Je voulois écrire il y a plus de trois semaines, pour envoyer ma solution que Mr. Fatio demande. Mais j'ay trouvé que vos lettres estoient restées à Wolfenbutel. Car comme j'y vay souvent, j'y ay un logis, où je laisse plusieurs papiers, mais les vostres y estoient restés par megarde. Et je n'ay pas voulu me hazarder sur ma memoire. Ainsi je ne puis satisfaire à ma promesse que dans quelques semaines quand je serai à Wolfenbutel. Cependant je suis avec ardeur etc.

XXXI.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 1 Sept. 1691.

Peu de jours apres que j'eus receu vostre lettre du 24. Jul. l'on m'apporta les Acta de Leipsich de May et Juin, où je vis avec bien du plaisir outre vos inventions touchant la Catenaria, lesquelles vous veniez de me communiquer, celles de Mr. Jo. Bernouilly. Je vous admiray tous deux, et vous, Monsieur, sourtout, d'avoir si bien reussi à decouvrir les proprietez de cette Courbe, et ayant examiné vos constructions et vos Theoremes, je trouvay que tout quadroit ensemble, comme aussi avec ce que j'ay donné en ce que nous avons de commun et qu'il n'y avoit aucune erreur. Je consideray en suite pourquoy plusieurs de vos decouvertes m'estoient échappées, et je jugeay que ce devoit estre un effet de votre nouvelle façon de calculer; qui vous offre, à ce qu'il semble, des veritez, que vous n'avez pas mesme cherchées, car je me souviens que dans une de vos lettres precedentes, vous m'aviez dit, en parlant de ce que vous aviez trouvé touchant la Catenaria, que le calcul vous offroit cela comme de soy mesme, ce qui certainement est fort beau. Pour moy je puis dire que j'ay trouvé tout ce que j'ay cherché et plus, mais je n'ay point cherché ni vostre dimension de l'espace ni les deux centres de gravité, n'ayant pas esperé qu'ils fussent trouvables. Ainsi ils me sont echappez, quoyque j'en aye esté fort pres. Car j'ay assez reconnu, en examinant vos Theoremes là dessus, par quelle voie j'y aurois pu parvenir, et que ces Theoremes ont une mesme origine. J'ay aussi remarqué en passant

que Mr. Bernouilly, pour avoir le centre de gravité L de la courbe EBF (fig. 24.), au lieu qu'il prend BL égale à IK, n'avoit qu'à prendre AL égale à GK, et qu'ainsi le rectangle de GA, AL est tousjours égal à l'espace hyperbolique BGA. Par ou il auroit encore facilement trouvé le centre de gravité de l'espace EBF, ou, qui vaut autant, de vostre espace AONC.

Ses propositions 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 sont en partie les mesmes et en partie aisées à deduire des choses que j'avois trouvées, en estant comme des corollaires, quoy qu'il en ait de fort jolies, dont peut estre je ne me serois jamais avisé. Pour ce qui est de la surface du Conoide, je vois qu'il n'en dit rien, ni vous, Monsieur, touchant la courbe dont la Catenaria s'engendre par evolution, apparemment parce que vous n'y avez pas songé. Apres ma dimension de l'espace BMOE, et la vostre de l'espace BEA dans la 2e fig. de Mr Bernouilly, l'on peut aussi trouver celle de l'espace MOR, que la courbe MO retranche du rectangle MPOR, lequel espace devient egal au rectangle FC, lorsque BA est egal à BM ou BC, mais qu'a-t-on à faire, direz vous, de chercher si avant!

J'avois fait tout cet examen, et les remarques dont je viens de parler sans beaucoup de peine, et dès les premiers jours, mais je n'ay pu trouver la Reduction de la construction de la Courbe à la quadrature de l'Hyperbole, et c'est ce qui m'a fait differer de vous faire response. Car cette reduction me paroissant fort belle, parce qu'elle donne la maniere de trouver avec facilité des points dans la courbe, j'aurois esté bien aise d'en de couvrir couvrir auparavant la methode, par ma propreme ditation, qui, à dire vray, a esté interrompue par plusieurs affaires et distractions de toute sorte. Enfin je n'y vois point de jour encore, et puis que Mr. Bernoulli, aussi bien que vous, a reussi en ce point, j'en conclus qu'il faut que vostre nouveau calcul vous ait conduit tous deux, ou bien une plus grande connoissance que vous vous estes acquise l'un et l'autre en ce qui est des quadratures et leur relations et dependances mutuelles. J'ay recherché la dessus ce que je me souvenois d'avoir vu dans les oeuvres posthumes de Mr. Fermat, mais ce Traité est imprimé avec tant de fautes, et de plus si obscur, et avec des demonstrations suspectes d'erreur, que je n'en ay pas sceu profiter. Vous me ferrez donc tres grand plaisir, Monsieur, si vous me voulez donner quelque lumiere en cecy, ce que peut estre vous pouvez en fort peu de paroles. J'avois reduit cette construction, comme vous scavez, à la dimension de la Courbe $xxyy \propto - aayy + a^4$ et je vois maintenant quel espace hyperbolique est egal à un espace de cette courbe, mais je ne scay pas comment j'aurois pu trouver cela; et il se peut que vostre Reduction est fondée sur autre chose, ce que je seray bien aise d'apprendre. Si Mr. Bernouilly en examinant le raport entre nos inventions (ainsi que vous le souhaitez) vouloit en mesme temps expliquer les fondements de ces decouvertes, il ne seroit pas besoin que vous prissiez la peine de m'instruire, et il m'aideroit par là à entendre vostre *calculus differentialis*, dont je commence avoir grande envie; mais peut estre il nous fera attendre encore longtemps.

Je ne voudrois jamais m'amuser à ces differentes natures de chaines que Mr. Jo. Bernouilli propose, comme devant achever ou pousser plus loin cette speculation. Il y a de certaines lignes courbes que la nature presente souvent à nostre vue, et qu'elle decrit pour ainsi dire elle mesme, lesquelles j'estime dignes d'estre recherchées, et qui d'ordinaire renferment plusieurs proprietez remarquables, comme l'on voit au Cercle, aux Sections coniques, à la Cycloide, aux premieres Paraboloides, et à cette *Catenaria*. Mais d'en forger de nouvelles, seulement pour y exercer sa Geometrie, sans y prevoir d'autre utilité, il me semble que c'est *difficiles agitare nugas*, et j'ay la mesme opinion de tous les Problemes touchant les nombres. *Calculis ludimus, in supervacuis subtilitas teritur*, dit quelque part Seneque, en parlant de certaines disputes frivoles des philosophes grecs.

Pour ce qui est de la courbure du Ressort, dont l'autre Mr. Bernouilli fait mention, elle peut meriter quelque attention, estant encore une de ces lignes que la nature decrit, quoyque je doute fort si on trouvera des Principes aussi surs que ceux qui servent à la speculation de la Chainette. Il parle outre cela de la courbe que produit une voile tendue par le vent, comme estant d'une meditation tres sublime. En quoy je veux croire que je n'entens pas ce qu'il veut dire, parce que cette courbure en arc de cercle, qu'il donne à une partie de la voile, me paroist trop absurde (en l'interpretant simplement) pour qu'il se puisse estre trompé si grossierement.

Voicy à peu pres la fig. 2e de Mr. Bernoully (fig. 25) à laquelle se

rapportent les deux remarques precedentes. Vous avez fort bien fait de m'advertir dans vostre lettre que BC, ou bien AO dans vostre figure, doit estre la soutangente de la Logarithmique, car j'aurois eu de la peine à le deviner et il me semble que vous en deviez informer vos lecteurs dans les *Acta*. Dans cette construction par la Logarithmique, qui est tres ingénieuse, la proprieté de sa soutangente que j'ay remarquée pag. 179. de mon Traité de la Lumière, est venue fort à propos, car il a falu la supposer pour y parvenir si je ne me trompe.

