qui se remarquent par tout, et qu'on auroit bien de la peine à decouvrir en employant des lettres a, b, c, sur tout lors que le nombre des lettres et des equations est grand. Une partie du secret de l'analyse consiste dans la caracteristique, c'est à dire dans l'art de bien employer les notes dont on se sert, et vous voyés, Monsieur, par ce petit echantillon, que Viete et des Cartes n'en ont pas encor connu tous les mysteres. En poursuivant tant soit peu ce calcul on viendra à un *theoreme general* pour quelque nombre de lettres et d'equations simples qu'on puisse prendre. Le voicy comme je l'ay trouvé autres fois: *Datis aequationibus quotcunque sufficientibus ad tollendas quantitates, quae simplicem gradum non egrediuntur, pro aequatione prodeunte, primo sumendae sunt omnes combinationes possibiles, quas ingreditur una tantum coefficiens uniuscujusque aequationis; secundo, eae combinationes opposita habent signa, si in eodem aequationis prodeuntis latere ponantur, quae habent tot coefficientes communes, quot sunt unitates in numero quantitatum tollendarum unitate minuto; caeterae habent eadem signa.* J'avoue que dans ce cas des degrés simples on auroit peut estre decouvert le même theoreme en ne se servant que de lettres à l'ordinaire, mais non pas si aisement, et ces adresses sont encor bien plus necessaires pour decouvrir des theoremes qui servent à oster les inconnues montées à des degrés plus hauts. Par exemple, pour oster la lettre x par le moyen de deux equations dont l'une est de trois degrés, l'autre de deux, je suppose $10x^3 + 11x^2 + 12x + 13 = 0$ et $20x^2 + 21x + 22 = 0$, ou le caractére anterieur du coefficient marque l'equation et le caractere posterieur marque le degré dont il est coefficient, en remplissant la loix des homogenes. Ce qui sert à les observer dans tout le progres de l'operation. Dans les equations plus hautes pour mieux s'asseurer du calcul, on peut au lieu du dernier terme prendre un nombre tel que l'equation donneroit on prenant x pour l'unité ou pour quelque nombre veritable, par exemple au lieu de $10x^3 + 11x^2 + 12x + 13 = 0$ on pourroit écrire $10x^3 + 11x^2 + 12x - 11220$, prenant x pour 10, pourveu qu'on se souvienne que 11220 signifie un solide ou une grandeur de trois dimensions; ainsi le calcul se verifiera tousjours en nombres veritables, et se pourra même examiner

à tout moment par l'abjection du novenaire, ou de l'ondenaire, et neantmoins les harmonies paroistront par tout substituant 13 pour — 11220. En calculant ainsi on trouvera des theoremes et on dressera les tables que j'ay souhaittées. On voit aussi par là une chose que j'ay indiquée déja dans les occasions, c'est que la perfection de l'Algebre depend de l'art des Combinaisons qui est proprement la Specieuse Generale.

Vous n'avés point voulu toucher à nostre question de Mecanique. Je suis avec passion etc.

VII.

De l'Hospital an Leibniz.

C'est avec un plaisir sensible, Monsieur, que je reçois de vos lettres, j'y trouve toujours de vûes nouvelles auxquelles personne n'avoit encore pensé. La maniere dont vous vous servez de nombres au lieu de lettres dans les equations pour en tirer en suite des regles ou theoremes est tres ingenieuse, et comme l'analyse n'est que l'art d'abbreger les raisonnements et de representer tout d'une vûe a l'esprit ce qu'il ne pouroit apperçoir autrement que par un long circuit, il est certain que les caracteristiques en font la principale partie. Je ne doute pas que celle dont vous vous servez pour exprimer la situation des lignes et des angles et que vous appellez *Caracteristica situs* ne contienne quelque chose de tres beau et de tres utile. Vous m'en claircirez d'avantage quand vous le jugerez a propos, je crois avoir oui dire que nous aviez aussi imaginé une espece de caracteristique pour servir a composer des machines de mecanique, cela peut estre d'un grand usage dans cette science qui n'est pas encore arrivée a la perfection.

Il y a deux endroits dans vôtre lettre qui me paroissent recevoir quelque difficulté. Le 1r est conceu en ces termes: „Il „me paroist difficile de donner une methode propre a trouver „une infinité de segmens egaux a un segment donné d'une courbe „algebraique (par segment j'entends une figure comprise d'une „droite et d'un arc de courbe). Si cela se pouvoit dans l'ellipse „et dans l'hyperbole je crois qu'on y viendroit a des quadratu-

„res.“ Voici cependant la maniere de trouver ces segmens dans une section conique quelconque, et je ne vois pas qu'on en soit plus avancé pour les quadratures.

Soit proposé de couper par un point donné C (fig. 48.) sur une section conique un segment CD egal au segment donné AB. Ayant joint AC, et tiré BD parallele a AC, qui rencontre la section au point D, je dis que le segment CD sera egal au segment donné AB. Comme le point C peut estre situé en tel endroit que l'on veut sur la section, il s'ensuit qu'on peut trouver par cette construction une infinité de segmens egaux au segment donné AB.

Dans l'autre endroit vous vous expliquez en cette sorte. „M. de Tschirnhaus pretendoit de conclure l'impossibilité de la „quadrature particuliere, lorsque la quadrature generale avoit „esté prouvée impossible. Mais pour lui donner une instance „contraire, je fabriquai une figure par les ordonnées de la lunule „d'Hippocrate, appliquées a une droite; quelques années apres „s'etant aperceu de la verité de mon objection, il nous donna „un peu le change. Il est bien vrai, que la lunule reçoit une „certaine façon de quadrature, qui est indefinie sans estre gene- „rale; mais c'est parcequ'elle est enfermée de deux lignes cour- „bes; car lorsque la figure n'a qu'une courbe, cela ne sauroit „reussir.“

Vous avez apparemment fabriqué cette ligne ainsi. Soit le quarré ABCD (fig. 49) qui a pour côté AB et pour diagonale AC. Soient decrits du centre A et des rayons AB, AC les quarts de cercle BD, EF. Soit enfin la courbe GMH telle qu'ayant mené librement la droite MO parallele a AF, qui rencontre les quarts de cercles BD, EF aux points N, O et droite AB en P; sa partie PM soit toujours egale a NO. Cette courbe GMH est celle la mesme que vous proposastes autre fois a M. Tschirnhaus. Or non seulement l'espace entier AGHB est quarrable, mais encore une infinité d'autres moyens tels que MPQR le sont aussi, savoir lorsque la moitié de l'arc NI est semblable a l'arc OK; de sorte que cette figure a une quadrature indefinie sans estre generale, cependant elle n'a qu'une courbe. Il me semble que pour convaincre M. de Tschirnhaus d'errreur dans la maniere dont il s'est expliqué en dernier lieu, il faudroit donner quelques courbes geometriques qui n'eussent ni quadrature generale ni indefinie

mais seulement une particuliere, car c'est la precisement ce qu'il pretend estre impossible.

