tenebant Veteres; ita rem ipsam, meis aequationibus differentialibus facilioribus expressam, non potuisse Tibi aliisque egregiis Viris esse ignotam: non ideo minus tamen puto et Cartesium et me aliquid utile praestitisse. Nam antequam talia ad constantes quosdam characteres calculi analytici reducuntur, tantumque omnia vi mentis et imaginationis sunt peragenda, non licet in magis composita abditaque penetrare, quae tamen, calculo semel constituto, lusus quidem jocusque videntur.

Unde jam mirum non est, Problemata quaedam post receptum calculum meum soluta haberi, quae antea vix sperabantur: ea praesertim quae ad transitum pertinent a Geometria ad Naturam, quoniam scilicet Vulgaris Geometria minus sufficit, quoties Infiniti involvitur consideratio, quam plerisque naturae operationibus inesse consentaneum est, quo melius referat Autorem suum.

Hugenius certe, qui haec studia haud dubie profundissime inspexerat, multisque modis auxerat, initio parvi faciebat Calculum meum, nondum perspecta ejus utilitate. Putabat enim dudum nota sic tantum nove exprimi: prorsus quemadmodum Robervallius et alii initio Cartesii Curvarum calculos parvi faciebant. Sed mutavit postea Hugenius sententiam suam, cum videret, quam commoda esset haec exprimendi ratio, et quam facile per eam res involutissimae evolverentur. Itaque maximi eam a se fieri aliquot ante obitum annis, non tantum in privatis ad me aliosque literis, sed publice quoque est professus.

Caeterum Transcendentium appellationem, nequid a me praeter rationem in phrasi Geometrica novari putes, sic accipio ut Transcendentes quantitates opponam Ordinariis vel Algebraicis. Et Algebraicas quidem vel Ordinarias voco quantitates, quarum relatio ad datas exprimi potest algebraice, id est per aequationes certi gradus primi, secundi, tertii etc. quales quantitates Cartesius solas in suam Geometriam recipiebat. Sed Transcendentes voco, quae omnem gradum algebraicum transcendunt. Has autem exprimimus vel per valores infinitos et in specie per series (neque enim ipsas Series, Transcendentales voco, sed quantitates ipsis exprimendas), vel per aequationes finitas, easque vel differentiales (ut cum Ordinata Cycloidis methodo mea exprimitur per Aequationem $y = \int \frac{xdx}{\sqrt{ay - yy}}$ vel exponentiales (ut cum incognita quaedam x

exprimitur per hanc Aequationem $x^x + x = 1$). Et quidem expressionem Transcendentium exponentialem pro perfectissima habeo, quippe qua obtenta nihil ultra quaerendum restare arbitror, quod secus est in caeteris.

Primus autem, ni fallor, etiam exponentiales aequationes introduxi, cum incognita ingreditur exponentem. Et jam anno primo Actorum Lipsiensium specimen dedi in exemplo quantitatis ordinariae, transcendentaliter expressae, ut res fieret intelligibilior; nempe, si quaeratur $x^x + x = 30$, patet $x = 3$ satisfacere, cum sit $3^3 + 3 = 27 + 3 = 30$.

Haec ad Te fusius scribere volui, Vir egregie, tum ut rationem Tibi redderem nomenclaturae meae, atque ὀνοματοποιίας, neve videar solis vocabulis quaesisse novitatem, ut quos Trochoidem pro Cycloide dixisse notas; tum vero maxime, ut gradus et discrimina methodorum nostrarum aliarumque ex mente mea explicatius cognoscerentur, proficereque mihi liceat ex judicio Tuo, cujus ea vis est et penetratio, ut pro certo habeam plurimas Tibi superesse praeclaras cogitationes, quibus, licet nondum absolutis, vellem non fraudari posteritatem.

Itaque, licet facile agnoscam Cryptographematum solutionem certa methodo absolvi non posse, specimina tamen ejus aliqua a Te extare proderit, quibus ipsa ars ratiocinandi occultaque pervestigandi augeatur.

Tua de Trinitate scripta, et quicquid omnino Tuum est, ut ad nos deferatur operam dabo.

Unum tantum de Suisseto vestro adhuc addam. Verum esse, quod ais, Algebram non tractasse, sed cum initio operis de Algebra Tui, etiam de inventione notarum Arithmeticarum variarumque calculandi rationum ab Algebra differentium ageres, poteras Suisseti vestratis, si in mentem venisset, optimo jure facere mentionem. Itaque nunc suggessi, ut aliquid pro Cusano nostrate redderem, pro cujus figura nunc a Te missa gratias ago. Vale diu et fave etc.

Dabam Hannoverae 28 Maii 1697.

P. S. Unum addo: Placuisse mihi phrasin acutissimi Newtoni, qui Geometrice-Irrationalia vocat, quae Cartesius in Geometriam suam non recipit. Sed haec a Transcendentibus distinguo, tanquam genus a specie. Nam illa Geometrice-Irrationalia duum generum facio. Alia enim sunt gradus certi, sed Irrationalis, quorum exponens est numerus surdus, ut $\sqrt[\sqrt{2}]{2}$, seu potestas de 2 cujus exponens sit $\frac{1}{\sqrt{2}}$; et haec voco Intercendentia, quia gradus eorum cadit inter gradus rationales: possent etiam, strictiore sensu, Geometrice (vel si mavis, Algebraice) Irrationalia appellari. Alia vero sunt gradus indefiniti, ut x^y: et haec magis proprie Transcendentia appello. Et tale problema est, Rationem vel Angulum in data ratione secare.

Siqua esset occasio Dn. Newtono, summi ingenii Viro, (forte per amicum) salutem officiosissimam a me nuntiandi, eumque meo nomine precandi, ne se ab edendis praeclaris meditationibus diverti pateretur, hoc beneficium a Te petere auderem.

Didici Dn. Eduardum Bernardum p. m., Virum certe insignem, et cujus morti valde indolui, non ita pridem in Batavis fuisse, ut pleraque Goliana Manuscripta sub hasta vendita redimeret pro Bibliotheca, ut arbitror, publica Oxoniensi. Cumque in illis contenti fuerint libri aliquot lexicorum Sinicorum formam habentes, vocabulaque et characteres Sinicos interpretantes, valde mihi gratum foret discere, hos non fuisse dissipatos per plures possessores, sed simul redemtos et in Bibliothecam publicam illatos. Talia enim collecta conservari Reipublicae interest, cum facile recuperari ac recolligi non possint. Et cum Sinensis imperii magna sit potentia et amplitudo, et nunc aditus Europaeis apertus curiositate Monarchae, Scientias nostras praesertim Mathematicas valde amantis, optarem profecto protestantes dare operam, ne alii fructum inde soli colligant. Quam ob causam etiam nuper relationem a Rectore Collegii Jesuitarum Pekinensis conscriptam ex Manuscripto mihi transmisso cum praefatione et nonnullis additamentis cognati argumenti edi curavi, qua Edicti pro Christianis promulgati Historia continetur, cum enim antea toleraretur quidem Christiana religio favore et conniventia Principis ac Magistratuum, legibus tamen contraria habebatur, ut Sinenses eam amplectentes vexationibus expositi essent. Nunc vero tandem inter religiones jure approbatas recepta est. Unde magnus merito fructus speratur, dummodo ne illi soli eum decerpant, qui superstitiones suas purae Christi doctrinae admiscent. Ego Anglis et Batavis hanc rem non negligendam censeo, non tantum pietatis et famae, sed et vel commerciorum causa. Nam cum tantus sit amor Monarchae erga

scientias Europaeas, prono ejus favore uti etiam commerciorum interesset. Qua de re nemo Te rectius Vestrates monuerit, cum in Theologia pariter ac Mathematicis excellas, et Theologia nostra apud Sinenses salvum, ut ita dicam, conductum a Mathematicis disciplinis petere cogatur.

Amicus quidam meus, linguarum studiosus, libenter nosse vellet, an exstet alicubi liber Adami Bohoriz, cui titulus Horae Arcticae de antiqua Lingua Carniolana, quoniam aliqua ex eo loca obtinere optaret. Fac mihi, quaeso, hanc gratiam, et apud vos inquiri cura, an alicubi lateat.

