I.

De l'Hospital an Leibniz.

Il y a longtemps, Monsieur, que je souhaitois de trouver l'occasion de vous écrire, et de vous marquer l'estime toute particuliere que je fais de vostre merite. J'ay lû avec admiration ce que vous avez fait mettre dans les Actes de Leipsic, et cet avec justice que vous pretendez étendre l'analyse au dela des bornes que Viete et Descartes avoient prescrites. En effect l'usage de vostre calcul differentiel est merveilleux pour determiner tout d'un coup les tangentes, les plus grandes et les moindres quantités, les points d'inflexion, les evolvés de Mr. Hugens, les caustiques de Mr. de Tschirnhaus etc. et cela me paroist achevé: mais il me semble qu'il reste bien des choses a découvrir pour l'inverse de ce calcul, je crois y avoir fait quelques progrés et je vous envoye la rectification de la Logarithmique en se servant de la courbe mesme et sans supposer d'ailleurs la quadrature d'aucun espace.

Probleme.

La logarithmique indefinie ABCD (fig. 40) qui a pour soutangente la droite donnée a, et son asymptote SL etant données de position, trouver geometriquement une ligne droite egale a une portion quelconque CD de cette courbe.

Solution.

Soit menée par un point quelconque L de l'asymptote SL la perpendiculaire LG, soit décrite la courbe algebraique LKH

telle que (LF et $LG = x$, FK et $GH = y$) $aax - xyy = 2aay$, de sorte qu'on peut determiner par le cercle et la ligne droite la grandeur des ordonnées FK, GH en supposant que les coupées LF, LG soient données et ayant mené CFK, DGH paralleles a l'asymptote, soient prises sur LG les parties LM, LN egales a FK, GH et sur l'asymptote la partie LE egale a la soutangente, et soient tirées les droites EG, EF et les paralleles MA, NB, je dis que la portion CD de la logarithmique $= EG - EF + MA - NB$.

On peut remarquer que la courbe LKH a pour asymptote la droite EO parallele a LG. Je vous envoirai si vous le souhaitez la demonstration, mais comme elle est fondée sur vos principes, je ne doute pas que vous ne la trouviez aisement. Je ne sçaurois encore trouver le moyen décrire la courbe qui a cette equation differentielle $aaxdx + 2y^3dy = 2aaxdy - aaydx$ mesme en supposant la quadrature des espaces etc. Cependant je m'y suis fort appliqué parceque cette courbe a des proprietés considerables, je suis persuadé, Monsieur, que vous avez des regles pour la solution de ces sortes de Problemes et j'en ai formé mesme quelques unes, mais elles ne sont pas generales. Vous me feriez plaisir de me proposer quelques courbes a trouver par la proprieté de leur soutangentes qui soient soumises a vos regles. J'ai lû avec application ce que vous avez fait mettre dans les Actes de Leipsic du mois d'avril de cette année et je crois y entrevoir la methode que vous proposés, mais il me faudroit quelques exemples pour m'eclaircir, en voici un que j'ai imaginé.

Soit la demie Ellipse ABD (fig. 41) qui a pour demiaxe les lignes CA, CB et soit entendue une infinité de Paraboles DEF, Def qui passent toutes par le mesme point D et dont tous les sommets des axes se rencontrent dans la demie Ellipse. Il faut décrire la ligne qui les touche toutes et determiner le point F ou deux quelconques de ces Paraboles, qui ne sont eloignées entr'elles que d'une distance infiniment petite, se rencontrent. Je trouve dans le cas ou $CB = AD$ que la ligne qui touche toutes les Paraboles est aussi une Parabole qui a pour sommet le point A et pour foyer le point D et que la ligne DF qui rencontre la Parabole DEF au point touchant F passe par son foyer. Je vous serai fort obligé si vous me faitez part de la maniere d'appliquer vostre calcul pour resoudre ces sortes de Problemes. Vous voiez, Monsieur, que j'en use bien librement de vous prier de m'instruire des la premiere fois que j'ai l'honneur de vous escrire. J'espere que vous me le pardonnerez et que vous me ferez la justice de me croire vostre tres humble et obeissant serviteur etc.

Mon adresse est rue St. Antoine cul de Sac de Guimené.

A Paris ce 14. Decbr. 1692.

II.

Leibniz an de l'Hospital.

C'est un heureux augure pour moy à l'entrée de cette année que d'avoir gagné une connoissance aussi importante que la vostre, Monsieur, pour la quelle vous avés eu la bonté de faire des avances; et le R. P. de Malebranche ne pouvoit m'obliger plus sensiblement qu'en y donnant occasion. J'estois deja plein d'admiration pour ce qu'on me disoit de vous. Je voyois que Mr. Bernoulli et Mr. Prestet s'adressoient à vous sur des matieres assez profondes; mais ce que M. Hugens m'a mandé de vos decouvertes, et ce qu'on m'a écrit de Florence de la solution que vous avés donnée du probleme de M. Viviani, m'a convaincu que vous avés des lumieres dont peu de gens sont capables. Ce même probleme m'a esté envoyé par ordre du Grand Prince de Toscane, et j'en ay aussi donné une solution, mais à la haste, le propre jour de la reception, a fin de depecher la reponse par la premiere poste; cette solution est imprimée dans les Actes de Leipzig. La festination a fait que dans l'addition qui se trouve à la fin de la solution s'est glissée une erreur que M. Bernoulli a remarquée, et que j'ay donné ordre de faire corriger, et de marquer que c'est sur l'avertissement de M. Bernoulli. J'ay remarqué que dans une de vos solutions il y a des fenestres isolées, ce qui m'ayant plû, j'en ay formé aussi, que j'ay envoyées à Mons. le Baron de Bodenhausen qui est à Florence, et qui se plait quelques fois à ma maniere de calculer. Je les vous envoyerois, si vous n'aviés deja toutes ces choses virtuellement, ou plustost eminemment, et si j'estois en estat d'y penser. Je suis tellement distrait, et partagé par d'autres choses qui me remplissent l'esprit, que lorsque je me remets sur l'Analyse, il me semble que je la dois apprendre tout de nouveau, et mes propres pensées me sont estrangeres. Les droits des Princes et les recherches sur l'Histoire de la maison de Brunsvic et des matieres semblables sont des occupations journalieres. Quantité de lettres aux quelles je dois repondre; même la Theologie et la Philosophie sur les quelles j'ay des disputes avec des personnes de consideration, me derobent bien du temps. C'est ce qui fait que mon analyse est demeurée en arriere, quoyque je croye de voir des voyes pour l'avancer encor considerablement. Car vous sçavés, Monsieur, qu'on n'a pas encor les racines des equations du cinquieme degré ny des voyes pour d'autres plus hauts, qu'on n'est pas encor le maistre des problemes semblables à ceux de Diophante; et quant à l'analyse des Transcendentes, ce n'est que depuis peu, comme vous sçavés, Monsieur, qu'on commence de s'en servir par un calcul reglé. La perfection de l'Analyse des Transcendentes en de la Geometrie ou il entre la consideration de quelque infini seroit sans doute la plus importante à cause de l'application qu'on en peut faire aux operations de la nature, qui fait entrer l'infini en tout ce qu'elle fait. Et je suis ravi de voir que vous en avés compris les consequences. Car si quelqu'un est capable d'y aller bien loin, ce sera vous, Monsieur, avec tant de penetration, et avec le goust que vous y prenés. J'ay quantité d'adresses dont je me sers lorsqu'il s'agit de resoudre quelque probleme differentiel, et de se delivrer des infiniment petites, soit en supposant des quadratures, ou autrement; mais elles ne sont pas tousjours bonnes. J'ay projetté quelques Methodes generales, mais il faudroit se resoudre à faire une fois pour toutes certains calculs assez prolixes. Et je ne suis pas en estat de les executer. Nous n'avons pas des gens dans ce pays cy qui ayent la moindre connoissance de ces choses. (Et je n'en parle pas seulement.) Et c'est en cela qu'on est heureux dans les grandes villes qu'on y trouve plusieurs personnes de toutes sortes d'estudes, qui se peuvent entraider. Une de mes methodes particulieres est, que toutes les fois, que dans l'equation tangentielle (ou differentielle du premier degré, c'est à dire ou il n'y a que des differences et point de differences de differences) on ne trouve point de droite constante employée pour remplir la loix des homogenes, je puis reduire l'equation tangentielle aux quadratures; par exemple si les accroissemens ou elemens dx à dy estoient comme yy à $yy + bxy + cxx$, le probleme se peut resoudre aux quadratures. Car b et c n'y font point la fonction de droites ou d'homogenes avec x et y, mais de nombres ou raisons seulement. Et souvent les equations differentielles, qui n'ont pas cette condition s'y peuvent reduire par des transformations. Je considere cette methode comme le premier degré de ce que je souhaitterois. Et si je pouvois proceder de même dans les autres equations differentielles, je n'aurois plus besoin de ces autres voyes plus prolixes, que j'avois projettées.

