c'est ce que je ne voy pas encor bien clairement. Et on se peut figurer des constitutions des corps ou il n'en iroit pas ainsi. C'est ce qui m'a rebuté de cette recherche. Voyant que ma santé commence à chancelier, j'ay bien de la peine à me resoudre à des meditations qui ne servent qu'à exercer l'esprit. Je n'ay pas meme examiné la construction de ma paracentrique isochrone donnée par Mr. Bernoulli, m'estant contenté de donner mon analyse, qui est assez naturelle, avec ma construction qui n'a besoin que de la rectification d'une coube ordinaire.

Je suis de vostre sentiment, Monsieur, en ce que vous croyés que le probleme n'est pas encor bien resolu, lorsqu'on ne fait que le reduire à quelque quadrature. Ainsi la courbe dont la rectification est employée par Mr. Bernoulli à la construction de la paracentrique n'estant pas assés construite encor elle même, est peu propre à la fin qu'il se propose. Mais je ne l'en reprends point. *Est aliquid prodire tenus.* Cependant je suis d'accord avec Mr. Bernoulli, que c'est toujours beaucoup quand un probleme est reduit aux quadratures. C'est à mon avis un grand et necessaire acheminement à sa veritable solution. Il y a plusieurs degrés dans les solutions. La plus parfaite sans doute est celle qui reduit les transcendentes à l'aire du cercle ou de l'hyperbole. Au défaut de cela je voudrois pouvoir décrire la ligne transcendente *per puncta*, à l'imitation de la logarithmique, qui se décrit par le moyennes proportionelles. Et quand cela manque encor, je me contente d'obtenir mon but *per rectificationes linearum*. Mais il y a des cas si difficiles, ou tout ce que j'y puis jusqu'icy est de *donner seriem infinitam*. Je ne doute point qu'on ne trouve un jour la methode de reduire le tout aux plus simples quadratures possibles. Je croy même d'en voir les moyens, dont j'ay aussi des echantillons, mais je ne suis pas en estat d'y travailler.

Si Mr. Bernoulli a bien determiné l'arc du ressort ou les tangentes des extremités sont paralleles, il me semble qu'il aura aussi les cas ou ces tangentes sont convergentes au dessus ou au dessous de la corde, car il n'aura qu'à continuer la courbe, ou en prendre la partie, puisque la partie du ressort bandé est encor un ressort bandé, en quelque endroit qu'on l'attache qu'on en prenne les extremités. Cela fait voir encor que l'arc peut n'estre pas ambidextre, lorsqu'en le bandant on pousse inégalement les extremités. Je suis aussi en doute sur ce qu'il

dit de la voile, et la chose merite d'estre approfondie. Je crois que ma construction comprend toutes les isochrones paracentriques, tant celles de Mr. Bernoulli que celles que vous avés si profondement considerées, mais je ne suis pas en estat ny en humeur de venir au detail.

Pour ce qui est du calcul des differentio-differentielles, sur lequel vous desirés d'estre eclairci, je suis bien aise de pouvoir satisfaire à vos ordres en quelque chose. Ce n'est que trop souvent que je voy qu'on est obligé d'y venir: mêmes la recherche de la chainette y mene naturellement, mais c'est par une faveur speciale qu'on y peut s'en delivrer. Mes series infinies ont cela d'avantageux, qu'elles resolvent les differentio-differentielles, de quelque degré qu'elles soyent, aussi aisement que les differences premieres. Comme les equations differentielles du premier degré sont pour l'inverse des tangentes, lorsqu'on determine la courbe *ex data proprietate tangentium*, je trouve que celles des autres degrés peuvent venir lorsque là courbe est determinée *per proprietatem curvedinum seu linearum osculantium*; ou bien par le melange des sommes parmy les differences. Car pour se delivrer des sommes, on descend à des differences plus profondes, tout comme pour se delivrer des racines on monte à des puissances plus hautes. Voicy un exemple aisé pour les differences secondes *pro linea sinuum*, c'est à dire lorsque les arcs de cercle étendus en ligne droite estant les ordonnées, les sinus sont les abscisses. Soit l'arc y, le sinus de complement soit x, le rayon a, l'arc y sera égal à $a\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ (1) et *differentiando* $dy = \frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ (2) ou bien $\sqrt{(a^2-x^2)}\,dy = adx$ (3). Pour abreger faisons $\sqrt{(a^2-x^2)} = v$ (4), et il aura $vdy = adx$ (5), et *rursus ipsam aeq. 5. differentiando* $vddy + dvdy = a\,ddx$ (6). Et si nous faisons que les arcs y croissent uniformement, c'est-à-dire si dy est constante ou $ddy = o$ (7), au lieu de (6) il y aura $dvdy = addx$ (8). *Differentiando aequ.* (4) il y aura $dv = -\frac{xdx}{v}$ (9), car $v^2 = a^2 - x^2$, donc $vdv = -xdx$. Et (par 5 et 9) $dv = -\frac{xdy}{a}$ (10), donc par 8 et 10 il y aura $-xdydy = a^2 ddx$ (11). Ce qui fait voir que les arcs de cercle croissant uniformement, les sinus de complement décroissent de telle sorte qu'ils sont proportionels à leur propres differences secondes; au lieu que lorsque les logarithmes croissent uniformement, les nombres sont proportionels à leur propres differences premieres. Soit $x = a + by^2 + cy^4 + ey^6$ etc. (12), et (posito $ddy = 0$ ut dictum) ddx sera $= dydy$ multiplié par $1.2.b + 3.4.cy^2 + 5.6ey^4$ etc. (13). Et l'equation (11) ou $xdydy + a^2ddx = 0$ (14) estant interpretée par 12 et 13 il y aura:

$$0 = \left\{ \begin{array}{l|l|l|l} + a & + by^2 & + cy^4 & + cy^6 \text{ etc.} \\ + 1.2.ba^2 & + 3.4.ca^2y^2 & + 5.6.ea^2y^4 & + 7.8.fa^2y^6 \text{ etc.} \end{array} \right.$$

