjours beaucoup, y prend part. Peut estre que son opposition ne vient que de ce qu'il croit que nous fondons la demonstration de ce calcul sur des paradoxes Metaphysiques dont je tiens moy même qu'on peut bien le degager. Sans que je m'imagine que ce savant Abbé soit capable de croire que ce calcul est aussi fautif qu'il semble que M. Rolle le dit suivant ce que vous m'apprenés, je n'ay jamais vû encor les ouvrages publiés par cet auteur. Je ne laisse pas de croire qu'il a de la penetration, et je souhaiterois qu'il la tournât du costé qui luy ouvriroit un champs propre à faire valoir son talent pour l'accroissement des sciences. Cependant son opposition même ne laissera pas de servir à eclaircir les difficultés que les commençans peuvent trouver dans nostre Analyse. Je trouve même qu'il importe beaucoup pour bien établir les fondemens des sciences qu'il y ait de tels contredisans; c'est ainsi que les Sceptiques combattaient les principes de la Geometrie, avec tout autant de raison; que le P. Gottignies, Jesuite savant, voulut jetter des meilleurs fondemens de l'Algebre, et que Messieurs Cluver et Nieuwentiit ont combattu depuis peu, quoyque differemment, nostre Analyse infinitesimale. La Geometrie et l'Algebre ont subsisté, et j'espere que nostre Science des infinis ne laissera pas de subsister aussi; mais elle vous aura une grande obligation à jamais, pour les lumieres que vous y repandés. J'ay souvent consideré qu'un Geometre, qui repondroit aux objections de Sextus Empiricus et à celles que François Suarez, auteur du livre quod nihil scitur, envoya à Clavius, ou à d'autres semblables, feroit quelque chose de plus utile qu'on ne s'imagineroit peut estre. C'est pourquoy nous n'avons point sujet de regretter

la peine qu'il faut prendre pour justifier nostre Analyse envers toute sorte d'esprits capables de l'entendre. Mais je serois bien faché cependant si cela vous arrestoit trop, puisque vous estes en estat et en train d'avancer dans la science par plusieurs belles decouvertes. J'espere d'avoir le profit et le plaisir d'en estre informé de temps en temps, et cependant je suis avec zele etc.

Beilage.

Leibniz an Pinson.

Bronsvic 29 Aoust 1701.

J'espere que M. l'Abbé Nicaise trouvera bon que je vous donne occasion de lire ce que je luy ecris, pour ne pas repeter les mêmes choses. Les Naudaeana et Patiniana me seront tres agreables. M. Naudé et M. Guy Patin estoient tous deux fort habiles et jugeoient assez librement.

Je desire d'obtenir une copie des ouvrages de Suisset, pour les faire entrer dans un recueil *Κειμηλίων φιλοσοφικῶν* que je medite, avec le livre philosophique de Ratramne que le R. P. Dom Mabillon m'a envoyé, et autres choses semblables plus modernes.

Un des Journaux de Trevoux contient quelque methode de M. Jaques Bernoulli et y mêle des reflexions sur le calcul des differences, ou j'ay tant de part. L'auteur de ces reflexions semble trouver le chemin par l'infini et l'infini de l'infini non pas assés seur et trop eloigné de la methode des anciens, mais il aura la bonté de considerer, que si les decouvertes sont considerables, la nouveauté de la methode en releve plus tost la beauté. Mais à l'egard de la seureté du chemin le livre de M. le Marquis de l'Hospital luy pourra donner satisfaction. J'adjouteray même à ce que cet illustre Mathematicien en a dit qu'on n'a pas besoin de prendre l'infini icy à la rigueur, mais seulement comme lors qu'on dit dans l'optique que les rayons du soleil viennent d'un point infiniment eloigné et ainsi sont estimés paralleles. Et quand il y a plusieurs degrés d'infini ou infiniment petit, c'est comme le globe de la terre est estimé un point à l'egard de la distance des fixes, et une boule que nous manions est encor un point en comparaison du semidiametre du globe de la terre, de sorte que la distance des fixes est comme un infini de l'infini par rapport au diametre de la boule. Car au lieu de l'infini ou de l'infiniment petit, on prend des quantités aussi grandes et aussi petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donnée, de sorte qu'on ne differe du style d'Archimede que dans les expressions qui sont plus directes dans nostre Methode, et plus conformes à l'art d'inventer.