Cependant comme je ne sçay pas quand j'en viendray à bout, j'ay pensé à une invention subsidiaire pour l'usage qui est aussi generale qu'on en puisse souhaiter, pour donner des equations pour toutes lignes differentiellement exprimées, soit que les differences soyent du premier ou de quelque autre degré, car je ne considere les problemes de la converse des tangentes que comme le premier degré seulement de cette analyse des sommes et des differences. Ce moyen subsidiaire consiste dans une series infinie qu'on peut continuer aisement aussi loin qu'il est necessaire pour la practique, et dont on peut connoistre la progression à l'infini pour l'exactitude de la theorie. Ainsi on peut dire que cela est achevé dans son genre. J'appliqueray cette methode à vostre Probleme, c'est à dire la description de la Ligne dont l'Equation differentielle est $aax\,dx + 2y^3dy = 2aax\,dy - aay\,dx$ (1) ou bien (supposant $a = 1$) $2y^3 - 2x + ydx:dy + xdx:dy = 0$ (2) (dx : dy me signifie dx divisé par dy ou la raison de dx à dy). Supposons $x = y + ey^3 + fy^5 + gy^7 + hy^9 + iy^{11} + ky^{13} + ly^{15} + my^{17}$ etc. (3) pour abreger, car j'ay trouvé qu'on peut icy emettre utilement les termes pairs. Cela posé $dx:dy$ sera $= 1 + 3ey^2 + 5fy^4 + 7gy^6 +$ etc. (4) et par le moyen des equations (3) et (4), expliquant l'equation (2) nous aurons l'equation

$$0 = \left\{\begin{array}{llllllllll} + 2y^3 & = & + 2y^3 \\ - 2x & = -2y & - 2ey^3 & - 2fy^5 & - 2gy^7 & - 2hy^9 & - 2iy^{11} & - 2ky^{13} & - 2ly^{15} & \text{etc.} \\ + ydx:dy & = +1y & + 3ey^3 & + 5fy^5 & + 7gy^7 & + 9hy^9 & + 11iy^{11} & + 13ky^{13} & + 15ly^{15} & \text{etc.} \\ + xdx:dy & = +1.. & + 4e.. & + 6f.. & + 8g.. & + 10h.. & + 12i.. & + 14k.. & + 16l.. & \text{etc.} \\ & & & + 3ee.. & + 8ef.. & + 10eg.. & + 12eh.. & + 14ei.. & + 16ek.. & \text{etc.} \\ & & & & & + 5ff.. & + 12fg.. & + 14fh.. & + 16fi.. & \text{etc.} \\ & & & & & & & + 7gg.. & + 16gh.. & \text{etc.} \end{array}\right\} = 0 \ (5)$$

Mais l'equation (5) doit estre identique, c'est à dire tout doit evanouir. Donc il faut expliquer les arbitraires e, f, g, etc. en sorte que les coefficiens de chacque terme deviennent egaux à rien, par exemple y evanouit, car $-2 + 1 + 1 = 0$, et y^3

evanouit en faisant $+ 2 - 2e + 3e + 4e = 0$ et nous aurons $e = - 2 : 5$. Et continuant de même et se servant des lettres deja trouvées pour trouver les suivantes, on aura $f = \frac{-6}{2.6-3} \frac{1}{2} ee$ et $g = \frac{-8}{2.8-3} ef$ et $h = - \frac{10}{2.10-3} \begin{cases} eg \\ \frac{1}{2} ff \end{cases}$, et $i = - \frac{12}{2.12-3} \begin{cases} eh \\ fg \end{cases}$ et $k = - \frac{14}{2.14-3} \begin{cases} ei \\ fh \\ \frac{1}{2} gg \end{cases}$ et $l = - \frac{16}{2.16-3} \begin{cases} ek \\ fi \\ gh \end{cases}$ et $m = - \frac{18}{2.18-3} \begin{cases} el \\ fk \\ gi \\ \frac{1}{2} hh \end{cases}$

Et ainsi de suite à l'infini. Il n'est pas necessaire de calculer effectivement ces nombres, mais on le pourra faire aisement autant qu'il sera besoin. Et en ne marquant que les premiers il y aura $x = y - \frac{2}{5} y^3 - \frac{4}{75} y^5 - \frac{64}{4875} y^7$ etc. Si j'avois gardé les termes pairs, faisant $x = b + cy + ey^2 + fy^3$ etc. j'aurois eu une autre equation pour les autres courbes, qui n'auroient pas moins satisfait au probleme, car en effect il y en a une infinité. Il semble que vous avés remarqué, Monsieur, que cette courbe a des usages considerables et peut estre qu'il y en a quelque application à la mecanique ou physique; ces applications servent quelques fois à mieux decouvrir la nature de la chose. Cependant faute de temps je n'ay pas osé tenter toutes les façons, dont je me suis servi quelques fois pour venir à bout de telles lignes; aussi n'ay je pas esté en loisir de me forger canons particuliers, servans en plusieurs rencontres tels que je voy qu'on pourroit faire. Il paroist, Monsieur, que vous en avés et même que vous estes allé bien avant, et plus avant comme je croy que moy même. Dont je souhaitte de profiter si vous le jugés à propos. C'est a peu prés en cette matiere comme dans les problemes de l'Arithmetique de Diophante, ou l'on est aussi reduit à des adresses particulieres faute d'une bonne methode generale. Ce n'est pas que je ne voye qu'encor cette espece d'Arithmetique est susceptible de Methodes generales. Mais il y faut aussi bien des preparatifs, avant que de l'établir.