Vous avez sans doute, Monsieur, le theoreme que Mr. Fatio a substitué a celui de Mr. Tschirnhaus pour l'invention des tangentes des lignes courbes qui ont des foyers. De la maniere dont il le propose dans sa derniere reponse que l'on trouve dans la Republique des Lettres, bien loin de lui donner toute la generalité dont il est capable, il le restreint dans les bornes fort limittées comme vous allez voir. Soit une ligne courbe MPN (fig. 50) telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques P aux foyers A, B, C etc. des lignes droites PA, PB, PC etc. leur somme ou de telle de leur puissance qu'on voudra demeure partout la mesme. C'est la toute l'etendue que lui donne Mr. Fatio, d'ou l'on voit qu'il n'explique point de quelle maniere il doit estre entendu lorsqu'au lieu de la somme on prend la difference, par exemple si l'on suppose que $AP + PB - CP$ soit toujours egale a une ligne constante a, et de mesme si l'on veut que les plans alternatifs des droites PA, PB, PC soient toujours egaux a un quarré donné aa etc. Voici donc comme je crois qu'on doit enoncer cette proposition afin de la rendre aussi generale qu'il est possible.

Soit une ligne courbe MPN telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques P aux foyers A, B, C etc. des lignes droites PA, PB, PC etc. leur rapport soit exprimé par une equation quelconque donnée, et soit proposé de mener a un point donné P sur cette courbe la perpendiculaire PH.

Solution. Soit prise l'equation differentielle de celle qui exprime la nature de la courbe dont je suppose que tous les termes soient egalés a zero, et ayant decrit librement du centre P un arc de cercle EFG qui coupe les droites PA, PB, PC aux points E, F, G, que l'on conçoive que ces points soient chargés d'autant de poids qui soient entr'eux comme les quantités qui multiplient les differentielles des lignes sur lesquelles ils sont situés. Je dis que la ligne PH qui passe par le point donné P et par le point H commun centre de pesanteur des poids supposés en E, F, G sera la perpendiculaire requise. Ceci s'eclaircira par l'exemple suivant.

Que l'equation $ax + yz - by + zz - cc = 0$ exprime la nature de la courbe MPN, les indeterminées x, y, z marquent les droites PA, PB, PC, et les constantes a, b, c designent des parametres ou des lignes droites données. L'equation differentielle sera $adx + ydz + 2zdz + zdy - bdy = 0$, c'est pourquoi concevant au point E le poids a, au point F le poids $z - b$, et au point G le poids $2z + y$, on trouvera le point H commun centre de pesanteur de ces poids, et on menera la ligne PH qui sera la perpendiculaire cherchée. Il faut observer que si $z - b$ est une quantité negative, il faut imaginer ce poids au point f ou l'arc EFG coupe la ligne BP prolongée au dela de P. Il est evident que cette solution etant bien entendue demeure la mesme lorsque les foyers A, B, C au lieu de points sont des lignes courbes quelconques.

Je n'ai point touché jusqu'ici a la question de mecanique qui est de savoir si la force se doit estimer par la quantité de mouvement, parce que n'y ayant pas une evidence entiere dans ces sortes de questions, il arrive souvent qu'apres avoir disputé long temps on n'en demeure que plus attaché a son sentiment, cependant puisque vous le souhaittés, je vous dirai en deux mots de quelle maniere je crois qu'on peut repondre a vôtre difficulté. Voici donc ce me semble vôtre principale objection. Des forces egales etant appliquées sous les corps A de 4 ℔ et B de 1 ℔ doivent elever reciproquement le corps B a une hauteur quadruple de celle du corps A. Or des quantités de mouvement egales etant distribuées dans ces deux corps elevent le corps B 16 fois plus haut que le corps A. Donc la force ne se doit pas estimer par la quantité de mouvement. Je reponds a cet argument en distinguant la majeure, des forces egales etant appliquées sous les corps A de 4 ℔ et B de 1 ℔ doivent elever le corps B a une hauteur quadruple de celle du corps A, je l'accorde et cela est tres vrai si l'on veut que rien ne s'oppose d'ailleurs au mouvemeut des corps A et B, ou du moins si la resistance est egale, mais si elle est inegale, je le nie, car il est evident que si rien ne s'opposoit a l'elevation du corps B, c'est a dire que sa pesanteur fust aneantie, la mesme force qui n'auroit pû elever le corps A qu'a la hauteur d'un pied parceque sa pesanteur lui resistoit, eleveroit le corps B a une hauteur infinie. Mais la pesanteur du corps B qui s'oppose a son elevation n'etant que la 4e partie de celle du corps A, le corps B doit monter 4 fois plus haut qu'il ne monteroit si les resistances etoient egales c'est a dire 16 fois plus haut que le corps A. Donc etc. On peut encore ajouster a ceci

que si l'on prend d'une part la somme de toutes les vitesses du corps A pendant son elevation a la hauteur d'un pied, et de l'autre celle de toutes les vitesses du corps B pendant son elevation a la hauteur de 4 pieds, et qu'on les multiplie par la masse de ces corps, on aura de part et d'autre des quantités de mouvement egales. De sorte qu'il sera vrai de dire en ce sens avec les Cartesiens que la mesme force qui se consomme pour elever le corps A a la hauteur d'un pied, se consomme aussi pour elever le corps B a la hauteur de 4 pieds. Enfin il me semble que pour eviter de plus longues disputes on pouroit decider la question par une experience facile. Il faudroit laisser tomber le corps A de 4 ℔ d'un pied de haut sur le bras d'une balance ou levier dont l'autre bras seroit chargé d'un poids appuyé sur un plan horizontal, et qui doit estre tel que le corps A par sa chûte le puisse soulever. On laisseroit tomber ensuite le corps B de 1 ℔ de 4 pieds de haut et on examineroit soigneusement s'il auroit la force de soulever le poids. Pour moi je suis persuadé qu'il ne le pouroit soulever qu'en tombant de 16 pieds. Ce qui feroit voir clairement que le corps A en tombant d'un pied et le corps B en tombant de 16, auroient aquis precisement la mesme force, puisqu'ils produiroient alors le mesme effet. Je suis tres veritablement, Monsieur, vôtre tres humble et tres obeissant serviteur etc.

A Paris ce 15e juin (1693).

VIII.

Leibniz an de l'Hospital.

Je suis bien aise, Monsieur, que ma maniere de calculer par nombres au lieu de lettres ne vous a point deplu. Chez moy c'est une des meilleurs ouvertures en Analyse. Ce que j'ay pensé pour la caracteristique qui peindroit les machines sans employer des figures, n'est qu'une suite de la caracteristique de la situation. Je ne sçaurois deviner qui vous en peut avoir informé. Car je n'en ay gueres parlé, sçachant que la chose ne sçauroit paroistre vraisemblable.

Je m'imagine encor que si on pouvoit tousjours trouver des segmens egaux à un segment donné de la même courbe, ce seroit une voye pour arriver souvent aux quadratures. Ce que vous dites des segmens des coniques, me paroist beau, et merite d'estre approfondi comme je ferois dès a present, si mihi liceret ultra extemporanea meditari.

Lorsque je disois, que la quadrature d'une figure bornée par une seule courbe ne sçauroit estre indefinie sans estre generale, je n'entendois pas une quadrature comme vous en donnés qui n'admet point de quadratrice geometrique et qui n'est pas continuelle ou uniforme par tout, quoyqu'elle ait lieu en une infinité d'endroits, mais telle que M. de Tschirnhaus avoit donnée pour la lunule, et la raison est manifeste. Par exemple supposé qu'AD(D) (fig. 51) soit une droite, si on peut trouver la quadrature indefinie de toute portion CD(D)(C)C on pourra ainsi trouver la quadrature generale de toute autre portion produite par une autre maniere de couper; mais si AD(D) estoit une courbe, cela ne s'ensuit point.