Donc detruisant tous les termes, pour faire que cette equation soit identique, il y aura $a + 1.2.ba^2 = 0$, et $b + 3.4.ca^2 = 0$ et $c + 5.6.ea^2 = 0$. C'est-à-dire $b = -\frac{1}{1.2.a}$, et $c = -\frac{b}{3.4a^2}$ ou bien $c = \frac{1}{1.2.3.4a^3}$, et $e = \frac{1}{1.2.3.4.5.6a^5}$ et ainsi de suite, donc par (12) nous aurons $x = \frac{1}{1}a - \frac{1}{1.2.a}y^2 + \frac{1}{1.2.3.4.a^3}y^4 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.a^5}y^6 +$ etc. (16). Ce qui donne la valeur du sinus de complement x par l'arc y et par le rayon a. On trouveroit la même chose par l'equation 3 en ostant l'irrationnelle et faisant $a^2dydy = x^2dydy + a^2ddx$ (17), amis non pas si aisement. Il y a encor d'autres abregés que j'explique dans les Actes.

Mais pour vous donner un exemple d'un probleme geometrique, prenons celuy de la chainette; et je vous donneray en meme temps l'analyse dont je me suis servi autres fois pour le resoudre, puisque vous avés temoigné de la desirer aussi. Soit (fig. 37.) AB x, BC y, AT, retranchée par la tangente, est la distance entre l'axe et le centre de gravité de l'arc AC. Or $C\beta$ ou AB est à $T\beta$ comme dx à dy; donc $T\beta$ sera $x\frac{dv}{dx}$, et AT sera $y - x\frac{dy}{dx}$. L'arc AC soit appellé c, et par la nature du centre de gravité il est manifeste qu' AT sera $ydc : c = y - xdy : dx$ (1) ou bien $ydc = cy - cxdy : dx$ (2); et differentiando $ydc = cdy + ydc - \frac{xdy}{dx}dc - cdy - cx\,d\frac{dy}{dx}$ (3). Et rejettant ce qui se détruit, il y aura $dc\frac{dy}{dx} + cd\frac{dx}{da} = 0$ (4). Supposons que les y ou $A\beta$ croissent uniformement, ou que dy soit constante et $ddy = 0$ (5),

nous aurons $d\frac{dy}{dx} = -dy\frac{ddx}{dxdx}$ (9), et au lieu de 4 il y aura $dcdx - cddx = 0$ (7), c'est-à-dire summando $\frac{dx}{c} = \frac{dy}{a}$ (8) (car cette equation 8 estant differentiée rend l'equation 7) ou bien $adx = cdy$ (9) et differentiando $addx = dcdy$ (10). Or generalement en toute courbe $dcdc = dydy + dxdx$ (11) et differentiando $dcddc = dyddy + dxddx$, donc icy (par 5) $dcddc = dxddx$ (12), et (par 10 et 12) $addc = dxdy$ (13) et summando $adc = xdy + bdy$ (14). Seit $x + b = z$ (15), fiet $dx = dz$ et $adc = zdy$, et (par 11 et 16) $dcdc = dzdz + dydy$ (17). Donc par 14, 15, 17, nous aurons $a^2dzdz + a^2dydy = z^2dydy$ (18), et enfin $y = a^2 \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}$, c'est-à-dire il ne faut que chercher la quadrature d'une figure, dont l'ordonnée est $\frac{a^2}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}$. On peut faire $b = a$, ou $-a$, ou bien de quelque autre grandeur qu'on voudra, comme il depend aussi de nous d'augmenter ou diminuer y par une droi.e constante et d'écrire $y + c = a^2\int\frac{dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}$ (20).

Pour ce qui est des equations exponentielles, je vous diray, Monsieur, que toutes les fois que le probleme se reduit à des exponentielles traitables, il est resolu en perfection, et il n'y a plus rien à chercher. De sorte que c'est proprement le plus haut point de la geometrie des transcendentes. Pour vous en developper tout le mystere, soit par exemple $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{v}{1}} = \frac{y}{a}$ ou bien, posant a pour l'unité, soit $x^v = y$; c'est comme si je disois qu' v est à l'unité comme le logarithme de la grandeur y est au logarithme de la grandeur x. Ainsi supposé que la valeur d' v soit donnée par x ou par y, ou par toutes les deux, la ligne se peut construire geometriquement par points aussi bien que la logarithmique meme, et on en peut donner de meme la tangente et les autres proprietés. Et je puis toujours changer l'equation exponentielle en differentielle, mais non pas vice versa, car, puisque $x^v = y$ (1) donc $v. \log x = \log y$ (2), ou bien $v\int\frac{dx}{x} = \int\frac{dy}{y}$ (3) et differentiando $v\frac{dx}{x} + dv\int\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ (4). Si v estoit egal à x, alors dy seroit à dx, ou bien, l'ordonnée seroit à la soustangentielle, comme y multipliée, par $1 + \log. x$ est à l'unité, c'est-à-dire la soustangentielle sera egale à l'unité multipliée par $1 + \log. x$. Si nous posons que les x croissent uniformement, il y aura $y^2 dx dx + axyddy = axdydy$, et cette equation differentio-differentielle se peut reduire à l'exponentielle $x^x = y$, qui en donne la construction. Ainsi bien loin qu'on doive croire que ces exponentielles sont embarassées, il faut juger que de toutes les expressions qui enseignent la construction des lignes transcendentes par des points determinables suivant la Geometrie ordinaire, ce sont les plus simples. Et il faut considerer que les exponentielles n'employent point d'autre grandeur qu' x et y, etc., c'est-à-dire que des grandeurs ordinaires, au lieu que les differentielles employent encor d'extra-ordinaires, comme dx, ddx, etc. ce qui les empeche de servir aux determinations des intersections des courbes ou aux equations locales. Car si j'avois $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{a}$ (1) pour une courbe, scavoir pour la logarithmique, et $x^2 + y^2 = a^2$ (2) pour l'autre, scavoir pour le cercle, qui me donne $xdx + ydy = 0$ (3), ou $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ (4), il ne m'est point permis de me servir des equations 3 ou 4 pour le cas de rencontre des courbes, ny d'oster $\frac{dy}{dx}$ par le moyen des equations 1 et 4, bien que je sçache que les courbes des equations 1 et 2, scavoir la logarithmique et le cercle se rencontrent; excepté le cas ou leur rencontre est un attouchement. Car sans cela, quoyque x et y soyent les mesmes dans les deux courbes, dx et dy ne le sont point (mais ddx, ddy ne sont les mesmes de part et d'autre, que dans le cas de l'osculation des deux courbes qui est un attouchement plus parfait). Au lieu que les exponentielles ne contenant qu' x et y, qui sont les memes en cas de rencontre, servent absolument à la détermination des intersections. Ainsi c'est par elles, ou leur semblables, qu'on acheve la recherche et qu'on peut oster une inconnue. Je trouve ces equations encor utiles dans les nombres. Je tacheray de me faire entendre dans le traité que je projette pour mon nouveau calcul, et vous serés obligé de ce que vous y voudrés contribuer. Nous verrons ce que feront Mr. le M. de l'Hospital et Mrs. Bernoulli.