V.

Wallis an Leibniz.

Oxoniae Julii 30. 1697.

Literas Tuas pergratissimas Maji 28 datas accepi jam ante aliquot septimanas. Cum autem inibi de pluribus quaeris, non statim vacabat (alias item occupato) singulis respondere, et metuo ne jam non possim omnibus.

Continuas Approximationes, Series convergentes, Series infinitas quod spectat (et siqua sunt ejusmodi alia) quae mihi videntur tantundem significare; cum tamen id (quicquid sit) plurimis modis fieri possit (et quidem factum est), non repugno quin Tu singulis modis sua affigas nomina, aut haecce nomina (tantundem significantia) pro arbitrio distinguas; praesertim si vacet etiam distincte definire, quid quoque nomine significatum velis.

Questus utique sum aliquoties, quod Viri Magni suas Methodos nomine tenus venditant (quas apud se clam celant), non autem in publicum exhibent, quaenam illae sint. Sic Fermatius antehac methodum suam de Maximis et Minimis, Robervallius suam de Compositione motuum, Freniclius suam de Exclusionibus; nescio autem an eorum quisquam suam in publicum distincte tradiderit, sed hariolandum nobis permiserunt, quales fuerint, aut ut novas comminiscamur ipsi. Et siquid post factum est, imperfecte factum est.

Optaverim item ut Tibi vacet tuum Calculum Differentialem, et Newtono suam Fluxionum methodum justo ordine exponere, ut quid sit utrique commune, et quid intersit discriminis, et utramque distinctius intelligamus.

Quod non omnes continuae Appropinquationes tandem exhibent exactum valorem, omnino verum est. (Sic enim Hyperbola ad parallelam rectam ultra Asymptoton positam continuo appropinquat, sed non ad dato minus). Adeoque ego dicere soleo Approximationes, hoc est, quae ita quam-proxime accedunt, ut dato minus distent: ut quae in infinitum continuatae censendae sunt coincidere. Talesque sunt quas ego indicavi.

Si Tu id interesse putes, quod Tua approximandi Methodus per Additionem procedat, Mea per continuam Multiplicationem: id facile accommodabitur. Quippe tantundem est, sive ego dixerim $\square = \frac{9 \times 25 \times 49 \times \text{ etc.}}{8 \times 24 \times 48 \times \text{ etc.}}$, sive $\square = 1 + \frac{1}{8}\,A + \frac{1}{24}\,B + \frac{1}{48}\,C + \text{ etc.}$ Res eadem est, sed sub notatione diversa. Et utrovis modo proceditur ad dato minus, quod (processu in infinitum) tandem evanescit. Et in Brunkeriana pariter.

Ego quidem in scriptis meis plurimas adhibeo Methodos (et pro nova quaque difficultate novam comminiscor), quas attentus Lector facile animadvertat et imitetur; sed de imponendis Nominibus parum fui solicitus; fortasse minus quam oportuit.

Sic, verbi gratia, Anguli Contactus ad Circulum nullius esse magnitudinis, asserui jam pridem; non quidem omnium primus, sed Peletarii doctrinam, authoritate Clavii aliorumque oppressam, vindicavi. Cumque eadem sit ratio, hac in re, Curvarum omnium, hinc merito concludamus, Angulum Contactus ad quamvis curvam nullius esse magnitudinis (quam voces Methodum Contactuum). Atque hinc statim colligitur, cujuscunque Curvae quodvis punctum eam habere Directionem, Obliquitatem, Inclinationem (et quae sunt hujusmodi), quae est Rectae ibidem Tangentis, potestque propterea considerari, ut Pars Infinitesima istius Rectae. Atque hinc ortum ducit tota de Curvis Rectificandis doctrina (quam ego primus insinuabam ad Prop. 38. Ar. Infin.). Eademque porro ampliari potest ad Complanationem Curvarum Superficierum.

Sed et eadem Contactuum Methodus (ad speculationem Arithmeticam redacta) adhiberi potest, ubicunque est plurium magnitudinum (cujuscunque generis) superfoetatio, quarum una aliqua (vel etiam plures) sic sensim decrescit ut tandem evanescat. Adeoque ampliori nomine dici poterit, Methodus de Magnitudine evanescente, quae accommodari potest mille modis pro re nata.

Porro, ne Divaricationis, in Contactibus conspicuae, nulla ratio habeatur, hanc dico Mensuram esse Curvedinis, intensive considerate: puta, qua ratione (in circulis) totus ambitus est ambitu minor (aut arcus simili arcu), ea ratione est illa peripheria (intensive) magis curva: ut quae habet tantundem curvedinis in minori Quanto: quae vocetur Methodus Curvedinum.

Quemadmodum vero Peripheriae punctum quodvis aliam atque aliam habere censeatur Directionem, sic in curvis Dissimilaribus alia atque alia est in singulis punctis intensiva curvitas, seu gradus Curvedinis aut Flexionis: atque ut illa aestimanda est ex Recta Tangente, sic haec ex Circulo ibidem Exosculante. Nam, ut cujusque puncti in recta eadem est Directio, sic est cujusque puncti in eadem peripheria aequabilis Curvedo: quod (ex curvis omnibus) soli Circulo et Spirali circa Cylindrum convenit.

Hinc ortum ducat tuus Calculus Differentialis, et Newtoni Methodus Fluxionum, si ego utramque methodum recte intelligo. Potestque utraque (seclusa lineae curvae consideratione) Arithmetica speculatione considerata, aliis item magnitudinibus, pro re nata accommodari.

Porro, quod sit in Gravi quoddam (quod dicitur) Centrum Gravitatis, supponunt omnes, saltem Mechanicorum scriptores (quod nescio an quisquam me prior demonstravit), nempe punctum aliquod, per quod si grave plano utcunque secetur, erunt utrinque segmenta aeque gravia. Quod Centrum variis modis quaerunt, hoc est, quaerunt quasi communem totius Gravitationem quae respectivis particularum omnium gravitationibus aequipolleat. Indeque reputari potest totum Grave tantundem pendere, ponderare, quaquaversum ferri seu moveri (aliaque) ac si totum foret in illo Centro positum. Hoc ego vocaverim (ampliore nomine) Medium Arithmeticum: et pro doctrina de Centro Garavitatis, Methodum dixerim de Medio Arithmetico. Quam ego multis modis adhibeo.

Sic, si super plana basi erigi intelligatur corpus columnare, plano oblique sectum, erunt ad singula basis puncta aliae atque aliae Altitudines, quae omnes simul sumptae aequipollent communi alicui altitudini super totam basin, quam ego appellaverim altitudinem Arithmetice-mediam. Estque ea, quae Basis Centro-Gravitatis imminet, quae, in basin ducta, exhibet Ungulae magnitudinem. Quam voces Methodum Ungularum. Eademque valet de Linea (recta aut curva) in plano basis posita. Potestque facile accommodari ungulis Inclinatis.

Pariter, si planum illud intelligatur circa datam in eodem plano rectam ut axem converti, quo fiat Solidum conversione (integra an partiali) factum, erit hoc solidum (ex variarum particularum conversionibus factum) tantundem ac si ferri intelligatur tota basis, media quadam aequipollenti conversione: et quidem aequale erit Ungulae super ea basi erectae (aciem habenti in axe illo), cujus altitudo Arithmetice-media sit aequalis arcui centro gravitatis descripto (et partes partibus respective). Quam voces Methodum Conversionum. Eademque valet de curva rectave linea, in illa basi, sic circumlata.

Eademque Methodus (de Medio-Arithmetico) pluries repetita, et (pro re nata) debite adhibita, exhibebit Centrum-Gravitatis Ungularum, et Solidorum conversione factorum, Centrum-percussionis (aut Oscillationis Centrum), aliaque innumera, quorum magnam copiam videas in Mechanicis aliisque Scriptis meis.