J'avois trouvé le theoreme des tangentes par les foyers, avant M. Fatio, mais il l'a publié avant moy. Ma voye a cela de particulier, qu'elle le donne par une simple vue d'esprit sans s'embarasser de calcul ny de figures. Mais vostre enuntiation le porte bien plus loin. Il seroit bon de voir si cette même voye y pourroit servir. Je me souviens d'y avoir vû quelque jour autres fois, mais je ne sçaurois retrouver d'abord mes brouillons, ny rentrer dans ces speculations.

Ce que vous dites, Monsieur, sur mon raisonnement de la force me paroist subtil, et je me reserve aussi de le bien approfondir. Il semble, que vous changés un peu de langage. La question reduite à la practique, pour se degager des varietés de l'expression pourra estre conçue ainsi: soyent deux globes pesans, durs et elastiques, A et B, qui doivent concourir directement dans un plan horizontal, soit la vistesse d'A avant le choc c, apres (c), et celle de B avant le choc v, apres (v), selon Descartes $Ac + Bv$ doit estre égal à $A(c)$ et $B(v)$, c'est ce qu'on appelle la quantité du mouvement. Pour moy je nie que cela peut tousjours reussir et au lieu de cela, prenons les hauteurs aux quelles les corps pourroient monter en vertu de leur vistesse ;, et soit celle d'A avant le choc h, apres (h) et celle de B avant le choc t, apres (t), je dis que tousjours $Ah + Bt$

sera egal à $A(h) + B(t)$. J'appelle cela la conservation de la même quantité de la force, parce que j'estime la force par l'effect qu'elle peut produire en se consumant. Mais sans disputer sur le langage, je voudrois sçavoir, Monsieur, si vous estes pour mon equation, ou pour celle de Descartes. Je crois de pouvoir prouver que si la regle de Descartes a lieu, on pourra parvenir au mouvement perpetuel. Vous proposés l'experience suivante à faire pour mieux decider nostre controverse: Supposons qu'un corps de 4 livres tombe d'une hauteur d'un pied sur un bras d'une balance dont l'autre bras seroit chargé d'un poids soutenu et que cette cheute puisse soulever ce poids. On demande de quelle hauteur devroit tomber un poids d'une livre, pour soulever le même poids. Et vous croyés, Monsieur, que ce poids d'une livre deuvroit tomber de 16 pieds. C'est a peu pres la question agitée entre M. Gassendi et le P. Cazré. Voicy mon sentiment la dessus. Je dis que toute cheute de tout poids, quelque petit qu'il soit, eleve toute pesanteur soutenue quelque grande qu'elle soit, mais plus ou moins notablement selon la grandeur de la cheute, et du poids qui tombe. Un poids p tombant de la hauteur q et et elevant le poids r à la hauteur s, il y aura equation entre pq et rs, ou bien les poids seront reciproquement comme les hauteurs. Ainsi pour declarer l'experience en sorte qu'elle soit faisable, il faudra voir de quelle hauteur doit tomber le poids d'une livre, pour soulever le troisieme poids aussi haut que celuy de 4 livres, tombant d'un pied, l'avoit soulevé; et en ce cas je tiens qu'il suffira que celuy d'une livre tombe de 4 pieds de hauteur, et non pas de 16, comme vous le jugés, Monsieur, et je ne doute point, s'il tomboit de 16 pieds, qu'il n'elevât le troisieme poids beaucoup plus haut, et presque au quadruple. Pour compter toute la hauteur de la cheute, il faut prendre non seulement la hauteur jusqu'à la balance, mais encor combien le poids apres avoir atteint la balance, descend pour soulever l'autre. Au lieu d'un poids on pourroit prendre quelque matiere elastique, et je soutiens que quatre livres tombant d'un pied et une livre tombant de quatre pieds donneront le même degré de tension ou de compression. Et pour mettre a part la consideration de la pesanteur, je dis que deux corps semblables allant sur un plan horizontal A . 4 avec la vistesse 1, et B . 1 avec la vistesse 2, et recontrant le même ressort d'une même façon luy donneront le meme degré de tension ou de compression, les forces de ces deux corps estant egales à cause que les cheutes qui les ont produites sont reciproques aux corps.

P. S. Il y a plusieurs mois que j'avois envoyé à Mons. Pelisson ma regle generale de la composition des mouvemens, dont j'avois tiré ma regle des Tangentes par les foyers, à dessein de la faire mettre dans le Journal des Sçavans. Mais comme sa mort est survenu, je l'ay envoyé depuis peu tout de nouveau. La voicy en peu de mots. Si un mobile a plusieurs tendences, je suppose qu'elles reussissent toutes à la fois comme si le mobile se partageoit egalement entre elles, gardant le même progrés, c'est à dire allant d'autant plus loin, qu'il est devenu plus petit par le partage. Et le mouvement composé et veritable du mobile sera le même avec celuy du centre de gravité des partages. Or quand le style est tiré par plusieurs filets, il est tiré egalement par chacun; et la direction composée du style est dans la perpendiculaire à la courbe qu'il décrit. Si les filets ne faisoient point un filet continué, mais estoient tirés par des poids a part, ou si les filets mêmes avoient de la pesanteur, ou si on concevoit quelque autre maniere de varier les forces qui tirent le style, la même methode aura tousjours lieu, et je souhaitterois que le theoreme general, comme vous l'avés concû, Monsieur, pût estre transferé à la mecanique ou au mouvement propre à décrire la courbe. On pourra aussi concevoir des poids suspendus au lieu des foyers, et même des courbes mobiles, au lieu des courbes fixes d'evolution.

J'adjouteray un mot touchant vostre egalité des segmens de la conique. Puisque nous y avons la comparaison des secteurs, je conçois, que toutes les fois, que les triangles des secteurs comparables ont entre eux la même raison que les secteurs. Il s'ensuit la comparaison des segmens. Et le même a lieu en d'autres retranchemens. Mais s'il y avoit quelque comparaison primitive des segmens non tirée de celle des secteurs, on pourroit esperer d'en tirer quelques quadratures particulieres. La comparaison des portions dans les Coniques à centre (ou nonquadrables) vient de la correspondance qu'il y a entre les aires du cercle et les angles, et entre les aires de l'hyperbole et les logarithmes. S'il y avoit une methode de comparer ensemble des portions d'une même figure à l'egard de toute sorte de

courbes, elle seroit fort à estimer. J'entends des portions comprises de droites et d'une seule courbe.

IX.

Leibniz an de l'Hospital.

(Im Auszuge.)

$\frac{6}{16}$ Aoust 1694.

Je croy que le R. P. Malebranche a raison de dire que nostre ame ne sçauroit avoir d'autre objet immediat externe que Dieu seul. Cependant je ne voudrois pas dire pour cela que nous voyons tout en Dieu. C'est comme si on disoit que les yeux voyent les objets dans les rayons du soleil. Mais comme ce n'est qu'une dispute sur la phrase, on peut permettre à chacun de s'expliquer comme il le trouve le plus à propos.

X.

De l'Hospital an Leibniz.

A St. André ce dernier novembre 1694.