Ce sera pour la premiere suivante que je vous envoyeray, Monsieur, ma façon tres commode d'appliquer le calcul differentiel à l'invention de la ligne qui touche un rang de lignes données ou qui est formée par le coneurs de ce rang. Car maintenant il m'y faudroit un peu penser, ou chercher dans mes brouillons. Vostre rectification de la courbe des logarithmes est extremement belle et servira d'exemple. J'oserois m'asseurer d'en trouver la demonstration au besoin, ainsi je ne veux pas vous en donner la peine. Je puis prevoir si les theoremes qu'on m'envoye en ce genre sont d'une telle nature que j'en puisse promettre la demonstration. Cependant je ne dis point que je sois capable d'inventer tout ce que je sois capable de demonstrer quand on me le communique tout inventé. Il y a bien de la difference entre ces deux choses, qui n'est pas assez considerée par ceux qui font grand bruit, quand on a trouvé la demonstration de l'invention d'autruy. Faites moy la grace, Monsieur, de me faire quelque part de vos pensées et reflexions dans l'Analyse dont j'attends des lumieres considerables. Et croyés que je suis avec attachement etc.

P. S. Je repondray bientost au R. P. de Malebranche: Je crois que nous convenons qu'il se conserve tousjours la même force, mais il estime la force par la quantité du mouvement. Pour moy je tiens que deux forces sont egales lorsque par leur consomtion le même effect se peut produire, par exemple un même poids elevé à une même hauteur ou le même ressort bandé au même degré etc. Or il est manifeste, comme j'ai fait voir que la conservation de la force estant supposée dans ce sens, la même quantité de mouvement ne sçauroit tousjours subsister.

III.

De l'Hospital an Leibniz.

A Paris ce 24. Fevrier 1693.

On ne peut pas estre plus sensible que je le suis, Monsieur, a toutes les honnestetez dont vôtre lettre est remplie, je me fais un vrai plaisir d'avoir quelque commerce avec une personne de vôtre erudition. Il y a longtemps que je sçais que vous étes universel, la theologie, l'histoire, les droits des princes, la recherche des mines etc. sont votre occupation ordinaire et a peine avez vous quelques momens pour les employer aux mathematiques et a la phisique; cependant les grandes découvertes que vous y avez faites et que vous y faites encore tous les jours font assez connoistre de quoi vous étes capable en ce genre, et on ne sauroit trop se plaindre de ce que vous avez si peu de loisir a y penser. Le probleme de Mr. Viviany n'est pas des plus difficiles et vous louez beaucoup dans les autres ce qui vous a coûté a peine quelques momens. J'accepte volontiers l'offre que vous me faites de m'envoyer les fenestres isolées de vôtre invention. Mais ce que j'ai bien plus envie se savoir si vous le jugez a propos, est vôtre methode de reduire aux quadratures toutes les equations differentielles dans les quelles il n'y a point de droites constantes pour remplir la loix des homogenes, je serois ravi par exemple d'apprendre de vous l'art de reduire aux quadratures l'equation differentielle $yy\,dx + 2yx\,dx - xx\,dx = 2yy\,dy$ et je vousa voue que je n'ai point de regle generale pour ce cas, j'en ai une qui reussit fort souvent, c'est par elle que j'ai resolu les questions que Mr. Hugens m'a proposées, je puis resoudre par son moyen $a^3dy + axx\,dy = axy\,dx + aax\,dx + x^3dx$, $adx = dy\sqrt{aa + yy}$, $axx\,dy = byy\,dx + cxx\,dx$ etc. a, b, c sont des nombres, et par consequent cette derniere courbe doit estre soumise a la regle generale que vous avez. Je vous ferai part de la mienne si vous le souhaitez. La maniere dont vous resolvez par une suitte infinie l'equation differentielle $aax\,dx + 2y^3dy = 2aax\,dy - aay\,dx$ me plaist d'autant plus qu'elle est generale et qu'elle s'etend a tous les degrez, aussi cela me paroist achevé en ce genre. Je serois bien aise de voir quel chemin vous avez tenu pour exprimer par une suitte le sinus droit d'un arc donné ce que vous avez fait mettre dans les Actes de Leipsic de l'année derniere page 178. Pour les autres suites j'en ai aisement trouvé la raison. Au reste cette equation exprime dans un cas particulier la courbe de descente que vous avez proposée autrefois aux Cartesiens. Voici comment. On demande la courbe (fig. 42.) AD telle qu'un corps pesant en descendant par cette courbe s'eloigne egalement du point fixe A en temps egaux. Soit $AB = x$, $BD = z$, $AD = \sqrt{xx + zz}$, donc les differentielles $Bb = dx$, $Fd = dz$, $Dd = \sqrt{dx^2 + dz^2}$ et Ed ou $Aa = \frac{xdx + zdz}{\sqrt{xx + zz}}$, or les portions infiniment petites de la courbe, Dd et Aa ou Ed que je suppose parcourues en des instans egaux doivent estre entr'elles, comme la vitesse acquise en D, a la vitesse acquise en A (c'est a dire

en supposant que le corps avant d'estre parvenu au point A soit tombé de la hauteur LA que j'appelle a) comme $\sqrt{DB + AL}$ est a $\sqrt{AL}$ et faisant le calcul on trouve $\overline{xdz - zdx}\sqrt{a} = \overline{xdx + zdz}\sqrt{z}$ et supposant $z = \frac{yy}{a}$ il vient la mesme equation que je vous ai envoyée.