J'espere que vous aurez trouvé du temps pour achever ce que vous m'avez promis touchant les Tangentes, et je l'attens avec impatience; mais je ne souhaite pas moins d'apprendre la Reduction dont je vous ay parlé, et dont je vous auray l'obligation toute entiere. Je suis avec infiniment d'estime etc.

P. S. Je ne scay pas pourquoy ces Mrs. de Leipsich m'ont donné cette fois le titre de *Dynasta in Zulichem* au lieu de Zeelhem, qu'ils ont mis cy devant et qui estoit comme il faut. On pourroit croire qu'ils parlent de deux *Christiani Hugenii*; vous pouvez par occasion, Monsieur, les detromper.

XXXII.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 4 Septembre 1691.

Il y a 3 jours que je me donnay l'honneur de vous escrire une assez longue lettre. A peine une demie heure apres que je l'eus envoiée à la poste, je trouvay avec plaisir ce que jusques là je n'avois pu penetrer, sçavoir la Reduction de la Construction de la *Catenaria* à la quadrature de l'Hyperbole; de sorte que je souhaitois fort de faire revenir ma lettre pour y adjouter cela, mais comme je demeure icy à ma maison de campagne, à une lieue de la Haye, le courier auroit esté parti devant que j'eusse pu contremander celuy que j'en avois chargé. Je n'ay donc pu m'empecher de vous escrire cette autre, non seulement pour vous epargner la peine de me montrer ce qui en cecy m'avoit semblé trop difficile, comme je vous en avois prié, mais aussi pour vous faire voir la Construction qui m'est venue, afin que je puisse scavoir si je n'ay pas tenu la mesme route, que vous, Monsieur, dans cette recherche; ce que je croiray estre ainsi, si j'apprens que vous ayez rencontré la mesme construction, devant que d'aller à la vostre par les Logarithmes. C'est une merveille comment quelque-fois en un clin d'oeil on s'apperçoit de ce qu'on n'a sçu voir auparavant quoyqu'en estant fort proche.

J'avoue qu'il y a eu du harzard et du bonheur à mon égard, et c'estoit beaucoup de sçavoir que la chose estoit possible; c'est pourquoy j'estimeray d'autant plus vostre methode, si elle vous a conduit d'abord à faire cette decouverte, aussi bien que Mr. Bernoulli, sans que vous sçussiez rien l'un de l'autre quant à ce point de recherche. Ma construction est telle (fig 26.). Que CS, RV se coupent à angles droits en B, qui soit le sommet de la Chainette, BC le parametre, à qui soit prise egale BM. Pour trouver la longuer de quelque appliquée AE à un point A de l'axe, il faut mettre CR egale à CA; et sur CR mener la perpendiculaire RS, qui rencontre l'axe en S. Puis appliquer ST à angles droits à l'axe BS de la parabole BT, dont le sommet soit B; le foier M. Alors, si de la courbe parabolique BT on oste la droite RS, ou bien RT, qui est tangente de la parabole en T, le reste sera egal à l'appliquée AE. Cette construction differe beaucoup de celle de Mr. Bernoully, sans que je me puisse imaginer pourtant, par quelle autre voie la siene a esté trouvée, hors celle que j'ay suivie.

Ce seroit une belle chose qu'une methode pour connoitre, quand l'Equation d'une Courbe est donnée, si sa dimension se peut reduire à celle de l'Hyperbole ou de Cercle, et j'avois cru que vous et Mr. Bernoully aviez eu quelque telle invention. C'est ce qui m'a fait faire bien du chemin en vain, sans m'appercevoir du veritable, qui est fort beau et sans beaucoup de detour, comme je crois que vous le scavez fort bien. Avant hier me vint voir icy le Sr. Weigelius, professeur à Jena, qui m'entretint de ses grands desseins pour l'avancement des sciences, et qui paroit extremement satisfait de certaines demonstrations qu'il pretend avoir de l'Existance de Dieu et de la Providence. Je l'iray voir à la Haye, où il dit avoir un coussin rempli de ressorts, et d'autres curiositez qu'il veut me montrer. Il dit qu'il a l'honneur de vous connoitre depuis le temps que vous estudiez en Mathematiques sous luy. J'aimerois bien mieux voir icy son disciple, à qui je suis etc.

P. S. Devant que de fermer cette lettre, j'ay consideré les paroles de Mr. Bernoulli, dans ce quil a donné dans les Acta touchant la Catenaria, ou il dit: Hujus autem et praecedentis constructionis demonstrationem lubens omitto, ne celeberrimo viro primae inventionis palmam vel praeripiam, vel inventa sua super hac materia plane suppremendi ansam praebeam. D'où il semble qu'il avoit envoié ses decouvertes à Mrs. de Leipsich pour vous estre communiquées. Car si son intention eust esté qu'elles fussent tenues secrettes, jusqu'à la publication generale, comment vous pouvoit il praeripere palmam primae inventionis (de quoy il a cru se garder en ne decouvrant pas ses deux demonstrations) ou vous donner sujet de supprimer vos inventions. Je veux croire pourtant, puisque vous m'en assurez, Monsieur, que vous n'avez point vu la construction de Mr. Bernouilli, devant que de donner la vostre; mais il se pourroit qu'il seroit venu à vostre connaissance (puisque le memoire de Mr. Bernouilli estoit à Leipsich depuis le mois de Decembre et qu'il n'en avoit pas recommandé le secret) qu'il l'avoit reduite à la quadrature de l'hyperbole; ce qui me paroit d'autant plus vraisemblable, que l'invention de cette construction ne semble pas dependre de vostre methode, mais d'une remarque particuliere qui ne s'offre pas facilement d'elle mesme. Il est vray aussi que lorsqu'au mois d'Octobre 1690 vous me racontastes sommairement vos decouvertes touchant cette courbe, vous adjoutiez supposita ejus constructione, de sorte que vous n'aviez pas encore alors cette construction. Vous auriez pu prevenir tous ces doutes, qui en tout cas ne vous peuvent pas faire grand tort, en donnant vos inventions sous la couverture du chifre, comme je vous l'avois conseillé plus d'une fois.

XXXIII.

Leibniz an Hugens.

Bronsvic $\frac{11}{12}$ Septembre 1691.

J'ay receu vos deux lettres du 1 et du 4 Septembre qui m'ont rejoui par les bonnes nouvelles de vostre santé, ou je m'interesse beaucoup. Je suis bien aise aussi d'apprendre par l'examen que vous avés fait, que nos solutions s'accordent. Je n'avois pas songé à la courbe, qui par son evolution peut produire la chainette. Cependant je voy qu'il est bon d'y songer dans les rencontres. Je ne scay, Monsieur, si vous aves remarqué un petit discours de Angulo Contactus et Osculi, que j'avois mis dans les actes de Leipzig mois de Juin 1686, où je considere, que la direction de la courbe se doit exprimer par la droite qui la touche, parceque la droite a par tout la même direction. Et la droite qui touche ne fait avec la courbe qu'un angle de contact, qui est moindre que tout angle de droite à droite. Mais la courbure ou flexion de la courbe en chaque point se doit exprimer par le cercle qui l'y touche le plus exactement, ou qui la baise, car le cercle a par tout la même courbure; et le cercle qui baise ne fait avec la courbe qu'angulum osculi, comme je l'appelle, qui est moindre que tout angle de contact de cercle à cercle. Et ce cercle sera la mesure de la courbure. Ce qui s'accorde avec ce que vous dites, Monsieur, du Rayon de la curvité. C'est pourquoy on fait bien de considerer cecy en examinant les courbes, et les centres des cercles mesurans la courbure tombent dans vôtre generatrice par evolution. Il seroit peut estre bon de continuer la progression et d'examiner quelle courbe seroit la plus propre à estre la mesure de l'osculation du second degré. Il est vray qu'on ne trouvera point d'autres courbes uniformes. Cependant comme deux contacts coincidans font l'osculation, on pourroit encore considerer la coincidence de trois contacts et même de 4 contacts, ou de deux osculations etc. Je suis bien aise que par vos decouvertes jointes aux nostres, nous avons la quadrature de la generatrice de la chainette.