Je ne viens que de recevoir, Monsieur, la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'ecrire du 16e aoust. La raison de ce retardement est que je suis depuis quelque temps en des terres en Dauphiné eloignées de tout commerce, dont j'ai herité par la mort de Mr. le comte d'Autremonts, oncle de ma femme. Il nous a laissé un bien considerable et fort embarassé; ce qui m'a jetté dans beaucoup d'affaires qui ne sont gueres conformes à mon humeur, mais auxquelles il faut se donner tout entier pour en pouvoir sortir, et goûter ensuitte le repos. C'est ce qui m'a empesché d'entretenir le commerce que vous aviez bien voulu lier avec moi, qui ne pouvoit m'être que tres avantageux. Je n'ai receu aussi depuis fort longtemps qu'une seule lettre de Mr. Hugens qui ne me parle point de ce que vous me mandez.

Je suis ravi de la resolution que vous avez prise de nous donner un ouvrage sur nôtre nouvelle analyse que je souhaitois il y a longtemps et voyant que vos occupations ne sembloient pas vous le permettre j'avois composé quelques cahiers sur ce sujet dont voici l'origine. Il y a environ six ans que les Actes de Leipsic m'etant tombés entre les mains, j'y ai trouvé vôtre methode des tangentes, qui me plut si fort que je composai des ce temps quelques ecrits, ou je l'expliquois plus au long, et je donnois les demonstrations de toutes vos regles. Je les communiquai à quelques uns de mes amis et entr'autres au R. Pr. Malebranche qui en furent tres contents, et qui me presserent même fort des ce temps de les faire imprimer. Ils en parlerent à Mr. l'abbé Catelan qui etoit de nos amis communs (c'est l'autheur de l'objection du Journal des Sçavans dont vous me demandez le nom) et qui eut à cet egard un procedé tres irregulier comme vous allez voir. Car ayant eu envie de me prevenir, sans en parler à qui que ce soit, il composa un petit livre sur ce sujet qui a paru sous le nom de Science generale des lignes courbes, et bien loin de vous y rendre justice il a déguisé vôtre methode et sans vous citer en aucun endroit il en a donné une comme de lui qu'il pretend n'etre qu'une suitte de celle de Mr. Descartes. Je vous avoue que ce procedé me déplut, et qu'ayant parcouru ce livre et l'ayant trouvé rempli de fautes considerables, je fis imprimer une lettre dans laquelle j'en marquai quelques unes des plus aparentes, et je fis voir que cette methode etant bien entendue n'etoit autre que celle que Mr. Barrow avoit donnée dans ses Leçons geometriques, et qu'à l'égard des incommensurables ou il l'avoit étendue, cela vous etoit entierement dû, et je citai les Actes de Leipsic ou vous en aviez donné les elemens. Je fis voir aussi qu'ayant voulu déguiser cette methode et en rapporter la gloire à Mr. Descartes, il l'avoit presque entierement gâtée, et lui avoit quasi ôté toute son universalité. Mr. l'abbé C. voyant bien que j'avois raison prit le parti d'interrompre la vente de son livre dont il n'y avoit que dix ou douze exemplaires de distribuer, et d'y corriger toutes les fautes que je lui avois marquées en le remplissant de cartons, apres quoi il le fit distribuer de nouveau. Il fit ensuitte une reponse a ma lettre, dans laquelle il dit entr'autres choses qu'il s'etoit glissé a la verité quelques fautes d'impression dans les premiers exemplaires qu'on avoit distri-

buez, mais que son attention a les corriger dans ceux qui restoient n'avoit pas laissé la moindre faute ou l'on pût trouver a redire. Il y maltraitoit aussi fort le calcul differentiel, et pretendoit que par sa methode qu'il dit toujours être une suitte de celle de Mr. Descartes, il pouvoit resoudre toutes les questions ou l'on se sert de ce calcul. Cette reponse donna occasion a une replique de ma part, ou apres avoir fait voir toutes les corrections qu'il avoit faites a son livre et qui etoient des fautes essentielles, je m'attachai a ces derniers exemplaires qu'il disoit être si corrects, je lui marquai cinq fautes tres grossieres dans lesquelles il etoit tombé, et pour faire voir au public qu'il n'etoit pas si habile qu'il le vouloit persuader, je lui proposai le probleme de Mr. de Beaune. Le parti qu'il prit en ce rencontre fut de supprimer entierement son livre, voyant bien qu'il ne pouvoit pas corriger toutes les fautes dont il etoit rempli, mais il fit mettre dans nos Journaux des Sçavans sa nouvelle methode pour en prendre date, disoit il, parcequ'il y avoit un homme par le monde qui peu s'en falloit qu'il ne se l'attribuât. Cela m'obligea de faire mettre aussi quelque chose dans les Journaux des Sçavans pour faire voir a ceux qui n'avoient point vû les ecrits dont je viens de vous parler que cette methode avoit été corrigée sur les fautes qu'on lui avoit marquées, et que bien loin de s'en attribuer la gloire comme il sembloit le vouloir insinuer, on le faisoit ressouvenir qu'on lui avoit déja fait connoître que ce qu'il y avoit de bon vous étoit entierement dû. Il est a remarquer que tous ces petits ecrits, et ce que j'ai fait mettre dans les Journaux des Sçavans n'a point été sous mon nom, mais sous celui de M. G***. Cela lui ferma enfin la bouche, mais il a toujours tâché depuis de trouver a redire a ce qui venoit de moi, et c'est je crois ce qui l'a poussé a faire l'objection dont vous me parlez, et dans laquelle il cite le journal ou il a fait mettre sa pretendue methode. J'oubliois encore a vous dire qu'il a promis des le temps qu'il supprima son livre de donner au public une edition in 4. de ce même livre, dans laquelle il pretendoit expliquer a fond toutes ces matieres. J'ai crû qu'il étoit bon que vous fussiez informé de tout ceci.

Vous sçaurez aussi, Monsieur, qu'etant sur le point de partir de Paris, le P. Malebranche qui avoit entre ses mains un petit traité des sections coniques que j'ai composé il y a longtemps, avec ces cahiers du calcul differentiel, me pressa fort de lui permettre qu'il le fit imprimer et qu'il y ajoutât a la fin ce que j'avois fait sur le calcul differentiel, et ne pouvant m'en deffendre je le laissai le maître de faire ce qu'il lui plairoit, prevoyant bien que de longtemps mes affaires ne me permettroient pas de pouvoir mettre en ordre les vûes que j'avois sur l'inverse de ce calcul. J'attens de vous une reponse sur ceci au plûtost pour sçavoir si vous trouvez bon que cela paroisse, car je le supprimerai entierement si vous le jugez a propos. Au reste il n'y a precisement que ce qui regarde le calcul differentiel et je ne touche en aucune sorte l'inverse de ce calcul qui est cependant ce qu'il y a de plus considerable, ainsi cela ne doit point vous empescher de faire imprimer vôtre livre, mais au contraire il me semble que cela pourra servir pour l'entendre plus aisement, et pour vous dispenser d'expliquer si en détail ce qui regarde le calcul differentiel. Je ne manquerai pas non plus si vous trouvez bon que cela s'imprime de marquer dans la preface que vous étes sur le point de donner au public toutes vos inventions sur ces matieres, et que ce que je donne ne doit etre consideré que comme une introduction à vôtre ouvrage.