Je crois avoir découvert la maniere d'appliquer le calcul differentiel a l'invention de la ligne qui touche en rang une infinité d'autres lignes données, je vous expliquerai ma pensée par un exemple, car je trouve qu'en ces sortes de matieres il faut toujours autant que l'on peut fixer ses idées. Soit donnée une courbe quelconque (fig. 43) ABC et supposant qu'il y ait une infinité de Paraboles CBF qui passent toutes par le point C et dont les sommets des axes soient dans la courbe ABC, il faut determiner la ligne qui les touche toutes. Il est clair que le point d'attouchement de chaque Parabole CBF est dans l'intersection G de CBF et de celle qui est infiniment proche Cbf. Cela posé, soient menées les droites BD, GE paralleles a AC et soient nommées les connues CD, x, DB, y, et les inconnues CE, u, EG, z, et on aura par la proprieté de la Parabole $DF^2 . HG^2 :: DB . HB$ ce qui donne $2uxy - uuy = xxz$ qui est l'equation commune a toutes les paraboles telles que CBF. Je considere maintenant que les inconnues u et z demeurent les mesmes pendant que les connues x, y changent, c'est pourquoi l'equation differentielle sera $2ux\,dy + 2uy\,dx - uu\,dy = 2zx\,dx$, d'ou l'on tire, en mettant pour z sa valeur, $u = \frac{2yx\,dx - 2xx\,dy}{2y\,dy - x\,dy}$. Or la nature de la courbe ABC etant donnée le rapport de dx a dy le sera aussi et partant la valeur de u ou de CE sera exprimée en termes entierement connus delivrés de differentielles. Si au lieu de paraboles on propose d'autres courbes, le probleme se resout de la mesme maniere, et si on vouloit avoir une equation a la maniere de Descartes qui exprimast la nature de la ligne qui passe par tous les points G, il faudroit en se servant de l'equation commune a toutes les Paraboles CBF, de celle de la courbe ABC, et de la troisieme qui resulte de deux differentielles, en trouver une ou les x et y ne rencontrassent ph s et qui exprimait le rapport de u a z. Soit par exemple la courbe ABC une demie Ellipse dont le grand axe est double du petit AC que j'appelle a, on trouvera $uu = 4aa - 4az$ d'ou l'on voit que la ligne qui passe par tous les points G est une Parabole dont le sommet est en A et le foyer en C. Ce qui est ici de remarquable c'est que les Paraboles CBF marquent le chemin que descrivent en l'air les bombes qui seroient jettées par un mortier placé en C, dans toutes les elevations possibles, et que les points G sont les plus eloignés qu'il se peut du mortier, c'est a dire que la bombe en parcourant la Parabole CBF tombe sur le plan determiné CG en un point G plus eloigné du mortier C que si elle parcouroit toute autre Parabole ou ce qui est la mesme chose que dans toute autre elevation du mortier.

Vous pretendez, Monsieur, dans les Actes de Leipsic de l'année derniere page 446 que la courbe dont l'equation differentielle de differentielle est $a\,ddx = dy^2$ en supposant dt constant (dx exprime les differentielles des parties de l'axe, dy celles de ordonnées, et dt les petites portions de la courbe qu'on suppose egales entr'elles) est une logarithmique qui a pour soutangente la droite donnée a. Il me paroist que cela n'est pas ainsi et voici ma raison. $dt^2 = dx^2 + dy^2$ et prenant les differentielles $\frac{dy\,ddy}{dx} = ddx$, or a cause de la logarithmique $dx = \frac{a\,dy}{y}$, donc $y\,ddy = a\,ddx$ et partant il faudroit selon vous qu'en supposant dt constant dans la logarithmique on trouvast $y\,ddy = dy^2$, or cela n'arrive pas dans cette supposition, mais seulement dans celle que dx est constant, donc la mineure se prouve ainsi, dx etant posé constant l'equation $dx = \frac{a\,dy}{y}$ aura pour sa differentielle $y\,ddy = dy^2$, mais posant dt constant on aura dx ou $\sqrt{dt^2 - dy^2} = \frac{a\,dy}{y}$ et $\frac{dy\,ddy}{\sqrt{dt^2 - dy^2}} = \frac{ay\,ddy - a\,dy^2}{yy}$ et mettant pour $\sqrt{dt^2 - dy^2}$ sa valeur $\frac{a\,dy}{y}$ il vient $aay\,ddy - aa\,dy^2 = y^3\,ddy$ ce qui est bien different. Je ne vous propose ceci que comme une difficulté que je soumets à vôtre jugement qui ne peut estre que tres eclairé. Je suis, Monsieur, avec une estime parfaite vôtre tres humble et tres obeissant serviteur etc.

P. S. Le P. Malebranche m'a prié de vous remercier de sa part de la lettre que vous lui avez ecrite et de vous assurer de ses respects. J'ai toujours été de vôtre avis sur ce que vous lui mandez de la regle de Mr. de Tschirnhaus, et j'ai mesme fait

convenir le P. Prestet qu'il s'etoit trompé. J'avois eu dessein de faire mettre dans le journal mon sentiment la dessus parcequ'il semble de la maniere dont le P. Prestet s'adresse a moi que je sois du sien. Cependant je n'en fis rien a sa priere et cela en est demeuré la. Mais ce que j'ai toujours soutenu a été que bien loin que la regle de Mr. Tschirnhaus eut quelque avantage par dessus celle de Cardan, elle étoit au contraire sujette au mesme deffaut, et plus embarassée. Ce deffaut consiste a mon sens en ce que l'expression des racines des egalitez du 3e degré dans le cas ou elles sont toutes trois réelles et incommensurables, renferme des grandeurs imaginaires qu'on ne peut debarasser en aucune sorte de leur lignes. On ne trouve rien considerable dans la seconde edition du livre du P. Prestet touchant les egalitez du 5e degré et ce qu'il y a de plus que dans la premiere consiste en ce qu'il a resolu par analyse toutes les questions de Diophante. Il suppose cependant quelque fois certains theoremes aussi bien que Diophante qu'il ne demontre pas, en voici un: Que tout nombre entier qui est composé de trois quarrez au moins en fraction est necessairement ou quarré ou composé de deux quarrez ou de trois quarrez en entiers. Ce theoreme depend de la nature des nombres et me paroît tres difficile a demontrer. Mr. de Fermat assure dans une lettre qui est imprimée a la fin du Commercium epistolicum Wallisii qu'il a trouvé les demonstrations de quelques theoremes du moins aussi difficiles que celui ci, mais j'ai de la peine a me le persuader. Pourquoi ne les auroit-il pas publiées lui qui faisoit souvent beaucoup de cas de peu de choses?

IV.

Leibniz an de l'Hospital.