Il est vray, Monsieur, comme vous jugés fort bien, que ce qu'il y a de meilleur et de plus commode dans mon nouveau calcul, c'est qu'il offre des verités par une espece d'analyse, et sans aucun effort d'imagination, qui souvent ne reussit que par hazard, et il nous donne sur Archimede tous les avantages que Viete et des Cartes nous avoient donnés sur Apollonius. J'avoue que je ne l'ay pas encor portée à sa perfection, et je ne scay si d'autres occupations me le permettront. Cependant je ne croy pas que jusqu'icy on ait esté en meilleur chemin, ny plus avant. Depuis que vous avés trouvé vous même la reduction

de la Catenaire à la quadrature de l'Hyperbole, vous avés eu quelque raison, Monsieur, de croire, que j'y pouvois être arrivé aussi par une semblable remarque particuliere. Et même vôtre soubçon est allé un peu trop avant, jusqu'à me faire une petite querelle. Mais je n'ay pas trouvé necessaire de m'en emouvoir. Vous sçaurés, Monsieur, que Mrs. de Leipzig ont gardé à Mr. Bernoully une entiere fidelité, et bien loin de me de couvrir sa solution, ils ne m'ont pas même mandé qu'elle procedoit par la quadrature de l'Hyperbole. Il ne sçay s'il leur a recommandé le secret, mais ils sont bien jugé qu'ils le luy devoient, et c'est moy qui le leur ay recommandé moy même, de peur que Mr. Tschirnhaus n'en sçut quelque chose, car lorsque j'avois proposé le probleme, je l'avois eu en vue, à cause des grands bruits qu'il faisoit de ses methodes. Mais si vous ne nous voulés pas croire, ny ces Mrs. de Leipzig, ny moy, sur notre parole, j'ay en main une preuve, aussi bonne qu'auroit pû estre le chifre que vous m'aviés conseillé à la fin, et dont je me suis dispensé par paresse et par distraction, ne le jugeant plus necessaire. Elle ne vous permettra point de douter que j'aye sçu la reduction à la quadrature de l'Hyperbole avant l'arrivée de la solution de Mr. Bernoulli à Leipzig. C'est que je l'ay mandée à un amy de Florence dans une de mes lettres du 26 d'Octobre ou du 9 de Novembre, car il repond à la fois à ces deux, et je ne me souviens pas dans laquelle j'ay touché ce point, et il m'y promet la dessus le silence que je luy avois recommandé. Il me semble aussi, que vous pervertissés un peu le sens des paroles de Mr. Bernoulli. Et je croy que vous voulés railler. Je pense, que le terme que j'avois donné pour la solution expirant avec l'année, il s'imagina que la mienne seroit bientost, ou pourroit estre déja entre les mains de Mrs. de Leipzig, pour estre imprimée, et qu'en ce cas, ils ne feroient peut estre pas difficulté de me communiquer la sienne, ny moy de la voir et qu'elle me pourroit rebuter, s'il m'estoit la matiere de dire quelque chose de nouveau et s'il me ravissoit jusqu'aux demonstrations. Mais cette apprehension n'estoit pas necessaire. D'ailleurs je ne me pressois pas lors même que je sçus que la solution de Mr. Bernoully estoit arrivée, parceque je voulus encor donner du temps à des sçavans hors de l'Allemagne d'y essayer leur Analyse. Car j'ay ecrit pour ce sujet en France et en Italie, mais sans en rien tirer. Pour vous dire la verité je n'avois pas crû que Mr. Bernoully auroit reduit le probleme à la quadrature de l'Hyperbole, et je ne l'ay scû que lorsque j'ay vu sa solution imprimée, et j'ay trouvé qu'il avoit surpasser mon attente. Je ne sçay pas bien comment il est arrivé à cette reduction, et je veux bien croire que c'estoit par une remarque particuliere, mais que l'usage de nostre calcul luy avoit peut estre rendue aisée. Car s'il avoit obtenue par une voy plus generale, il n'auroit pas ignoré que la construction de la ligne des Rhumbes ou la loxodromique depend de cette même quadrature de l'Hperbole et de la même façon; car il s'est contenté de la construire par une quadrature plus composée dans les Actes du mois de Juin dernier pag. 284. 285. Au lieu que je l'ay reduite à la quadrature de l'Hyperbole, Actes du mois d'Avril p. 181. Ce que j'y dis suffit aussi pour donner la reduction de la Chainette, quoyque je l'aye dissimulé, car j'y dis expressement que la ligne des Rhumbes se construit par la somme des secantes, et je crois que Snellius l'avoit déja remarqué. Or j'y monstre, comment cette somme des secantes se reduit à la somme de l'Hyperbole et j'en donne le fondement. Et vous sçavés que cette même somme des secantes sert aussi pour la chainette. Il y a plus de 10 ans que j'ay trouvé la construction de la Loxodromique, mais la recherche de la chainette m'en fit ressouvenir. Vous parlés, Monsieur, dans votre solution d'une maniere fort bonne de trouver les sommes des secantes par les Tables. Est il permis de l'apprendre? Cependant je vous avoueray bien que ce n'est pas par la voye de la figure, suivant ce que je dis p. 181, que je suis arrivé à la reduction de la loxodromique ou de la chainette, quoyque j'aye esté bien aise de m'en servir pour les autres.

Vous vous souviendrés peut être, Monsieur, de mes lettres, ou je recommande les expressions exponentiales, ou (qui est la meme chose) logarithmiques. Vous en voyés maintenant l'usage dans la chainette, car c'est ainsi qu'on donne des veritables points des lignes transcendantes. Et je croy que c'est *ultimum quod in illis humano ingenio praestari potest.* Il est vray que ce n'est pas tousjours si aisement. Cependant icy le calcul m'a mené tout d'un coup à la consideration des Logarithmes, sans que j'ay eu besoin d'y aller par detour. Ce que j'avois dit que je faisois dans la courbe, *supposita ejus constructione*, ne vous doit point troubler. Je le diray bien encor, comme si je disois que *ducere minimam ex puncto*

dato ad parabolam, est un probleme resolu le plus absolument, suivant le style des anciens, mais *supposita parabolae constructione.* Car alors on n'a besoin que de la regle et du compas. Quoyque j'aye la construction de la chainette aussi bonne qu'il est possible d'avoir, ce n'est pas tout à fait suivant la Geometrie ordinaire. Voudriés vous que j'eusse dit en vous écrivant *suppositis logarithmis et supposita quadratura Hyperbolae*, ou quelque chose de semblable? En parlant comme j'ay fait, je me tenois dans la generalité et je ne voulois pas faire penser que j'avois quelque chose de plus qu'on n'auroit pû attendre. Mais c'est assés de ce procès.

