trop dans l'exemple present. On peut maintenant differentier cette equation cherchée, et il proviendra $2ye + 21e + yd21 + d22 = 0$ (3) ou bien $e = -ad21.y - ad22, :, 2y + 21$ (4) donc par (2) et (4) nous aurons

$$\left.\begin{array}{llll} + d21d21aayy & + 2d21d22aay & + d22d22aa \\ - 2d21\,11a\,.. & - 2.11d22\,a\,.. & \\ & - 11\,21d21 & ..- 11.21d22a \\ + 4.12 \quad .. & + 4.12.21 & ..+ 12.21.21 \end{array}\right\} = 0 \ (5)$$

donc l'equation

$$\left.\begin{array}{lll} + d21d21aayy & + 21d21d21aay & + d21d21.22 \\ - 2.11d21a\,.. & - 2.11\,21d21a\,.. & - 2.11d21.22 \\ + 4.12 \quad .. & + 4.12.21 \quad .. & + 4.12.22 \end{array}\right\} = 0 \ (6)$$

(qui provient par la multiplication de l'equation (2)) doit estre coincidente avec l'equation (5). Il faut donc comparer ou coincidentier le second et le 3^{me} terme, et la comparation des seconds termes donnera l'equation (6) et celle des troisiemes termes donnera l'equation (7).

Mais on dira que ces Equations sont autant ou plus difficiles à resoudre, que la quadrature proposée, d'autant que ces deux inconnues sont enveloppées de differentielles; et c'est apparemment aussi ce qui a empeché l'usage de cette Methode. A cela je reponds qu'on peut remedier à ces difficultés. Et pour cela je donneray premierement la Methode Generale de reduire plusieurs equations de differentes inconnues bien que differentiellement enveloppées à une seule, et par apres, je diray comment on pourra resoudre la derniere Equation qui n'a qu'une inconnue seule. Quant au premier point, c'est à dire quant à cette Methode generale, voicy en quoy elle consiste. Considerons les deux equations (6) et (7). L'equation (6) donne la valeur de d22, laquelle estant substituée dans l'equation (7), nous aurons l'equation (8) qui ne contiendra que 21, 22, et d21, et fournira la valeur de 22, laquelle estant differentiée, nous aurons l'equation (9) qui donnera une nouvelle valeur de d22, laquelle comparée avec celle de l'equation (6), nous aurons l'equation (10), dans laquelle il y aura la seule inconnue 21 avec ses affections d21 et dd21. Maintenant au lieu de la demandée 21, on mettra $m : n$ seu $\frac{m}{n}$, et au lieu de d21 il y aura $ndm - mdn, : nn$, et au lieu de dd21 il y aura $\begin{array}{l} + nnddm + 2mdndn \\ - mnddn - 2ndmdn \end{array}, : n^3$

Soit $11 = ap : q$ et $12 = ar : q$, car on peut tousjours supposer que ces grandeurs ont un commun denominateur, et les valeurs de 11 et 12 données et 21 avec ses affections demandées estant substituées dans l'equation (10) et ostant les fractions on aura l'equation (11), où il y aura p, q, r, formules rationelles entieres connues ou données et m, n, formules rationelles entieres demandées avec leur affections dm, ddm, dn, ddn. Et cette equation (11) est le Canon general, par lequel toute quadrature du degré proposé pourra estre resolue en equations ordinaires si cela est possible. Et cela est tousjours dans nostre pouvoir dont la raison est que toutes les grandeurs ne sont que des formules entieres et rationelles, qui enveloppent la seule indeterminée x. Ainsi au lieu de p, q, r mettant leur valeurs données, et au lieu de m mettant $30 + 31x + 32xx + 33x^3$ etc. et au lieu de n mettant $40 + 41x + 42xx + 43x^3$ etc. ou 30, 31, 32 etc. et 40, 41, 42 etc. sont maintenant des quantités constantes, dm sera $1.31 + 2.32x + 3.33x^2 + 4.34x^4$ etc. et ddm sera $1.2.32 + 2.3.33x + 3.4.34xx + 4.5.35x^3$ etc. et dn sera $1.41 + 2.42x + 3.43xx$ etc. et ddn sera $1.2.42 + 2.3.43x + 3.4.44xx$ etc. Et toutes ces valeurs données et demandées estant substituées dans l'equation (11) il faut qu'elle devienne identique, c'est à dire que tout y evanouisse, ce qui donnera moyen d'expliquer ou trouver les constantes 30, 31 etc. et 40, 41 etc. aussi bien que le moyen de determiner jusqu'à ou ces formules (qui sont finies) doivent estre produites. Et la prosecution de ce calcul donnera des theoremes. Il y a même plusieurs abregés avec quelques autres voyes et variations. Et cette même Methode est si generale, qu'elle peut servir à resoudre toute equation differentielle ou differentio-differentielle, et au delà s'il est possible de le faire par des equations ou lignes ordinaires. On pourra même dresser des Tables pour cet effect. Enfin je croy que c'est beaucoup, que cette Methode est maintenant si achevée, et qu'il ne s'agit plus que de la peine de calculer.

Cependant pour ce cas particulier ou pour ce degré dont il s'agit, ou il n'y a qu'ee, il y a une voye plus abregée, que voicy: Puisqu'il y a $ee + 11e + 12 = 0$ il y aura $e = \sqrt[2]{\frac{1}{4}11.11 - 12} - \frac{1}{2}.11$ ou bien $y = \int \sqrt[2]{\frac{1}{4}11.11 - 12} - \frac{1}{2}\int \overline{11}$, sousentendant dx une fois pour toutes mais que j'omets icy. Maintenant je suppose que la somme de la formule rationelle (11) (c'est à dire $\int \overline{11}$ ou $\int \overline{11dx}$) ou la solution des quadratures du premier degré est une affaire faite. Il ne reste donc que de trouver la somme des irrationelles comme $\sqrt[2]{\frac{1}{4}11.11-12}$, c'est à dire des racines quarrées dont le contenu sub vinculo est une formule rationelle. Ainsi le tout se reduit à $\int \sqrt[2]{h}$, supposé que la grandeur h soit une formule rationelle par x. Ainsi commençant de nouveau soit $e = \sqrt[2]{ah}$ (1) et $e = a\,dy : dx$ (2), donc si y est trouvable en ordinaires, on peut demonstrer aisement, qu'il est permis de faire generalement $y = q\sqrt{ah} : a$ (3), ou h est une formule rationelle donnée et q une demandée. Et si cela ne reussit pas, il est impossible de trouver y en ordinaires. Differentions maintenant l'equation (3) et nous aurons $e = \frac{2h\,dq + q\,dh}{2h}\sqrt{ah}$ (4) et cette valeur devant estre coincidente avec la valeur de l'equation (1), il y aura $2h\,dq + q\,dh = 2h$ (5). Maintenant pour reduire le tout aux entieres, on n'a qu'à expliquer h donnée par $m : n$ (6) et q demandée par $p : r$ (7). Et nous aurons le canon general $nprdm - mprdn + 2mnrdp - 2mnpdr = 2mnrr$ (8) ou les lettres ne signifient que des formules rationelles entieres. C'est pourquoy dans l'exemple donné on n'aura qu'à expliquer les valeurs des données m et n, et qu'à mettre $30 + 31x + 32xx + 33x^3$ etc. $= p$ (9) et $40 + 41x + 42xx$ etc. $= r$ (10), ou 30, 31 etc. item 40, 41 etc. sont des constantes. Et substituant ces valeurs dans le canon, ou equation (8), on trouvera s'il est possible de la rendre finie, identique, ou d'y trouver 30, 31 etc. item 40, 41, etc. par la destruction des termes, ensorte que p et r soyent des formules finies. On pourra faire encor d'autres preparatifs generaux ex consideratione rationalium et integrorum. Mait cecy peut suffire. Il seroit bon maintenant de faire comme une table de theoremes, en expliquant les données par ordre, par exemple si on faisoit $m = 10 + 11x$ et $12 = 20$ et cherchoit par cette methode la solution pour ce cas (quoyqu'il soit deja connu), puis pour le cas ou $m = 10$ $11x + 12xx$ et $n = 20 + 21x + 22xx$; et ainsi de suite, ou bien par une autre combinaison, comme le calcul monstrera estre a propos; et cette suite comprendra une series de tous les