Vostre explication de la pesanteur paroist jusqu'icy la plus plausible. Il seroit seulement à desirer qu'on pût rendre raison

pourquoy celle qui paroist dans les astres est en raison doublée reciproque des distances. Commme je vous disois un jour à Paris qu'on avoit de la peine à connoistre le veritable sujet du mouvement, vous me répondîtes que cela se pouvoit par le moyen du mouvement circulaire, cela m'arresta; et je m'en souvins en lisant à peu près la même chose dans le livre de Mr. Newton; mais ce fut lorsque je croyois déjà voir que le mouvement circulaire n'a point de privilege en cela. Et je voy que vous estes dans le meme sentiment. Je tiens donc que toutes les hypotheses sont equivalentes et lorsque j'assigne certains mouvemens à certains corps, je n'en ay, ny puis avoir d'autre raison que la simplicité de l'hypothese, croyant qu'on peut tenir la plus simple (tout consideré) pour la veritable. Ainsi n'en ayant point d'autre marque, je crois que la difference entre nous n'est que dans la maniere de parler, que je tache d'accommoder à l'usage commun autant que je puis, salva veritate. Je ne suis pas meme fort eloigné de la vostre, et dans un petit papier que je communiquay à Mr. Viviani et qui me paroissoit propre à persuader Mrs. de Rome à permettre l'opinion de Copernic, je m'en accommodois. Cependant si vous estes dans ces sentimens sur le realitè du mouvement, je m'imagine que vous devriés en avoir sur la nature du corps de differens de ceux qu'on a coustume d'avoir. J'en ay d'assez singuliers et qui me paroissent demonstrés. Je souhaiterois d'apprendre un jour vos reflexions que vous m'aviés fait esperer tant sur mes animadversions in Cartesium, que sur ce que je vous avois écrit contre le vuide et les atomes. Je veux lire avec attention la theorie du manoeuvre et vous remercie cependant des communications de vostre remarque qui paroist de consequence. Il y a dejà du temps que j'ay envoyé à Leipzig mes reflexions sur l'isochrone du Professeur Bernoulli, en y envoyant vostre construction du probleme du Medecin, j'y adjouteray quelque chose de vos considerations sur ce que le Professeur vient de donner.

Mr. Tayler s'est excusé de venir à Wolfenbutel. N'-a-t-on point des nouvelles de la restitution entiere de Mr. Newton? Je la souhaitte fort. Quelques uns ayant vû des definitions que j'ay données dans la preface de mon Code diplomatique (dont, pour le dire en passant, je vous feray remettre un exemplaire) m'ont exhorté de mettre en ordre un amas d'autres que j'ay fabriqués autres fois. Voicy celles de la preface que je soûmets à vostre jugement. Je dis que la justice est une charité conforme à la sagesse. La sagesse est la science de la felicité; la charité est une bienveillance generale. La bienveillance est habitus diligendi. Diligere, aimer, cherir (en nostre sens) est se faire un plaisir de la felicité d'autruy.

Vous ne pouvés manquer, Monsieur, d'avoir mille belles meditations encor hors des mathematiques. Il ne faudrait pas nous en priver. Je me souviens qu'un jour vous me fistes esperer quelque chose de cette nature. N'aurons nous pas bientost vostre Dioptrique? J'espere d'y trouver des explications des meteore semphatiques, suivant cet echantillon qu'on a vu de vous autres fois dans le journal des sçavans. Vostre crystal d'Islande ne vous a-t-il donné aucun phenomene singulier sur les couleurs? Il semble qu'il y devroit encor servir; vous aviés aussi fait ce me semble quelques decouvertes sur la force electrique. Que jugés vous, Monsieur, de l'hypothese de Monsieur Halley sur le noyau mobile contenu dans le globe de la terre, pour expliquer la variation de l'aimant? Et sur ce que Mr. Newton croit avoir rendu raison encor du flus et reflus de la mer. Nous attendons aussi l'explication de vostre ligne propre pour les pendules des vaisseaux. Je suis avec zele etc.

P. S. Si je suppose que la voile ne s'etend ou ne s'allonge point, et prends l'effect du vent pour ce qui se feroit si un filet ABC (fig. 38.) consideré comme sans pesanteur en luy même, estoit chargè partout d'un poids égal, tel que CD; le calcul qui me vient tout presentement me donne une ligne, dont la construction demande une quadrature, qu'il est en mon pouvoir de donner autant qu'il est possible, et qui se reduira (autant que je puis juger par avance) à celle de l'hyperbole. Mais je crois que ce sera autrement que lorsqu'on construit la chainette.