Ce n'est pas cette universalité de connoissances que vous m'attribués, Monsieur, par une pure grace de vostre liberalité qui m'empeche de satisfaire à mon inclination pour les mathematiques; mais une infinité de petites choses qui me detournent. Je crois d'avoir maintenant plus de 30 lettres qui attendent reponse ou il faut tousjours dire quelque autre chose que des complimens. Et outre les devoirs de mes charges on doit du temps à la cour et à ses amis; de plus ils me viennent quelques fois des pensées que je suis bien aise de conserver; il faut voir les livres nouveaux; il est necessaire d'avoir quelque information des affaires courantes. Et excepté les sçavans si ceux qui me connoissent sçavoient qu'avec cela je m'amusois encor à l'Algebre, ils le trouveroient estrange. Quand j'ay fait quelque chose, je l'oublie presque entierement au bont de quelques mois, et plustost que de le chercher dans un chaos de brouillons que je n'ay pas le loisir de digerer, et de marquer par rubriques, je suis obligé de faire le travail tout de nouveau. On est heureux dans une grande ville, ou l'on trouve des amis de toute façon, dont les assistances et concours a un même dessein soulagent merveilleusement. J'ay souvent souhaitté un jeune homme profond dans l'analyse qui en m'assistant auroit trouvé encor de quoy se signaler luy même, ce qui luy auroit depuis servi de recommandation; mais on n'en trouve point de cette sorte dans ce pays cy, ny dans le voisinage. J'ay plusieurs Methodes qui ne demandent que du temps pour estre mises en estat de servir, par exemple pour aller aux racines du cinquieme degré, et autres degrés superieurs; pour pousser les problemes faits à la façon de Diophante qui jusqu'icy n'ont pas esté assez soumis à l'analyse; pour avancer la science des nomdres d'une maniere toute nouvelle; pour reduire les lignes Transcendantes aux ordinaires quand il est possible; ce qui comprend encor les quadratures indefinies ou communes à chaque segment; item pour parvenir même aux quadratures speciales ou pour en demonstrer l'impossibilité; ce qui est bien plus difficile que les quadratures infinies, et encor bien au delà de nostre calcul des sommes et des differences. J'ay même le projet d'une Analyse Geometrique toute nouvelle, entierement differente de l'Algebre, qui sert *pro situ exprimendo* comme l'Algebre est *pro magnitudine exprimenda*; et les calculs y sont des veritables representations de la figure et donnent directement les constructions; au lieu que la traduction des problemes de Geometrie à l'Algebre, *revocando situm ad magnitudinem*, est souvent quelque chose de force: tellement qu'il faut de la façon pour metire le probleme en calcul, et encor plus de façon apres le calcul fini, pour en tirer une construction. Mais dans ce nou-

veau calcul la simple enontiation du probleme seroit son calcul et le dernier calcul seroit l'expression de la construction. La chose est faisable, et serviroit à soulager merveilleusement l'imagination que ce calcul suivroit pas à pas, et ce seroit quelque chose de tres utile pour la mecanique et même pour la physique pour y raisonner mecaniquement.

J'en ay des echantillons qui serviront à fin que cette veue ne se perde point, si je suis empeché de l'executer. L'Algebre et la Geometrie sont assez achevées pour l'usage; l'algebre ordinaire par les racines approchantes, la Transcendante par la Methode des series que je vous ay envoyée, de sorte que ce qui reste est plustost pour la curiosité et perfection de la science ou tout au plus pour trouver des abregés; mais cette *Characteristica situs* auroit des utilités toutes nouvelles pour la practique meme. Je ne vous diray rien icy des essais que j'ay pour raisonner mathematiquement sur des matieres qui sont entierement eloignées des mathematiques. Mais je parleray à cette occasion de quelques progres que j'ay fait sur les nombres. Comme je me sers souvent de nombres au lieu de lettres, mais en traittant ces nombres comme si n'estoient que des lettres, j'y ay trouvé entre autres utilités celle de pouvoir faire epreuve du calcul literal ou de la specieuse *per abjectionem novenarii*; et comme l'abjection novenaire n'exclut pas tous les erreurs, quoyque elle les decouvre ordinairement, j'y ay adjouté de plus *abjectionem undenarii*, ou j'ay trouvé un abregé, qui ne cede gueres à l'abjection novenaire dont vous sçavés la grande commodité et utilité. En cherchant les choses je trouvay des ouvertures sur les nombres qui pourront pousser bien loin cette science. Il est vray, comme vous dites, Monsieur, que M. de Fermat fait quelques fois trop d'estat de peu de choses, mais il semble, qu'il estoit profond sur les nombres, et capable de demonstrer les theoremes dont il fait mention, puisqu'il avoit dit de le pouvoir faire.

Vous avés eu raison de trouver à redire à ce que j'avois dit dans les Actes touchant la courbe dont les elemens estant egaux il y a $addx = dy^2$. Mes distractions sont cause que je me trompe quelques fois, et je ne suis point faché, qu'on me releve. Ce que M. Bernoulli, professeur de Bâle, a aussi fait sur un autre point dans une lettre ecrite à un ami pour m'estre communiquée; j'en ay profité par un aveu public, ce que je pourray faire aussi dans l'occasion sur vostre animadversion. Je n'y pas peu trouver mon brouillon d'alors, pour y voir la cause de l'erreur, mais en examinant la chose, je trouve que dy estant comme des nombres, x sont comme des logarithmes; ainsi je croy que par precipitation, *oculorum errore*, j'auray pris y pour dy. Je suis bien aise de sçavoir que l'equation differentielle que vous m'avés envoyée, Monsieur, sert pour un cas de la ligne ou le poids descendant s'eloigne egalement d'un certain point. Cela me servira à y mieux penser un jour. Car autres fois songeant à ce probleme je croyois voir quelque chemin pour le donner.

Vous avés merveilleusement bien trouvé ma maniere d'appliquer le calcul differentiel à la determination de la ligne qui touche un rang de lignes c'est qu'en differentiant l'equation commune à toutes les lignes de ce rang, au lieu qu'ordinairement les deux coordonnées sont doubles ou differentiables, icy elles sont simples; et quelques parametres indifferentiables ailleurs sont icy changeans et par consequent differentiables. Il peut arriver que de plusieurs parametres (ou constantes dans l'equation d'une même courbe) l'un soit differentiable, et l'autre demeure invariable, par exemple si une même parabole estoit differemment placée, en sorte que son axe soit tousjours vertical, ou parallele à AL (fig. 44), et le sommet tousjours dans une droite donnée AM, les intersections des situations, ou traces de la parabole, donneront une nouvelle ligne qui touchera toutes les traces. On voit bien qu'elle sera droite, mais pour le calcul soit AB, z, et BC, v, et AL, x, et LM, y, et parametre constant de la parabole f, il y aura $f \cdot ME = EC^2$, or $ME = z - x$ et $EC = v - y$, donc $fz - fx = vv - 2vy + yy$ (1), ou f est *constantissima*, tant pour chaque point de la ligne MC, que pour chaque ligne MC, mais x et y sont *constantes* pour chaque point de la ligne MC, mais non pas pour chaque ligne estant autres pour M que pour (M). Les lignes v et z sont variables tant pour chaque point de la ligne, que pour les lignes, excepté dans le point d'intersection ou elles sont communes à deux lignes prochaines et ces intersections donnent le point de la ligne touchante commune. Ainsi en differentiant l'equation (1) on voit que f, z, v demeurent invariables, mais x et y se differentient; et nous aurons $-fdx = -2vdy + 2ydy$ (2), mais $dx : dy$ est une raison donnée r, car $dx : dy = x : y$ (3) $= r$ (4),

car AM(M) est droite; donc par (2) et (3) nous aurons $y = v - \frac{1}{2} rf$ (5). Et de l'equation (1) ostant x et y par le moyen des equations (4) et (5) nous aurons $fz + \frac{1}{4} rrff = rfv$ ou bien $z + \frac{1}{4} r^2 f = rv$ (6), ce qui fait voir que la ligne qui touche tousjours la parabole mue comme nous venons de dire, est une droite parallele à AM. Il estoit aisé de prevoir cela, mais j'ay pris sur le champs ce cas aisé pour me mieux expliquer. Si d'abord on avoit osté une des variables x ou y de l'equation (1) par l'equation (4) en faisant $fz - rfy = vv - 2vy + yy$ (7), la differentialité seroit evanouie d'elle meme; car il y auroit $-rf = -2v + 2y$ (8) ce qui convient avec l'equation (5). On a le choix de suivre l'une ou l'autre façon selon les rencontres. La ligne sur laquelle une autre est revolue (à l'imitation du cercle qui fait la cycloid est aussi la touchante commune de toutes les traces de la generatrice, ainsi la generatrice et la generée estant données on peut trouver la base de la revolution. Comme je puis tousjours trouver la touchante commune à un rang de lignes, je voudrois pouvoir aussi trouver tousjours la perpendiculaire commune, ou la ligne qui feroit un angle donné commun.