Je n'ay pas encor le livre posthume de M. Nicole pour la grace universelle qu'il combattoit pendant sa vie. Le Journal de Trevoux m'en a appris les premieres nouvelles. Je trouve ce qu'on en rapporte assez raisonnable, mais je voudrois savoir ce qu'on en disent les Jansenistes ou pretendus tels, s'ils accusent le livre de supposition ou s'ils accusent feu M. Nicole de foiblesse. Car ils ne sont gueres endurans sur ces matieres.

M. Cellarius, savant homme de l'université de Halle, a publié une Geographie ancienne fort bonne avec des cartes conformes à ses sentimens. Mrs. Huguetan pretendent donner une nouvelle edition de la Bibliotheque de Photius. Je viens d'apprendre la mort de M. Obrecht, préteur Royal à Strasbourg, dont je suis faché, car il avoit une erudition tres grande, estant egalement jurisconsulte et homme de lettres. Ceux qui l'ont vû l'année passée à Francfort, où il estoit plenipotentiaire de France dans la controverse Palatine, m'ont dit qu'il aimoit un peu à boire avec ses amis; je ne say si cela a esté avantageux à sa santé. La France ne trouvera pas aisement une personne qui connoisse si bien les droits et affaires de l'Empire. Je vous supplie de m'envoyer un jour ce que l'auteur des loix civiles dans leur ordre naturel a fait sur le droit public, quoyque d'ailleurs il s'en faille beaucoup que sa maniere de reduire le droit en art me satisfasse, et il y a longtemps que j'ay fabriqué une idée du droit tirée des raisons naturelles qui est bien differente de la sienne. Je suis avec zele etc.

Als Antwort auf das vorstehende Schreiben ist ein Brief Varignon's an Joh. Bernoulli zu betrachten, von dem Leibniz folgenden Auszug aufbewahrt hat:

Extrait de la lettre de M. Varignon à M. Jean Bernoulli.

J'ay donné la lettre de M. Leibniz pour estre inserée dans le Journal des Savans, en explication de l'article que je vous ay envoyé des Memoires de Trevoux. En attendant que cette lettre paroisse, je n'ay pas laissé de la faire voir au P. Gouye, qui a esté fort surpris d'y voir que l'infini rigoureux que M. Leibniz dit inutile pour son calcul, n'est qu'un infini reel et existent, et non pas l'infini ideal ou inepuisable per mentem, comme ce Pere l'avoit cru en nous l'opposant dans ces Memoires, et apres cette lue, il m'a dit comme dans une espece de colere contre M. Leibniz, pourquoy ne s'expliquoit il pas ainsi dans le memoire qu'il nous avoit envoyé? J'ay aussi monstré cette lettre à M. de la Hire, qui m'a paru revenu de l'impression que ce memoire avoit faite sur luy.

C'est dans les Actes de Leipzik et à l'insceu de M. vostre frere, que le P. Gouye a pris la methode des rayons osculateurs qui luy a servi de pretexte à mal parler du calcul differentiel. Le procés n'est pas encor jugé entre M. Rolle et moy, quelques poursuites que je passe pour cela. Voicy la premiere de mes reponses que vous me marqués souhaiter. J'en ay encor une sixieme contenant encor plusieurs paralogismes de M. Rolle que je vous envoyeray une autrefois, c'est la derniere. J'attends tousjours la demonstration de la Multisection des Angles sur les nombres irrationals que vous m'avés promise.

M. le Marquis de l'Hospital a perdu son pere il y a 4 mois. C'est à l'embarras qu'elle a causé, qu'il faut attribuer son long silence.

III.

Leibniz an Varignon.