cas possibles; puisqu'en mettant quelques nombres egaux à 0, d'autres cas y seront compris. Et la Table des Theoremes donnera la regle generale pour la resolution de ce degré; autant qu'il est possible de faire par les ordinaires.

On pourra se servir de la même Methode des irrationelles lors qu'on ne passe pas e^3, ou e^4 et qu' y aussi par consequent ne passe pas y^3 ou y^4, parce qu'on peut tousjours tirer les racines des equations cubiques ou quarre-quarrées. Et cela nous peut suffire, car on a peu besoin des courbes quadratrices plus hautes. Mais si on vouloit aller plus loin, on pourroit revenir à la methode que j'ay exposée au commencement de cette lettre. Ce qui est bon aussi pour resoudre l'inverse des Tangentes dans les ordinaires. Il est vray qu'il y a d'autres voyes pour parvenir aux solutions transcendentales, mais je n'en suis pas encor assez le maistre. Je ne crois pas, Monsieur, de vous avoir decouvert beaucoup de nouveautés, car vostre penetration va bien loin. En tout cas vous voyés ma bonne volonté, et je m'assure que si vous trouvés des personnes propres à m'assister dans le detail, vous serés bien aise de le faire pour l'avancement de la Science. Je suis avec zele etc.

P. S.

Il auroit esté plus à propos dans l'equation (1) de faire $e = g\sqrt{ah} : aa$, parcequ'il peut arriver, que ce qui est compris sous le vinculum, soit un produit d'une formule extrahible, ainsi au lieu de l'equation (5) il y aura $2ha\,dq + qa\,dh = 2gh(dx)$, et pour former le canon, il faudroit aussi changer g donnée en $k : n$. Mais enfin tout revient à la même methode et le calcul monstrera le plus commode.

XIII.

Leibniz an de l'Hospital.

A Hanover $\frac{8}{18}$ Fevr. 1695.

Voicy, Monsieur, la troisième lettre sur le calcul des differences par formules generales. Et comme j'avois commencé un essay dans ma precedente, qui sera propre à donner generalement les quadratures des termes comme $h\sqrt[2]{m}$, supposé h et m formules rationelles selon x; je veux encor adjouter une meditation propre à faciliter ce calcul. Je dis donc, qu'on peut tousjours reduire la chose à la quadrature de $x^e \sqrt[2]{m}$, ou de $\frac{1}{x^e}\sqrt[2]{m}$, supposé qu'e soit un nombre rationel entier, et que la grandeur m soit donnée par une formule rationelle entiere selon x, et qui n'ait aucun diviseur quarré, et par consequent n'ait rien d'extrahible. Cela posé prenons $x^e \sqrt[3]{m} = dy$ (1), on demande y. Soit $y = n\sqrt[3]{m}$ (2). Cette equation estant differentiée donnera $dy = \frac{2m\,dn + n\,dm}{2m}\sqrt[2]{m}$ (3). Or les equations (1) et (3) devant estre coincidentes, nous aurons $dn + \frac{n\,dm}{2m} = x^e$ (4). Or je dis que la formule rationelle selon x, signifiée par n doit estre entiere. Ce que je demonstre ainsi: Supposons qu'elle soit rompue et posons $n = p : q$ (5) ensorte que p et q soyent des formules rationelles entieres, premieres entre elles, et dn sera $= q\,dp - p\,dq, : qq$ (6) et au lieu de l'equation (4) nous aurons $2mq\,dp - 2mp\,dq + pq\,dm, : 2mqq = x^e$ (7), ou bien $2q\,dp - 2p\,dq + \frac{pq\,dm}{m} = 2qqx^e$ (8), donc $\frac{pq\,dm}{m}$ est entier (9), et par consequent $p\,dm : m$ (10) est encor entier. Divisons l'equation (8) par la lettre q et nous aurons $2dp - \frac{2p\,dq}{q} + \frac{p\,dm}{m} = 2qx^e$ (11). Et $2p\,dq : q$ (12) sera entier, quisque (par 10) tous les autres termes de l'equation (11) sont entiers. Mais p et q estant premieres entre elles par l'hypothese à l'equation (5) et q estant une indeterminée rationelle entiere selon x, il est impossible que $2p\,dq : q$ soit entier. Donc l'equation (5) est impossible, et par consequent n est entier (13). Cela estant demonstré, retournons à l'equation (4), je dis que dm et m sont premiers entre eux (14). Car c'est un theoreme general que la grandeur comme m, estant rationelle entiere indeterminée, ne sçauroit avoir un diviseur commun (j'entends qui soit indeterminé) avec sa differentielle dm, à moins que cette grandeur m n'ait un diviseur montant à quelque puissance, comme si m estoit egale à $t^r.v$, mais cela est contre nostre hypothese, car en ce cas r estant plus grande que l'unité et contenant au moins 2, il

est visible qu' m seroit divisible par t^2, et par consequent contiendroit quelque chose d'extrahible, car $\sqrt[2]{m}$ seroit $t\sqrt{t^{r-2}\cdot v}$, ce qui est contre nostre hypothese faite avant l'equation (1). Donc dm et m sont premiers entre eux, comme il est enoncé par l'article (14). Donc $n\,dm : m$ (15) estant entier par l'equation (4) il faut que la demandée n soit divisible par la donnée m (16) et il faudra prendre pour n une formule rationelle divisible par m. Soit donc $n = mr$ (17), et au lieu de l'equation (4) nous aurons $dn + \frac{1}{2}r\,dm = x^e$ (18), ce qui est le canon general et apres cela il ne reste que de prendre pour r (puisque m est donnée) une formule generale rationelle, entiere, indeterminée, finie, comme $10 + 11x + 12xx$ etc. $= r$ (19) la quelle estant substituée dans l'equation (17) et (18) il faudra que tout se detruise dans (18) à peu pres comme dans ma methode des series infinies. Ce qui donnera la valeur des coefficientes constantes 10, 11, 12, etc. et montrera en même temps jusqu'à ou il faudra aller dans (18), et ce qui sera possible par les ordinaires, pour resoudre l'equation (1) par (2). Et on se servira de semblables considerations fondées sur la nature des rationelles et entieres, pour abreger les calculs encor en d'autres rencontres. Mais il s'entend icy que lors qu'il est parlé des rationelles et entieres, il suffit, que la lettre x dans les formules soit hors du vinculum et du denominateur, et il n'importe point si les coefficientes constantes sont sourdes ou rompues. Et en cela cette methode a de l'avantage sur celle de Diophante, dont elle emprunte le secours.