De la maniere que je vois, Monsieur, que vous penetrés les choses tout ce que vous me voudrés communiquer, me sera tres utile et tres agreable, soit pour resoudre des equations differentielles par certains canons que vous avés fabriqués; soit pour quelque autre chose. Je ne doute point que vous ne m'appreniés des choses que j'aurois de la peine à faire, n'estant pas en estat de m'y appliquer comme il faut; je n'ose pas même dire, qu'avec toute mon application j'y pourrois tousjours arriver. Pour ce qui est de la *series pro inveniendo sinu ex dato arcu*, la methode que je vous ay envoyée la donne; car soit l'arc a, le sinus y, le rayon soit l'unité, l'equation differentielle pour exprimer la relation entre le sinus et l'arc est $da^2 = dy^2 + da^2 y^2$. Soit maintenant le sinus $y = ba + ca^3 + ea^5 + fa^7 + ga^9$ etc. ce qui donnera encor les valeurs d'y^2 et de dy^2 *per series*, les quelles estant substituées dans l'equation differentielle, il en proviendra une equation, qui ne contiendra que l'indeterminée a, et par consequent deuvra estre rendue identique, en faisant evanouir tous les termes; ce qui donnera moyen de determiner les valeurs des lettres b, c, f, g, et au bout du compte on trouvera $y = \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^5}{1.2.3.4.5} - \frac{a^7}{1.2.3.4.5.6.7}$ etc. comme j'ay experimenté. Le même se trouvera encor plus facilement, allant aux differentio-differentielles, et faisant $yda^2 + ddy = 0$ si da est supposée constante. On pouvoit faire au commencement $y = b + ca + ea^2 + fa^3 + ga^4 + ha^5$ etc. mais le calcul même fait voir, que les coefficientes des termes dont l'exposant est pair, peuvent estre posées egales à rien.

Je souhaiterois de vous pouvoir contenter si aisément dans tous les autres points de vostre lettre, mais le mal est qu'il y en a qui demandent bien plus de temps et d'attachement, dont je ne suis pas presentement le maistre. Cependant j'auray soin d'y satisfaire aussi tost qu'il me sera possible. J'adjouteray sur vostre postscriptum qu'il est vray que la regle de Mons. Tschirnhaus est plus embarassée que celle de Cardan, mais si sa methode pouvoit aller aux degrés superieurs, j'en serois le plus content du monde. J'ay dit dans ma precedente ou dans celle que j'ay ecrit au Reverend Pere Malebranche, que je tiens les regles de Cardan pour generales à l'egard de toutes les equations cubiques, et que les grandeurs ne laissent pas d'estre reelles non obstant l'intervention des imaginaires, qui se detruisent virtuellement. Il est vray que ces expressions alors ne servent pas à la construction, mais elles satisfont à l'analyse en donnant purement la valeur de l'inconnue; et ont tous les autres usages analytiques qu'on peut souhaiter de sorte que je serois tres content, si j'en avois de semblables pour les degrés superieurs. Je souhaite pourtant d'en sçavoir vestre sentiment, Monsieur, et je vous supplie de considerer pour cet effect, ce que j'en ay déja ecrit.

V.

De l'Hospital an Leibniz.

Toutes les veues que vous avez, Monsieur, pour le progrés de la Geometrie et de l'analyse me paraissent admirables. Il

seroit extremement a souhaitter que vous pussiez avoir le loisir de les achever. Je suis persuadé qu'il faut un calcul tres penible et tres ennuyeux pour trouver les racines des egalités du 5e degré, et je conviens avec vous que tout ce que l'on peut souhaitter la dessus, est de trouver une expression generale renfermée sous des signes radicaux, sans s'embarasser si il y a des imaginaires ou non. Je crois mesme voir quelque jour pour demontrer qu'il est impossible d'exprimer autrement d'une maniere generale les racines des egalités du 3e degré, dans le cas ou elles sont toutes trois réelles et incommensurables. Les questions a la maniere de Diophante sont resolues pour la pluspart sans methode et par des adresses particulieres, et comme elles ne sont pas d'une grande utilité, il me semble qu'on seroit fort obligé a ceux qui nous donneroient des methodes generales pour resoudre une infinité de questions semblables, car ce sont proprement les methodes qui etendent la capacité de l'esprit, ce qui est a mon avis un des principaux avantages que l'on peut tirer des mathematiques. La science des nombres a esté jusqu'ici fort imparfaitte, on ne sait pas mesme la nature des nombres premiers, ce qui paroist assez de ce qu'on n'a pû encore demontrer que tout nombre premier plus grand de l'unité qu'un nombre divisibls par quatre, est composé de deux quarrés en entiers. Si l'on pouvoit trouver une methode pour parvenir aux quadratures particulieres lorsqu'elles sont possibles, ou pour en demontrer l'impossibilité lorsqu'elles ne le sont pas, je la prefererois a toutes ces autres inventions. Mr. Tschirnhaus pretend en quelqu'endroit des Actes de Leipsic, que lorsqu'on a une quadrature particuliere dans les courbes algebraiques, on en peut trouver une infinité d'autres, au lieu qu'il n'en est pas ainsi des lignes transcendantes. Comme cette remarque m'a parû belle, je l'ay examinée autre fois et j'ay trouvé qu'elle se reduisoit a demontrer qu'on peut tousjours assigner dans toutes les courbes geometriques au sens de Descartes, une infinité de segmens egaux a un segment donné. Je n'ose pas assurer que cela soit universellement vray, mais je crois tousjours avoir reduit la question a quelque chose de plus simple et je serois bien aise de savoir vostre sentiment la dessus. Je ne voudrois pas tomber dans le deffaut de Mr. Tschirnhaus qui prent souvent pour generalement vray ce qu'il n'a pû verifier tant au plus que dans quelque cas particulier, temoin ce qu'il avance dans son Medicina Mentis lorsqu'il pretend qu'on peut decrire toutes les courbes imaginables soit algebraiques soit transcendantes par le moyen de certains filets. Ce que vous me mandez de vostre analyse geometrique reveille beaucoup ma curiosité, mais je ne puis m'en former d'idée juste que je n'en ay veu auparavant quelques essais. J'ay de la peine a croire qu'il soit aussi general et aussi commode de se servir de nombres que de lettres dans l'analyse ordinaire. J'ay oui dire autrefois que vous aviez formé le project d'une certaine table qui seroit aussi commode pour le calcul algebraique que les logarithmes le sont pour les nombres. Mandez moy je vous prie ce qui en est.