14 Avril 1702.

J'ay appris par ce que M. Bernoulli de Groningue m'a communiqué que vous avés receu m'a lettre, qu'on l'employera dans le Journal des Savans, mais qu'au sentiment du R. P. Gouye, que je m'y explique autrement que dans le memoire que le Journal de Trevoux a rendu public. Je reconnois d'avoir dit quelque chose de plus dans ma lettre, aussi estoit-il necessaire, car il s'agissoit d'éclaircir le memoire, mais je ne crois pas qu'il y ait de l'opposition. Si ce Pere en trouve et me la fait connoistre, je tacheray de la lever. Au moins n'y avoit il pas la moindre chose qui dût faire juger que j'entendois une quantité tres petite à la verité, mais tousjours fixe et determinée. Au reste j'avois écrit il y a deja quelques années à M. Bernoulli de Groningue que les infinis et infiniment petits pourroient estre pris pour des fictions, semblables aux racines imaginaires, sans que cela dût faire tort à nostre calcul, ces fictions estant utiles et fondées en realité.

S'il est encor temps, je vous supplie d'y faire changer dans la lettre deux endroits que je trouve le meriter en relisant la minute. C'est qu'en parlant des lemmes des incomparables mis dans les Actes de Leipzic, et des grandeurs qui n'entrent point en ligne de compte, il falloit dire: les unes (et non pas les uns) au prix des autres. Et un peu apres, je m'apperçois d'avoir employé puisque deux fois, trop pres l'une de l'autre, et vous supplie de changer le second en: d'autant*).

Je vous supplie aussi de faire mes complimens par occasion à M. l'Abbé Bignon, à M. le Marquis de l'Hospital, et à M. de Fontenelle. J'auray l'honneur de leur écrire, mais ne voulant pas les importuner de lettres inutiles, j'attends que je puisse leur mander quelque chose. Cependant vous m'obligerés, Monsieur, si vous me faites part de quelques nouvelles literaires mathematiques, cela se peut par la voye de M. le resident Brosseau. Je m'imagine que vous pousserés entre autres vos recherches sur les lignes physiques qui viennent du mouvement de la pesanteur ou attraction composé avec l'impetuosité conçue d'ailleurs, et que vous aurés determiné la loy des lignes planetiques de M. Cassini, où il seroit à propos d'examiner ce qui arrive quand il y a plus d'un centre d'attraction, car il est apparent que les planetes agissent l'une sur l'autre. M. Gregory publie à Oxford un systeme d'Astronomie fondé sur les attractions, je crois voir par l'index capitum qu'on m'a envoyé, qu'il considere une double Action celle du

---

*) Beide Aenderungen sind in dem obigen Briefe geschehen.

Soleil et celle de la planete principale sur le satellite, mais non pas les actions des planetes principales entr'elles, ce qui le meriteroit pourtant aussi. Je suis etc.

IV.

Varignon an Leibniz.

A Paris ce 23. May 1702.

C'est pour vous remercier avec bien de la reconnoissance de l'honneur de vos deux lettres, dont la premiere m'a été envoyée par M. Bernoulli de Groningue, et la seconde m'a été rendue par M. Pinson. Lorsque j'ay recu celle-ci, la premiere étoit desja publique dans le Journal des Scavans du 20. Mars dernier, où j'avois desja fait la premiere des deux corrections que vous me marquez en mettant les unes au lieu des uns. Pour la seconde, qui consiste à mettre d'autant au lieu du second puisque, je ne l'ay point faite; mais c'est une délicatesse de langue qui ne fait rien à la chose, et si peu sensible que sans vous je n'y auroit point fait asseurément d'attention; et elle me le paroist encore si peu que je doute qu'il y ait beaucoup de gens qui la fassent. Cette lettre a un peu étourdi nos adversaires, de sorte qu'ils ne font plus tant de bruit: ils ne laissent pourtant pas de remuer encore sourdement pour surprendre du moins les ignorans. Vous le voyez par le Journal que voici, où M. Rolle tâche de décrier votre calcul en se servant de ce calcul luy même qu'il déguise d'une maniere si grossiere qu'il n'y a pourtant que les ignorans qui y puissent être trompés. Jusqu'ici et dans toutes les objections qu'il m'a faites à l'Academie contre ce calcul, il le pretendoit toûjours fautif et sujet à l'erreur; mais je luy ay si bien démontré que les Paralogismes qu'il croyoit y voir, n'étoient que de luy, et que faute d'entendre assez ce calcul, qu'il n'ose plus l'accuser d'erreur dans ce Journal: il se contente de le dire seulement insuffisant. Comme il n'y parle point de moy, et qu'il ne seroit pas possible de luy répondre sans parler de luy et même d'une maniere qui ne manqueroit pas de contrevenir au silence que nous a imposé l'Academie, je n'oserois publier le projet de Reponse*) que voici; je me suis contenté de le donner à M. le Marquis de l'Hospital pour aider à quelqu'un, lequel n'etant point de l'Academie aura plus de liberté que moy de repondre à M. Rolle.