Si m estoit irrationelle et valoit par exemple $f + \sqrt{g}$, en sorte que $\sqrt{m}$ seroit une racine universelle, cette methode ne laisseroit pas de servir. Elle servira encor pour les racines cubiques ou autres plus hautes.

XIV.

De l'Hospital an Leibniz.

J'ai receu, Monsieur, la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire du 27. decembre. Ce qui m'a empesché d'y faire reponse plûtost, c'est que je suis parti de St. André dans le temps qu'on me l'envoyoit en ce pays la. Je vous suis infiniment obligé de la maniere honneste dont vous en usez à mon egard, au sujet de l'écrit qui est entre les mains du P. Malebranche. C'est peu de chose n'y traitant que du calcul des differences, mais puisque vous souhaitez qu'il soit imprimé, je luy dirai qu'il peut le faire quand il lui plaira, mais c'est à une condition et dans l'esperance que vous voudrez bien donner au public l'ouvrage que vous meditez sur la science de l'infini et dont celui-ci ne doit être regardé que comme une introduction. Je souhaiterois extremement de pouvoir vous y aider en achevant les calculs que vous avez commencé, mais à present cela ne m'est pas possible par l'embaras ou me jettent mes affaires; d'ailleurs je ne connois ici personne qui entende vos calculs quoiqu'il y en ait plusieurs qui le souhaiteroient beaucoup et qui ne le peuvent pas faute de livres qui les expliquent clairement. Je vous renvoye vôtre essai pour l'inverse des tangentes qui me paroît tres beau et fort general quoique je ne l'aye pas encore examiné a fonds y trouvant à la premiere inspection quelques difficultez. 1° Je crois qu'il y a une erreur de calcul lorsque vous dites $\delta m = d50 + d51 . y + d52 . yy$ etc. et qu'il faut $d30 + d31 . y + d32 . yy$ etc. 2° Je ne vois point bien encore comme il faut resoudre l'equation differentielle $10dx + 11ydx + 20dy + 21ydy = 0$, car il est evident que l'equation cherchée doit avoir trois termes, c'est à dire qu'elle doit être $30 + 31y + 32yy$ et qu'ainsi la grande equation identique sera en ce cas

$$\left.\begin{array}{llll} & + 20d32.yy & + 20d31.y & + 20d30 \\ & + 21d31 & + 21d30 & - 10.31 \\ 21d32y^3 - & 2.11.32 & - 2.10.32 & \\ & & - 1.11.31. & \end{array}\right\} = 0$$

dont tous les termes doivent être egaux chacun separement à zero. Il s'ensuit donc que d32 doit être nul ce qui determine 32 ou sa valeur $\frac{21.31}{2}$ à être une quantité constante, et ainsi l'on ne resout pas l'equation generalement.

Mr. Hugens m'a mandé il y a quelque temps que vous aviez resolu l'equation differentielle $2aydy = 2aadx - xxdx - yydx$, et que vous aviez trouvé qu'elle convenoit non seulement au cercle, mais aussi à une certaine transcendente. Je serois bien aise de sçavoir si vous vous étes servi de cette methode generale pour la resoudre, et de quelle maniere vous l'avez appliquée en ce cas.

J'ai enfin vû les Journaux de Leipsic où se trouve la solution de Mr. Bernoulli de l'isochrone paracentrique, et aussi la vôtre par laquelle on voit assez que ce probleme étoit en vôtre pouvoir avant qu'il eût publié sa solution qui est beaucoup moins simple que la vôtre, puisqu'il se sert de la rectification d'une courbe transcendente ou vous n'employez qu'une algebraique ou ordinaire. Je me souviens bien que vous m'avez écrit autre fois que vous aviez trouvé une voye pour resoudre ce probleme dans le temps même que vous le proposâtes.

Vous faites fort bien voir à Mr. Bernoulli que lorsqu'une ligne courbe depend de la quadrature du cercle on peut par le moyen de la ligne des sinus en déterminer algebraiquement une infinité de points; de même que par la logarithmique lorsque la description de la courbe depend de la quadrature de l'hyperbole. Mais il me semble que vous vous étes equivoqué page 370. lorsque vous dites que pour quarrer une figure qui a pour ordonnée $\sqrt{a^4 + x^4}$ on peut employer l'extension de l'hyperbole, car je trouve que cette quadrature depend de la rectification de la parabole cubique $x^3 = 3aay$.

A l'egard des theoremes de Mr. Bernoulli pour les rayons des developpées desquels il dit *de quibus fratri nec adhuc constat*, il y a fort longtemps que je les ai trouvez, et je les ai fait imprimer dans nos Memoires de Mathematiques du 31e Aoust 1693, dans lesquels je donne aussi diverses manieres pour trouver les points des caustiques.

Il y a longtemps que la methode des cascades ou chûtes de Mr. Rolle est imprimée dans un traité d'algebre qu'il a composé, je l'ai prié de faire un extrait de cette methode que je vous enverrai à la premiere occasion avec mon analyse du probleme de la *tractoria* de Mr. Bernoulli.

Je vous serai tout à fait obligé si vous voulez bien vous resouvenir de me faire faire une de vos machines d'arithmetique aussi tost que celles qui sont de commande chez l'ouvrier seront finies. Je voudrois bien qui elle fût des plus propres, et je vous ferai tenir l'argent qu'elle coûtera par la voye que vous aurez la bonté de me marquer.

Il y a ici deux livres nouveaux qui paroissent depuis peu, l'un est intitulé Essai de dioptrique par Nicolas Hartsocker; cet autheur est un Hollandois qui demeure ici. Et l'autre est composé par Mr. de la Hire qui contient differens traitez dont voici les titres. Un traité des epicycloides et de leurs usages dans les mechaniques. L'explication des principaux effets de la glace et du froid. Une dissertation des differences des sons de la corde et de la trompete marine. Un traité des differens accidens de la vûe divisé en deux parties. Tous ces traités ne font qu'un petit in 4. On y trouve la dimension de l'espace et de la ligne courbe de l'epicycloide à la maniere des anciens. Il y a aussi l'examen de la courbe formée par les rayons reflechis dans le cercle, où il maltraite fort Mr. Tschirnhaus, mais il me semble que cela vient trop tard, tout cela se trouvant dans les Actes de Leipsic desquels cependant Mr. de la Hire ne fait aucune mention.

Il me resteroit, Monsieur, de vous remercier de toutes les honnestetez dont vos lettres sont remplies, je vous prie d'être bien persuadé que j'en ai toute la reconnoissance possible, et que je suis avec une estime parfaite vôtre tres humble et tres obeissant serviteur etc.

Après ma lettre écritte Mr. Rolle m'a envoyé l'ecrit que vous trouverez ci inclus.

A Paris ce 2e Mars 1695.

De la Methode des Cascades Algebraiques.