Je voudrois bien pouvoir vous communiquer quelque chose sur l'inverse des tangentes qui pût vous plaire, mais outre que je n'ai point ici mes papiers, je suis de plus si fort occupé a d'autres affaires que cela ne m'est pas possible pour le present, d'ailleurs je suis persuadé que je ne vous dirois rien de nouveau, et que je n'ai fait qu'efleurer ces matieres en comparaison de vous. Voici cependant une question en ce genre qu'on m'avoit proposée autre fois et dont je n'avois pû alors trouver la solution.

On demande la courbe qui a pour soutangente $\sqrt{ay + xx}$ (l'abcisse est x et l'appliquée y) c'est a dire qui a pour equation differentielle $y\,dx = dy\sqrt{ay + xx}$. Je fais $ay + xx = mm$, afin d'ôter les incommensurables, et je trouve en prenant les differences $dy = \frac{2m\,dm - 2x\,dx}{a}$, ce qui etant substitué dans l'equation precedente avec la valeur de y me donne $2mm\,dm - 2mx\,dx = mm\,dx - xx\,dx$. Je fais $m = zx$, et j'ai $dm = x\,dz + z\,dx$, ce qui me donne $\frac{2zz\,dz}{2z - 2z^3 + zz - 1} = \frac{dx}{x}$, ou les indeterminées avec leur differences sont separées, de sorte qu'il est alors aisé

de construire la courbe en supposant les quadratures. Il est a remarquer que cette supposition reussit toujours lorsque les indeterminées ont un nombre égal de dimensions dans chaque terme étant jointes ou separées. Vous sçavez apparemment mieux que moi que lorsque l'expression de l'appliquée du cercle ou de l'hyperbole $\sqrt{aa - xx}$ et $\sqrt{xx - aa}$ ou une de ses puissances, se trouve multipliée par dx et par une quantité complexe ou il n'entre que l'indeterminée x avec des parametres, on peut toujours ou en prendre absolument la somme ou qu'elle depend en partie de la quadrature du cercle ou de l'hyperbole. Je vous enverrai si vous le souhaitez la maniere dont j'ai trouvé la solution du probleme de Mr. Bernoulli,*) elle contient quelque chose d'assez singulier parceque j'y resoud une égalité du second degré dont la difference dx est l'inconnue et que j'ai besoin ensuitte de faire diverses suppositions tant pour separer les indeterminées que pour ôter les incommensurables, et qu'on peut par ce même artifice resoudre plusieurs autres questions semblables. J'ai trouvé aussi que dans le point d'inflexion contraire, la raison du cercle baisant n'est pas toujours infini, mais qu'il y a une infinité de lignes ou il est nul: de sorte que dans ce point ddy peut être infiniment grand aussi bien que zero.

Au reste j'ai eu occasion de parcourir le petit traité de Mr. Craige dont vous me parlez, et j'en fais le même jugement que vous; car non seulement on peut aller beaucoup plus loin, mais même les quadratures qu'il donne se peuvent trouver bien plus aisement, en cherchant simplement les sommes et sans avoir besoin de se servir d'aucun theoreme, ni faire les comparaisons qu'il enseigne pour trouver les coefficiens qui menent souvent a des calculs penibles. Je trouve aussi qu'il n'a pas trop bien entendu votre methode des tangentes puisqu'il pretend qu'elle ne s'etend pas aux lignes transcendantes, car je fais voir par plusieurs exemples assez composez dans le petit traité dont je

*) De l'Hospital meint wahrscheinlich die Aufgabe, die Joh. Bernoulli im Jahre 1693 zur Lösung vorlegte: Eine krumme Linie der Art zu finden, dass ihre von der Axe begränzten Tangenten zu den zwischen der krummen Linie und diesen Tangenten enthaltenen Theilen der Axe ein gegebenes Verhältniss haben. — Die Auflösung de l'Hospital's findet sich in einem Briefe an Hugens von 28. Sept. 1693. Siehe Christ. Hugen. aliorumque seculi XVII virorum exercitationes etc. ed. Uylenbroek. Tom I. p. 290 ff.

vous ai parlé, qu'elle embrasse toutes ces lignes, et qu'elle est la plus generale et la plus simple qu'on puisse souhaiter. Il me semble aussi comme a vous qu'il traite trop mal Mr. Tschirnhaus, car bien que cet autheur se soit trompé assez souvent dans ce qu'il a donné, on ne laisse pas d'y entrevoir beaucoup d'étendue d'esprit, et qu'il auroit été loin s'il avoit suivi vos methodes. Il est vrai qu'il parle trop avantageusement de ses inventions, et qu'il promet beaucoup et même plus a ce que je crois qu'il ne peut executer; car il pretend par exemple qu'il a une demonstration exacte de l'impossibilité absolue de la quadrature du cerle non seulement indefinie, mais de chaque segment en particulier, et il pretend aussi avoir une methode generale pour trouver toujours ces quadratures particulieres ou pour en demontrer l'impossibilité.

A l'egard de la ligne que vous appellez isochrone paracentrique, je suis bien aise qu'on en ait enfin trouvé la solution, mais comme mon éloignement de Paris m'a empesché de voir les Actes de Leipsic, je n'en puis encore juger. Il me paroît par ce que vous me mandez que la vôtre sera beaucoup plus simple et plus generale que celle de Mr. Bernoulli, puisque vous trouvez qu'il y en a une infinité ou il n'en trouve qu'une seule, et que vous vous servez de la rectification d'une courbe algebraique lorsqu'il en employe une transcendante.

Je suis fort aise que vôtre machine arithmetique soit enfin executée, et qu'elle reussisse de la maniere que vous me marquez. N'y auroit il point moyen d'en faire une semblable? et de la faire ensuitte venir a Paris. Si vous vouliez bien y donner vos soins, et que cela se pût aisement, vous me feriez un vrai plaisir. Je donnerois a Mr. l'Envoyé l'argent qui seroit necessaire et que vous auriez la bonté de me marquer. Le même ouvrier qui a executé la vôtre pouvoit faire encore celle ci, et je voudrois bien qu'il y employât tout le temps et qu'il y prit toute la peine requise pour qu'elle fût dans la perfection.

Voila enfin le differend du R. P. Malebranche et de Mr. Arnaud terminé par la mort de ce dernier. Je n'ai jamais aprouvé leur maniere décrire qui m'a paru trop forte pour des personnes de ce caractere, j'ai fort connu autre fois Mr. Arnaud pendant qu'il etoit a Paris, et j'avois conceu pour lui une estime tres particuliere.

Je vois, Monsieur, que vos occupations ordinaires ne vous

ont pas empesché de vous appliquer a la metaphisique, de sorte qu'on peut dire que vous excellez dans toutes les sciences, celle ci est bien differente des mathematiques, l'imagination n'y ayant point de part. Au reste je crois qu'on doit vous prier d'inserer dans vôtre livre ce que vous avez trouvé sur la Characteristica situs, ce sera une chose toute nouvelle et qui pourra être fort utile. Je suis avec beaucoup d'empressement, Monsieur, vôtre tres humble et tres obeissant serviteur etc.

XI.

Leibniz an de l'Hospital.