LVIII.

Leibniz an Hugens.

A Hanover 8 Septembre 1694.

Je me suis donné l'honneur de vous écrire il y a quelques jours, où j'ay marqué d'avoir satisfait à vos ordres, en envo-

yant à Leipzig ce que vous aviés destiné aux Acta. J'ay taché aussi de satisfaire aux autres points de vostre lettre.

Maintenant je profite de l'occasion favorable que Mr. de Tschirnhaus me fournit pour vous écrire celle-cy, et je ne me sçaurois dispenser de vous dire que j'ay vu avec admiration les effects de ses verres ardens, surtout sur des objets, qui ont paru indomtables aux fourneaux des chymistes. Mais comme vous en verrés des objets incomparablement plus grands par le moyen des verres, qu'il a déja envoyés en Hollande, je n'en diray point d'avantage.

Il m'a aussi monstré des theoremes de geometrie d'une grande beauté et generalité, et plusieurs autres belles pensées. Mais vous en estes meilleur juge que moy, et j'espere qu'en retournant, il me fera part du profit, qu'il aura fait chez vous. Car si j'estoit capable de luy porter envie, ce seroit de l'avantage qu'il aura de vous voir. Je suis avec zele etc.

LIX.

Leibniz an Hugens.

Hanover $\frac{14}{24}$ Octobre 1694.

Je vous avois écrit dernierement par Mr. de Tschirnhaus qui n'en avoit point besoin. Mais à present je prends la liberté de vous adresser un de mes amis, qui est encor d'un tres grand merite en son genre et qui espere que vostre recommandation luy servira beaucoup, pour mieux insinuer un dessein de negoce, où il s'est engagé avec quelques personnes considerables, et qu'il veut proposer au Roy et à Messieurs les Etats, pour en avoir l'agrement, l'octroy et la protection. Je ne suis pas des plus disposés à la credulité, et il y a peu de nouveaux avis, qui se trouvent practicables. Mais cette affaire paroist si plausible et si convenable au temps et aux intentions de Sa Majesté, que je croy qu'on ne risque rien en luy donnant de l'applaudissement. Il vous en dira tout le detail, qu'il nev eut pourtant pas encor publier avant que d'en avoir jetté les fondemens.

En cas que vous en formiés le même jugement que moy, je ne doute point, Monsieur, que vous ne le favorisiés de recommandations proportionnées, auprès du Roy, par Monsieur vostre frere, et aupres de Messieurs les Etats par Mr. le Pensionaire. Le personnage a acquis une tres grande experience en ces choses par son age avancé, et par la quantité d'affaires de cette nature, qui luy ont passé par les mains, ayant esté employé par plusieurs Princes, qui en ont fait grand cas, mais particulierement Jean Philippe Electeur de Mayence, qui estoit un des plus habiles Princes de son temps, et le defunt Electeur de Brandebourg l'honnoroient d'une confiance extraordinaire et se servoient de ses avis en telles matieres. Il a esté plus d'une fois tant en Hollande qu'en Angleterre, et il a même fait autres fois le voyage de l'Amerique. C'est d'ailleurs une personne extremement reglée ot eloignée des vanités, qui rapporte tout à bon usage et affecte l'ancienne simplicité. Il y a de plus de 20 ans que je le connois, tousjours en reputation d'un homme tres sage et laborieux. Ainsi pour luy rendre justice et pour vous en mieux informer, il a fallu que je vous fisse son caractere. Au reste je me rapporte à mes precedentes, estant avec un tres grand zele etc.

P. S. Mr. de Tschirnhaus en repassant par icy m'a confirmé dans l'opinion que j'ay de vos bontés pour moy, et comme je l'avois chargé de vous sonder, si vous souffririés la presente recommandation, ce qu'il m'a dit la dessus, m'a encouragé à vous écrire celle-cy.

LX.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 27. Decembre 1694.

Il y a desia quelque temps que Mr. Craft m'a rendu la lettre dont vous l'aviez voulu charger pour moy; et comme il doit vous ecrire demain, il vient de me prier de pouvoir vous en-

voier en mesme temps quelque mot de ma part: car pour faire response à celle que vous m'avez fait l'honneur de m'ecrire du $^{4}/_{14}$ Sept., je luy ay dit qu'elle contenoit trop de choses differentes pour que j'y puisse satisfaire presentement.

Ce Mr. Craft, que je connoissois de reputation depuis l'invention du phosphore, est veritablement, comme vous dites, un homme de merite et de bon sens, et qui a appris bien des choses par ses longues experiences en matiere de Physique. J'ay donc pris plaisir à l'entretenir plus d'une fois. Il m'a communiqué le dessein de la nouvelle manufacture, et m'en a apporté un echantillon, par le quel il semble que la chose pourrait avoir un bon succès. Toutefois j'ignore en quoy consiste le secret, et à ce que je vois, c'est en Angleterre qu'il pretend commencer à le mettre en pratique, devant que d'en parler icy à personne. Lorsque j'auray occasion de le servir, je le feray autant qu'il sera dans mon pouvoir.