Cette Methode a esté faite pour resoudre, en nombres, les Egalitez ordinaires de tous les degrez, et l'on y peut distinguer deux sortes de Principes. Les Principes de la premiere sorte regardent l'invention des Limites qui conviennent à chaque racine separement. Et les autres Principes regardent l'usage que l'on peut faire de ces Limites pour trouver les racines exactes, ou pour faire l'approximation de celles qui sont irrationnelles. Et dans ce dernier cas on peut se servir des Limites, non seulement pour les égalitez numereuses, mais encore pour celles qui sont conceues en termes generaux. — Les Limites se divisent en Limites moyennes et en Limites extrémes. Il y a deux limites extrémes, l'une plus petite et l'autre plus grande que toutes les racines. Et il est aisé de les trouver par plusieurs voyes. Pour les Limites moyennes, l'on cherche une Egalité qui les renferme toutes, et qui soit d'un

degré plus simple que l'Egalité proposée. Ce qui se fait en multipliant chaque terme par son Exposant. Pour trouver les racines de cette Egalité on en cherche un autre, par le même moyen qui renferme les limites de ses racines et l'on continue de la meme maniere jusqu'à ce que l'on soit parvenu à une Egalité du premier degré. Toutes ces Egalitez s'appellent Cascades. On peut les former toutes à la fois en substituant un binome au lieu de l'inconnue, et les former aussi en d'autres manieres que l'auteur a designées. Suivant cette generation, il arrive que la Cascade qui a esté formée en dernier lieu renferme la limite moyenne de la penultieme Cascade, que les racines de la penultieme sont les limites moyennes de l'antepenultieme et ainsi de suite en retrogradant jusqu'à l'Egalité proposée. Ensuite l'auteur qui a publié cette Methode, donne 3 Régles pour regler la maniere de se servir de ces Limites, soit pour trouver les Racines effectives ou pour reconnoitre les défaillantes et pour trouver les contradictions qui constituent les differentes especes d'imaginaires de chaque Egalité ou bien pour approcher de plus en plus de ces Contradictions quand elles sont irrationnelles. Cela se pratique par le moyen de deux régles qui suffisent chacune à part pour poursuivre la racine dont on connoist les Limites jusques à ce qu'on l'ait trouvée. Voilà ce qui est du Traité d'algebre touchant les Cascades.

Dans un petit volume separé, l'auteur a prouvé l'infaillibilité de cette Methode, et sur la fin de cette démonstration il donne une idée d'une autre Methode pour l'approximation des racines des Egalitez dont les termes sont conceus en termes generaux. Il a aussi donné quelques Régles sur cette derniere Methode dans les Memoires academiques du 15e mars 1692 et il se propose de la traiter à fond, si son Algebre speculative se poursuit. Cette démonstration des Cascades est suivie d'une Methode pour resoudre les Egalitez par Geometrie où l'on peut voir aussi comment les Cascades se peuvent expliquer par la Generation des Courbes ordinaires. Et que Mr. l'Abbé Catelan n'avoit rien donné de nouveau sur cette explication qui fut considerable, dans ce Livre qui disparut en naissant, si ce n'est une suite de fautes dont la pluspart ont esté remarquées dans le Journal des Sçavans par M. Nicolas. — Enfin cette Methode de resoudre les Egalitez par Geometrie est suivie d'un demonstration pour prouger en chaque occasion que si un nombre entier n'est pas la somme de deux quarrez en entier, il ne sçauroit estre la somme de deux quarrez en fraction. Ce qui doit aussi s'entendre des nombres en fraction dont le denominateur est un quarré en regardant le numerateur comme un nombre entier etc. Il paroit par une lettre que Monsieur Leibniz a publiée, qu'il seroit bon de l'informer aussi de plusieurs autres Methodes qui ont paru en ces païs icy. Mais comme je ne sçais pas s'il trouveroit bon que je luy en envoye un Memoire, et que je n'oserois risquer de vous fatiguer sur cela, je n'en diray pas davantage que je n'aye eu l'honneur de vous voir.

XV.

Leibniz an de l'Hospital.

Je vous suis d'autant plus obligé de vostre lettre, que vos occupations vous laissoient moins de loisir pour m'écrire. Je n'ay garde de vous demander cette assistance, que je croyois pouvoir trouver par vostre entremise dans quelque personne qui y auroit esté propre à Paris, quand même la chose auroit demandé quelque depense. Mais je voy bien qu'il y a peu d'apparence. Ainsi je remettray la partie à un temps ou je me trouveray plus capable de travailler moy même. Je diray autant des deux lettres que je vous ay envoyées ensuite toutes deux adressées au R. P. de Malebranche. Cependant je seray bien aise d'en apprendre vostre sentiment.

En donnant la methode des Differences dans vostre écrit, vous donnerés, Monsieur, la Methode des sommes virtuellement, et en effect je ne distingue pas ces deux calculs. Ainsi vostre écrit sera plus qu'une introduction et j'espere d'en faire profit moy même; le mien ne sera pas en estat de paroistre si tost, si ma santé ne devient meilleure. Il ne sera point necessaire aussi, que vous vous borniés aux seules differences puisque, leur calcul est le même avec celuy des sommes, l'un estant seulement reciproque de l'autre. Par exemple j'ay trouvé comme x^{-1} est $= 1 : x$ que de même $d^{-1}x = \int x$. Par exemple, ayant trouvé

cette equation generale $\int \overline{z^e d^m n}$ *) $= z^e d^m n - e z^{\frac{e-1}{\cdot}} d^{\frac{m-1}{\cdot}} n + ee . z^{\frac{e-2}{\cdot}} d^{\frac{m-2}{\cdot}} n - e^3 . z^{\frac{e-3}{\cdot}} d^{\frac{m-3}{\cdot}}$ etc. (supposant que dz est l'unité) et faisant specialement $m = 1$, il en proviendra cette equation $\int \overline{z^e dn} = z^e dn - e . z^{\frac{e-1}{\cdot}} n + ee . z^{\frac{e-2}{\cdot}} \int \overline{n} - e^3 . z^{\frac{e-3}{\cdot}} \int\int n$ etc. Car $d^0 n = n$ et $d^{-1} n = \int n$ et $d^{-2} n = \int\int n$ ou $\int^2 n$, c'est à dire $\int \overline{\int n dz\, dz}$. Si m estoit 2, $d^m n$ seroit ddn, $d^{\frac{m-1}{\cdot}} n$ seroit dn, $d^{\frac{m-2}{\cdot}} n$ seroit n, $d^{\frac{m-3}{\cdot}} n$ seroit $\int n$, et $d^{\frac{m-4}{\cdot}} n$ seroit $\int\int n$ etc. Je me souviens que pour resoudre l'equation differentielle proposée par M. Hugens, dont parle vostre lettre, je m'estois servi de la methode qui convient à ce que je vous ay envoyé; et je le chercheray, car je m'y estois pris d'un biais singulier, que ne me revient pas à la premiere veue. Et je ne suis maintenant capable de faire que ce qui ne demande point de meditation. Lorsqu'il y a des inconveniens dans les comparaisons, qui font naistre trop de determinations, il y a plusieurs biais pour les eviter, cependant je me suis mepris en ecrivant d50, d51 etc. au lieu de d30, d31 etc. Je desireray aussi vostre jugement sur ma maniere de trouver radios osculationum, qui est si courte, et sur la maniere que j'ay donnée de mener l'isochrone par un point donné, au lieu que M. le professeur Bernoulli croyoit qu'en seule pouvoit satisfaire, et sur ma maniere de décrire les transcendantes mecaniquement, qui est fort generale. Quant à ce qui est de trouver puncta vera quadratricium, je voudrois qu'on allât plus avant à des constructions plus composées, de la même maniere qu'on trouve ces points veritables per sectionem rationis vel anguli. Il est vray que la rectification de l'Hyperbole ne donne directement que la quadrature de $\sqrt{a^4 + x^4} : xx$, au lieu que celle de la paraboloide cubique donne directement $\sqrt{a^4 + x^4}$, mais lorsque j'ay dit qu'encor cette derniere quadrature depend de la Rectification de l'Hyperbole, j'ay crû voir le moyen de reduire l'un à l'autre.