27 Novembr.*) 1694.

Un bon heritage vaut mieux que le plus joli probleme de Geometrie, parce qu'il tient lieu de methode generale, et sert à resoudre bien des problemes. Je vous plaindrois, Monsieur, si la succession que vous venés de recueillir, vous detournoit pour tousjours de vos excellentes meditations, mais comme ce n'est qu'un empechement passager, je vous en fecilite.

Quoyque j'aye dessein de composer quelque chose sur nostre nouveau calcul et autres matieres connexes, sous le titre de la Science de l'infini, je n'y suis pas pourtant fort avancé, et j'ay de la matiere sans luy avoir encor donné aucune forme. Ainsi cela ne vous doit point empecher de publier ce que vous avés projetté; et puisque le R. P. de Malebranche a tiré de vous un écrit, dont vous luy avés laissé la disposition, et qu'il a dessein de faire imprimer, je n'ay garde de le vous dissuader et bien loin de cela je me joindrois à ce pere, pour en obtenir la permission, si elle n'avoit pas esté déja donnée. Outre le profit que le public en retire, et qui revient aussi par consequent à moy, je trouve que l'honneur que vous me faites, en voulant bien qu'on croye que mes pensées ont donné occasion à quelques unes des vostres est d'autant plus estimable, qu'il vient d'une personne dont le temoignage peut donner du prix aux

---

*) Muss heissen: 27 Decembr. Siehe den Brief de l'Hospital's vom 2. März 1695.

choses. D'ailleurs je suis si peu versé dans mes propres methodes à cause des distractions qui m'accablent quelques fois jusqu'à donner une atteinte sensible à ma santé, que je ne me trouve gueres en estat de les mettre à profit, au lieu qu'ayant les talens extraordinaires que vous avés avec tout ce qu'il faut pour les faire valoir, vous pouvés faire un meilleur usage des remarques d'autruy que les auteurs mêmes qui n'avoient pas le secours des vostres.

Je vous ay eu aussi bien de l'obligation au sujet de M. l'Abbé Catelan, sans l'avoir sçû. Ces particularités que vous me mandés, m'estoient entierement inconnues; et je ne sçavois pas combien je devois à vostre sincerité, qui vous porte à rendre justice à tout le monde. Je voy que M. l'Abbé Catelan ne prend pas le chemin de la veritable gloire, et que sa politique n'a pas esté meilleure que son analyse. Il y a tant de pays à defricher ou l'on ne sçauroit manquer de faire des decouvertes aussi belles qu'utiles pour peu qu'on s'applique, que je m'etonne que des personnes qui ne manquent pas d'habilité s'amusent à ces voyes indirectes. Monsieur des Cartes estoit grand homme, mais de vouloir que tout ce qui se decouvre est une suite des decouvertes de cet auteur, c'est vouloir que toute la mathematique est comprise dans les Elemens d'Euclide. Il y a tant de choses dans l'Analyse qu'il ne sçavoit point, et que nous ne sçavons pas encor non plus avec toutes nos methodes, qu'il faut estre peu versé dans ces matieres pour prendre à la lettre ce que M. des Cartes a dit quelque part avec un peu trop de presomtion, qu'il a donné le moyen de resoudre tous les problemes de Geometrie et qu'il s'est abstenu d'en dire d'avantage, pour laisser encor aux autres le plaisir d'inventer quelque chose.

Je voy que je n'ay gueres besoin, de vous expliquer aucune chose, je me souviens par exemple de vous avoir dit que lorsque les inconnues absolues ou ordinaires x et y remplissent de leur chef les loix des homogenes, il y a moyen de reduire l'equation differentielle aux quadratures, et je voy maintenant que vous avés trouvé cette reduction de vous mêmes, aussi bien que les reductions à la quadrature du Cercle ou de l'Hyperbole dans les quadratures de la nature de celles dont vous parlés. Je crois qu'avec l'application convenable on viendroit à bout de l'inverse des tangentes, j'ay des commencemens qui paroissent d'autant plus considerables qu'ils ambrassent de ces assez gene-

raux et peuvent estre poussés plus loin: Soit $m + ny + dy : dx = 0$, ou m et n signifient des formules rationelles, ou irrationelles mais qui ne dependent que de la seule indeterminée x, je dis qu'on la peut resoudre generalement par $\int \overline{mp\,dx} + py = 0$, posito $\int \overline{dp : p} = \int \overline{n\,dx}$. Nam differentiando fit $mp\,dx + y\,dp + p\,dy = 0$, sed $dp = pn\,dx$, ergo fit $mp\,dx + npy\,dx + p\,dy = 0$ seu $m\,dx + ny\,dx + dy = 0$, ut desiderabatur.

Si vous voulés avoir la bonté de me communiquer quelques unes de vos analyses (par exemple celle du probleme de M. Bernoulli que vous m'offrés) je les feray entrer avec vostre permission dans le livre que je projette. La remarque du cercle baissant evanouissant quelques fois dans le cas d'inflexion contraire (la ligne generatrice par evolution tombant ainsi dans le point meme de la courbe) me paroist tres belle. Le probleme de M. Bernoulli et tous ceux ou la raison des fonctions est donnée ou constante, donnent des equations differentielles traitables, c'est à dire ou les deux indeterminées absolues (x et y) remplissent ensemble les loix des homogenes, c'est pourquoy j'ay dit dans le Journal, qu'on les peut tousjours resoudre.

Le probleme de l'isochrone paracentrique estoit en mon pouvoir il y a long temps; comme je croy vous avoir marqué autres fois. Mais j'avois egaré le papier et ne doutant pas de le retrouver, je n'y voulois point toucher de nouveau. Je le retrouvay avant que M. Bernoulli l'avoit trouvé aussi, et je l'ay ecrit à M. Hugens. Je me sers d'une voye fort naturelle pour le reduire aux quadratures en employant pour inconnue l'eloignement du point fixe. Messieurs Bernoulli ont enfin trouvé aussi le moyen de la construire par la rectification d'une courbe Algebraique, et leur construction est meilleure que la mienne, car je m'arreste ordinairement à la premiere possibilité, au lieu que ces Messieurs ont le temps et la penetration qu'il faut pour entrer plus avant. Je trouve que M. Craig a aussi pensé à la construction des quadratures par les rectifications, et je croy que sa methode est la même avec celle de Messieurs Bernoulli, mais elle est assez bornée et je croy qu'on peut aller plus avant.

Monsieur Tschirnhaus m'a fait l'honneur de me rendre visite en passant icy il y a quelques mois et m'a monstré des beaux effects dont il est parlé dans les Actes de Leipzig.

Il y a deja quelques machines arrestées et mon ouvrier y travaille effectivement; mais vous serés des premiers que j'en accommoderay aussitost qu'il sera libre. Elle ne sçauroit estre en meilleurs mains.

Ma metaphysique est toute mathematique pour dire ainsi ou la pourroit devenir. Je n'ose encor publier mes projets de characteristica situs, car sans que je la rende croyable par des exemples de quelque consequence, elle passeroit pour une vision. Cependant je voy par avance qu'elle ne sçauroit manquer. Je souhaitte de pouvoir venir à l'execution, mais les meditations qui sont seches et abstraites dans leur commencemens m'echauffent trop, c'est ce qui fait qu'ayant esté plus incommode cette année, que je n'avois esté de long temps, je me force de faire abstinence, sans le pouvoir faire autant que je devrois. Plût à Dieu que je fusse quelques fois avec des personnes qui vous approchassent quand ce ne seroit que de bien loin, car une telle conversation m'encourageroit et me soulageroit merveilleusement. Mais je ne l'espere gueres, et cela me fera perdre bien des veues qui seroient peut estre de quelque usage avec le temps si des personnes plus penetrantes que je ne suis, les approfondissoient un jour et joignoient la beauté de leur esprit au travail du mien. Pour vous, Monsieur, vous n'avés besoin de qui que ce soit et vous estes en estat d'aller bien loin: je vous souhaitte pour longues années la santé et le contentement qu'il faut avoir pour faire des choses grandes et belles. Hoc omine finio. C'est ainsi que je finis cette année estant avec zele etc.