Je suis fort aise d'avoir bien rencontré la maniere de determiner la ligne qui touche un rang d'autres lignes données. Mais il n'est pas aussi facile de trouver la perpendiculaire commune, car le probleme se reduit alors aprendre les sommes, c'est a dire a la methode inverse des tangentes. Voici un exemple qui quoiqu'aisé sert a prouver cette verité.

Soit une infinité de paraboles qui ayent toutes le mesme sommet (fig. 45) C, et le mesme axe CH, il faut determiner la ligne AME qui les coupe toutes a angles droits.

Solution. Ayant mené l'ordonnée MP, et la perpendiculaire MH a la parabole, et nommé les indeterminées CP, x, PM, y, on aura par la nature de la parabole $PH = \frac{yy}{2x} = -\frac{ydx}{dy}$ (parceque MH doit estre touchante de la courbe AME) et partant $-2xdx = ydy$, et prenant les sommes $-xx$ ou $aa - xx = \frac{1}{2}yy$. D'ou l'on connoist que la ligne cherchée AME est une Ellipse, dont le quarré d'un des axes AB est au quarré de l'autre axe DE, comme 2 est a 1, et generalement pour les paraboles de tous les degrés, comme l'exposant des puissances des ordonnées MP, a l'exposant des puissances des parties CP de l'axe.

Vous ne serez peut estre pas faché, Monsieur, de voir ici la solution que j'ay donnée il y a désia quelque temp dans nostre Journal des Savans du probleme que Mr. de Beaune proposa autre fois a Mr. Descartes, et que l'on trouve dans la 79. de ses lettres tome 3.

Probleme.

Une ligne droite quelconque N estant donnée, et ayant mené deux autres lignes indefinies (fig. 46) AC, AI, en sorte

que l'angle CAI soit de 45 degrez; on demande la maniere de decrire la courbe ABB, qui soit de telle nature que si l'on mene d'un de ses points quelconques B, l'ordonnée BC et la touchante BT, la raison de BC a CT soit toujours la mesme que celle de la droite donnée N a BI.

Solution. Ayant formé le quarré AG qui a pour coté la droite AH egale a la ligne donnée N, l'on décrira entre les asymptotes GD, GH par le point A l'hyperbole ALL, et ayant prolongé DA en E, en sorte que AE soit egale a AH, l'on prendra le rectangle EC egal a l'espace hyperbolique AKL, l'on prolongera les droites LK, FC, jusqu'a ce qu'elles se rencontrent en un point M, et l'on prendra enfin IB egal a CM, je dis que le point B sera a la courbe qu'il falloit décrire.

Il est evident que la nature de cette ligne courbe ABB dépend de la quadrature de l'hyperbole, et qu'ainsi est mecanique dans le sens de Descartes. Voici maintenant quelques unes de ses proprietez.

1°. Elle a pour asymptote la ligne DO parallele a AI.

2°. Si l'on nomme AC, x, BC, y, l'espace ABC compris par les droites AC, CB, et par la portion AB de la courbe, $= xy - \frac{1}{2}yy + nx$.

3°. La distance du centre de gravité de l'espace ABC de la droite $AC = n + \frac{3xyy - 2y^3}{6xy - 3yy + 6nx}$ et de $AK = \frac{1}{2}n + \frac{3xxy - y^3}{6xy - 3yy + 6nx}$ et l'on a par consequent les solides, demisolides etc. formez par la revolution de cet espace, tant autour de AC que de AK ou BC.

4°. Il est facile de determiner les centres de gravité de ces demi-solides. Mais comme on a besoin d'une adresse particuliere pour rectifier cette courbe, en supposant la quadrature de l'hyperbole, je propose ce probleme aux Geometres les assurant qu'il merite leur recherche.

J'ay trouvé depuis une autre construction qui me plaist d'avantage et dont vous jugerez.

Ayant pris sur (fig. 47) CA prolongée du costé de A la partie AG egale a la droite donnée N, et mené GH parallele a BC, on décrira par le point A la logarithmique AE qui ait pour asymptote la droite indefinie GH, et pour soustangente une ligne egale a AG; on menera en suite par un point quelconque E de la logarithmique les droites EF, EB paralleles a GH, GA, et ayant pris EB egal a EF, je dis que le point B sera a la courbe requise. Il est facile de rendre cette construction generale tel que puisse estre l'angle donné CAI. Je reserve a la premiere fois a vous envoyer la rectification generale de cette courbe qui est assurement plus difficile que celle de la logarithmique et comme je ne suis désia que trop long ce sera aussi pour la premiere occasion que je vous feray part de ma regle pour l'inverse des tangentes et que je vous prieray en mesme temps de vouloir bien m'envoyer la vostre qui je m'assure sera tres belle. Je suis, Monsieur, avec une estime tres particuliere vostre tres humble et tres obeissant serviteur.

A Paris ce 23. avril 1693.

VI.

Leibniz an de l'Hospital.

Hanover 28. Avril 1693.

Si j'estois aussi capable d'achever des Methodes, que je suis disposé à en projetter, nous irions sans doute bien loin, Monsieur, et je pourrois remplir vostre attente. J'avois conferé autres fois avec feu M. Prestet touchant les imaginaires, il ne paroissoit pas disposé à les admettre dans les expressions. Cependant je m'en trouve bien. Je crois avec vous qu'on ne sçauroit donner aucune expression des racines des equations cubiques, propre à se passer des imaginaires ou impossibles. Car puisque toute racine cubique tirée d'une grandeur possible, comme n, a trois valeurs $\sqrt[3]{n}$, et $(1+\sqrt{-3})\frac{1}{2}\sqrt[3]{n}$, et $-(1-\sqrt{-3})\frac{1}{2}\sqrt[3]{n}$, dont les deux dernieres sont impossibles, donc si la racine de l'equation ne contenoit que des racines cubiques des grandeurs possibles, elle n'exprimeroit jamais trois valeurs possibles. Ce qui est pourtant necessaire, puisque une valeur de l'inconnue de l'equation trouvée sans depression ou extraction actuelle doit exprimer toutes les valeurs de la racine de l'equation.