Porro, jam olim notum est, Aream Circuli aequalem esse facto ex Radio in semissem Peripheriae, sive dimidio facti ex Radio in Peripheriam: idemque valet de Sectore ad Circuli Centrum. Est enim Circuli Sector haud aliud quam Rectangulum-Convolutum, contracta scilicet base in unum punctum, flexaque recta verticis in Arcum ipsi aequalem: unde quae erant in Rectangulo partialia Parallelogramma, jam fiunt totidem Triangula ejusdem basis et altitudinis, adeoque singula singulorum dimidia, et totum totius.

Quod pariter valet in aliis figuris convolutis (de figuris planis intellige), nempe quod convoluta est Evolutae dimidia. Quam voces Methodum Convolutionis et Evolutionis.

Sed figura solida, sic complicata, est Explicatae Triens: ut est Sector Sphaericus Cylindri. Quam voces Methodum Complicationis et Explicationis.

Sic Spiralis Archimedea est Parabola Convoluta, atque haec, Evoluta Spiralis: et Curva Parabolica, Spirali aequalis. Aliaeque Spirales, plurimae, sunt Paraboloides Convolutae. Sed et aliarum

figurarum plurimarum similes fieri possunt Convolutiones, de quibus eadem valet Regula.

Sic Semi-circulus, puta ad Axem Semi-Cycloidis positus, si distribuatur in Sectores ad Peripheriam coeuntes in base Cycloidis, est figura Convoluta (contracta base Semi-cycloidis in unum punctum), quae si evolvatur (ut quae erant arcuum chordae in punctum coeuntes, jam fiant Parallelae rectae) figura sic evoluta erit quam ego voco Trilineum Restitutum, quod itaque est Semi-circuli duplum (et partes partium respective sumptarum). Illudque Trilineum quod cum Semi-circulo complet Semi-cycloidem, nil aliud est quam hoc Trilineum Luxatum, nempe ex suo loco detrusum propter Semi-circulum ipsi et Axi suo interjectum: quod itaque si (exempto Semi-circulo) suo loco restituatur, erit ipsum Trilineum Restitutum, cui itaque aequatur. Quam voces Methodum Luxationis et Restitutionis.

Perque harum Methodorum superfoetationem seu compositionem habetur genuina Semi-cycloidis Quadratura. Quippe Trilineum Luxatum aequale est Restituto, estque hoc, duplum Semi-circuli (utpote figurae convolutae) et simul utrumque, Semi-circuli triplum.

Estque haec Luxationis et Restitutionis methodus, res maximae utilitatis in figuris compositis mensurandis.

Porro, Magnitudinis cujusque Momentum (respectu habito ad conversionis Axem aut quod hujus instar est) appellare soleo id quod fit ex Magnitudine ejusque Distantia (aut Magnitudine Centrique gravitatis distantia) ab illo Axe. Adeoque habitis Magnitudine et Distantia, habetur Momentum, vel ex Momento et earum altera habetur reliqua. Quam voces Methodum Momentorum.

Porro, eadem Figura (Plana aut Solida) considerari potest ut secta Rectis Planisve vario situ positis, quae quidem Sectiones cum eandem figuram exhibeant omnes, potest altera pro altera substitui ut fert occasio. Exempli gratia, Trilineum illud (quod voco) Restitutum concipi potest ut secta rectis Basi parallelis, atque (sic secta) est Figura Arcuum; aut rectis Axi parallelis, estque (sic secta) Figura Sinuum Versorum. Item, si Semi-cycloidi insistat semi-solidum semi-conversione factum, concipi potest hoc solidum secari planis Cycloidis Basi parallelis, aut planis Cycloidis Axi parallelis, aut etiam planis Cycloidis Plano parallelis: quarum nunc haec, nunc illa, nunc ista possit esse calculo aptior, quae itaque possit prae aliis eligi, aut earum vice substitui: quam voces Methodum Contra-sectionum.

Suntque haec aliquod specimen Methodorum mearum passim adhibitarum, quas si omnes prosequi vellem, et aptis insignire nominibus, nimius essem, sed quas attentus lector, etiam non monitus, facile advertat et imitetur, et (imitando) faciat Regulas Generales. Suntque illae vel separatim adhibendae, vel pluries repetendae, vel etiam inter se et cum aliis, variis modis immiscendae et componendae, prout fert occasio, quod a me factum esse passim videas.

Meas in Arithmetica Infinitorum Series Infinitas quod spectat, nempe quae sunt, ut numeri naturali ordine procedentes ab 0 inchoati in infinitum (sed quarum ultimus terminus, puta U, supponitur datus) vel in horum ratione duplicata, triplicata, aliasve multiplicata, aut submultiplicata, aut ex his utcunque composita, aut secundum quemcunque Exponentem designanda, puta a^p: ego eas omnes ad hanc reduxi Regulam generalem, nempe Aggregatum totius seriei infinitae, ad terminum ultimum toties positum (puta ad m U) esse ut 1 ad $p + 1$ (Potestatis exponentem unitate auctum), quaecunque sit ea potestas p (quae est una ex tuis Aequationibus Transcendentalibus). Quippe ego, praeter potestates olim receptas, puta latus, quadratum, cubum etc. (per numeros integros exponendas) potestates intermedias censui considerandas (et, credo, primus) et consequenter, inter receptas Aequationum Analyticarum formulas, lateralem, quadraticalem, cubicalem etc. intelligendas esse intermedias quotlibet, quas (credo) nemo prius consideravit, quales sunt (ni fallor) quas tu Interscendentes vocas. Indeque (quod tu bene notas) ampliatur Curvarum Geometricarum numerus, ultra quas Cartesius eo nomine dignatus est.

Verum ego Cartesio facile permiserim ut definiat ipse, quid velit ille per curvas Geometricas apud eum intelligi, licet eam compellationem nos latius extendamus. Nam eandem vocem alii aliter definire solent. Quippe Triangulum apud Euclidem (de solis Rectilineis intellectum) aliud significat quam apud Sphaericorum scriptores; item Conus et Cylindrus aliter apud Euclidem (de solis erectis), aliter apud Apollonium aliosque, qui Scalenos admittunt. Atque Euclides ipse, aliter in libro 5°, aliter in 7°, definit Proportionalia.

Has meas series Integras (Figuris Integris aptatas) non video

quin tu satis probas, sed de figurarum Partibus haesitas, an ad figurae partes accommodanda sit haec Methodus.

Verum de Partibus id ostensum est, pariter procedere, ad Arith. Infin. pr. 66 et sequentes. Et quidem, quoties Figura procedit secundum unam aliquam ejusmodi seriem (quaecunque demum ea sit), nulla est difficultas, quod videas ad pr. 67. pluresque alias sequentes.

Ubi autem Figura composita est secundum plures series, ingenio opus esse dixi, quo dirimatur figura sic composita in sui partes componentes (quod aliter atque aliter faciendum est, prout cujusque figurae natura postulat) et partibus sic diremptis separatim accommodanda est haec methodus, ubi locum habet.

Quod si non satis assequaris, sic accipe. Si mensurandum veniat Circuli vel Semi-circuli Segmentum, non protinus a totius Circuli vel Semi-circuli mensura procedendum est immediate ad mensuram Segmenti per has Series (quia non procedunt continua Segmenta secundum aliquam hujusmodi seriem simplicem), sed considerandum est Segmentum ut summa vel differentia Sectoris et Trianguli (est utique Circuli Segmentum idem ac Circuli Sector, addito vel demto respective Triangulo), quorum utrumque (separatim) est hujusmodi Series infinita, et quidem Primanorum seu Lateralium: nempe Sector ex Arcubus, et Triangulum ex Rectis, Arithmetice proportionalibus. Quae duae series separatim tractandae sunt (et inconfuse) in tota de Segmento tractatione, eisque operationibus quae ipsum spectant. Quam voces Methodum Distributionum.

Pariter in Semi-cycloide: componitur haec figura ex Semicirculo et Trilineo luxato, ejusque Ordinata componitur ex Arcu ejusque Sinu recto, puta $o = a + s$; ejusque continua incrementa aequantur continuis incrementis horum, hoc est (in notatione tua) $do = da + ds$ vel (in notatione Newtoni) $\dot{o} = \dot{a} + \dot{s}$. Item ordinatarum quadrata $o^2 = a^2 + 2as + s^2$. Pariterque in omnibus quae sequuntur operationibus huc spectantibus, separatim tractanda sunt a et s, ut a me factum videas in Tractatu de Cycloide, eoque de Motu, cap. 5. pr. 20, 21 etc.