Vorstehenden Brief scheint Leibniz in anderer Fassung abgeschickt zu haben. Das Folgende ist wahrscheinlich ein Bruchstück der spätern Umarbeitung:

La Methode dont je me suis servi est expliquée dans le billet cy joint, car outre qu'on ne doit point faire mystere de telles choses à une personne de.....*) merite, je suis presque hors d'estat de poursuivre mes methodes, parcequ'il n'y a personne icy ny dans le voisinage, avec que j'en puisse communiquer, au lieu qu'à Paris il est aisé non seulement de trouver des amis habiles, mais aussi d'avoir des personnes dont......... sou-

*) Unleserliches Wort; ebenso in den folgenden Lücken.

lage dans le calcul. Il est surtout aisé à vous, Monsieur, d'avoir ces sortes d'assistances. J'ay deja .... cette Methode à des equations differentielles ou dy demeure simple et y arrive au quarré, mais ne le passe point, sans avoir egard à x et je voy qu'on peut aller plus loin. Si vous m'y vouliés faire assister, vous me mettries en estat de rendre mon ouvrage plus considerable et le public vous auroit l'obligation de l'avancement de la science. Les calculs ne sont pas des plus penibles, mais tels qu'ils sont ils me coutent trop dans l'estat ou ma santé se trouve. S'il se rencontroit quelle difficulté, je contribuerois à la faire lever autant qu'il dependroit de moy.

Je reconnois que M. Barrow est allé bien avant, mais je puis vous assurer, Monsieur, que je n'ay tiré aucun secours pour mes methodes. Je ne connoissois au commencement que les indivisibles de Cavalieri et les Ductus du P. Gregorie de S. Vincent, avec la Synopsis Geometrica du P. Fabri et ce qui se peut tirer de ces auteurs ou leur semblables. Lorsque M. Hugens me presta les lettres de Dettonville ou de M. Pascal, j'examinay par hazard sa demonstration de la mesure de la superficie spherique et j'y trouvay une lumiere que l'auteur n'avoit point veue, car je remarquay generalement que par la même raison, la perpendiculaire quelconque PC (fig. 52) appliquée à l'axe ou transferée en BE donne une ligne FE telle que l'aire de la figure FABEF fournit explanation de la surface faite par la rotation d'AE à l'entour d'AB. Mons. Hugens fut surpris quand je luy parlay de ce theoreme et m'avoua que c'estoit justement celuy dont il s'estoit servi pour la surface du conoide parabolique, mais comme cela me faisoit connoistre l'usage de ce que j'appelle le triangle caracteristique CFG composé des elemens des coordonnées et de la courbe, je trouvay comme dans un clin d'oeil presque tous les theoremes que je remarquay depuis chez Messieurs Gregory et Barrow sur ce sujet. Jusqu'alors je n'estois pas encor assez versé dans le calcul de M. des Cartes et ne me servois pas encor des equations pour expliquer la nature des lignes courbes, mais sur ce que M. Hugens m'en disoit, je m'y mis et me n'en repentis point, car cela me donna moyen de trouver bientost mon calcul differentiel. Voicy comment. J'avois pris plaisir long temps auparavant de chercher les sommes des series des nombres, et je m'estois servi pour cela des differences sur un theoreme assez connu qu'une serie decroissant à l'infini son premier terme est egal à la somme de toutes les differences. Cela m'avoit donné ce que j'appellois le **Triangle Harmonique**, opposé au Triangle Arithmetique de M. Pascal, car M. Pascal avoit monstré comment on peut donner les sommes des nombres figurés, qui proviennent en cherchant les sommes et les sommes des sommes de la progression arithmetique naturelle; et moy je trouvay que les fractions des nombres figurés sont les differences et les differences des differences etc. de la progression harmonique naturelle (c'est à dire des fractions $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ etc.) et qu'ainsi on peut donner les sommes des series des fractions figurées, comme $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$ etc. et $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}$ etc. Reconnoissant donc cette grande utilité des differences et voyant que par le calcul de M. des Cartes l'ordonnée de la courbe peut estre exprimée, je vis que trouver les quadratures ou les sommes des ordonnées n'est autre chose que trouver une ordonnée (de la quadratrice) dont la difference est proportionelle à l'ordonnée donnée. Je reconnus aussi bientost que trouver les tangentes n'est autre chose que differentier, et trouver les quadratures n'est autre chose que sommer, pourveu qu'on suppose les differences incomparablement petites. Je vis aussi que necessairement les grandeurs differentielles se trouvent hors de la fraction et hors du **vinculum** et qu'ainsi on peut donner les tangentes sans le mettre en peine des irrationnelles et des fractions. Et voila l'histoire de l'origine de ma methode. Comme j'ay reconnu publiquement, en quoy j'estois redevable à M. Hugens et à l'egard des series infinies à M. Newton, j'en aurois fait autant à l'egard de M. Barrow, si j'y avois puisé. Pour l'inverse c'est à dire pour trouver une formule ou equation absolue, dont on pourroit tirer une differentielle proposée ou pour trouver une ordonnée dont la difference soit donnée, j'emploiay des formules generales ce que M. Tschirnhaus fit aussi depuis pour les quadratures ordinaires. Mais il me semble qu'il ne s'y est pas assez bien pris encor non plus que M. Craig qui s'est aussi trop borné. Mons. le professeur Bernoulli paroist mepriser ces formules generales pour l'inverse des tangentes, cependant vous verrés, Monsieur, par le papier cy joint, que j'ay trouvé par là des theoremes dont j'ay parlé.

Pro Methodo Tangentium inversa specimen.