Vous avés raison d'estimer la methode de reduire les quadratures à celles de l'Hyperbole ou du cercle quand cela se peut. J'ay quelque chose la dessus, et ce que j'estime beau coup la dedans, c'est qu'une même methode me mene à une solution absolue, ou au cercle ou à l'Hyperbole, selon la nature de la chose. Mais je n'ay pas encor passé certains limites. Il me faudrait de l'assistance, car je suis rebuté des calculs. Je souhaitterois aussi de pouvoir tousjours reduire les quadratures aux dimensions des lignes courbes, ce que je tiens plus simple. Avés-vous peut-estre pensé à ce point, Monsieur?

Lorsque j'ay donné mon calcul Octob. 1684, j'ay aussi remarqué p. 473 que la soutangente de la logarithmique est constante. Je l'avois même deja mis dans mon traité de la quadrature Arithmetique, ou je m'en servois à la quadrature de l'espace de la Logarithmique. Mais j'ay quitté la pensée de publier ce traité.

A l'egard des lignes de Mr. Bernoulli, vous avés raison, Monsieur, de ne pas approuver qu'on s'amuse à rechercher des lignes forgées à plaisir. J'y adjoute pourtant une limitation: si ce n'est que cela puisse servir à perfectionner l'art d'inventer. C'est pourquoy je ne desapprouve pas que des personnes qui ont du loisir et de l'inclination, et surtout des jeunes gens, s'y exercent. Et c'est pour cela que je ne veux pas décourager non plus ceux qui s'exercent dans les nombres, parceque c'est encore en cela que je trouve l'Analyse imparfaite. Je souhaitte que nous puissions encor dans ce siecle porter l'analyse des nombres et des lignes à sa perfection, au moins quant au principal, *ut hac cura genus humanum absolvamus*, afin que doresnavant on tourne toute la subtilité de l'esprit humain à la physique. Je croy qu'on pourroit voir ce souhait accompli si quelques personnes propres à cela s'entendoient. Du reste je n'ay pas entendu non plus ce que Mr. Bernoulli veut dire avec son arc de cercle dans la voile. Les occupations que j'ay m'ont fait resister à la tentation de penser aux choses qu'il propose. Si M. Fatio le veut, nous envoyerons à Mr. Meyer à Breme nos methodes promises pour les Tangentes, afin qu'il en fasse l'echange quand il les aura receues toutes deux.

Je remarque plusieurs fautes d'impression dans mon discours sur la loxodromie, actes de Leipzig du mois d'Avril p. 181. Car ligne 12, au lieu de $_1l_2l$, il faut mettre $_1l_3l$, et ligne 20 au lieu de $_1l_2l$ il faut mettre $_1l_1d$; et ligne 25 au lieu de $_1d_3l$, il faut mettre $_2l_3l$; et pag. 182. ligne 20, j'ay manqué moy même par inadvertance, mettant $\frac{e}{1}+\frac{e^3}{3}+\frac{e^5}{5}$ etc. au lieu de mettre comme j'avois deja mis auparavant $\frac{e-(e)}{1}+\frac{e^3-(e)^3}{3}+\frac{e^5-(e)^5}{5}$ etc. ce que le discours fait assez voir. Je remarque cela afin que si vous vouliés daigner de lire ces choses vous n'en soyés point arresté. Je crois d'avoir deja indiqué quelque chose dans ma precedente touchant ce rapport de la loxodromique à la chainette. Du moins puisque vous aviés reduit la chainette à la somme des sécantes selon les arcs dans votre solution, et que j'avois reduit cette somme aux logarithmes, dans les actes d'avril 1691, vous y pouviez déja voir le rapport de la chainette à la quadrature de l'Hyperbole. L'equation de la courbe auxiliaire (selon vous) estant $xxyy = a^4 - aayy$, je ne sçais comment vous vient $xxyy = 4a^4 - x^4$, la quadrature, ou $\int x\,dy$ est la somme des tangentes, selon les sinus de complement, laquelle se trouve égale à la difference entre la somme des secantes selon les arcs et la somme des sinus de complement selon les arcs. Or cette derniere somme est trouvable absolument, donc la quadrature à laquelle vous reduisés la chainette, depend de la somme des secantes selon les arcs, que j'ay reduite aux logarithmes. Et pour appliquer vostre equation à la chainette, x estant la longeur de la chainette, depuis le sommet, la somme des y (selon les x) sera l'ordonnée de la chainette, a estant l'unité ou le parametre. C'est ainsi que la quadrature de vostre courbe donne la chainette. Je ne sçay si j'ay deviné vos raisonnemens. Je suis avec zele etc.

XXXIV.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 16 Novembre 1691.

Je me suis ces deux derniers mois abstenu de l'etude et du travail, ayant de la peine à conserver ma santé dans un temps où une infinité de monde dans ce pais est tombée malade. C'est ce qui est cause que je respons si tarde à vostre derniere lettre du 11/21 Sept. Je m'en vais maintenant le faire par ordre pour ne rien oublier; mais auparavant je vous remercieray d'avoir reparé l'erreur de Mrs. de Leipsich, touchant ma Progression dans l'Hyperbole, et sourtout de l'honneur que vous m'avez fait dans les Acta de Sept. dernier en publiant que mes escrits autrefois vous ont esté de quelque utilité.

Vous me parlez, à propos de la courbure de la Chaine, de vostre discours de Angulo Contactus et Osculi. Vous pouvez bien croire qu'en ce lisant je ne trouvay pas cette consideration nouvelle, parce que ces sortes de contact entrent naturellement dans mes Evolutions des Lignes courbes. Je me souviens aussi que longtemps devant que de publier ce Traitè j'avois communiquè à van Schooten quelque remarque la dessus, sçavoir de la circonference, qui coupant une parabole, semble la toucher au mesme point, c'est à dire que dans la parabole comme aussi dans les autres sections coniques il n'y a que le point du sommet ou une circonference la puisse baiser; cela arrive encore en plusieurs cas d'autres lignes courbes, quoyqu'il me semble que vous n'en avez rien dit.

Puisque j'ay bien jugé en quoy doit consister l'avantage que donne vostre nouveau calcul, je souhaiterois fort de voir comment il vous a fait trouver directement et sans effort d'imagination l'ἀπαγωγὴ de la Construction de la Chainette à la quadrature de l'Hyperbole ou aux Logarithmes. En effet vous devez donner au public l'exemple de vostre methode afin qu'on voie de plus en plus son utilité et que les geometres puissent profiter de nostre exercitation. Pour moy si je trouve en suite que j'aye quelque chose de different dans mes recherches et qui merite d'estre sçu, je le publieray aussi tres volontiers. Cela sera peu, mais il y aura pourtant une maniere fort belle pour parvenir à la construction de la Courbe, et que je sçay estre differente de la vostre par les choses que vous me mandez; comme aussi differente de celle de Mr. Bernoully, par ce que je conjecture de son escrit inseré aux *Acta*.

Pour ce qui est du doute que j'avois proposé, je me tiens plus que satisfait apres avoir vu vostre exacte justification. Il est vray que quand j'ay lu ces mots de *querelle* et d'avoir *perverti* le sens des paroles de Mr. Bernoulli, j'ay dit *bona verba*, car en effet j'y estois allé de bonne foy, et le soupçon qui m'estoit resté estoit de trop peu d'importance pour que vous usassiez de tels termes en le refutant. Quand je vous en parlay, c'estoit que j'aurois esté bien aise que vous eussiez esté aussi peu clairvoiant que moy, dans cette question. *Socium tarditatis meae quaerebam.* Ce que vous me dites de n'avoir rien pu tirer de France ni d'Italie, peut servir à me consoler, et marque qu'il n'est pas des plus faciles.