La raison pour laquelle à la fin de ce projet, je traite de subterfuge les Tangentes relatives de M. Rolle, c'est qu'il m'a soutenu autrefois à l'Academie dans la derniere de ses objections contre le calcul differentiel, que son égalité A (voyez le Journal) donnoit au point G (fig. 12) un maximum PG par raport à l'axe OP tiré du point O paralellement à DG; ce que j'ay démontré être faux dans la Reponse que j'en ay donnée à Mrs. nos Juges (M. Cassini, M. de la Hire, et le P. Gouye) et qu'ils doivent luy avoir communiquée, le silence que nous imposa l'Academie au mois de Novembre dernier qu'elle nomma ces trois Juges, m'ayant empéché de le luy démontrer luy même. C'est apparement pour soutenir encore ce prétendu maximum PG, qu'il donne le nom de tangente relative à DG, qu'il croyoit alors être une veritable Tangente. Outre tout ceci j'envoye de plus cette derniere Réponse à M. Bernoulli de Groningue, qui a desja touttes les autres qu'il pourra vous communiquer, si vous le souhaitez: et là vous verrez beaucoup plus de paralogismes de M. Rolle, qu'il n'a fait d'objections contre le calcul differentiel, en commettant presque toûjours plusieurs dans une même objection: par exemple, il en commet jusqu'à quatre dans la derniere dont je viens de parler. Je n'en marque pourtant rien dans la Reflexion que voici sur le Journal qui les accompagne. C'est pourquoy je vous demande en grace de ne faire aucune mention de tout ceci, c'est à dire, de ce qui s'est passé dans l'Academie entre M. Rolle et moy. Mais ce Journal étant public, tout le monde a droit d'y répondre. C'est pour cela que je l'envoye aussi à M. Bernoulli de Groningue, étant tres à propos d'y répondre aussi comme il faut dans les Actes de Leipsik, pour faire voir à ceux que M. Rolle pouroit surprendre, que M. le Marquis de l'Hospital, celuy qui répondra ici, et moy, nous ne sommes pas les seuls qui condamions M. Rolle.

---

*) Reflexions sur l'écrit de M. Rolle, inseré dans le Journal des Sçavans du 13. Avril 1702 sous le titre de Regles et Remarques pour le Problême général des Tangentes.

Voicy le pole P (fig. 13) que je luy demande de l'espêce de Conchoide EDV qu'exprime son égalité

$$D \ldots\ldots\ldots z^3 - 6pzz + yyz + ppz - 4p^3 = 0.$$

Soient les droites DL, RK, lesquelles se coupent à angles droits en A; et $AP = 3p$, $AC = \frac{1}{2}p = CM$. Soient aussi sur l'axe DL deux paraboles ordinaires AS, CT, dont la premiere ait son parametre $= p$; et la seconde, le sien $= 8p$. Apres avoir fait l'ordonnée BG qui les rencontre en F et en G, soient achevés les rectangles BH, BK, et la droite HM tirée par le point fixe M, avec KN qui luy soit paralelle. Vous voyez que si du centre P et du rayon $PE = AN$, l'on décrit l'arc EO qui rencontre GB prolongée en E, ce point E sera un de ceux qu'exprime l'égalité D, en appelant AB, z; et BE, y. Je demande aussi à M. Rolle les points d'inflexion de cette courbe, pour voir comment il déguisera la methode qui se trouve pour cela dans L'Analyse des infiniment petits.

Quant aux lignes physiques dont vous me faites l'honneur de me parler, j'ay trouvé plusieurs formules des forces centrifuges ou centripetes, que j'appelle en general forces centrales. L'application que j'en ay faite aux orbes celestes dont l'ovale de M. Cassini est du nombre, s'imprime actuellement dans les Memoires de l'Academie de 1700. Outres ces formules en voici une que vous trouverez, je croy, fort simple.