Incipiamus ab Aequationibus differentialibus ubi $dy : dx$ non assurgit ultra primum seu simplicem gradum, qualis aequatio generaliter sic exprimi potest $b\,dx + c\,dy$, posito b et c haberi per x et y utcunque. Sit quaesita aequatio $m = 0$, ita ut m similiter habeatur per x et y quomodocunque. Hanc differentiando fiet $\delta m\,dx + \vartheta m\,dy = 0$. Ergo fiet $b : c = \delta m : \vartheta m$ seu $b\vartheta m = c\delta m$. Ponamus jam b, c, m esse formulas rationales integras, finitas, secundum y, et b esse $10 + 11y + 12yy + 13y^3 + 14y^4$ etc. continuando pro re nata; et simiter c esse $20 + 21y + 22yy + 23y^3$ etc. et m esse $30 + 31y + 32yy + 33y^3$ etc. $= 0$, ipsis 10, 11, 12 etc. 20, 21, 22 etc. 30, 31, 32 etc. significantibus quantitates ab x utcunque dependentes, rationales an irrationales, nil refert. Erit δm*) $= d50 + d51 . y + d52 . yy + d53 . y^3$ etc. et $\vartheta m = 1 . 31 + 2 . 32y + 3 . 33yy$ etc. ubi numeri 10, 11 etc. 20, 21 etc. 30, 31 etc. sunt fictitii seu supposititii, quos literarum loco adhibeo, ordinis et lucis causa, indicantque etiam virtualem quandam legem homogeneorum, hoc observato, quod nota dextra numeri supposititii significat quantitatem cujus gradus sit, quem denotat ipsa nota affecta signo —, ita 32 ejusdem est gradus cum $a^{\overline{-2}\cdot}$ seu cum $1 : aa$. At d semper de gradu detrahit unitatem, itaque d32 ejusdem est gradus cum $a^{\overline{-3}\cdot}$ seu cum $\frac{1}{a^3}$ vel ut scribere soleo, cum $1 : a^3$, itaque $32yy$ et $33y^3$ etc. omnes sunt ejusdem gradus, nempe cujus exponens est 0, quasi $y : a$. Sed hoc obiter, tametsi ejus consideratio et in his usum habeat. Explicemus jam aequationem $b\vartheta m - c\delta m = 0$, et prodibit aequatio magna pro re nata producenda,

$$0 = \left(\begin{array}{llll} +\,20d30 & +\,20d31y & +\,20d32yy & +\,20d33y^3 \\ & \,21d30.. & \,21d31.. & \,21d32.. \\ & & \,22d30.. & \,22d31.. \quad \text{etc} \\ & & & \,23d30.. \\ -\,10.31 & -\,2.10.32.. & -\,3.10.33.. & -\,4.10.34.. \\ & \,1.11.31.. & \,2.11.32.. & \,3.11.33.. \\ & & \,1.12.31.. & \,2.12.32.. \\ & & & \,1.13.31.. \end{array}\right.$$

Unde facile patet modus continuandi utcunque, numeri autem 1, 2, 3 etc. sunt veri, caeteri supposititii. Sit jam aequatio differen-

*) Siehe den Brief de l'Hospital's vom 2. März 1695.

tialis data resolvenda $10\,dx + 11y\,dx + dy = 0$, ita ut 12, 13 etc. et 21, 22 etc. evanescant, et 20 sit = unitati seu cuicunque constanti, quod semper fieri potest, nam si fuisset $70\,dx + 71\,y\,dx + 80\,dy = 0$, ipsa 80 existente indeterminata seu pendente ab x, possumus dividere aequationem per 80, fiet $\frac{70}{80}dx + \frac{71}{80}y\,dx + dy = 0$ et facere $10 = 70:80$ et $11 = 71:80$, ut prodeat $10\,dx + 11\,y\,dx + dy = 0$. His positis suffecerit etiam aequationem quaesitam poni tantum $30 + 31\,y = 0$, ut evanescant 32, 33 etc. Jam aequatione magna existente identica, ita ut omnes termini y^0, y^1, y^2 etc. evanescere debeant, et omnibus praeter duos ultimos per se evanescentibus supersunt pro tollendis duobus ultimis duae aequationes identificativae, et pro iis quantitates quaesitae 30 et 31. Aequationes sunt $d30 - 10.\,31 = 0$ et $d31 - 11.\,31 = 0$, posito $20 = 1$ ex hypothesi et aliis literis evanescentibus, et fiet $\int\overline{d31:31} = \int\overline{11\,dx}$ et $d30 = 10.\,31$ adeoque $30 = \int\overline{10.31\,dx}$. Ergo si data sit aequatio differentialis resolvenda: $10\,dx + 11\,y\,dx + dy = 0$, fiet aequatio constructrix $\int\overline{10.31\,dx} + 31\,y = 0$, posito $\int\overline{d31:31} = \int\overline{11\,dx}$, quod desiderabatur. Potest fieri, ut aequatio talis sit revocabilis ad ordinarias, exempli causa sit $11 = 2:x$, fiet $31 = xx:a^3$, posito logarithmum ipsius a esse 0; sit $10 = xx + ax,: aa$, vel alia ut lubet salva summabilitate, et fiet $10.31\,dx = x^4 + ax^3,\,dx:a^5$ et $\int\overline{10.31\,dx} = \frac{4x^5 + 5ax^4}{4.5a^5}$ adeoque fiet $4x^3 + 5axx + 20aay = 0$, ubi 20 est numerus verus, quae proinde aequatio satisfaciet datae $\overline{xx + aa}\,dx + \overline{2aa:x}\,y\,dx + aa\,dy = 0$, ut calculus ostendit, quanquam et aliae ei satisfacientes eodem modo reperiri possint.

Si aequatio differentialis construenda pro suo modulo generalis, fuisset $10\,dx + 11\,y\,dx + 20\,dy + 21\,y\,dy = 0$ adeoque omnis aequatio differentialis, in qua nec y nec dy assurgunt ultra simplicem gradum, quicquid sit de quantitatis x habitudine, constructa habetur. Eandemque Methodum debite prosequendo assurgi potest ad altiores ipsius y potentias, imo et ipsius dy.

XII.

Leibniz an de l'Hospital.

Je vous avés écrit il y a quelques semaines pour lever les scrupules que vostre honnesteté vous avoit naistre sur la publication de vos belles decouvertes et meditations Geometriques. Et j'avois adjouté quelque essay de mes methodes de l'inverse des Tangentes. Cet essay donnoit une solution generale de la formule $dy:dx = v + wy$ de quelque maniere que les grandeurs v et w soyent données par x, et je voy qu'on le peut pousser plus avant. Cependant comme nous ne sommes peut estre pas encor tout a fait estat de donner tousjours des solutions si generales, il sera bon de donner la Methode de determiner, s'il est possible que la ligne demandée est ordinaire ou Algebraique; et c'est à quoy cette methode nous mene tousjours par une voye asseurée. Mais comme je ne suis pas à present en estat de travailler et ne trouve personne dans ces pays qui m'y puisse aider, j'ay cru qu'on en trouveroit plus aisement à Paris et que vous pourriés et voudriés bien me procurer quelque assistance, puisqu'il y a apparemment chez vous des gens capables de calculer qui ne le refuseroient pas. Comme en effect je ne ferois aucune difficulté de payer leur peine, c'est ce que j'ay deja insinué dans ma precedente.

Il s'agit donc generalement de reduire les equations differentielles aux ordinaires, si cela est possible. Commençons par les plus simples, ou il s'agit des quadratures, c'est à dire ou l'une des differentielles se trouve sans sa grandeur absolue. Et au lieu de $dy:dx$ mettons maintenant $e:a$, or l'affaire est vuidée lorsqu'il y a $e + 11 = 0$ supposé que le nombre 11 signifie une formule rationelle donnée par x. J'appelle rationelles, ou l'indeterminée x n'entre pas dans le vinculum. Allons maintenant au cas suivant ou il y a $ee + 11e + 12 = 0$ (1). Il s'agit de trouver $yy + 21y + 22 = 0$ (2) car il est aisé de demonstrer qu'il est impossible que la grandeur y puisse monter plus haut que celle d'e. Je me sers des nombres au lieu des lettres parce que la note dextre me fait observer la loy des homogenes et la sinistre pour discerner les quantités qui sont icy données ou cherchées. On peut pourtant se servir des lettres lorsque le nombre n'est pas fort grand, comme en effect il ne l'est pas