Je remercie M. Rolle de son instruction des Cascades, cependant elle ne m'instruit pas assez, estant sans exemples. Si j'estois maintenant bien propre à ces meditations, j'eun trouverois peut estre le sens; je crois qu'il y a quelque chose

---

*) In Bezug auf diese Formel ist zu vergleichen das Schreiben Leibnizens No. XXI.

de bon là dedans, quoyque nous ne manquions pas d'autres Methodes peut estre plus aisées. Son memoire dit, qu'on juge par une lettre que j'ay publiée, qu'il seroit bon de m'informer aussi de plusieurs autres methodes qui ont paru en France. Je serois bien aise de pouvoir recevoir un jour ces informations, et d'apprendre de quel endroit de ma lettre on parle. Personne jugera mieux que vous, Monsieur, si ces methodes sont de quelque consequence, et je me fierois tousjours la dessus à vostre jugement. Je ne manqueray pas de me souvenir de la Machine Arithmetique.

Je ne suis pas faché que M. de la Hire veut bien se donner la peine que je ne voudrois point prendre de reduire en demonstrations à la façon des anciens, ce que nous découvrons aisement par nos Methodes. Ce seroit encor mieux, s'il se servoit de nouveaux moyens capables d'avancer l'art d'inventer, mais c'est de quoy je doute. En tout cas il me semble, que bien loin de maltraiter M. Tschirnhaus on deuvroit luy temoigner de l'obligation. Je souhaiterois d'obtenir un extrait des paroles de M. de la Hire, qui regardent M. Tschirnhaus. J'espere que M. de la Hire rendra justice au moins à M. Hugens et à M. Romer qui ont déja donné des belles choses sur ces Epicycloides.

Puisque M. Hartsoecker pretend particulierement d'expliquer la refraction, je souhaitterois de sçavoir s'il explique la loy des sinus par une methode juste et differente de celle de M. Hugens. Ce n'est pas expliquer les couleurs fixes, que de les faire venir de certaines teintures, comme il fait selon le rapport du Journal des Sçavans. J'ay remarqué pourtant autres fois que feu M. Mariotte estoit dans le même sentiment. Mais quand il y auroit de telles teintures, comme en effect les experiences des chymistes font croire qu'il y en a quelques unes, la même question de la raison de la couleur de ces teintures revient tousjours.

Je souhaitterois une liste de ceux qui sont maintenant dans l'Academie Royale des sciences, et de leur ouvrages. M. Rolle n'en est il pas? Si M. Osannam pouvoit avancer considerablement l'Analyse de Diophante, on luy auroit de l'obligation. Je m'etonne que M. Prestet, qui ne pensoit à autre chose que je sçache que l'Algebre, n'a point avancé la science et n'a rien donné de considerable la dessus. Quand j'estois à Paris, il y avoit un jeune homme de Lion, qui me revenoit merveilleusement, il estoit de la connoissance de P. Deschales, mais il me disoit,

qu'il retournoit à Lion et suivroit je crois la profession de marchand; par malheur j'ay oublié son nom. Je ne sçay s'il aura quitté ces etudes entierement. M. Renaud at-il repliqué à l'écrit de M. Hugens, mis dans l'Histoire des ouvrages des Sçavans. N'y at-il rien de M. Sauveur? M. Hugens me mande qu'il publiera un traité philosophique. J'en suis ravi. Peut estre que j'en donneray aussi un jour quelque chose, et particulierement l'explication de l'unité de l'action mutuelle et communication des substances aussi bien que de l'union de l'ame et du corps; et cela en peu de mots dans un journal.

XVI.

De l'Hospital au Leibniz.

A Paris le 25e avril.

J'ay receu trois de vos lettres, Monsieur, auxquelles je dois reponse, il y en a deux qui m'ont été renduës par le R. P. Malebranche. Je vous demande mille pardons de n'y avoir pas fait reponse plustost, mais deux proces que j'ai presentement ne me laissent point le loisir de m'appliquer aux sçiences, surtout à celles qui demandent beaucoup d'application et un esprit libre. Je vous dirai seulement en gros que vos methodes pour l'inverse des tangentes et les quadratures me paroissent tres generales et fort belles, mais je crains, que le calcul ne soit long et difficile, et qu'il ne demande même souvent la vûe de celui qui les a inventées pour eviter plusieurs difficultez qui peuvent naître dans la comparaison des termes. Je souhaiterois extremement de trouver ici quelqu'un qui fust capable de vous aider et j'y donnerois avec plaisir mes soins, mais cela est plus difficile que vous ne pensez et nous sommes ici fort denuez de ces sortes de gens. Si vous pouviez avoir quelqu'un aupres de vous, cela seroit beaucoup mieux et en verité il me semble qu'un homme comme vous qui a fait tant de belles decouvertes et qui est rempli de vûes si importantes pour l'art d'inventer meriteroit bien d'être soulagé.

Vôtre maniere pour trouver les rayons des cercles baisans est tres courte et tres ingenieuse. Il me semble qu'elle ne sert que pour les courbes dont les appliquées sont paralleles entre elles. Je crois vous avoir deja mandé que j'ai donné il y a environ deux ans dans les Memoires de mathematique tous les theoremes de Mr. le professeur Bernoulli qu'il appelle dorez et dont il dit de quibus adhuc nec fratri constat, avec la maniere dont je les ai trouvez qui est tres simple. Je vous les enverrai si vous le souhaitez. Il n'y a point de doute qu'on peut mener l'isochrone paracentrique par un point donné comme vous le pretendez contre Mr. Bernoulli et vôtre maniere de decrire les transcendantes mechaniquement est aussi facile que generale. Il seroit trop long de vous envoyer un extrait de ce que Mr. de la Hire dit de Mr. de Tschirnhaus, il suffira de vous faire remarquer que c'est dans un endroit qui a pour titre, Examen de la courbe formée par les rayons refléchis dans un quart de cercle. Il fait d'abord un narré de ce qu'il se passa lorsque Mr. de Tschirnhaus fit part de cette decouverte à l'Academie dans lequel il dit, „il nous „voulut demontrer quelle etoit la grandeur de cette ligne courbe „par rapport au diametre du quart de cercle dans lequel elle „est decrite; mais comme la methode dont il se servoit pour sa „demonstration etoit une espece d'evolution fort differente de „celle dont Mr. Hugens s'est servi dans son traité des pendules „et qui ne nous sembloit point geometrique, n'ayant pas de„montré quelques lemmes qui devoient preceder cette evolution." Il explique sept ou huit pages plus bas quelle est cette evolution en ces termes, et il rapporte d'abord les paroles de Mr. Tschirnhaus dans son livre de medicina mentis.