I. Soit (fig. 14) une courbe quelconque QLM, dont les forces centrales tendent touttes au point fixe C. Soit AL le rayon de la developée au point L de cette courbe, et LH la tangente en ce point. Ensuite apres avoir pris Ll indefiniment petite, soient des centres C et L les arcs de cercles LR et LE; soit de plus RP perpendiculaire sur Ll.

Quant aux noms, soient aussi $AL = n$, $LR = dx$, $Rl = dz$, $Ll = ds$, $y =$ à la force centrale vers C, et $dt =$ à l'instant que le corps à qui elle fait décrire la courbe QLM, met à parcourir l'élément Ll de cette courbe.

II. Cela posé, les triangles semblables AlL et LlE donneront $AL(n) . Ll(ds) :: Ll(ds) . LE = \frac{ds^2}{n}$. De même les triangles semblables LlR et LRP donneront aussi $Ll(ds) . Rl(dz) :: LR . RP :: y$ (force suivant LC). $\frac{ydz}{ds}$ (force suivant

PR). Or à cause de PR et El touttes deux perpendiculaires (hyp.) sur Ll, l'espace El$\left(\frac{ds^2}{n}\right)$ est ce qu'il y a de parcouru en vertu de cette force $\left(\frac{ydz}{ds}\right)$ pendant l'instant dt par le corps qui décrit l'arc élémentaire Ll, au lieu de suivre sa tangente LH, comme il auroit fait sans elle ou sans y. Donc cette force instantanée luy ayant été continuellement appliquée pendant ce tems dt, et d'ailleurs étant manifeste que des espaces ainsy parcourus en vertu de forces uniformes et toujours appliquées (ainsy qu'on le pense d'ordinaire de la pesanteur) sont comme les produits de ces forces par les quarrés des tems de leur application non-interrompue, l'on aura $\frac{ds^2}{n} = \frac{ydz}{ds} \times dt^2$, ou $y = \frac{ds^3}{n\,dz\,dt^2}$ pour la Regle cherchée.

III. Autrement. Soit de plus lD paralelle à LC: il en résultera encore un triangle DlE semblable à LlR, lequel donnera Rl(dz) LR(dx)::lE $\left(\frac{ds^2}{n}\right)$. DE $= \frac{dx\,ds^2}{ndz}$. De plus on aura aussi Ll(ds).LR(dx)::LR.LP::y (force suivant LC). $\frac{ydz}{ds}$ (force suivant LP). Donc on aura encore comme cydessus (art. II.) $\frac{dx\,ds^2}{n\,dz} = \frac{ydx}{ds} \times dt^2$, ou $y = \frac{ds^3}{n\,dz\,dt^2}$.

IV. Autrement encore. Les triangles semblables DlE, LRP, et LlR donneront aussi Rl(dz).Ll(ds)::RP.LR:: lE$\left(\frac{ds^2}{n}\right)$. lD $= \frac{ds^3}{n\,ds}$. Donc on aura encore comme cydessus (art. II.) $\frac{ds^3}{ndz} = y\,dt^2$, ou $y = \frac{ds^3}{n\,dz\,dt^2}$.

V. Il est visible qu'âfin qu'un corps se meuve uniformément sur une courbe quelconque, il faut que les directions des forces centrales requises pour la décrire, soient touttes perpendiculaires à cette courbe. Et par conséquent alors, outre $dt = ds$, l'on aura aussi $dz = ds$, ce qui changera la Regle précedente en $y = \frac{ds^3}{n\,ds^3} = \frac{1}{n}$. D'où l'on voit qu'en ce cas les forces centrales seroient toûjours en raison réciproque des rayons correspondans de la developpée de cette courbe.

VI. Pour appliquer la Regle précedente (art. II. III. IV.) à quelque éxemple, soit l'Ellipse ordinaire ALB (fig. 15) dont le

grand axe soit AB, et au foyer C de la quelle tendent les forces centrales (y) necessaries, par éxemple, à quelque Planete pour la décrire dans l'hypothese de Kepler qui fait les tems (t) comme les aires ACL, c'est à dire (en supposant $CL = r$) $dt = rdz$.