J'ay esté fort aise de la visite peu adendue de Mr. de Tschirnhaus au mois de Sept. dernier. Mais le malheur voulut, qu'à cause du temps codvert, je ne pus voir l'effet du verre brulant qu'il m'apporta d'environ 14 pouces. C'est un avantage de ces verres de bruler de haut en bas, parce que la matiere qu'on y expose se peut placer sur un charbon qui augmente la force du feu. Mais sans cela je ne scaurois croire que ses verres, quand ils seroient de 2 pieds, comme il dit en avoir, puissent egaler la force du miroir concave de 3 pieds, que nous avions à l'Academie de Paris, qui faisoit degouter les clous de fer en peu de temps. Je me persuade au reste qu'on pourroit esperer de plus grands effets des miroirs concaves de verre, avec de la feuille derriere, comme une personne en fait icy à la Haye, qui sont d'une matiere claire et d'un poli tres beau. Mais il faudroit les faire de 3 ou 4 pieds, ce qui me semble tres possible, au lieu qu'ils ne sont jusqu'icy que d'un pied. Un petit miroir plat adjouté aupres du foier pourroit reflechir les rayons en bas pour bruler sur le charbon. Mr. de Tschirnhaus me dit à la haste quelque chose de ses inventions qu'il extolloit fort; nous les verrons peut estre expliquées dans le Journal de Leipsich. Ce que vous y avez dernierement mis, Monsieur, touchant la Paracentrique, m'a paru bon, mais j'en suis demeuré aux sommes, ou je trouvois quelque difficulté; c'est-à-dire à mon egard, parceque toute vostre methode ne me demeure pas presente à l'esprit quand j'ay discontinué longtemps à m'y exercer. Et c'est pour cela que j'ay souhaité que vous l'eclaircissiez par un traité expres, depuis les fondemens. Il y a mesme bien du temps que je n'ay rien fait en matiere de geometrie, à cause d'une certaine dissertation philosophique que j'espere de mettre au jour dans peu. C'est pourquoy je ne scaurois encore repondre à vostre lettre du $^4/_{14}$ Sept., parcequ'il y a du calcul differentiel, qui demande que je l'etudie. J'admire cependant comment par un si etrange chemin vous estes parvenu à la construction de la Catenaria. Vous aurez vu sans doute le dernier livre de Craige, où il y a à la fin une response à Mr. de Tschirnhaus qu'il s'est attirée par sa violente censure. Vostre calcul est beaucoup employé et loué dans ce traité. Mr. Craft m'a dit que vous aviez achevé vostre machine arithmetique, qui doit estre une piece merveilleuse, et dont l'execution sans doute vous aura couté bien de la peine, puisque celle qu'avoit fait Mr. Pascal seulement pour les additions, luy avoit grandement use et gasté l'esprit a ce que ses amis m'ont dit. On pouvoit la faire incomparablement plus simple et plus commode; ce que je ne crois pas estre de mesme de la vostre. Je vous prie de me mander combien de chifres et par combien elle peut multiplier, et si elle est dans la perfection que vous souhaitez, sans estre sujette à manquer ni à se detraquer.

L'on m'a apporté un Traité manuscrit d'un Mr. de Maroles, mort martir en France sur les galeres, ou il y a des Problemes numeriques fort subtils, resolus de la maniere de Diophante. Il avoit grand commerce avec le P. Billy, et on doit me porter de leurs lettres reciproques. On a dessein d'imprimer le tout. Je n'ay jamais voulu m'amuser a ces sortes de questions, et toutefois j'aime a voir l'adresse que souvent ils demandent. Devant que finir, et pour ne laisser pas cette page vuide, je vous diray que dans l'invention de la Paracentrique de Mr. Bernoulli, je trouve que c'est beaucoup d'avoir determinè certaines choses touchant cette courbe, et entre autres le point ou elle finit, comme en cette figure (fig.39.) vers A, ce qui ne me semble pas qu'on puisse inferer de vostre calcul. Aussi ne scay je pas si sa determination est bien vraie, et si la courbe n'a pas BA pour asymptote. J'en voudrois bien scavoir vostre sentiment, et finissant icy je demeure en vous souhaitant tout bonheur dans la prochaine année.

LXI.

Leibniz an Hugens.*)

21 Juin 1695.

Plusieurs distractions m'ont empeché de jouir de l'avantage que je tire de l'honneur de vostre commerce. J'ay appris de M. Bauval Banage que vous aviés esté malade, mais j'espere que vous vous porterés bien presentement, ce que je souhaitte de tout mon coeur, sçachant combien nous importe vostre conservation, et combien il est important que nous ayons de nostre temps une personne dont le jugement puisse estre suivi seurement sur les matieres les plus profondes; et dont nous attendons encor de si importantes productions, qui sont déja en vostre pouvoir et pourroient estre donnés par parties, si vous vouliés vous humaniser comme vous avés fait dans les appendices de vostre excellent livre de la lumiere et de la pesanteur.

Un exemplaire du grand miroir de Mr. Tschirnhaus est à Amsterdam, de sorte que vous en pourriés voir l'experience quand vous voudriés. Ce que vous dites, Monsieur, des miroirs concaves de verre, que quelcun fait à la Haye me paroist considerable. Il est difficile cependant pour l'ordinaire d'en faire avec de la feuille derriere. On fait des miroirs convexes de verre à Norenberg, qui ont une certaine composition derriere qui tient lieu de feuille. J'ay oui dire à plusieurs qu'ils ont taché en vain de l'apprendre. Et autres fois Mons. Curtius resident du Roy Charles II a Francfort me dit d'avoir eu ordre de la Societé Royale de s'en informer.

La seconde edition de Medicina Mentis de Mons. de Tschirnhaus a paru à Leipzig. Il y corrige ce que Monsieur Facio et moy avions remarqué sur sa premiere façon de donner les tangentes par les foyers; qu'il semble attribuer à une maniere d'errata. Il donne encor d'autres theoremes plus generaux, mais je n'ay point le loisir qu'il faudroit pour mediter la dessus. Il en faut laisser le soin à Mons. le Marquis de l'Hospi-

*) Leibniz scheint diesen Brief nicht abgeschickt zu haben; wahrscheinlich erfuhr er inzwischen den Tod von Hugens.

tal, qui a trouvé la regle la plus generale qu'on puisse souhaitter la dessus autant que je m'en souviens.