Necdum tamen locus est adhibendis hisce meis Seriebus, quia neque a neque s hic sumuntur Arithmetice-proportionales (sed qui congruunt ipsis v sinibus versis Arithmetice-proportionalibus), qui itaque sunt adhuc resolvendi priusquam seriebus hisce locus erit (quod quomodo factum sit, in processu nostro videas) atque tandem singulas portiones Semi-cycloidis debite sumptas, singulis portionibus semi-circuli respectivis, esse ut 3 ad 1.

Quippe in tam perplexo negotio pluribus methodis opus est, quarum altera in alterius subsidium veniat; et magis adhuc quum ad solida et semi-solida segmentorum variis modis conversione facta ventum est, eorumque momenta et centra gravitatis.

Sed simplicissimus modus quadrandi Cycloidem (si nihil porro quaereretur) est quem modo indicavi. Nempe si Semi-circulus ad Cycloidis axem positus distribuatur in Sectores, coeuntes (non ad Centrum, sed) ad Peripheriam (circuli generantis) in ipsa Cycloidis base, erit haec Figura (ex Triangulis) Convoluta, hujusque Evoluta (ex totidem Rectangulis ejusdem basis et altitudinis) est Trilineum (quod voco) Restitutum; quod itaque est Semi-circuli Duplum (et partes partium respective) idemque Luxatum (interposito ad axem Semi-circulo) est Trilineum illud quod cum Semi-circulo complet Semi-cycloidem; adeoque Semi-cyclois (ex simul utrisque composita) est Semi-circuli Tripla, et partes partium respective.

Quippe*) si (fig. 4) omnia Triangula αB (in α coeuntia) Semi-circulum complentia (ejusve portionem quamlibet) intelligantur expandi in totidem Rectangula βb (Triangulorum dupla) fiet (quod voco) Trilineum Restitutum, Semi-circuli Duplum (et partes partium respective): atque hoc Trilineum, interpositu Semi-circuli Luxatum, est ipsissimum illud Trilineum, quod cum Semi-circulo complet Semi-cycloidem, qua est itaque Semi-circuli Tripla; et partes partium, respective sumptarum, Triplae. Est utique Bb trilinei Luxati, et Bb trilinei Restituti, eadem ubique, ipsique Arcui BA aequalis.

Similiter ego distribuo Semi-conchoidem in Circuli Quadrantem et Figuram Tangentium luxatam, aliasque Figuras compositas similiter, pro cujusque Compositione.

Spatium Cissoidale resolvitur in Semi-circulum et Sectores (contrario situ positos ad opposita Diametri Extrema coeuntes) prolongatos, atque sic complicatos ut in Analysi mea videre est, Mech. cap. 5 prop. 29.

---

*) Diese Stelle bis zu den Worten: Arcui AB aequalis, ist späterer Zusatz.

Methodos meas pro Tangentibus videas summatim traditas in Transactionibus Philosophicis pro Mense Martio 1672, iterumque ad Algebrae prop. 95, quas ante in Tractatu de Conicis Sectionibus passim adhibueram Anno 1655, eisdem plane nixas principiis cum tuo Calculo differentiali, sed diversa notationis formula. Nam meum a idem est atque tuum dx, nisi quod meum a sit nihil, tuum dx infinite exiguum. Et quum ea neglecta sint quae ego negligenda moneo pro abbreviando calculo, id quod super est, est tuum minutum triangulum, quod est apud te infinite-exiguum, apud me nullum est seu evanescens.

Nec tamen displicet quod res eadem aliis atque aliis modis explicetur, qui omnes suam habeant utilitatem.

Sic Indivisibilium doctrina, quamvis eodem fundamento nixa cum Veterum Exhaustionibus (adeoque non minus firma) alia tamen est (quod tu etiam mones) et insignem habet utilitatem, rem eandem succinctius et commodiori forma explicando, sicut et Arithmetica speciosa, prolixas operationum formulas in brevem synopsin reducendo. Et (ne plura nominem) Archimedea numerorum distributio (per loca, stadia, periodos etc.) in Arenario tradita, miram nacta est promotionem per eas quibus jam utimur figuras numerarias. Nec vitio dari debet Tuis aliorumque Inventis (praesentis seculi), quod Veterum fundamentis superstruantur, et novis quotidie promoveantur accessionibus.

Aequationum Transcendentium et Interscendentium appellationes mihi non displicent (imo placent ut valde appositae), qualibus et ego aliquando utor aequationibus, sed absque nomine.

Quod interpolandi Methodus multum adhuc in recessu habeat, omnino verum est; ego eam eatenus prosecutus eram, quatenus quod erat prae manibus negotium postulabat. Nec displicebit siquis eam alius ultra promoveat, atque Tu maxime.

Interpolatio Unius termini mihi tunc sufficiebat: si quando pluribus interponendis opus est, id potest multis modis fieri. Modus qui maxime obvius videtur, sic esto: Sicut Newtonus, in ordine ad Circuli, Ellipseos aut Hyperbolae quadraturam, quo unum interponat terminum, extrahit (in speciebus) Radicem Quadraticam ipsius (v. g.) $R^2 \pm c^2$, si duos velis interpositos, extrahenda erit (in speciebus) radix Cubica; si tres, Biquadratica; et quidem si quotlibet numero n notandos, extrahenda erit radix potestatis ab $n+1$ denominandae.

Quodsi supponatur hic numerus n, numerus fractus, surdus, vel utcunque *ἄῤῥητος*, comminiscendae sunt novae extractionum methodi casibus hujusmodi congruae. Quippe (quod ego saepe moneo) in omnibus operationibus Resolutoriis (quales sunt Subtractio, Divisio, Extractio radicum, Aequationum solutio, Interpolatio etc.) semper pervenietur ad id quod stricto sensu fieri non potest, sed quod utcunque designetur quasi-factum (ut sunt -1, $\frac{3}{2}$, $\sqrt{2}$ etc.). Adeoque continue procedetur ad alios aliosque gradus *ἀῤῥησίας* seu Inexplicabilitatis, in infinitum, ut nunquam desitura sit materia ultra ultraque procedendi, volentibus id aggredi. Quos quidem tantum abest ut sufflaminare velim, ut velim potius incitare. Atque, ut nollem eos sua laude fraudare qui praecesserint, ita nec eos remorari velim siqui satagunt inventis addere. Tuosque speciatim conatus laudo et approbo, qui id agere soles, ut aliorum Specimina Particularia Tu redigas in Regulas Universales. Quod Analysis Infinitesimalis latius pateat quam Methodus Tetragonistica, omnino recte mones. Est enim consideratio Arithmetica multo simplicior et magis abstracta (quod Savilius noster olim monuit), quam est Geometrica, adeoque magis Generalis, aliisque materiis applicabilis; ejusque ad Geometriam accommodatio est unus casus doctrinae universalis. Quod probe norunt, qui Euclidis Rationum doctrinam (Geometrice traditam in Lineis) multo felicius exhibent in Arithmetica Speciosa.

Atque, hoc intuitu, Cavallerii Geometriam Indivisibilium ego prosequor in mea Arithmetica Infinitorum. Et Sectiones Conicas, Cono exemptas, ego tracto ut figuras in Plano (per suas ipsarum affectiones expositas, a Cono abstractas) non minus quam Circulum et Triangulum, quae et ipsa sunt Sectiones Coni (quod et Dn. de Wit post fecit). Et Medium-Arithmeticum amplius extendo, cujus de Centro Gravitatis doctrina non est nisi unus Casus. Tuusque Calculus Differentialis latius patet quam ad Tetragonismos, aut etiam Curvarum Rectificationes.

Quod de Jacobi Gregorii Seriebus convergentibus suggeris, ego (patruelem ejus) Davidem Gregorium tuo nomine monui, qui mihi pollicitus est, Patrui sui tradita hac in re se plenius velle prosequi.

Quae Newtonum spectant, ad eum scripsi tuis verbis, simulque obtestatus sum meo nomine, ut imprimi curet quae sua supprimit scripta: quod et saepe ante feceram, sed hactenus incassum.