J'ay trouvé que les problemes semblables à ceux de Diophante sont d'une utilité plus grande qu'on ne pense, c'est ce qui m'en fait souhaitter la solution. L'invention des quadratures particulieres, lorsqu'elles sont possibles, ou la demonstration de l'impossibilité est ce qu'il y a de plus sublime dans cette partie de la Geometrie. Cependant si j'avois les quadratures generales par les expressions que je souhaitte, on avanceroit encor de beaucoup les quadratures particulieres. Mons. Tschirnhaus pretendoit de conclure l'impossibilité de la quadrature particuliere, lors que la quadrature generale avoit esté prouvée impossible. Mais pour luy donner une instance contraire, je fabriquay une figure par les ordonnées de la lunule d'Hippocrate, appliquées à une droite; quelques années apres, s'estant apperceû de la verité de mon objection, il nous donna un peu le change. Il est bien vray que la lunule reçoit une certaine façon de quadrature qui est indefinie, sans estre generale; mais c'est parce qu'elle est enfermée de deux lignes courbes: car lorsque la figure n'a qu'une courbe, cela ne sçauroit reussir. Il me paroist difficile de donner une Methode propre à trouver une infinité de segmens egaux à un segment donné d'une courbe Algebraique. Par segmens j'entends une figure comprise d'une droite, et d'un arc de courbe. Si cela se pouvoit dans l'Ellipse et dans l'Hyperbole, je croy qu'on y viendroit à des qudratures. Par exemple dans l'Hyperbole les secteurs *ex centro* sont comme les logarithmes de certaines droites données, c'est pourquoy s'il y avoit encor moyen de comparer les segmens, on viendroit à les quadratures absolues des cas particuliers. Monsr. de Tschirnhaus me proposa un jour *datum segmentum vel semisegmentum figurae ordinariae secare in ratione data ductu cujusdam lineae ordinariae seu Algebraicae.* Je luy envoyay la Methode que je crûs avoir trouvée pour cela. Mais il y a des methodes que je souhaiterois bien d'avantage, par exemple de pouvoir reduire les quadratures aux rectifications des courbes. Car la dimension de la ligne est plus simple que celle d'un espace.

Des que la *Medicina Mentis* de Monsieur de Tschirnhaus parût (ou en effect il y a plusieurs pensées excellentes) je luy manday les difficultés que je trouvois a l'egard de ce qu'il dit du denombrement des courbes et des determinations de leur tangentes par les filets, et comme je crûs entrevoir un moyen general pour ces tangentes par les filets et fondé sur une jolie consideration de Mecanique, je luy fis esperer la vraye construction. Mais Monsr. Tschirnhaus ne repondit point à cette lettre, ainsi quoyque j'eusse achevé ma construction, je ne voulus point l'en importuner.

Vous avés bien compris, Monsieur, que pour mener une ligne perpendiculaire à une suite de lignes données, il faut venir à l'inverse des tangentes. Si je pouvois reduire *vice versa* les inverses des tangentes à ce probleme, j'aurois une nouvelle maniere de les construire independemment des quadratures.

Ayant vû dans le Journal des Sçavans une construction du probleme de M. de Beaune, j'en fus tout surpris, car je ne connoissois alors personne en France, qui eût de l'entrée dans ce qu'il faut pour cela et je n'estois pas informé alors, qu'une personne de vostre poids prenoit plaisir à ces recherches. Maintenant je suis bien aise d'apprendre, que c'est vous qui l'avés donnée. Je n'ay pas le loisir d'entrer dans le detail des proprietés de cette courbe, et comme vous estes venu à bout de sa rectification, *nolim actum agere*; ce n'est pas que je me vante de le pouvoir faire quand même je voudrois y penser, car puisque vous dites qu'il faut une adresse particuliere pour cela, je vois assez que la chose ne sera pas de plus aisées. Mais comme vous avés la bonté de ne me pas traiter en estranger dans ces matieres, j'aime mieux d'attendre vos instructions, que de tacher peutestre inutilement de les prevenir, ce que je dis aussi sur vostre methode pour certains problemes des tangentes renversées, que vous m'avés fait esperer. Il est bon cependant de ne pas prostituer nos Methodes, sur tout à l'egard des gens, qui en usent avec un peu de supercherie, temoin un sçavant Mathematicien de Paris, qui voulut prendre part à ma quadrature Arithmetique, dont il avoit appris la demonstration de Mons. de Tschirnhaus à qui je l'avois communiquée. Pour vous, Monsieur, si j'avois beaucoup de lumieres, je prendrois le plus grand plaisir du monde à les vous communiquer, car en y joignant les vostres vous pouvés porter les choses plus loin que je n'aurois pû. C'est pourquoy je vous informeray volontiers de mes methodes tant pour les Tangentes renversées, que pour autres choses. Puisque vous dites que vous avés de la peine à croire qu'il soit aussi general et aussi commode de se servir des nombres que des lettres, il faut que je ne me sois pas bien expli-

qué. On ne sçauroit douter de la generalité en considerant qu'il est permis de se servir de 2, 3 etc. comme d' a ou de b, pour veu qu'on considere que ce ne sont pas de nombres veritables. Ainsi 2 . 3 ne signifie point 6, mais autant qu' ab. Pour ce qui est de la commodité, il y en a des tres grandes, ce qui fait que je m'en sers souvent, sur tout dans les calculs longs et difficiles ou il est aisé de se tromper. Car outre la commodité de l'epreuve par des nombres, et même par l'abjection du novenaire, j'y trouve un tres grand avantage même pour l'avancement de l'Analyse. Comme c'est une ouverture assez extraordinaire, je n'en ay pas encor parlé à d'autres, mais voicy ce que c'est. Lorsqu'on a besoin de beaucoup de lettres, n'est il pas vray que ces lettres n'expriment point les rapports qu'il y a entre les grandeurs qu'elles signifient, au lieu qu'en me servant des nombres je puis exprimer ce rapport. Par exemple soyent proposées trois equations simples pour deux inconnues à dessein d'oster ces deux inconnues, et cela par un canon general. Je suppose $10 + 11x + 12y = 0$ (1) et $20 + 21x + 22y = 0$ (2) et $30 + 31x + 32y = 0$ (3) ou le nombre feint estant de deux characteres, le premier me marque de quelle equation il est, le second me marque à quelle lettre il appartient. Ainsi en calculant on trouve par tout des harmonies qui non seulement nous servent de garans, mais encor nous font entrevoir d'abord des regles ou theoremes. Par exemple ostant premierement y par la premiere et la seconde equation, nous aurons: $\begin{matrix} +10.22 + 11.22x \\ -12.20 - 12.21.. \end{matrix} = 0$ (4) et par la premiere et troisieme nous aurons: $\begin{matrix} +10.32 + 11.32x \\ -12.30 - 12.31.. \end{matrix} = 0$ (5) ou il est aise de connoistre que ces deux equations ne different qu'en ce que le charactere antecedent 2 est changé au charactere antecedent 3. Du reste, dans un même terme d'une même equation les characteres antecedens sont les mêmes, et les characteres posterieurs font une même somme. Il reste maintenant d'oster la lettre x par la quatrieme et cinquieme equation, et pour cet effect nous aurons

$$\begin{matrix} 1_0 . 2_1 . 3_2 & & 1_0 . 2_2 . 3_1 \\ 1_1 . 2_2 . 3_0 & = & 1_1 . 2_0 . 3_2 \\ 1_2 . 2_0 . 3_1 & & 1_2 . 2_1 . 3_0 \end{matrix}$$

qui est la derniere equation delivrée des deux inconnues qu'on vouloit oster, et qui porte sa preuve avec soy par les harmonies