Quant au denombrement des courbes de chaque degrè Algebraique, il le donne autrement que dans sa premiere edition, mais je m'etonne qu'il le fait encor d'une maniere, qui me paroist insoutenable; comme si on pouvoit tousjours oster tous les termes d'y excepté un seul. Ainsi dans le 3^{me} degré selon luy, toutes les courbes se peuveut reduire à ces equations $y^3 = x$, $y^3 = xx$, $y^3 = x + xx$, $y^3 = x + x^3$, $y^3 = xx + x^3$, $y^3 = x + xx + x^3$, mettant à part la varieté des coefficientes et des signes. Je m'etonne en effect qu'ayant tant de penetration et de connoissances, il avance si aisement de telles propositions. Mons. le Marquis de l'Hospital me mande, que Mons. de la Hire dans un livre sur les Epicycloides dispute contre la demonstration de la Caustique que M. Tschirnhaus avoit donnée à l'Academie royale des Sciences; et repond au passage de sa **Medicina Mentis**, ou Mons. Tschirnhaus avoit cité vostre approbation, et m'avoit même fait l'honneur de me nommer avec vous. Mons. de la Hire dit que vostre exactitude estant connue vous ne vous seriés pas fié sans doute à de telles demonstrations. Je remarque que Mons. de Tschirnhaus a retranché ce passage, ou il s'estoit rapporté à vostre jugement. Il affecte aussi partout d'eviter l'usage de mon calcul des differences, bien eloigné en cela de vous, Monsieur, qui aviés toutes les raisons de monde de vous tenir entierement à vos propres Methodes qui vous avoient servi à tant d'importantes decouvertes avant que j'avois commencé d'y avoir quelque entrée; et qui n'avés pas laissé de vous abaisser tout grand Maistre de l'art que vous estes, à employer encor une nouvelle Methode d'un de vos disciples, car vous ne devés pas ignorer que je pretends à l'honneur de l'estre, et que j'en ay fait profession publique plus d'une fois. Au bien que je crois que Mr. de Tschirnhaus a profité un peu de mes meditations, et plus qu'il ne pense luy même. Il est vray que je m'imagine qu'il ne s'en est point apperçû, et c'est pour cela que je ne l'accuse point de peu de sincerité. Je ne laisse pas de trouver cette affectation un peu extraordinaire.

Vous aurés vû, Monsieur, les deux livres de Monsieur Bernard Nieuwentiit, Geometre Hollandois, qui me les envoyés par un autre Mathematicien du pays qu'il cite dans son livre nommé M. J. Makreel, qui a écrit sur le livre qu'il me l'envoye jussu

autoris. Je m'imagine que ces Messieurs vous seront connus. Pour ce qui est des objections de Monsieur Nieuwentiit, j'y repondray dans les Actes de Leipzig. Premierement il me fait une objection sur un point qui m'est commun avec Messieurs Fermat, Barrow, Newton et tous les autres, qui ont raisonné sur les grandeurs infiniment petites. Car il dit que selon luy deux grandeurs sont egales, quand leur difference est rien, et non pas, quand elle est seulement infiniment petite. Mais pour employer cependant et justifier nos raisonnemens, il prend un plaisant tour. Il dit que ce qui ne sçauroit devenir une quantité ordinaire, quand on multiplieroit par un nombre infini, doit estre appellé rien, et n'est pas une quantité. Et que pour cela, quoyque dx soit quelque chose, neantmoins le quarré dxdx, ou le rectangle dxdy n'est rien; parcequ'un tel rectangle multiplié par un nombre infini ne devient pas une grandeur. Il est aisé de luy repondre que la rectangle doit estre multiplié par un nombre infini du second degrée puisqu'il est infiniment petit du second degrè; c'est à dire par un nombre infini multiplié par luy même. C'est cependant sur ce fondement, sçavoir que dxdx, ou dxdy n'est rien, qu'il appuye ses pretendues demonstrations du calcul de Mons. Fermat (qu'il attribue à Mr. Barrow) comme si pour cela les termes ou il y a dx ou dy restoient, et que les termes, ou il y a ou dxdx ou dydy ou dxdy devoient estre rejettès, au lieu qu'on sçait qu'il faut tousjours rejetter les termes qui sont incomparablement moindres que ceux qui restent, et que ceux qui ont dx devoient encore estre rejettès, si les ordinaires n'evanouissoient. Cependant c'est une chose estrange, qu'il veut que le costé, dx, soit une grandeur, et son quarré dxdx ne soit rien. Il croit de même que les differences ulterieures, comme ddx ne sont rien du tout. Mais comme les x estant en progression geometrique, les x, dx, ddx, d^3x, d^4x etc. le sont aussi, comment peut on dire que les termes x et dx sont quelque chose, et que la 3^{me} proportionelle ddx n'est rien. Je repondray dans les Actes de Leipzig d'une maniere que j'espere luy pouvoir satisfaire et comme ses objections sont proposées d'une maniere fort honneste, j'en useray de même. J'espere de trouver un jour le loisir d'expliquer distinctement mon calcul, pour prevenir certaines beveues semblables à celles que Mons. Nieuwentüt a faites en le voulant employer à dessein de monstrer qu'il est peu seur.

Monsieur Bournet gentilhomme Ecossois, parent de Mons. l'Eveque de Salisbury a vû icy ma Machine Arithmetique entierement achevée, et des exemples que j'ay faits en sa presence, qui l'ont surpris; les produits peuvent aller à 12 figures, et le multiplicandus est de 8 figures. J'en fais faire encor d'autres exemplaires maintenant pendant que j'ay l'ouvrier à la main.

Je souhaitte fort de voir vostre traitè philosophique, qu'on dit regarder des considerations particulieres sur la constitution des autres planetes ou mondes. Vous ne pouvés gueres entreprendre de sujet plus beau et plus digne de vous. Monsieur Mariotte me disoit que vous devriés estre un jour un des habitans de Saturne, puisqu'il vous a l'obligation de nous estre devenu mieux connu. Et s'il aime la gloire, il y doit estre sensible. Je ne desapprouverois pas ce changement de domicile pour veu que vous le fassiés bien tard. Serus in coelum redeas diuque Laetus intersis populo petenti. Il sera bon que les meditations numeriques de feu M. de Marolles paroissent. Mais je souhaitte sur tout que vous nous fassiés part des vostres de temps en temps sur toutes sortes de matieres. Je seray bien aise d'apprendre vostre jugement de mon Code diplomatique; il est vray qu'il n'y a rien de moy que la preface.