Quod de Sinensibus mones, ego plane tecum sentio, nempe ut sua interesse velint putare Protestantes, Religionem Christianam ibidem promovere, nec illud solis Jesuitis permittant. Sed quid ego ea in re praestare possim, non video. Sunt utique, ut plurimum, Mercatores suis rebus magis intenti quam Religionis. Id autem scripto insinuavi Tuo meoque nomine Archi-Episcopo Cantuariensi, ut quem propius spectet id curare.

Quae Tu edidisse te dicis de Religione Christiana apud Sinicos (Edicto publico) jam plenius admissa, nos nondum vidimus, saltem non ego.

Quosnam ex libris Sinicis de Bibliotheca Goliana redemit Bernardus noster, non possum dicere, cum ipse (quod tecum condoleo) mortuus sit, librique quos emit (consilio et sumptibus D. Narcissi Marsh, Archiepiscopi Dubliniensis) Dublinium sint transvecti, nec scio an eorum ullus sit apud nos Catalogus. Sed eos quos memoras libros Sinicos credo eum emisse omnes, eosque (cum reliquis) Bibliothecae Bodleianae speramus destinatos atque huc aliquando remittendos.

Librum quem memoras Adami Bohoriz (cui titulus: Horae Arcticae de antiqua lingua Carniolana) quaerendum curavi tum in publica Bodleiana Bibliotheca, tum in Collegiorum privatis, sed non invenio, metuoque ne apud nos non sit.

Suissetum (quod recte mones) potuissem cum aliis memorare (si animo tunc occurrisset), quamvis de Algebra non directe scripserit. Quippe ille (ni fallor) primus de rebus Physicis more Mathematico docuit disserere, quem secuti sunt alii aliquot, Semi-Mathematica (prout tu scite loqueris) scribentes. Quique (Galilaeum secuti) Mathesin Philosophiae naturali conjunxerunt, praesente seculo, immane quantum Physicam promoverunt. Quod et Rogerus Bacon (Vir magnus in obscuro seculo) ante annos circiter quadringentos (eoque plures) aggressus erat.

De Cryptographematis explicandis scribebam ad Editorem Actorum Lipsicorum, ipsis Calendis Januariis praesentis Anni; sed an ipse receperit nescio.

Caeterum (ut tandem finiam) amicitiam tuam gratulatus, quodque meam non sis dedignatus, valere jubeo, *Εὖ πράττειν καὶ εὖ χαίρειν* etc.

Monet D. Hospitalius, Te jam meditari Tractatum de Scientia Infiniti. Lubenter intelligeremus, An et Quando id speremus.

VI.

Leibniz an Wallis.

Literas Tuas quanto prolixiores, tanto gratiores magna cum voluptate legi, et diversarum Methodorum recensionem elegantissimam et tuo acumine dignam in illis agnosco. Puto tamen plures recte revocari posse ad unum idemque caput. Et Figurarum Resolutionem in partes assignabiles, ab ea quae fit in partes inassignabiles nataque ex hac Transformatione, toto methodi genere differre arbitror. Methodi autem inassignabilium a Calculo Differentiali sic absorbentur, ut quicquid his per figurarum contemplationem consequi licet, id ipso calculo facile possit obtineri. Quare momentorum et Regulae Guldinianae usus (cujus quidam in Pappo vestigia observant), convolutiones quas voces, et complicationes, et luxationes, aliaque id genus, ut specimina tantum universalioris infinitesimalium Methodi accipio, quae calculo differentiali tractata velut sponte nascuntur. Et ut exemplo rem illustrem, constat momentum trilinei ex axe dupliciter haberi posse: nempe vel per dimidiam summam quadratorum ab ordinatis axi applicatorum, vel per summam rectangulorum ab abscissa et ordinata basi applicatorum. Atque haec quidem Te et Paschalium et alios ingeniosa figurae meditatio docuit. Et tamen horum duorum aequipollentia statim Calculo Differentiali patet. Differentialis enim quantitas $\frac{1}{2}xyy$ prodibit $\frac{1}{2}yydx + xydy$. Est autem $yydx$ idem quod quadratum ordinatae y applicatum ad axem; et $xydy$ idem quod rectangulum sub ordinata et abscissa applicatum ad basin, vel pro re nata ad verticis tangentem. Itaque dimidia summa quadratorum ad axem, et summa rectangulorum ad basin, ex se invicem pendent, cum summa eorum aequetur quantitati datae $\frac{1}{2}xyy$. Nam ex calculo differentiali cum $\frac{1}{2}d\,\overline{xyy}$ (seu dimidia differentialis quantitas ipsius xyy) aequetur ipsi $\frac{1}{2}yydx + xydy$, utique summa horum vicissim, nempe $\frac{1}{2}\int yydx + \int xydy$, facit

$\frac{1}{2}xyy$. Summae enim differentiis reciprocae sunt. Ubi tamen notandum, interdum pro alterutro signo $+$ poni signum $-$, quod ipsa Calculi ratio itidem ostendit. Caeterum cum nos haec calculo assequi dico, non ideo figuralem considerationem contemno, quae nos huc duxit.

Sed per methodum convergentium Jacobi Gregorii, et per series infinitas Mercatoris, Newtoni et meas resolvitur figura in partes assignabiles.

Ab his vero omnibus methodis plane diversa est totoque genere alia Tua Methodus Interpolationum, ingeniosissima et felicissima mihi visa; qua optarem potuisses partes Cissoidis ad partes semicirculi reducere, ut totam ad totum reduxisti. Nam quid alia methodo consecutus sis (quemadmodum tuo et Hugenii calculo nos haec in cissoide facile obtinemus), de eo nunc non quaero. Itaque valde vellem, illam propriam tuam methodum produci longius, cum obtineantur per eam, ad quae per calculum non aeque semper aditus patet. Nam quod certo modo interpolationes in partibus desinunt in series infinitas, hic non moror. Itaque vellem aliquis juniorum tuo ductu hortatuque inventa tuae Methodi in Arithmetica Infinitorum expositae, in totis saltem, prosequeretur.

Quae meo nomine promisit D. Marchio Hospitalius, paulatim efformo, quantum per negotia alia bene multa licet. Verissimum est, inventionem Centri Gravitatis et inventionem Medii Arithmetici eodem redire. Verbi gratia, esto (fig. 5) G centrum gravitatis totius ipsarum AB, BC, CD, quarum centra propria sint E, F, H: erit AG medium-Arithmeticum inter ipsas AE, AF, AH. Et his similibusque considerationibus usus sum in Diario Gallico ante annos aliquot, cum publicarem et demonstrarem hanc propositionem universalissimam: Si mobile M simul tendat motibus quotcunque, quorum Celeritates et Directiones repraesententur (fig. 6) rectis MN, MP, MQ etc., motum compositum fore MR, ita ut haec recta transeat per S centrum commune gravitatis punctorum N, P, Q etc., et sit MR ad MS, ut numerus motuum componentium (seu punctorum N, P, Q etc.) ad unitatem. Ubi simul notavi, si omnes conatus componentes sint in eadem recta, ut AE, AF, AH, motum compositum fore ut AG. Notavi etiam alias, quadraturam vel summationem nihil aliud esse, quam inversionem Medii-Arithmetici. Nam hoc Medium habetur, si summam terminorum dividas per ipsorum numerum. Ergo vicissim ex ductu Medii-Arithmetici in numerum terminorum fit Summa. Itaque in quadrando trilineo ABCA (fig. 7) ipsae ordinatae LM habeantur pro terminis, qui ad puncta axis (aequaliter divisi) respondentia collocentur; quo facto patet utique altitudinem AB referre numerum terminorum. Ac proinde, si rectangulum ABED aequetur trilineo ABCA, ipsam AD Mediam-Arithmeticam inter omnes, posito axe aequaliter diviso. Unde et, si mobile habeat infinitas numero, magnitudineque infinite-parvas solicitationes, ut sunt ipsae LM, eodemque modo distributas vel applicatas, haberet impetum (ex infinitis istis solicitationibus compositum) ut ABCA, vel ut ABED.