Ce n'est pas le jeune Bernoulli, mais l'ainé qui a travaillé sur la Ligne Loxodromique, et j'ay trouvé etrange qu'apres que vous eussiez donné la bonne Construction pour trouver la longitude par la quadrature de l'Hyperbole, il se soit avisé trois mois apres, d'en donner une qui demande la dimension d'un espace inconnu et qui comprend une etendue infinie; cela s'appelle expliquer *ignotum per ignotius*.

J'ay regardé dans le *Tiphys Batavus de Snellius*, depuis que vous m'en avez averti, comment il demontre par des propositions aisées que cette invention des longitudes, scavoir quand la latitude et l'angle loxodromique est donné, depend de la somme des secantes. Il n'est pas allé plus loin; mais sçaviez vous, Monsieur, que Jac. Gregorius dans ses Exercitations geometriques a reduit cette somme à l'espace qui chez vous et *VMCA*, et qu'il a egalé cet espace à un espace hyperbolique? Je crois certainement que vous ne vous en estes point souvenu, non plus que moy, car j'aurois pu par là achever de trouver la construction de la Chainette, et plus facilement que par vostre calcul sur la Loxodromique, que je n'entendois pas, et que je n'ay demeslé que longtemps apres. Il paroit par un passage dans les notes de Albert Girard sur Stevin, qu'il doit avoir sçu la solution de cette mesme question des longitudes, car il parle de la difference entre la methode de Snellius par la Table des sommes des secantes et la methode parfaite, qu'il dit estre beaucoup plus

courte; et il propose la dessus ce probleme, dont il promet la solution; scavoir quand l'angle loxodromique est donné de 89 degrés, combien de tours entiers, et de degrez de longitude par dessus, fera un vaisseau en partant d'un point sous l'Equateur, pour arriver à la latitude de 89 degrez, et combien le point ou il entrera dans ce parallele sera distant du lieu de son depart, le tout sans Tables. Je l'ay calculé par plaisir et j'y trouve 43 tours 85° 57′. On ne connoissoit pas en ce temps là la quadrature de l'Hyperbole; mais ce Girard avoit penetré bien avant en plusieurs matieres de Geometrie, comme je vois par quelques endroits de ces mêmes notes. Il se trompe pourtant au commentaire sur la Statique par cordages, au sujet de la courbure de la ligne qui plie par son poids, laquelle courbure il pretend estre parabolique, et qu'il en a la demonstration.

Ma maniere pour trouver les sommes des secantes, que vous voulez scavoir, est telle. J'ajoute ensemble les secantes des arcs croissant par degrez entiers, ou par demi-degrez, jusques à l'angle donné. De leur somme je soustrais la moitié de l'exces dont la plus grande de ces secantes surpasse le raion. Alors le reste aura à la somme d'autant de rayons, fort pres la mesme raison (toutefois un peu plus grande) que la somme du nombre infini de secantes comprises dans l'angle donné, à la somme d'un pareil nombre de rayons. Par exemple au raion 10000 la somme des secantes par demi-degrez jusques à 45 degrez inclusivement, est 1012061, d'où j'oste 2071, moitié de l'exces de la secante de 45° par dessus le rayon, reste 1009990, qui aura à la somme de 90 rayons, qui fait 900000, un peu plus grande raison que le nombre infini des secantes à pareil nombre de rayons. Je trouve aussi un terme mineur qui est 1009976, et qui est plus près du vray, mais il y a une regle de trois à faire. Suivant la Table de Snellius la somme des secantes jusqu'à 45 degrez par minutes est 30297320, quand la rayon est 10000. Il l'a posé de 10000000, pour faire le calcul de la somme plus juste, mais apres il a retranché 3 chifres. Or je trouve par ma regle que sa Table est fautive, car non seulement la raison de la somme de Secantes 30297320, à autant de rayons, qui font 27000000, mais aussi la raison de 30297320 moins 2071 à 27000000 devroit estre plus grande que celle des secantes infinies à autant de rayons. Laquelle par la regle parfaite des Logarithmes je trouve estre comme de 30299392 à

27000000. Donc la somme de Snellius est trop petite, et devroit avoir esté 30301463, scavoir 30299392 plus 2071. En supputant selon ma regle, et par demi-degrez, je trouve 30299700 pour le terme majeur, et 30299295 pour le mineur, ce qui confirme mon calcul, quoyque Snellius dit qu'il a fait le sien deux fois. Il y a peut-estre quelque faute dans la Table des Secantes. J'ay la demonstration de ma Regle, mais cecy est desia trop long. De quoy au reste peut servir le calcul de ces sommes, ou leur Table, puisque par les logarithmes les Problemes se resolvent beaucoup plus parfaitement.

Ce sera quelque chose de fort beau que vostre reduction des quadratures à celle du Cercle ou de l'Hyperbole, quand cela est possible, et j'espere que vous nous la communiquerez quand vous l'aurez perfectionnée, ou quand mesme il y manqueroit quelque chose. J'aimerois bien aussi de pouvoir reduire les dimensions des espaces inconnus à la mesure de quelque ligne courbe, quand ces deux quadratures n'ont point de lieu, mais je le crois le plus souvent tres difficile.

Vous aviez remarqué que la soutangente de la Logarithmique est constante, mais non pas, que je sçache, qu'elle representoit le quarré de l'Hyperbole.

Il me tarde de voir ce que produira Mr. Bernouilli l'ainé touchant la courbure du ressort. Je n'ay pas osé esperer qu'on y aboutist à rien de clair ni d'elegant; c'est pourquoy je n'ay rien tenté. Dans la recherche des nombres, le plus utile seroit de s'arrester aux Theoremes, dont il y en a des beaux, et qui peuvent servir dans des rencontres. Un nommé Rolle de l'Academie des Sciences à Paris a fait imprimer quelque traité en cette matiere, que je tascheray d'avoir, car on dit qu'il est fort habile.

Vous croiez à ce qu'il semble qu'il ne seroit pas extremement difficile d'achever de tout point la Science des Lignes et des Nombres. En quoy je ne suis pas jusqu'icy de vostre avis, ni mesme qu'il seroit à souhaiter qu'il ne restast plus rien a chercher en matiere de Geometrie. Mais cette etude ne doit pas nous empescher de travailler à la physique, pour laquelle je crois que nous scavons assez et plus de geometrie qu'il n'est besoin; mais il faudroit raisonner avec methode sur les experiences, et en amasser de nouvelles, à peu pres suivant le projet de Verulamius.

J'attendois depuis longtemps, selon ce que vous aviez promis, vostre methode pour les Tangentes, et je vois avec deplaisir que vous prenez à cette heure des precautions, comme doutant que je ne tiene pas ma parole. Mais quand nous envoierions en mesme temps nos escrits à Mr. Meier, comment serez vous assuré que j'auray dressé le mien de bonne foy? Si vous fuiez peut estre le travail, j'ay encore plus de raison de l'apprehender. Car Mr. Fatio, en partant il y a deux mois pour l'Angleterre, a repris la longue lettre où il m'avoit expliqué son invention; cette lettre aiant esté si fort changée et repetassée depuis que nous avions travaillé ensemble sur cette matiere, qu'elle estoit devenue tout autre. Ainsi je n'ay plus que les solutions des questions que nous nous proposames, et il faudra que de là je tire la regle. Il faut donc s'il vous plait m'exciter par vostre exemple et m'envoier sans defiance ce que vous avez promis, ou laissons là nostre marché.