BRIEFWECHSEL

zwischen

Leibniz

und dem

Marquis de l'Hospital.

Der Marquis de l'Hospital (geb. 1661, gest. 1704) war der erste unter den Mathematikern Frankreichs, der in die Grundzüge der höhern Analysis, so wie sie von Leibniz in den Actis Eruditorum 1684 veröffentlicht worden waren, eindrang und sie anzuwenden verstehen lernte. Zu eigenem Gebrauch entwarf er sich ein Compendium; er führte darin das, was Leibniz nur angedeutet hatte, weiter aus und entwickelte namentlich die Beweise für die Hauptlehrsätze vollständig. Seine Freunde, besonders Malebranche, forderten ihn auf dasselbe drucken zu lassen. Ehe es jedoch dahin kam, erhielt der Abbé Catelan, ein fanatischer Anhänger von Descartes, davon Kunde; er beschloss de l'Hospital zuvorzukommen und verfasste eine kleine Schrift: Logistique pour la Science generale des lignes courbes ou Manière universelle et infinie d'exprimer et de comparer les puissances des grandeurs, Paris 1692, in welcher er die Leibnizische Differentialrechnung, mit Vermeidung des Algorithmus und ohne Leibniz zu erwähnen, als ein von ihm selbst entdecktes Ergebniss aus der Tangentenmethode von Descartes darstellte. De l'Hospital unterwarf diese Schrift einer scharfen Kritik und rügte besonders die groben Fehler, aus denen hervorging, dass Catelan die Methode Leibnizens nicht verstanden hatte. Dies gab Veranlassung zu einer Fehde zwischen de l'Hospital und Catelon, über deren Verfolg de l'Hospital in dem Schreiben an Leibniz vom letzten November 1694 (X) umständlich berichtet.

Um dieselbe Zeit kam Johann Bernoulli nach Paris, der eine jenes Brüderpaars, das sich nach Leibnizens eigenem Geständ niss um die Ausbildung der höhern Analysis bei weitem die grössten Verdienste erworben hat. De l'Hospital voll Begier, seine Kenntnisse auf dem Gebiete der höhern Analysis zu vervollständigen, benutzte diese günstige Gelegenheit; er machte die Bekanntschaft von Joh. Bernoulli und dieser entwarf zur Instruction seines lernbegierigen Schülers Vorlesungen über die Differential- und Integralrechnung, die im 3. Bande der sämmtlichen Werke Joh. Bernoulli's abgedruckt sind. Um sich ungestörter ihren gemeinschaftlichen Studien hingeben zu können, gingen sie auf de l'Hospital's Landgut Ouques in Touraine, wo Joh. Bernoulli 4 Monate verweilte. Durch den angestrengtesten Fleiss gelang es de l'Hospital, die Tiefen der höhern Analysis vollständig zu durchdringen; er betheiligte sich fortan an den Lösungen der grossen Probleme, die um den Anfang des 18. Jahrhunderts die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich zogen, und stellte sich den Meistern, Leibniz, Newton, Hugens, den Bernoullis, würdig zur Seite.

De l'Hospital stand bereits seit 1690 mit Hugens in Briefwechsel;*) er hatte sich, zugleich mit Jacob Bernoulli, an dem Streite, den der schon genannte Catelan gegen Hugens über das Problem vom Schwingungs-Mittelpunkt (centre d'oscillation) erhoben hatte, betheiligt und sich zu Gunsten von Hugens entschieden. Dagegen kannte Leibniz bis Ende des Jahres 1691 den enthousiastischen Verehrer der höhern Analysis und den warmen Vertheidiger seines Ruhms in Frankreich nicht einmal dem Namen nach; den 29. December 1691 fragt er Hugens: Qui est ce Mr. de l'Hospital dont parle Bernoulli? Endlich gab gegen Ausgang des Jahres 1692 ein zufälliger Umstand Veranlassung zur Anknüpfung einer Correspondenz zwischen beiden Männern.**) De l'Hospital gehörte nämlich zu dem gelehrten Kreise, den Malebranche allwöchentlich um sich versammelte, und war gerade gegenwärtig, als letzterer einen Brief an Leibniz absenden wollte. Er benutzte diese Gelegenheit und bat Malebranche eine

*) Er ist in Christ. Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes math. ed. Uylenbroek, Hagae Comit. 1843, Tom. I. abgedruckt.

**) Siehe Cousin Fragments de philosophie Cartesienne, Paris 1845 p. 400. In diesem Werke findet sich auch unter andern die Correspondenz zwischen Leibniz und Malebranche.

Einlage machen zu dürfen; es ist dies der folgende erste Brief an Leibniz.