L'Analyse des Inf. petits (art. 78) donne ici le rayon (n) de la developpée $= \frac{r\,ds^3}{dz\,ds^2 - r\,dz\,ddr}$ (soit du centre C l'arc LH, et $AH = x$) $= \frac{r\,ds^3}{dz\,ds^2 + r\,dz\,ddx}$. Or (art. II. III. IV.) la force centrale $y = \frac{ds^3}{n\,dz\,dt^2}$, donc aussi $y = \frac{ds^2 + r\,ddx}{r\,dt^2}$ (à cause de $dt = rdz$) $= \frac{ds^2 + r\,ddx}{r^3\,dz^2} = \frac{ds^2}{r^3\,dz^2} + \frac{ddx}{rr\,dz^2}$. Or (si outre $AB = a$, on fait encore la distance des foyers $DC = c$, $bb = aa - cc$, et dz constante) l'équation $bdr = dz\sqrt{4ar - 4rr - bb}$ au foyer C de l'Ellipse ALB donnera aussi ddr ou $-ddx = \frac{2a\,dr\,dz - 4r\,dr\,dz}{b\sqrt{4ar - 4rr - bb}}$ (à cause de $dr = \frac{dz\sqrt{4ar - 4rr - bb}}{b}$) $= \frac{2a\,dz^2 - 4r\,dz^2}{bb}$. Donc $y = \frac{ds^2}{r^3\,dz^2} - \frac{2a + 4r}{bbrr} = \frac{dx^2 + dz^2}{r^3\,dz^2} - \frac{2a + 4r}{bbrr} = \frac{dx^2}{r^3\,dz^2} + \frac{1}{r^3} - \frac{2a + 4r}{bbrr}$ (à cause de $dx^2 = dr^2 = \frac{4ar - 4rr - bb}{bb} \times dz^2$) $= \frac{4ar - 4rr - bb}{r^3\,bb} + \frac{1}{r^3} - \frac{2a + 4r}{bbrr} = \frac{2ar}{bbr^3} = \frac{2a}{bb} \times \frac{1}{rr} = \frac{2a}{bb} \times \frac{1}{CL^2}$, ainsy que vous et M. Newton l'avez trouvé.

Je n'ay pas manqué de faire vos complimens à M. l'Abbé Bignon, à M. le Marquis de l'Hospital, et à M. de Fontenelle: celuyci lut samedy 20. May à l'Academie les lettres que vous luy avez écrites; il ne manquera pas de vous en rendre compte. Je finis donc etc.

P. S. Comme le P. Gouye est presentement converti, je luy ay donné le Memoire que M. Pinson m'a rendu de vôtre part pour la Justification du Calcul differentiel par l'Algebre ordinaire,*) affin qu'il le mette dans les Journaux de Trevoux:

---

*) Siehe die folgende Beilage.

les autheurs du Journal des Scavans ne voulant plus y inserer de Mathematique que lorsqu'ils en oût assez pour en faire un Journal entier, ce qui nous auroit fait trop attendre. C'est un parti qu'ils ont pris depuis votre Lettre imprimée dans celuy du 20. Mars dernier. M. de Fontenelle m'a dit qu'il va faire des élemens metaphysiques de vôtre Calcul, dont il a (dit-il) le systeme tout entier dans la teste. Ce qu'il y a de vray, c'est qu'il l'entend fort bien, qu'il suffist qu'il entende une chose pour être en état de la bien faire entendre aux autres, tant il a l'imagination facile et le tour d'esprit heureux. Encore une fois, Monsieur, je suis etc.

Quand vous me ferez l'honneur de m'écrire, vous pourez m'adresser vos lettres au College des quatre nations, où je suis Professeur des Mathematiques.

Beilage.

Justification du Calcul des infinitesimales par celuy de l'Algebre ordinaire.