„Novi equidem quendam de veritate primarii theorematis, „nempe in quo ostendo, solis radios incidentes in curvam et „inde reflexos suis intersectionibus curvas formare, rectis semper „aequales, dubitasse, et, ut mihi relatum est, etiam nunc dubi„tare; quia vero demonstrationes hae jam dudum fuere probatae „a D. Hugenio et D. Leibnitio, qui absque dubio inter primos „nostri aevi mathematicos numerantur, parum his moveor: pra„stat pergere.

„Il n'y a personne qui puisse douter que les courbes for„mées par les intersections des rayons du soleil réfléchis lors„qu'ils tombent au dedans d'une courbe, ne soient egales à des „lignes droites, non plus que toute autre sorte de courbes et le „cercle même; mais la difficulté est de demontrer quelle est la

„grandeur de cette ligne droite egale à la courbe par rapport „à quelque ligne droite connuë et donnée, comme de connoître „la circonference du cercle par rapport à son diametre.

„Dans l'exemple que j'ai rapporté ci devant, Mr. de Tschirn„haus voulant nous faire voir un échantillon de sa methode pour „trouver des lignes droites egales à des courbes, nous proposa „celle qui est formée par les rayons du soleil reflechis dans le „quart de cercle, sans nous parler alors de la maniere de la „décrire, et il nous dit qu'elle etoit egale aux trois quarts du „diametre du cercle. Car, disoit-il, si l'on couche un fil au long „de cette courbe (fig. 53) BHE, et qu'ensuite ayant plié ce fil „avec une pointe vers quelqu'un des points du quart de cercle „comme en M, ce fil etant tendu depuis M jusqu'à la courbe en „H, et le reste de ce fil comme ML etant mis parallele à AC, „son extremité L se rencontre sur la ligne AE; et cela etant de „même par tout, il arrivera que lorsque le fil sera entierement „developpé de dessus la courbe, le point M sera en C, et le „point L au point A; mais le fil etant plié depuis B jusqu'en C, „il s'ensuivra que toute la courbe BHE sera egale à la ligne AC „plus CB.

„Quoi qu'il soit vrai que si l'on commence par le point E „à developper le fil qui est couché sur la courbe en le tenant „toujours tendu par son extremité E, ce fil touchera toujours la „courbe, ou ce qui est la même chose representera une tou„chante, et alors l'extremité de ce fil par l'evolution ou le de„veloppement de la courbe BHE décrira une autre ligne courbe; „mais il ne s'ensuit pas pour cela que ce fil etant replié au „point comme M ou il rencontre le quart de cercle, et etant „etendu parallelement à AC, décrive par son extremité comme „L la ligne droite AE; et quand même la courbe BHE seroit „egale à AC plus BC, il ne s'ensuiveroit pas non plus que ce „point L parcourust la ligne droite AE. Enfin quoi que Mr. de „Tschirnhaus puisse dire, je connois trop bien qu'elle est l'ex„actitude de Mrs. Hugens et Leibniz pour pouvoir me persuader „qu'ils se soient contentez de sa parole au lieu de demonstration; „car il falloit démontrer comme j'ai fait à la fin de ce traité, „que le point L doit toujours se rencontrer sur AE; d'ou il „suit aussi que la portion HE de la courbe BHE est egale aux „deux lignes droites HM et ML jointes ensemble. Mais il „semble que Mr. de Tschirnhaus n'en avoit point d'autre dé-

„monstration que l'experience qu'il en avoit faite, comme il „disoit."

Il ne fait aucune mention de ce qui se trouve dans les Actes de Leipsic ou Mr. Bernoulli a fait voir que Mr. Tschirnhaus s'etoit trompé dans la maniere de trouver les points de la caustique, ni de ce que Mr. Tschirnhaus y a fait mettre depuis ou il avoue sa meprise et enseigne sa methode pour trouver les points des caustiques et fait voir ensuitte que cette caustique est une roulette formée par la revolution d'un cercle sur un autre cercle; et c'est pourtant tout ce que Mr. de la Hire donne dans ce traité, et ainsi il n'y a rien de nouveau, sinon les demonstrations qui sont a la maniere des anciens et par consequent fort ennuyeuses et longues. Il ne parle en aucun endroit de Mr. Romer qui a cependant trouvé de belles choses sur ces roulettes.

A l'egard de Mr. Rolle il est vrai qu'il falloit quelques exemples pour eclaircir sa methode. Je pourrai vous en envoyer si vous jugez que la chose en valle le peine. Pour ce qui est des autres methodes qu'il dit qui ont paru en France, il veut parler apparemment de quelque chose qu'il a fait mettre dans les Journaux des Sçavans sous le nom de Remi Lochei qui est son nom retourné. Je n'ai point vû ce que c'est, mais je m'en informerai de lui; comme il sçait fort peu de geometrie ne s'etant appliqué qu'a l'algebre et qu'il ignore vos methodes, je suis persuadé qu'il n'y a rien là de nouveau qui merite de vous être envoyé. Il est de l'Academie des sciences. Je prierai Mr. du Hamel qui en est le secretaire de me donner une liste de ceux qui la composent et de leur ouvrages pour vous l'envoyer. Mr. Sauveur n'a rien fait imprimer que je sçache. Mr. Hugens m'a mandé qu'il faisoit imprimer un traité philosophique touchant la theorie des planettes, leur habitances, ornemens etc. Mr. Renaud lui a repliqué. Je vous envoye ici tout ce qui s'est passé la dessus a fin que vous en puissiez juger. Je vous enverrai a la premiere occasion ce que Mr. Harsoeker met sur les refractions dans son livre. Je voudrois bien sçavoir qui est cet homme de Lion dont vous me parlez, mais comme le Pere Deschales qui le connoissoit est mort [il y a long temps et que vous n'en sçavez point le nom, il seroit tres difficile de le deterrer.

Mr. Bernoulli le medecin m'a mandé qu'il avoit proposé le probleme qui suit: trouver la courbe (fig. 54) AB qui soit telle que le poids B en descendant le long de cette courbe la presse par tout avec la même force centrifuge: ou ce qui revient au même, trouver la courbe DC telle que le poids B que l'on conçoit la developper en tombant par sa pesanteur tire par tout le fil BC avec la même force. Je trouve que la ligne AB a pour equation differentielle $\frac{yydy - aady}{\sqrt{2yy - au}} = adx$ (AE = x, EB = y), d'ou il est facile de voir que cette courbe depend de la quadrature de l'hyperbole ou de la rectification de la parabole.

Je suis, Monsieur, avec beaucoup d'estime etc.

XVII.

Leibniz an de l'Hospital.

$\frac{13}{23}$ Maj. 1695.

Je vous remercie des pieces de Mons. Renaud contre M. Hugens. Les prejugés ou presomtions sont pour M. Hugens, et j'aimerois tousjours mieux de parier pour luy que pour un autre. Cependant il faudroit estudier la matiere à fonds, et lire la theorie même de la Manoeuvre, pour juger avec connoissance de cause. J'ay cette theorie, mais je ne l'ay pas encor lûe avec assez d'attention, et je le differe jusqu'à ce que je me mette à achever mes dynamiques, pour ne faire la même chose deux fois.