Vous aurez vu ce que M. Bernoulli a annoncé dans le mois de Jul. de la part de son frere, qui auroit trouvé, qu'outre ma Cycloide il y a une infinité de courbes qui servent aux reciprocations isochrones. Je n'y vois pas d'impossibilité, mais je ne sçaurois croire qu'il nous construise aucune de ces courbes, si ce n'est peut estre par des espaces d'etendue infinie et inconnue, ce qui vaut autant que rien. Je le tiens cependant fort habile ce frere, et il me revient mieux que son ainé, qui est grandement obstiné à soutenir ce qu'il a une fois avancé. Temoin ce dernier escrit du mois de Jul., où il nous voudroit faire accroire que sa demonstration du Centre d'Oscillation (qui apres tout ne regarde que des poids enfilez en ligne droite) est plus evidente que la miene. Je vous en fais juge et demeure de tout mon coeur etc.

XXXV.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 1 Janvier 1692.

Vous aurez receu sans doute ma lettre du 16 Novembre, puis que Mr. Meier m'a mandé qu'elle avoit passé par ses mains. J'ay attendu jusqu'icy vostre response, mais songeant que vous attendez peut-estre ce que j'auray à dire touchant vostre Escrit,*) qu'il m'a envoié, je ne veux pas laisser une plus longue interruption à nostre correspondance, dont je tire du plaisir et de l'avantage. Vous scaurez donc touchant cet Escrit que j'ay eu de la peine d'abord à l'entendre, estant encore peu accoutumé à vostre maniere de calcul, et ne demeslant pas assez bien les constructions qui resultent de vos solutions. Pourtant y estant retourné avec plus de loisir j'en suis venu à bout. Mais qu'ay je trouvé? J'ay vu qu'en reduisant le Probleme renversé des Tangentes aux quadratures, vostre methode ne me donnoit pas ce que j'en esperois d'avantage, qui estoit de m'en pouvoir servir pour trouver les quadratures. Je sçavois fort bien celle de la Courbe que vous expliquez et demontrez, et comment par la on pouvoit construire la courbe dont la soutangente est $yy\sqrt{aa-xx} : ax$, mais je croiois que par vostre methode on trouveroit cette courbe independament, et par elle la quadrature de l'autre, ce qui n'est point. J'ay vu de plus, en essaiant vostre methode sur plusieurs courbes connues, faignent qu'elles ne le fussent point, mais seulement les proprietez de leurs tangentes, que toujours j'estois reduit à de quadratures impossibles, comme de l'Hyperbole ou du Cercle et autres, au lieu que par la methode de Mr. Fatio, l'on trouve l'Equation de la ligne cherchée sans aucune necessité d'en quadrer d'autres. Vous n'enseignez donc pas à discerner si la ligne cherchée est geometrique ou non, et s'il faut ces quadratures de l'Hyperbole et autres pour la construire. Par exemple, si la soutangente est $\frac{aax}{aa+yy}$, la construction de la courbe se reduit par vostre methode à la quadrature de l'Hyperbole, et à celle de la courbe $z \infty \frac{a^4}{y^3+aay}$. Et de mesme si la soutangente est $\frac{bx+xx}{2b+x}$, vous viendrez derechef à la quadrature de l'Hyperbole et à celle d'une autre courbe, au lieu que Mr. Fatio n'a besoin d'aucune. On ne tient donc rien par vostre methode, si on ne sçait trouver les quadratures quand elles sont possibles, et connoitre quand elles sont impossibles en quoy je scay par experience que vous avez quelque chose de beau; et cela paroit dans l'exemple que vous avez

*) Siehe am Ende dieses Briefes.

mis à la fin, où vous quadrez la courbe $aaxx + xxyy - aayy \infty 0$. Je l'avois aussi trouvée, comme j'ay dit, mais c'avoit esté par rencontre, et mesme par cette quadrature que je donnay à Mr. Fatio, il trouva l'equation de la courbe à qui elle convenoit. Considerant tout ce que je viens de dire, et voiant de plus, Monsieur, que vous appellez cette methode qui reduit aux quadratures la meilleure des vostres pour ce probleme, il m'est aisé de conclure que vous ne m'en avez envoié qu'une petite partie, vous reservant d'y joindre par apres le reste, et qui fait presque le tout. Si je pouvois en faire de mesme en ce qui est de la methode de Mr. Fatio, je vous imiterois, mais elle est telle que vous en decouvrant une partie, ce seroit vous apprendre tout. Resoluez vous donc je vous prie à m'envoyer cette principale partie, afin que Mr. Fatio ne puisse pas me reprocher d'avoir trocqué *χεύσεα χαλκείων*, car vous voiez bien apres tout que je ne suis pas seul maitre de la chose.

En etudiant les exemples que vous donnez de vostre reduction, je me suis rendu vostre maniere de calcul un peu plus familiere qu'elle ne m'estoit, et je la trouve excellente pour representer avec facilité et clarté ces *summas minimorum* qui servent en beaucoup d'occasions. Mais je ne vois pas encore en considerant vostre equation de la Cycloide de quel secours elle seroit pour en deduire *omnia circa Cycloidem inventa*, comme vous dites. Car quand ce ne seroit que pour trouver l'espace compris de cette ligne et sa base, ne faudroit il pas emploier à peu pres les mesmes biais dont on s'est servi pour cette dimension. Et s'il faloit trouver le centre de gravité de la demie Cycloide, vostre calcul vous y meneroit sans ces profondes speculations de Mrs. Pascal ou Wallis? Vos expressions pourroient estre plus courtes, mais pour l'invention je crois qu'il faudroit passer à peu pres par les mesmes chemins. Si cela est autrement, vous me ferez plaisir de me detromper, afin que j'aye toute la bonne opinion de vostre *calculus differentialis* qu'il merite.

Si vous lisez l'Histoire des Ouvrages des Scavants qu'on publie icy de 3 en 3 mois, vous y trouverez quelque chose de moy en matiere de Musique, et qui regarde un nouveau systeme des Tons. Si Mrs. de Leipsich avoient envie de le mettre dans leurs *Acta*, je pourrois y adjouter encore quelques nouvelles considerations.

Je vous souhaite l'annee nouvelle heureuse et suis etc.

Methodus, qua innummerarum linearum constructio ex data proprietate tangentium, seu aequatio inter abscissam et ordinatam ex dato valore subtangentialis, exhibetur.

Ex omnibus, quae nobis inquirenda restant in Geometria, nihil est majoris momenti, quam Methodus Tangentium Inversa, seu data tangentium lineae curvae proprietate, ipsam lineae constructionem posse invenire. Nam in applicatione Geometriae ad Physicam saepissime contingit, ut linea ex tangentium proprietate noscatur, unde constructio ejus aliaeque proprietates investigari debent. Datur autem (fig. 27.) constructio lineae, quoties datur aequatio exprimens relationem inter AB abscissam in directrice inde a puncto fixo A, et BG ordinatim applicatam, normalem ad directricem; ita enim cuicunque puncto rectae directricis B assignari potest respondens punctum curvae G(G).

Porro data proprietate tangentium lineae curvae quaesitae, solet dari vel haberi aequatio exprimens relationem inter BT subtangentialem et AB vel BG abscissam vel ordinatam, aut ambas simul. Vocemus autem subtangentialem ipsam BT, partem axis cadentem inter ordinatam BG et tangentem GT. Itaque, si AB vocetur x et BG, y, et BT, t, res redibit ad aequationem, quam ex indeterminatis solae ingredientur x, y, t. Quo facto, quaeritur aequatio, quam, sublata t, duae tantum indeterminatae x et y ingrediantur. Ita ex data proprietate tangentium habebitur curvae constructio.