Deux droites AX et EY (fig. 16) se coupant en C, prenons des points E et Y, et menons EA et YX perpendiculaires à la droite AX. Appellons AC, c et AE, e; AX, x et XY, y. Donc à cause des triangles semblables CAE, CXY, il y aura x — c à y comme c à e, et par consequent si la droite EY approchoit de plus en plus du point A, gardant tousjours le même Angle au point variable C, il est manifeste, que les droites c et e diminueroient tousjours, mais que cependant la raison de c à e demeureroit la même, laquelle nous supposerons icy estre autre que la raison de l'égalité, et le dit angle autre que demidroit.

Posons maintenant le cas que la droite EY vienne ainsi tomber en A même, il est manifeste que les points C et E iront aussi tomber en A, que les droites AC, AE ou c et e evanouiront, et que de l'analogie ou equation $\frac{x-c}{y} = \frac{c}{e}$ sera fait $\frac{x}{y} = \frac{c}{e}$. Donc dans le cas present il y aura $x - c = x$. Supposant, que ce cas est compris sous la regle generale. Et neantmoins c et e ne seront point des riens absolument, puisqu'elles gardent ensemble la raison de CX à XY, ou celle qui est entre le sinus entier ou

rayon, et entre la tangente qui convient à l'angle en C, lequel l'Angle nous avons supposé estre tousjours demeuré le même pendant qu'EY approchoit du point A. Car si c et e estoient des riens absolument dans ce calcul reduit au cas de la coincidence des points C, E, A, comme un rien vaut l'autre, c et e seroient egales, et de l'equation ou analogie $x:y = c:e$ seroit fait $x:y = 0:0 = 1$, c'est à dire il y auroit $x = y$, ce qui est une absurdité, puisque nous avons supposé que l'angle est autre que demidroit. Donc c et e dans ce calcul d'Algebre ne sont prises pour des riens que comparativement par rapport à x et y, mais cependant c et e ont du rapport l'une à l'autre, et on les prend pour des infinitesimales, tout comme les elemens que nostre calcul des differences reconnoist dans les ordonnées des courbes, c'est à dire pour des accroissemens et decroissemens momentanés. Ainsi on trouve dans le calcul de l'Algebre ordinaire les traces du calcul transcendant des differences, et ces mêmes singularités dont quelques sçavans se font des scrupules. Et même le calcul d'Algebre ne sauroit s'en passer, s'il doit conserver ses avantages, dont un des plus considerables est la generalité qui luy est due afin qu'il puisse comprendre tous les cas, même celuy où quelques droites données evanouissent. Ce qui seroit ridicule de ne vouloir point faire et de se priver volontairement d'une des plus grandes utilités. Tous les Analystes habiles dans la Specieuse ordinaire en ont profité, pour rendre leur calculs et constructions generales. Et cet avantage appliqué encor à la physique et particulierement aux loix du mouvement revient en partie à ce que j'appelle la loy de la Continuité qui me sert depuis longtemps de principe d'invention en physique, et encor d'examen fort commode pour voir si quelques regles qu'on donne vont bien; dont j'avois publié il y a plusieurs années un echantillon dans les Nouvelles de la Republique des lettres, prenant l'egalité pour un cas particulier de l'inegalité et le repos pour un cas particulier du mouvement, et le parallelisme pour un cas de la convergence etc. supposant non pas que la difference des grandeurs qui deviennent egales est deja rien, mais qu'elle est dans l'acte d'evanouir, et de même du mouvement, qu'il n'est pas encor rien absolument, mais qu'il est sur le point de l'estre. Et si quelqu'un n'en est point content, on peut luy faire voir à la facon d'Archimede, que l'erreur n'est point assignable et ne peut estre donnée par aucune construction. C'est ainsi qu'on a repondu à un Mathematicien tres ingenieux d'ailleurs, lequel, fondé sur des scrupules semblables à ceux qu'on oppose à nostre calcul, trouve à redire à la quadrature de la parabole, car on luy a demandé si par quelque construction il peut assigner une grandeur moindre que la difference qu'il pretend estre entre l'aire parabolique donnée par Archimede et la veritable, comme on peut tousjours faire lorsqu'une quadrature est fausse.