Si je pouvois trouver un jeune homme d'une esperance extraordinaire et d'une curiosité un peu etendue, ce seroit mon fait, et je pourrois peut estre luy procurer même quelque avantage, mais il est rare d'en trouver et en Allemagne autant et peut estre plus qu'ailleurs. Si la hazard vous en presente ou vos amis, vous aurés la bonté de vous souvenir de moy.

Je serai bien aise de voir la Methode dont vous vous estes servi, Monsieur, pour les rayons des cercles baisans. Celle que j'ay employée est une suite de cette espece du calcul differentiel ou les coordonnées sont considerées comme indifferentiables. Et vous jugés bien qu'il n'est pas difficile de l'appliquer, soit qu'on considere les ordonnées comme paralleles ou comme convergentes. Monsieur Bernoulli le Medecin en respondant à Monsieur le Professeur son frere, rapporte que vous aviés déja trouvé ces raisons que M. le Professeur croyoit avoir trouvé le premier.

Pour ce qui est de ce joli probleme, que vous avés resolu, Monsieur, touchant la figure d'une ligne propre à faire que le contrepoids fasse tousjours equilibre avec ce qui doit estre remué, et dont M. Bernoulli le medecin a trouvé une construction fort simple, j'ay remarqué qu'il y auroit peu arriver, sans considerer le centre de gravité, par les seules differentielles; en remarquant seulement que pour faire tousjours equilibre, l'accension elementaire du poids doit estre à la descente elementaire du contrepoids en raison reciproque de leur pesanteurs; car ainsi il y aura tousjours autant de descente que d'ascension. Or les ascensions ou descentes elementaires sont les differentielles des ordonnées verticales des lignes du mouvement que les poids decrivent; et par consequent les sommes de ces differences, c'est à dire ces ordonnées mêmes seront en cette même raison. En effect le centre de gravité ne retranche la consideration des differentielles que parcequ'il en represente la somme.

Si Messieurs de l'Academie Royale des sciences n'ont trouvé d'autre difficulté dans la demonstration de Mr. Tschirnhaus que celle que M. de la Hire y represente, il estoit aisé d'y satisfaire et de suppleer à ce qu'il dit manquer à la demonstration de Mons. Tschirnhaus. Car il suffit de s'imaginer que le fil BHML (fig. 55) se trouve en partie a l'entour de la courbe BH, en partie en l'air HM et en partie LM appliqué à la regle LMN, laquelle demeurant tousjours perpendiculaire à AE peut courir la dessus et s'approche d'AC à mesure qu'on fait l'evolution avec un stile qui tient tousjours le fil tendu; ainsi il est manifeste que BH + HM + ML est tousjours egal à la même somme. Or au commencement de l'evolution, L estant en E, le fil est egal à toute la courbe BHE, et à la fin il est egal à BC + CA. Donc BHE courbe est egale à BC + CA droites. Ce mouvement même fait voir que le point L parcourt tousjours AE, il reste seulement de faire voir, que la perpendiculaire à la courbe que le style decrit, coupe l'angle du fil HML en deux; pour monstrer que cette courbe BHE est la même avec la Caustique. Mais cela se trouve aussi aisement que dans la maniere de decrire les coniques avec des fils, la tension ne se changeant point, soit

que le point H soit fixe, ou mobile. Cependant je trouve fort bon, que Monsieur de la Hire demonstre les nouvelles decouvertes à la façon des anciens Geometres et on luy en aura de l'obligation, parce qu'il rend ainsi temoignage à la verité. Mais il aura souvent besoin de beaucoup de paroles. Il faut que cet homme de Lion qui me paroissoit si propre à cultiver la Geometrie soit mort ou ait entierement abandonné les pensées mathematiques. Il deuvroit estre connu au moins des vieux Jesuites de cette ville là; mais comme il ne donne rien, il semble qu'il doit estre compté pour mort.

Je suis bien aussi de sçavoir que Remi Lochel et Mons. Rolle est la même personne. Mais ce qu'il donne dans le Journal sous ce nom, me paroist un peu enigmatique, et tellement même que je ne sçay, si l'auteur luy même ne se trouvera empeché, quand il faudra s'en servir.

Je suis ravi que M. Hugens s'est resolu de nous donner un traité philosophique sur la Theorie des planetes, et il seroit à souhaiter, qu'il pût estre porté à nous donner ses conjectures encor sur des autres matieres, je l'en ay déja prié au nom du public et je vous supplie, Monsieur, de vous joindre à moy. Je luy écrivois, que nous avons perdu des pensées excellentes de Galilei et d'autres personnes eminentes en sçavoir, parceque ces personnes ne vouloient donner que des choses qu'ils pouvoient demonstrer à la façon des Geometres.

J'applaudis à vos belles découvertes parmy lesquelles je compte vostre construction de la courbe dans laquelle la force centrifuge du mobile est egale. Je n'ose plus penser à de tels problemes dans la situation, ou ma santé se trouve. Ainsi je doute si j'y aurois reussi.

Pour me decharger de quelques unes de mes pensées et pour les empecher de se perdre (si elles en valent la peine) j'envoyeray à Paris ma maniere d'expliquer la communication des substances et l'union de l'ame avec le corps, et je seray bien aise sur tout d'apprendre la dessus les reflexions du R. P. Malebranche, aussi faut-il avouer que j'ay profité de celles qu'il a deja données. Je suis avec zele etc.

P. S.

Je vous supplie de me garder et communiquer les Analyses de vos découvertes, pour que je les puisse joindre un jour à l'ouvrage que je projette, à fin de suppleer par là à ce qui me manque. J'espere que vostre ouvrage dont vous m'avés parlé sera maintenant sous la presse. Mons. de Tschirnhaus vient de publier une seconde edition de son **Medicina Mentis**, ou il a omis les paroles, que M. de la Hire en cite. Il donne aussi pag. 100 et 101 une maniere de determiner les tangentes par les foyers, que j'en ay fait copier, pour vous l'envoyer. La vostre que vous m'envoyates un jour, estoit non seulement plus courte et plus reglée, mais encor plus generale; puisqu'elle n'estoit pas seulement pour les puissances, mais encor pour les combinaisons des lignes ou de leur puissances entre elles. Ainsi vous me feriez une faveur, Monsieur, en me communiquant la demonstration ou l'origine. Et pag. 107 il pretend donner une table de toutes les courbes Algebriques. Mais je ne sçaurois comprendre comment elle puisse estre suffisante, par exemple pour le troisieme degré il donne les courbes suivantes $y^3=x$, $y^3=xx$, $y^3=x+xx$, $y^3=x+x^3$, $y^3=xx+x^3$, $y^3=x+xx+x^3$, et ainsi dans les autres degrés. Mais je ne crois pas qu'on puisse tousjours oster tous les termes ou y se trouve hors le supreme. Quant à ce que M. Fatio Duillier a corrigé dans la premiere maniere de M. Tschirnhaus de donner les Tangentes par les foyers, il dit, qu'il y a eu une erreur dans la figure de sa premiere edition..

XVIII.

De l'Hospital au Leibniz.