Ex aequationibus autem illis, quae exprimunt relationem ipsius t ad reliquas, eligamus illas simpliciores, in quibus valor ipsius t per x et y habetur pure; ut si sit $t = aa : x$, vel $t = ax : y$, vel $t = y\sqrt{(aa - xx)}$, vel $t = yy\sqrt{(aa - xx)} : ax$, alisque modis infinitis. Itaque id nunc agitur ut ex dato valore subtangentialis per abscissam, vel ordinatam, vel ambas, detur aequatio exprimens relationem inter ordinatam et abscissam.

Habeo autem diversas vias, quibus magnum hoc problema in oblatis casibus aggredior; sed hanc optimam esse judico, (quoties ea uti licet) ut problema tangentium inversum revocetur ad quadraturas. Analysis enim duorum est generum, una per saltum, cum problema propositum resolvimus ad prima usque postulata; altera per gradus, cum problema propositum reduci-

mus ad aliud facilius. Et quia saepe fit, ut prior methodus prolixis nimis calculis indigeat, confugiendum est non raro ad secundam; tametsi enim prior sit absolutior nec aliis indigeat praecognitis, commodior tamen est posterior, quia laborem minuit, jam inventis utendo.

Ut vero intelligatur quomodo persaepe problema tangentium inversum ad quadraturas revocari nullo negotio possit, dicendum est aliquid de quodam calculi genere a me introducto, notisque novis in eo adhibitis; ita enim efficio, ut multa primo obtutu appareant, et ipso calculi lusu nascantur, quae alias vi ingenii aut labore imaginationis assequi necesse est. Nec aliam ego causam video, cur cl. Fatius, qui jam dudum praeclari ingenii specimina nobis dedit, haeserit ubi irrationales subtangentialis valorem ingrediuntur, velut in casu per Celeberrimum Hugenium mihi proposito, ubi $t = yy\sqrt{(aa - xx)} : ax$, quam quod hujusmodi expressio non aeque calculo analytico apta est, ac mea, per quem ipsius t relatio ad y et x aliquo modo generali exprimitur. Ita enim judico, cum mens humana ad cogitandum notis indigeat, eo posse nos ratiocinari melius, quo magis notae ipsae exprimunt rerum relationes.

Consideravi igitur tam abscissas quam ordinatas habere elementa quaedam momentanea, seu differentias indefinite parvas; et elementum abscissae esse ad elementum ordinatae, ut subtangentialis est ad ordinatam. Nam si cogitemus punctum mobile B ex fixo A egrediens percurrere axem AB(B), et adeo abscissas AB nihil aliud esse quam distantias puncti B mobilis a puncto fixo A, patet incrementa abscissarum momentanea B(B) esse ut velocitates, quas punctum B in quovis axis loco, aut quovis temporis momento, habet, adeoque inassignabilis parvitatis, et similiter se rem habere cum ipsis GL incrementis ordinatarum, seu excessu ordinatae (B)(G) super proxime (id est inassignabili intervallo) praecedentem BG.

Haec incrementa, aut (si contrarium motum fingas) decrementa, vel, ut generalius loquamur, elementa ordinatarum vel abscissarum, aut (si malis) differentias inassignabiles (quarum tamen ad alteras omnino assignabilis est ratio) notis designare volui, exprimentibus relationem ad id cujus sunt differentiae; itaque, quia abscissas AB vocavimus x, et ordinatas BC, y, elementa abscissarum seu differentias minimas B(B) vocabimus dx; et elementa ordinatarum seu differentias minimas GL vocabimus

dy. Possemus ipsas dx vel dy peculiaribus exprimere literis, ut e, v, vel ut lubet, sed ita non appareret relatio ad x et y, quae tamen ipsis notis expressa plurimum juvat, modumque dedit mihi curvas transcendentes exprimendi per aequationes finitas, non alias adhibendo indefinitas quam x et y et harum affectiones, inter quas non tantum potentias aut (his reciprocas) radices, ut x^2, $\sqrt[3]{x}$, etc. sed et differentias et (his reciprocas) summas refero, harumque notas ad supplendum calculum promovendamque ad Transcendentes Analysin omnino aptas judico. Et quemadmodum non optime faceret qui pro x^2, x^3 etc. semper vellet adhibere literas e, v, ad evitandum hoc notationis genus, licet admoneret se per e et v quadratum aut cubum intelligere, ita similiter praestat saepe dx aut ddx (differentiam, aut differentiam differentiarum ipsarum x) adhibere, quam pro ipsis uti literis e aut v vel similibus. Sic cycloidem exprimo per hanc aequationem $y = \sqrt{(2x - xx)} + \int \overline{dx : \sqrt{(2x - xx)}}$, posito radium circuli generatoris esse 1, et x esse abscissam in axe inde a vertice, et y esse ordinatam ad axem, et dx esse incrementa abscissarum, et $\int \overline{dx : \sqrt{(2x - xx)}}$ esse summam omnium $dx : \sqrt{(2x - xx)}$, seu quantitatem, cujus differentialis est ad differentialem abscissae, ut radius ad sinum, quae summa vel quantitas revera est arcus. Et hinc facillimo calculo, sine ullo figurae respectu, derivatur proprietas tangentium cycloidis nota, quae nostro modo expressa ita habet, $dx : dy = \sqrt{\overline{2x - xx}} : \overline{2 - x}$. Caeteraque omnia circa cycloidem inventa, pluraque alia similiter ex tali calculo analytice derivantur.

Sed ut nostrum institutum prosequamur. Producatur (B)(G) dum tangenti TG itidem productae occurrat in E, constat puncta (G) et E haberi posse pro coincidentibus, seu rectam (G)G, quae jungat duo curvae puncta inassignabiliter distantia, productam esse ipsam curvae tangentem. Cum dudum ab aliis explicatum sit, rectam, quae curvam secat, in duobus punctis, transire in tangentem eo casu, quo duo sectionis puncta coincidunt. Itaque EL non minus quam (G)L poterit vocari dy, et ob triangula TBG et GLE similia, fiet TB ad BG, ut GL ad LE, seu $t : y :: dx : dy$, idque ipsum est quod diximus, subtangentialem t esse ad ordinatam y, ut dx elementum abscissae ad dy elementum ordinatae; et quia proinde $t : y = dx : dy$, fiet $t = y\,dx : dy$, qui est generalis valor subtangentialis. Et hunc

conjungendo cum speciali valore, quem natura problematis offert, pervenitur ad aequationem differentialem, quam ubi convertere licet in summatricem puram, habetur reductio problematis tangentium inversi ad quadraturas.

Quae reductio ut intelligatur melius, ostendam (quod momenti est maximi): *quandocunque proprietas tangentium data exhibet valorem subtangentialis per solam* (ex indeterminatis) *abscissam vel per solam ordinatam, problema reducitur ad quadraturas.* Ponamus enim t dari per x, utique quia $t = y\,dx : dy$, fiet $dy : y = dx : t$, adeoque $\int \overline{dy : y} = \int \overline{dx : t}$. Jam $\int \overline{dy : y}$ pendet ex quadratura hyperbolae, et $\int \overline{dx : t}$ etiam pendet ex aliqua quadratura, ejus nempe figurae, cujus ordinata est $1 : t$, posito nempe pro t poni ejus valorem per x. Itaque res reducta est ad quadraturas. Exempli causa, si esset $t = 1 : x$, fieret $\int \overline{dy : y} = \int x\,dx = \frac{1}{2}xx$; et ita curva proposita haberetur ex quadratura hyperbolae. Si esset $t = 1 : \sqrt{\overline{1 - xx}}$, fieret $\int \overline{dy : y} = \int \overline{dx \sqrt{\overline{1 - xx}}}$, atque ita curva quaesita haberetur ex supposita quadratura tam circuli quam hyperbolae.