Nescio an animadverteris ex Actis Lipsiensibus, me nonnihil promovisse Regulam Guldini, nempe ut via Centri Gravitatis ducta in mobile aequetur areae; id verum esse, etiam si mobilis partes successive quiescant, et reliquas motum continuantes quasi deserant, vel contra, successive se reliquis jam motis adjungant. Exempli causa evolvatur Hugeniano modo Curva ABC, et evolutione sua describat curvam ADE (fig. 8.) Notetur FGH via Centri Gravitatis totius fili, etsi totum filum non simul moveatur. Nempe sit F centrum fili adhuc curvae ABC circumplicati, seu centrum hujus ipsius Curvae, et G sit centrum fili semievoluti DBC, constantis ex recta DB et arcu BC; denique H (dimidium punctum rectae CE) sit centrum fili totaliter evoluti. Ergo rectangulum sub recta CE et curva FGH aequabitur areae trilinei mixtilinei CEAC.

Optarem non specimina tantum, sed et artificia Artis tuae Cryptolyticae conservari curares. Est enim in his velut fastigium quoddam subtilitatis simul industriaeque humanae. Agnosco certis methodis comprehendi non posse, et, si posset, minus foret artificiosa; et vel ideo velim ipsa exponi artificia, et quasi calculus problematis soluti. Neque ego ista per se, sed potius ob artem inveniendi hinc promovendam, aestimanda censeo; eoque hortor, ut omnia candide exponi cures, cum non facile extiturus sit, qui neglecta vel suppressa a Te supplere possit. Vides me procuratorem apud Te agere, simul et gloriae tuae et publici boni atque posteritatis.

Vides etiam me a Mathematicis (per se non spernendis) ad graviora transire atque adeo in re maximi momenti desinere velle, quam prioribus literis attigi ac Tu respondens pro tuo in-

signi in pietatem veram gloriamque Dei promovendam studio, cordi Tibi esse ostendisti. Sed praestare arbitror, ut quae huic fini replicare visum est mihi, peculiari schedula hic adjecta complector. Vale adhuc diu et fave etc.

Dabam Hannoverae 28 Septembr. 1697 styl. vet.

P. S. Quod de quaesitis meis curam habuisti et quae scire licuit indicasti, gratias ago. Quid de caeteris adjectis videatur, licet paucis lineis mature discere opto, vel ut reddita intelligam. Consultum judicavi, quae ad Te in adjectis perscribo, communicari etiam viro excellentis doctrinae et optimae voluntatis, Rob. Bentleio, cum quo aliqua mihi, etsi non per literas, notitia est. Quoniam enim Tua aetas gravis, ut Londinum excurras et rem coram agas, non fert, poterit ille, si videbitur, supplere vicem tuam. Sed salute a me nuntiata, commendandum illi fortasse erit, ne res intempestive spargatur.

VII.

Wallis an Leibniz.

Oxoniae Octob. 21, 1697 s. v.

Accepi hodie gratissimas tuas literas Hanoverae datas Sept. 28, 1697 s. v. simulque fasciculum ad me missum, ob quem gratias habeo. Utramque mihi transmisit D. Guilielmus Trumbul, Serenissimi Regis nostri Secretarius. Inclusam hisce schedulam (mihi non destinatam) remitto prout Tu petis. Scripsi jam modo ad D. Bentley, tuis verbis, inclusis ad illum schedulis, quas ipsi communicatas velles, ut apud Reverendissimum Archiepiscopum ea de re agat, quod ipsum facturum spero. Laudo ego propositum, tum de promovenda Religione Protestantium apud Sinas, tum de conciliandis (si fieri possit) Protestantibus, infeliciter inter se dissentientibus, quippe ego nihil video, quin possint amice coalescere, si Pontifices (utrisque inimici) non foverent has discordias. Quippe eorum interest ut Nostri non consentiant. Neque id tam intuitu Religionis moliuntur, quam grandoris secularis. Non video quin Nostrorum Adversae Partes possint in Praxi convenire. Et si qua sint in Speculativis, de quibus non possint per omnia pariter sentire, hoc mutua συγχαλαβάσει et ἐπιειχείᾳ ferri posset et taceri. Eundem Deum, eundem Christum colimus utrique, nec (quod sciam) Idololatricum quicquam cultui nostro immiscetur.

Non vacat de rebus Mathematicis quicquam addere, quia velim protinus (absque mora), cum tu id petis, de receptis tuis literis te certiorem facere. Id saltem insinuare visum est, fieri forte posse, ut una cum scriptis meis aliquot quae sub prelo sunt, Newtoni quaedam intermiscere, simulque (nisi tu prohibeas) Literarum tuarum aliquas, quae ad manus meas pervenerunt, et quae dignae sunt ut non pereant. Interim vale, Vir nobilissime, et amore digneris etc.

VIII.

Leibniz an Wallis.

Literae Tuae novissimae, eaeque breves, aliquid ultra sperare jubere videbantur, quod nisi exspectassem, respondissem promptius. Sed non putavi differendum diutius, quod interrogationi Tuae satisfaciendum esse judicarem.

Quaeris, an patiar nescio quas literas meas (ad Oldenburgium fortasse) apud Te repertas edi. Poteram petere, ut mecum antea communicentur: sed tamen satius putavi rem omnem Tuo arbitrio permittere. Tametsi enim facile intelligam, tumultuarie et a Juvene scripta, cujus progressus adhuc erant mediocres, veniam facilius quam laudem esse inventura, et, si vestrorum exquisitis scriptis conjungantur, ipsa imparitate deteriora apparitura esse, cum contra inter alias minorum gentium lucubrationes fortasse commendationem aliquam habuisse possint, atque adeo agnoscam (quod res est), magis vestrae (cui ipse faveo) quam famae meae hanc editionem esse velificaturam. Quia tamen judicas inesse aliquid non mali, nolo defugere autoritatem Tuam, et commodo reipublicae, etiam periculo opinionis meae, servire sum paratus.

Memini aliquando rogare, ut de Cryptolyticis in Artis aliquam formam redigendis cogitares. Id nunc quoque repeto. Est

enim in illis summum specimen humanae penetrabilitatis. Communicata sunt mecum quae Dn. Menkenio misisti et visa mihi cum admiratione. Sed utinam ipsam quoque methodum inveniendi addidisses. Interim spero, esse apud vos cui possis artem tuam velut haereditate tradere, quamquam ipsa vis ingenii legari cuiquam non possit. Utinam haec malles agere, quae solus potes, quam resuscitare Veteres, quod excellenter facis, sed non solus.

Intellexi laetus Ecclesiae Anglicanae nomine salutatum Russorum Autocratora; utinam ea res inserviat aperiendo nostris purioris doctrinae emissariis itineri in Sinas, de quo scribere memini. Vale etc.

Dabam Hannoverae 24 Martii st. vet. 1698.

IX.

Wallis an Leibniz.

Oxoniae 22 Julii 1698.

Quod literas a me prolixiores ante exspectaveris, quas nondum acceperis, excusatum me (precor) habeas, quod pluribus implicitus negotiis non possim simul omnibus vacare.

Literae ex tuis aliquae, quas (te permittente) me editurum insinuabam, sunt (praeter earum aliquas quae mihi tecum intercesserunt nuper) Tuarum aliquot, quae erant ad Oldenburgium scriptae, quas cum ante frustra quaesiverim tandem obtinui: nempe ad Oldenburgium Epistola data Julii 15, 1674 et Octobr. 26, 1674, aliaque (sine data) eodem anno exeunte vel ineunte sequente, et Dec. 28, 1675, et Aug. 27, 1676, et Junii 21, 1677, et Julii 12, 1677.