Je crois, Monsieur, que vous aurez receu ma derniere lettre dans laquelle je repondois aux dernieres que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire. Je vous y envoyois les ecrits de Mrs. Hugens et Renaud touchant leur dispute. Je vous envoye à present la derniere reponse de Mr. Hugens qui m'a eté rendue depuis peu par un homme de ses amis afin qu'étant instruit à fonds de toutes leurs raisons vous puissiez decider cette dispute, qui me paroist d'importance pour la marine et phisique.

J'ai vû depuis peu les Actes de Leipsic du mois d'octobre, ce qui m'a donné occasion de composer un petit ecrit que je prends la liberté de vous envoyer, et de vous prier en même

temps de le faire inserer dans les Actes, si vous jugez qu'il en valle la peine. Le probleme que j'y resoud et qui avoit eté proposé par Mr. Bernoulli le professeur me paroist des plus curieux par rapport à la methode directe des tangentes. Vous y en trouverez aussi un autre dont je donne une construction tres simple quoi qu'il soit fort generale, et j'ai de la peine à croire qu'on pût resoudre ces sortes de problemes par la geometrie ordinaire; de sorte que c'est à vous à qui on en a l'obligation toute entiere, ces choses etant faciles lorsqu'on possede le calcul differentiel dont vous etes l'autheur. Je crois que vous aurez vû dans les Actes un probleme que j'ai resolu qui sert à trouver une certaine ligne de balancement.

Je l'avois envoyé il y a deja longtemps à Mr. Jean Bernoulli qui me manda quelque temps apres qu'il avoit trouvé une construction generale, je lui fis reponse des le même jour et lui en envoyé une qui etoit aussi fort simple, en le priant de voir si elle convenoit avec la sienne et de la faire aussi inserer dans les Actes en même temps. On m'a mandé cependant que la sienne paroissoit et que la mienne n'y etoit pas, j'entens la generale, parceque la premiere que j'avois donnée ne servoit que pour l'élévation d'un pont-levis. Nous avons ici toutes les peines du monde d'avoir les Actes, et ainsi nous ne sommes instruits que fort tard de ce qui j'y rencontre.

Le R. P. Malebranche m'a fort prié de vous faire mille complimens de sa part, et de vous marquer l'estime parfaite qu'il a pour tout ce qui vient de vous. Pour moi, Monsieur, je reconnois que je vous dois entierement le peu de progrés que j'ai fait dans la geometrie interieure, et je vous regarde avec justice comme nôtre maistre à tous.

Il y a longtemps que je n'ai receu de lettre de Mr. Hugens. Je ne sçais si son traité philosophique des planettes est achevé d'imprimer. J'aurois un extrême desir que vous eussiez les secours necessaires et le loisir pour perfectionner vos vûes, et je vous asseure qu'on ne peut être avec plus d'estime, Monsieur, vôtre tres humble et tres obeissant serviteur etc.

A Paris le 27e may (1695).

Extrait du journal d'Hollande contenant la derniere reponse de Mr. Hugens.

Ayant deja tâché deux fois (Mr. Hugens) en vain de desabuser Mr. Renaud touchant les erreurs qu'il y a dans son livre de la manoeuvre, je crois que ce seroit perdre le temps que de vouloir insister d'avantage, apres ce que j'ai dit dans ma replique que vous avez inserée dans le mois d'avril 1694. J'en demeure donc là, et puisqu'il a bien voulu faire imprimer cette replique ensemble avec la reponse qu'il y a faite, je ne suis pas en peine que ceux qui auront bien examiné ces deux pieces, puissent juger en sa faveur. Je crois même que Mr. Renaud apres avoir consideré plus à loisir mes objections, pourra reconnoistre sa faute, puisqu'il agit de bonne foi, et qu'il ne soutient la theorie, que parce qu'il est persuadé que la raison est de son côté. Il pourra s'appercevoir qu'il explique mal dans cette derniere reponse à quoi se reduit nôtre dispute; puisqu'il prend le mot de force ou de puissance dans un autre sens que je ne l'ai pris: d'où il arrive aussi necessairement, à cause des differentes definitions, qu'il prend des conclusions differentes des miennes. Mais celle ou il détermine les espaces que doit parcourir le vaisseau dans les deux cas, suit si peu de son raisonnement precedent, que je m'etonne qu'il l'ait pû prendre pour legitime. Il verra ici ce que m'ecrivent touchant nôtre difference deux illustres geometres, que je pourrai nommer s'il est necessaire, apres leur en avoir demandé la permission. L'un conclut par ces mots: Quand on est entesté sur tout dans les questions ou la physique a part, je trouve qu'on en revient difficilement. Il me semble que si vôtre replique ne le fait point, il seroit assez inutile que d'autres l'entreprissent. L'autre dit: J'ai vû avec chagrin que Mr. Renaud ne l'est point rendu à vos raisonnemens, et qu'il se croyoit assez fort pour s'opposer tout seul et à vous, et à tout ce qu'il y a de mathematiciens au monde: j'aurois eté tenté de joindre mes raisons aux vôtres, et d'imprimer une double demonstration que j'ai de la proposition que l'on conteste, si etc.

XIX.

Leibniz an de l'Hospital.

Hanover ce $\frac{14}{24}$ Juin 1695.

Je ne doute point, Monsieur, que vous n'ayiés receu celle que je me suis donné l'honneur de vous écrire ou j'avois joint un extrait de la nouvelle edition de la Medecine de l'Esprit de Mons. Tschirnhaus. Maintenant je n'ay point voulu manquer de vous donner avis de la reception de la vostre, et du soin que j'ay eu d'envoyer à Leipzig, ce que vous y avés inseré pour les Actes qu'on y public. Vos constructions sont tres simples et l'adresse avec laquelle vous les avés obtenues est singuliere. Il n'est que trop vray qu'on s'enfonce aisement dans les grands calculs, quand on neglige de preparer les figures.

Vostre construction de la courbe propre à l'elevation d'un pont levis est dans les Actes du mois de fevrier de cette année. Mais la generale n'y est pas, car je me souviens que Mr. Jean Bernoulli m'ecrivit, que vos seconds ordres n'estoient arrivés, que lors qu'il avoit deja envoyé le probleme avec les solutions à Leipzig. Il vous en aura rendu compte sans doute, luy même vous honnorant comme il temoigne de faire et avec raison.

Il semble aussi a moy que M. Renaud prend le terme de la Force un peut autrement qu'à l'ordinaire, et comme cela fait naistre des equivocations, je seray obligé de lire un jour son livre avec application pour dechifrer son sens, et pour trouver en quoy il aura manqué.

Je viens de recevoir deux livres qu'un mathematicien de Hollande, nommé Monsieur Bernard Nieuwentiit vient de faire imprimer et m'a envoyé exprés. Il se plaint de vous, Monsieur, de Messieurs Bernoulli, et de moy, parceque nous employons nos raisonnemens fondés sur le Calcul de differences, sans avoir donné des demonstrations de nos principes. Il croit même que de nostre calcul s'ensuit, que lorsqu'on prend les differences des abscisses x egales, celles des ordonnées y et des courbes ou arcs c le devroient estre aussi. Il passe encor plus avant, et blâme quasi tous les Mathematiciens qui ont raisonné sur ces matieres; parce qu'il n'ont point distingué infinite parvum a