Cependant quoyqu'il ne soit point vray à la rigueur que le repos est une espece de mouvement, ou que l'égalité est une espece d'inégalité, comme il n'est point vray non plus que le Cercle est une espece de polygone regulier: neantmoins on peut dire, que le repos, l'égalité, et le cercle terminent les mouvemens, les égalités, et les polygones reguliers, qui par un changement continuel y arrivent en evanouissant. Et quoyque ces terminaisons soyent exclusives, c'est à dire non-comprises à la rigueur dans les varietés qu'elles bornent, neantmoins elles en ont les proprietés, comme si elles y estoient comprises, suivant le langage des infinies ou infinitesimales, qui prend le cercle, par exemple, pour un polygone regulier dont le nombre des costés est infini. Autrement la loy de la continuité seroit violée, c'est à dire puisqu'on passe des polygones au cercle, par un changement continuel et sans faire de saut, il faut aussi qu'il ne se fasse point de saut dans le passage des affections des polygones à celle du cercle

---

V.

Leibniz an Varignon.

Luzbourg pres de Berlin 20 Juin 1702.

Je vous suis obligé de la communication du Journal des Savans du 13 d'Avril de cette année, qui contient les Remarques sur le probleme de l'invention des tangentes d'une courbe donnée. La Methode qu'on y donne est infiniment defectueuse, elle est bien au dessous de la nostre et n'adjoute rien à celle de Messieurs de Fermat, des Cartes, Hudde, Slusius et semblables, qu'on avoit autresfois; car elle ne va pas aux equations irrationelles, et moins aux

transcendentes de sommation, et encor moins aux transcendentes aux exponentielles. Il semble qu'on n'y fait que deguiser les differences, et qu'on ne sauroit monstrer la source des regles sans tomber dans les methodes d'autruy. La difficulté qu'on se fait de la pluralité des tangentes à un même point de la courbe, n'est gueres considerable. Comme les points de la courbe à plus d'une tangente sont determinés et particuliers, il est aisé de les decouvrir par les voyes qui sont connues et même par les plus vulgaires. Quoyque je ne puisse point donner maintenant assés d'attention à cette matiere, je prends pourtant un moment que j'ay à moy, pour considerer la courbe de la premiere équation du Memoire dont le Journal susdit donne la figure pag. 240. L'axe estant OHM (fig. 17), et la courbe OFGM, et OH, y, l'abscisse, et HF, x, l'ordonnée ou appliquée normale, et l'équation

$$y^4 - 8ay^3 - 12axyy + 48aaxy + 4aaxx + 16aayy - 64a^3x = 0.$$

L'auteur du Memoire remarque bien qu'en cas qu'il y a OD, $x = DG$, $y = 2a$, le point G a deux tangentes CG, LG. Mais pour trouver cela, et les soustangentielles CD, LD, on n'avoit point besoin des detours qu'il prend. Car cherchant la valeur de l'appliquée x, on trouve $2ax = 3yy - 12ay + 16aa + 2(y-2a)\sqrt{(2yy - 8ay + 16aa)}$, donc $\frac{adx}{dy} = 3(y-2a) + \sqrt{(2yy - 8ay + 16aa)} + \frac{2(y-2a)(y-2a)}{\sqrt{(2yy - 8ay + 16aa)}}$, donc lorsqu'il y a $y = 2a$, on aura $dx:dy = \sqrt{(2yy - 8ay + 16aa)}:a$ = (supposé $y = 2a$) $2\sqrt{2} = x:t = 2a:t$, donc $t = a:\sqrt{2}$, tout comme l'auteur l'avoit trouvé, mais on s'apperçoit qu'il y a deux t, savoir CD et DL, parceque suivant la methode ordinaire, on trouve par les signes ou valeurs de t affirmatives ou negatives, que les tangentes des points entre O et G doivent estre menées vers O, et celles des points entre M et G vers M. D'où il suit qu'au point G doit arriver l'un et l'autre, et que la tangente doit estre double, puisqu'elle n'est point DG, qui seroit simple et commune aux deux rangs, savoir aux tangentes superieures et aux inferieures, si elle en pouvoit estre dans le cas présent.

Je m'etonne comment l'auteur du Memoire peut appeller cette DG tangente relative, comme si elle estoit Tangente icy en aucune maniere, et servoit à construire une equation qui a deux racines egales, ou coupoit la courbe en deux points coincidens. Pour cela il faudroit que les portions de courbe, OG, MG, se tou-