Um die Zeit, als der Briefwechsel zwischen Leibniz und de l'Hospital begann, war wenigstens für die Mathematiker ersten Ranges jeder Zweifel über die Richtigkeit der höhern Analysis, so wie sie von Leibniz geschaffen worden war, verschwunden. Dies hatten besonders die verschiedenen Auflösungen des Problems der Kettenlinie, das von Jacob Bernoulli im Jahre 1690 wieder zur Sprache gebracht worden war, bewirkt. Auch de l'Hospital ist der Ansicht; ja er hält die Differentialrechnung für vollendet. Cela (le calcul differentiel) me paroist achevé, schreibt er in seinem ersten Briefe an Leibniz, mais il me semble qu'il reste bien des choses à découvrir pour l'inverse de ce calcul. Es ist die Integralrechnung, auf deren Ausbildung er seine Aufmerksamkeit gerichtet hat. Dazu war die Untersuchung der Eigenschaften der krummen Linien, um die man vor der Entdeckung der höhern Analysis sich vergeblich bemüht hatte, äusserst förderlich; ganz besonders jedoch veranlasste die zum Theil schon früher übliche Sitte, sich gegenseitig Probleme zur Lösung vorzulegen, die von Leibniz in seinem Streite mit den Cartesianern wieder in Erinnerung gebracht worden war und die in dem bekannten Bruderzwiste der Bernoullis recht eigentlich in Schwung kam, dass die Mathematiker ersten Ranges ihre Thätigkeit auf denselben Punkt richteten und so gewissermassen durch vereinigtes Wirken die Vervollkommnung der höhern Analysis mächtig förderten. Die folgende Correspondenz beweist, dass de l'Hospital in der Regel mit der Auflösung des vorgelegten Problems auf dem Kampfplatz erschien. Hier hatte nun zwar der Scharfsinn der Meister der Wissenschaft die schönste Gelegenheit, in seiner Ueberlegenheit auf das glänzendste sich zu zeigen, denn die Schwierigkeiten, die jedes einzelne Problem darbot, mussten immer auf besondere Weise überwunden werden; indess wäre für die Wissenschaft selbst nur ein geringer Gewinn daraus erwachsen, wenn nicht zugleich diese Probleme Veranlassung gegeben hätten, nach allgemeinen Methoden, die auf ganze Reihen von Aufgaben anwendbar waren, zu suchen. De l'Hospital fühlt namentlich das Bedürfniss, solche allgemeine Methoden zu besitzen. Je suis persuadé, Monsieur, schreibt er in seinem ersten Briefe an Leibniz, que vous avez des regles pour la solution de ces sortes de problemes et j'en ai formé mesme quelques unes, mais elles ne sont pas generales. Vous me feriez plaisir de me proposer quelques courbes a trouver par la proprieté de leur soutangentes qui soient soumises a vos regles. Leibniz kam diesem Wunsche auf das bereitwilligste entgegen. Leider war um diese Zeit gerade seine Thätigkeit fast ausschliesslich durch die Geschichte des Hauses Braunschweig in Anspruch genommen, so dass er sich nur ausnahmsweise mit mathematischen Untersuchungen befassen konnte; dazu kam, dass seine Gesundheit zu wanken begann, und scharfes beharrliches Nachdenken über ein und denselben Gegenstand ihm unmöglich war. Unter diesen Umständen konnte er wenig Neues schaffen, und er sandte deshalb an de l'Hospital das, was er an allgemeinen Integrationsmethoden vorbereitet hatte: die Integration durch Reihen, und später die Integration der Differentialgleichungen. Er beklagt es schmerzlich, dass so manche Methode, die nur der Ausführung bedürfe, unbenutzt in seinen Papieren vergraben liege, und er richtet wiederholt an de l'Hospital die Bitte, ihm aus Frankreich einen jungen Mann zuzuweisen, der ihm dabei Hülfe leisten könnte. Dieser Wunsch blieb jedoch unerfüllt, und so gab Leibniz auch den lang gehegten Plan auf, unter dem Titel: Scientia infiniti, ein vollständiges Lehrgebäude der höhern Analysis auszuarbeiten. Mehrere Bruchstücke davon: eine historische und philosophische Einleitung, nebst einer umfangreichen Abhandlung: De summis seu Methodo differentiarum inversa, sind unter seinen nachgelassenen Papieren vorhanden. Dies Werk wäre zu damaliger Zeit für die Ausbildung und für das Verständniss der höhern Analysis von der höchsten Wichtigkeit gewesen; de l'Hospital's Schrift: Analyse des infiniment petits, Paris 1696 — jenes oben erwähnte, zum eigenen Gebrauch entworfene Compendium — die trotz ihrer Unvollständigkeit (sie enthält nur die Differentialrechnung, die Integralrechnung fehlt ganz) lange Zeit das allgemeine Lehrbuch der höhern Analysis blieb, sollte gewissermassen nur ein Vorläufer davon sein. — Noch ist hervorzuheben, dass man schon in diesen ersten Zeiten der Ausbildung der höhern Analysis die Wichtigkeit der bestimmten Integrale erkannte; am 23. Apr. 1693 schreibt de l'Hospital an Leibniz: Si l'on pouvoit trouver une methode pour parvenir aux quadratures particulieres lorsqu'elles sont possibles ou pour en demontrer l'impossibilité lorsqu'elles ne le sont pas, je la prefererois a toutes ces autres inventions; und Leibniz antwortet darauf: L'invention des quadratures particulieres, lorsqu'elles sont possibles, ou la demonstration de l'impossibilité est ce qu'il y a de plus sublime dans cette partie de la Geometrie. Cependant si j'avois les quadratures generales par les expressions que je souhaitte, on avanceroit encor de beaucoup les quadratures particulieres. —

Die Correspondenz zwischen Leibniz und de l'Hospital bewegt sich ausserdem über das Princip der Dynamik, wie es von Leibniz in dem Streite gegen die Cartesianer aufgestellt worden war. Diese behaupteten nämlich, dass die Kräfte sich bewegender Körper im zusammengesetzten Verhältniss der Masse und Geschwindigkeit ständen, Leibniz dagegen, dass sie durch das Produckt aus der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit gemessen werden müssten. Er hatte zuletzt die Genugthuung, dass alle seine bedeutenden Zeitgenossen, Johann Bernoulli an der Spitze, sich für sein Princip erklärten. Unter seinen hinterlassenen Manuscripten ist die bis auf den Schluss vollendete Dynamik aufgefunden worden; er hatte sie während seiner Reise in Italien ausgearbeitet und einem Freunde in Florenz vor seinem Weggange zum Druck übergeben. Indess das Werk erschien nicht, weil Leibniz den Schluss zu übersenden versprochen hatte; überhäufte andere Geschäfte hinderten ihn jedoch nach seiner Rückkehr sich damit zu befassen.