Velim quidem, si per locorum distantiam liceat, de singulis te consulere, et siqua sint apud te harum exemplaria, velisque inibi quicquam additum, demptum aut permutatum, tibi obtemperabo. Quodsi tumultuarie scribenti (nec eo intuitu, ut ederentur) exciderit quicquam aut minus perspicue aut minus limate dictum; vel siquid irrepserit mendi ex mendosis quibus usus sum

Apographis (quorum ipsa Autographa non vidi) quod ego non sustulerim, id illustri Viro non imputabit Lector Candidus. Sunt utcunque illae literae (prout mihi videtur) dignae ne pereant, nec inibi habetur quicquam quod te dedeceat. Nec tibi cedet dedecori, quod tam mature rebus hisce mentem adhibueris, et tanto cum judicio. Estque aliquando gratum (sed et utile) videre quomodo se res habuerint, dum sub incude fuerint, necdum prorsus limatae, et quibus passibus processerint. Quod tu ipse mones (Ep. 27 Aug. 1676) de Schediasmatis Gregorianis et Pellianis. Quod autem tu tua extenues scripta, id dandum est Modestiae tuae (quippe quae laudent alii), quodque mea praeferre videaris, Humanitati tuae debeo.

Omnino elegans est (et plane verum), quod habes (Ep. 15 Julii 1674) de Quadrando Semi-Cycloidis Segmento quodam. Segmentum aliud quoddam quadravit Hugenius et (eo prior) Wrennius noster; uterque (credo) nescius quid alter fecerit. Sequitur utrumque ex meis universaliter traditis (in Tractatu de Cycloide, et de Motu). Estque hoc universaliter verum, quod in meis designationibus quarumcunque portionum Cycloidis, si ita sumantur a, s, vel a, v, vel a, R (aut quod tantundem est,) ut destruatur a; id omne est absolute quadrabile. Quod innuebam ad Algebrae Prop. 110.

Quod ais Ep. 26 Octob. 1674, putasse non-neminem Cartesii Regulam pro dividenda Aequatione Biquadratica in duas Quadraticas non esse Universalem: qui sic putat, labitur ipse. Universalis enim est. Sed potest id pluribus modis fieri. Quippe si Aequationis Biquadraticae Radices quatuor sint a, b, c, d, possunt illa binatim componi (pro binis Quadraticis) pluribus modis, puta a, b; c, d: vel a, c; b, d: vel a, d; b, c. Ad quas combinationes inveniendas alia atque alia opus erit Aequationis Cubicae Radice. Quod autem ais (literis sequentibus) hoc non esse Novum Inventum: id omnino verum est. Hoc enim docuerat Bombellius seculo superiore, et (post eum) Vieta.

Difficultas quam memoras (Ep. 28 Dec. 1675, et 27 Aug. 1676, et 21 Junii 1677, et alibi) de Radice Aequationis Cubicae, ubi intervenit (quae dici solet) Quantitas Imaginaria (puta $\sqrt[3]{a+\sqrt{-b^2}} \pm \sqrt[3]{a-\sqrt{-b^2}} = Z$) et de Radice Binomii Cubici exquirenda: non est ut quemquem porro remoretur. Utrumque nos satis expedivimus Algebrae Capp. 46, 47, 48, 49. Quippe casus

ille non minus subest Regulis Cardanicis (rite intellectis), quam ubi talis non intervenit Imaginaria.

At inquis, quis exhibebit valorem Radicis $\sqrt{-b^2}$ vel $b\sqrt{-1}$, ut quae est Imaginaria et Impossibilis. Omnino, inquam. Sed et ipsum Quadratum $-b^2$ est non minus (stricte loquendo) Imaginarium et Impossibile. Et quidem omnino omnis Negativa quantitas (sive sit Linea, Planum, Solidum, aut aliud quicquam) est pariter Imaginaria et Impossibilis. Quippe impossibile est, ut existat quicquam quod sit minus quam Nihil. Sed, quo sensu velit qui imaginari Quadratum Negativum ($-b^2$), pariter imaginari debet Imaginarii hujus Quadrati Latus Imaginarium. Et quidem $\sqrt{-b^2}$ in $\sqrt{-b^2}$ ductum non minus facit $-b^2$, quam $\sqrt{+b^2}$ in $\sqrt{+b^2}$ facit $+b^2$. Et Radix Binomii Cubici pariter utrobique elicietur. Hujusque doctrinae summa (ni fallor) habebatur in illa mea Epistola, quam tu memoras Ep. 28 Dec. 1675.

Quae habes Ep. 27 Aug. 1676 de Figurarum Transformatione, ego plane approbo. Eadem Arte (aut quae huic aequipollet) ego passim utor in distribuendis Figuris compositis in sua membra componentia, et in Restituendis Luxatis in Aequipollentes. Absque quo frustra fuissem in eis quae habeo de Calculo Centri Gravitatis.

Quae habes Ep. 21 Junii 1677 de tua pro Tangentibus methodo, ego item approbo. Quae fuerit Slusii methodus, vel non vidi vel non memini. Vide autem annon mea methodus sit aliquanto simplicior. Eam habes jam Anno 1655 passim adhibitam, de Conicis Sectionibus Prop. 23, 30, 36, 46, 49, et alibi, eamque fusius explicatam in Transactionibus Londinensibus pro Mense Martio 1672, indeque transcriptam in meam Algebram cap. 95. Cujus haec fere summa: Sit (fig. 9) $A\alpha$ exposita quaevis curva (concava, convexa, vel utcunque curvata) cujus vertex A, intercepta Diameter vel Sinus versus (quam tu Abscissam vocas) ad Curvae partem Concavam AV (seu ad Convexam AY) $= v$, ejusque Ordinata $V\alpha$ (vel $Y\alpha$) $= b$; curvamque in α contingat recta αF (vel $\alpha \Phi$) diametro VA occurrens ultra verticem in F (vel diametro AY citra verticem in Φ), sitque subtangens quaesita FV (vel ΦY) $= f$. Intelligantur autem in Diametro AV, ultra citraque V, puncta D, D (vel in AY puncta y) eisque ordinatim applicentur DOT (vel yTO) curvae occurrentes in O, et tangenti in T (ultra curvam utrobique, ubi est trilineum $AV\alpha$ ad curvae partem convexam), sitque

VD (vel Yy) $= a$; adeoque DA (seu yA) $= v \pm a$, et DF (seu yΦ) $= f \pm a$. Et (propter similia triangula) VF . DF : : Vα . DT (vel YΦ . yΦ : : Yα . yT) $= \frac{f \pm a}{f} b$. Eritque DT $\geqq$ (aequalis vel major quam) DO; nimirum aequalis si intelligatur D in V, sed major si extra V (et similiter yT aequalis vel minor quam yO; nempe aequalis si sit y in Y, minor si extra.) Atque hactenus universaliter, qualecunque fuerit Trilineum AVα (vel AYα.) Estque (quod probe notes) eadem Tangens (sed alibi terminata in F et Φ) quae Trilineo Interno AVα, et quae Trilineo Externo AYα convenit.

Sed pro DO (quae est cum DT comparanda) sumendus est, pro quaque curva, suus cujusque debitus Character, seu Aequatio propria. Exempli gratia, si Aα sit Parabola (quae est omnium simplicissima curva), est AV . AD : : Vαq . DOq $= \frac{v \pm a}{v} b^2$, et DO $= b\sqrt{\frac{v \pm a}{v}}$. Eritque propterea $\frac{f \pm a}{f} b$ (= DT) aequalis vel major quam $b\sqrt{\frac{v \pm a}{v}}$ (= DO), adeoque (dividendo utrinque per b et quadrando) $\frac{f^2 \pm 2fa + a^2}{f^2} \geqq \frac{v \pm a}{v}$, et (decussatim multiplicando) $f^2 v \pm 2fva + va^2 \geqq f^2 v \pm f^2 a$, pariterque (deletis utrinque aequalibus, vel potius ab initio neglectis, hoc est, iis omnibus in quibus a non conspicitur, caeterisque per $\pm a$ divisis) $2fv \pm va \geqq f^2$, hoc est, aequalis si sumatur D in V; sed illa major, si extra V.

Tandem (qui methodi nucleus est) posito D in V (quo sit $a = o$, adeoque evanescant ipsius multipla omnia) fiet ($2fv \pm va = 2fv \pm 0 =$) $2fv = f^2$, et $2v = f$ subtangens quaesita.