Similiter si t detur per y, quia $t = y\,dx : dy$, fiet $dx = dy \,.\, t : y$ adeoque $x = \int \overline{dy \,.\, t : y}$. Quod si jam ex problemate detur valor ipsius t per y, intelligi poterit cujusnam figurae quadratura sit opus: nam ponamus esse $t = y$, fiet $x = \int dy$ id est $x = y$, et linea quaesita est recta. Si sit $t = yy$, fiet $x = \int \overline{dy \,.\, y}$, seu $x = yy : 2$, et linea quaesita est parabola. Si $t = y^3$, fiet $x = \int \overline{dy \,.\, yy}$; seu $x = y^3 : 3$ et linea est parabola cubica. Si t sit constans, verb. gr. si $t = 1$, fiet $x = \int \overline{dy : y}$, adeoque linea quaesita pendet ex quadratura hyperbolae. Si t sit irrationalis, res itidem procedet, nam si ponatur $t = y\sqrt{\overline{1 - yy}}$, fiet $x = \int \overline{dy \sqrt{\overline{1 - yy}}}$, adeoque linea quaesita pendet ex quadratura circuli.

Sed si valor ipsius t detur per x et y simul, tunc non semper facile est problema reducere ad quadraturas. Infiniti tamen sunt casus ubi res procedit. Et generaliter hoc pronuntiari potest: *quandocunque valor subtangentialis t est productum ex duabus quantitatibus seu formulis, quarum una datur per solam* (indeterminatarum) *abscissam x, altera per solam* (indeterminatarum) *ordina-*

tam y, tunc problema reducitur ad quadraturas. Exempli causa si sit $t = xy$, seu factum ex x in y, fiet $xy = ydx : dy$, seu $dy = dx : x$, seu $y = \int \overline{dx : x}$, quod pendet ex quadratura hyperbolae. Si sit $t = y : x$ seu factum ex y in $1 : x$, fiet $y : x = ydx : dy$, seu $dy = xdx$, seu $y = \int \overline{xdx}$, seu $y = xx : 2$, quae est aequatio ad parabolam. Si sit $t = x : y$, seu factum ex x in $1 : y$, fiet $x : y = ydx : dy$, seu $xdy = yydx$ seu $dy : yy = dx : x$ seu $\int \overline{dy : yy} = \int \overline{dx : x}$, quae datur ex quadratura hyperbolae, nam $\int \overline{dy : yy}$ datur absolute, nihil aliud enim est quam quadratura hyperboloidis secundi gradus. Sic si sit $t = y : \sqrt{1-xx}$, seu factum ex y in $1 : \sqrt{1-xx}$, fiet $y : \sqrt{1-xx} = ydx : dy$, seu fiet $dy = dx\sqrt{1-xx}$, seu $y = \overline{dx\sqrt{1-xx}}$, quae pendet ex quadratura circuli.

Ad hanc jam classem revocatur et curva mihi proposita, cujus subtangentialis rectae valor praescriptus erat $t = yy\sqrt{aa-xx} : ax$(1). Nam quia semper est $t = ydx : dy$(2), fiet $y\sqrt{aa-xx} : ax = dx : dy$(3) per (1) et (2). Sit $a = 1$(4). Ergo ex (3) et (4) fit $ydy = xdx : \sqrt{1-xx}$ (5), et aequationem (5) utrinque summando, quia $\int \overline{ydy} = yy : 2$(6), fiet per (5) et (6) $yy : 2 = \int \overline{xdx : \sqrt{1-xx}}$ (7). Id est, opus est tantum ut reperiatur quadratura generalis, seu indefinita, figurae cujus ordinata est $x : \sqrt{1-xx}$, abscissa existente x. Haec autem quadratura habetur absolute. Nimirum $x : \sqrt{1-xx}$ vocetur z (8). Jam centro (fig. 28) A radio AK, qui sit a vel 1, describatur circulus, in cujus circumferentia sumto arcu NC, et x seu AB sumta in normali ad AK, quae sit arcus sinui aequalis, jungatur radius AC et tangens arcus CF, ipsi AK productae occurrens in F, erit z. Nam ob triangula similia CBA et ACF fiet z seu FC ad AC seu 1, ut AB seu x ad BC seu $\sqrt{1-xx}$; unde z seu FC est $x : \sqrt{1-xx}$, ut jubet aequatio (8). Si ergo FC translata in BH ordinatim applicetur ad AB angulo recto, ut fiat linea curva AHH, habebitur figura ABHA, per cujus quadraturam reperietur quaesita y.

Porro ex C in AK agatur normalis CM, ajo rectangulum MKA aequari trilineo ABHA, adeoque infinitum spatium AN etc. HA aequari quadrato radii. Quod sic ostendo. Per punctum Q in CF indefinite vicinum ipsi C, agatur in CM et AB normalis QPR et alia $Q\beta$ normalis ad AK; et MC producatur in S, ut

sit MS aequ. AK radio; et, ob triangula CPQ et ACF similia, fiet AC : CF :: CP : PQ, seu AC in PQ = CF in CP. Jam est AC in PQ = SM in $M\beta$, et CF in CP = HB in BR; ergo SM in $M\beta$ = HB in BR, adeoque et summa omnium rectangulorum SM in $M\beta$, id est rect. SMK aequatur summae omnium rectangulorum HB in BR, seu areae ABHA, quod asserebatur. Habetur ergo quadratura proposita.

Hinc jam constructionem lineae quaesitae ita ducemus. Area ABHA seu $\int \overline{xdx : \sqrt{1-xx}}$ = rect. SMK seu $1 - \sqrt{1-xx}$ (9). Ergo ex aeq. (7) per (9) fit $yy : 2 = 1 - \sqrt{1-xx}$ (10), quae aequatio est ad curvam quaesitam. Unde si tollamus irrationalitatem, fiet $y^4 : 4 - yy + 1 = 1 - xx$ (11), et ad supplendos gradus ex lege homogeneorum, pro 1 restituendo a, fiet $y^4 = 4aayy - 4aaxx$ (11). Constructio autem erit talis. Inter duplam MK et radium AK sumatur media proportionalis, quae erit y quaesita (ex aequ. 10) eique aequalis BG ordinatim applicata ad AB angulo recto dabit curvam AGV quaesitam, cujus ultima ordinata NV aequabitur rectae KN seu lateri quadrati circulo inscripti. Et in hac linea, si sit AB,x et BG,y, et AN,a, tunc subtangentialis BT, seu t, erit $yy\sqrt{aa-xx} : ax$, ut desiderabatur*).

XXXVI.

Leibniz an Hugens.

A Hannover 29 Décembre V. S. 1691.

Vous jugés bien que la lecture de votre lettre me devoit surprendre, aussi n'y manquait-elle pas. Neantmoins je m'avisay qu'il est plus commode de rire de la malice de quelque esprit malin, qui nous veut donner tousjours de quoy contester, que s'en fascher. Et puisque j'espere que vous n'aurés pas encor communiqué à Mr. Fatio, il nous est aisé de sortir d'affaire. Vous et luy

*) Die Methode Fatio's, von der in diesen Briefen die Rede ist, entwickelt Hugens in einem Briefe an den M. de l'Hospital vom 23 Jul. 1693 (sieh. Ch. Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae ed. Uylenbroek. Fasc. I. p. 269 sqq).