Si pro Parabola communi Apolloniana (quam Quadraticam dicas, utpote cujus Abscissae seu interceptae Diametri sunt in Ordinatarum ratione Duplicata, seu ut earum Quadrata) exposita sit Paraboloeides Cubica, Biquadratica, Supersolidalis, aut alia cujuscunque gradus, puta quae potestatis Exponentem habeat e, tum (pro $f = 2v$) prodiret $f = 3v$, $f = 4v$, $f = 5v$, aut $f = ev$ etc., hoc est, Subtangens f foret Abscissae v multipla per numerum e (exponentem potestatis) sive sit ille numerus Integer, sive Fractus, sive utcunque Surdus (quippe jamdiu est quod ego introduxi in

Geometricam considerationem Potestates et Aequationes intermedias inter Lateralem, Quadraticam, Cubicam etc., quas tu vocas Interscendentes, et quae Exponentem habeant Indefinitum, ut e vel p, quas tu Transcendentes vocas).

Si vero Character Curvae sit magis compositus, quam est Parabolae aut Paraboloeideos, ratio rectae f ad v prodibit magis implicata: ut pro Hyperbolae prodibit $f = \frac{T + v}{\frac{1}{2}T + v} v$; pro Ellipsi vel Circulo $f = \frac{T - v}{\frac{1}{2}T - v} v$, hoc est, ut $\frac{1}{2}T \pm v$ ad $T \pm v$, sic v ad f. Atque in aliis curvis pariter pro cujusque charactere, qualium ego plura specimina ibidem exhibui. Et quidem, si non appareat prima fronte tale Trilineum ut AVα aut AYα, quomodo accommodanda sit ea res, pluribus ostendi.

Sed et ibidem ostendi, quomodo abbrevianda sit Calculi pars magna, nempe omissis sive neglectis, ab initio, omnibus illis terminis, qui forent post delendi aut rejiciendi.

Hoc est, omissis ab initio terminis illis omnibus in quibus a non conspiceretur, nec sunt in a ducendi, utpote utrinque aequalibus.

Item, omissis omnibus in quibus haberetur a^2 vel hujus superior potestas, eo quod, post depressionem per $\pm a$, si adhuc a supersit, erit ille terminus nihilo aequalis (ut sunt omnia multipla ipsius a, cum ponitur $a = 0$) sive sit ille terminus intra vinculum, sive extra vinculum Irrationalitatis, si quod sit. Adeoque, quoties in praeviis ad hoc multiplicationibus (pro analogia constituenda) occurrit terminus ab a immunis in alium sic immunem ducendus, aut terminus quo conspicitur a in alium quo sic conspicitur; negligendum est illud multiplicationis membrum, solaque illa sunt prosequenda, ubi terminus quo conspicitur a (unius dimensionis) ducendus est in terminum quo non conspicitur a.

Fundamentum hujus processus hoc est: Quo habeatur Tangentis positio, hoc prospiciendum est unicum, ut Ordinata trilinei Curvilinei AVα, cum ea quae est Ordinata Trianguli FVα, coincidat, hoc est, DO cum DT, quod non fit nisi in Va, cumque ipsius DT constans Character (pro curvis omnibus) sit $\frac{f \pm a}{f} b$, (Aequatio Lateralis quam ingreditur ipsius a dimensio unica, non plures). Sicubi ipsius habeantur plures dimensiones (a^2, a^3 etc.), erit ille terminus (etiam post depressionem per $\pm a$) nihili multiplus, adeoque nihil.

Quumque hoc quod moneo adhibetur Calculi Compendium, id quod superest, est reapse tuus Calculus Differentialis (ut non sit ea tam res nova, quam nova loquendi formula, utut Tu id forte non animadverteris). Est utique meum a tantundem ac tuum x (seu y) Abscissae segmentum, cum hoc solo discrimine, quod tuum x est infinite parvum, meum a plane nihil. Cumque deleta sunt, seu (per calculi compendium) omissa ea omnia, quae delenda forent, quod reliquum est, et ipsum tuum minutum Triangulum Differentiale (duobus ordinatis proximis interjectum) toti $FV\alpha$ simile (Tibi quidem infinite-exiguum, mihi vero plane nihil.) Quippe quo retinetur Species Trianguli, sed abstracta a Magnitudine hoc est, Triangulum hujusce Formae, sed nullius determinatae Magnitudinis.

Nec tamen id tibi imputandum est, aut vitio dandum, quod non animadverteris rem ipsam a me fuisse ante insinuatam, sed sub alia verborum formula, cum non tibi magis incumbat mea vidisse omnia (et penitius examinasse) quam mihi tua. Nec sua caret utilitate, diversis itineribus ad id ipsum (seu quod aequipollet) a pluribus perventum esse.

Quod autem mea mihi videatur designatio simplicior, ponentis $a = o$, quam tua ponentis x infinite parvum, hinc est, nempe quod mihi non opus sit tuis aliquot Postulatis de infinite-parvo in se ducto, aut in aliud infinite-parvum, in nihilum degenerante (quod nonnisi cum aliqua cautione adhibendum est), cum sit per se perspicuum (quod mihi sufficit), quod Nihili quodcunque multiplum est adhuc Nihil.

Quodque tu mones Ep. 21 Junii 1677, quod non refert quem Angulum faciunt Ordinatae ad Axem (ubi tu Axem dicis eo sensu quo alii Diametrum, quippe plures sunt v. g. ejusdem Parabolae Diametri, sed Axis unicus, ad quem scilicet Ordinatae sunt ad angulos rectos), omnino verum est; quod et ego dudum monueram, ex eo quod consideratio Anguli non ingreditur Aequationem. Quippe haec mihi Regula generalis est: Quaecunque Quantitas non ingreditur Aequationem, ea (quoad illam Aequationem) est Indeterminata, adeoque potest pro arbitrio sumi, sed intra certos limites, ne secus evadat Aequatio Impossibilis. De quo fusius diximus ad Algebrae Prop. 57.

Sed et de Tangentibus monueram, hanc meam methodum extendi ad duarum Curvarum Contactum mutuum (quatenus id fieri potest) non minus quam ad Curvae Rectaeque. Puta, si quaeratur positio Parabolae quae tangat expositam Hyperbolam, Ellipsin, Circulumve, quippe ut illic quaeritur positio Trianguli $FV\alpha$ quod sit cum Trilineo $AV\alpha$ comparandum (ex collatis Characteribus Trianguli istiusque Trilinei), hic quaerenda est positio ipsius $FV\alpha$ Parabolae cum illo Trilineo (ex comparatis utriusque Characteribus), ita ut eadem $V\alpha$ sit utriusque communis Ordinata. (Verum hic alia erit adhibenda ratio in abbreviando calculo, quam ubi de Recta tangente agitur, eo quod Trianguli Character est Aequatio Lateralis, sed Parabolae, Quadratica: et pro aliis Curvis alia atque alia). Huc*) utique res redit universim: Duorum Trilineorum diversiformium, communem Ordinatam habentium, eidem Diametro applicatam, (seu quod tantundem est) data unius altitudine, alterius altitudinem investigare (nempe ex collatis inter se utriusque Characteribus). Quod et methodum (quam vocas) Tangentium Inversam comprehendit. Atque hinc amplus aperitur exspatiandi campus, si cui libet eum ingredi, de mutuis Curvarum inter se Contactibus.

Quae omnia sunt a me tradita in Epistola ad D. Oldenburgium scripta Febr. 15, 1671 stilo Angliae, et Transactionibus Londinensibus inserta pro Mense Martio 1672, indeque transumpta in Algebrae meae Cap. 95. Eaque hic repeto, ut videas (si vacet) quantus sit tuae meaeque methodi hac in re consensus, sed sub diversis loquendi formulis, et quodnam sit utriusque commune Fundamentum. Nam justa est quam tu innuis querela Ep. 27 Aug. 1676, quod Multa, quae videntur clara, gratis assumimus Axiomata, cum tamen opus sit ipsorum Axiomatum Analysi, ut verum quod subest Fundamentum patescat, quod itaque soleo ego solicitus inquirere. Quippe, dum citra Principia consistimus, deest non parum luminis quod rem totam illustret.

Plura dicturum prohibet Epistola jam praelonga. Vale etc.

---

*) Diese Stelle bis zu den Worten: inter se contactibus, ist späterer Zusatz.