

tant in proportione quadrata velocitatis, je reponds que si vous aviés consideré ce que je vous avois écrit, vous auriez vû qu'il n'y a rien à changer, et je n'aurois pas besoin de repetition; mais j'avoue de n'avoir point de droit de vous demander de l'attention. Je dis encore une fois motum a medio retardari proportione velocitatis, c'est à dire comme je m'estoit expliqué dans le precedent article 4 (dont l'hypothese premiere est la même avec celle du present article 5) que les resistances sont en raison composée des elemens de l'espace ou milieu, et des velocités, et prenant les elemens du milieu pour égaux, ou considerant tout comme égal à l'égard du milieu, les resistances sont comme les velocités; car si vous divisés le milieu en parties égales tres petites et le considerés comme également parsemé de globules égaux, un grand globe allant la dedans perdra à chaque choc, (c'est à dire à chaque particule du milieu) un degré de vitesse proportionel à la velocité qui luy reste. Et cette consideration a priori m'avoit mené à mon hypothese. Ainsi considerant le milieu comme la base de la division égale (ce qui est le plus naturel) les resistances sont comme les velocités; mais considerant le temps comme la base, c'est à dire divisant le temps en parties égales, tres petites, les resistances ou velocités perdues, à chaque particule de temps, seront comme les quarrés des vistes. Et la raison est, que les resistances estant en raison composée des elemens de l'espace et des velocités; et les elemens de l'espace estant encor en raison composée des elemens des temps et des velocités, les resistances sont en raison composée des elemens des temps et des quarrés de velocité, ce que je dis en termes expres sous la prop. 3. Et comme j'avois déjà marqué toutes ces choses, je m'étonne de votre conditionelle: s'il est vray que j'aye consideré la proportion doublée; car dans mes precedentes, j'avois expliqué à fonds comment elle avoit lieu, et j'avois rendu raison de mon expression. A parler exactement on ne doit pas dire que les resistances sont en raison de velocité ny en raison des quarrés des velocités, si ce n'est qu'on ajoute le temps ou le milieu, comme j'ay fait. Enfin on peut examiner à toute rigueur cet article 5, on n'y trouvera rien à dire; il y a seulement une faute à corriger. C'est que l'enonciation de la prop. 3 est toute gâtée; je ne scay par quelle megarde; mais cette bevue n'a point d'influence sur tout le reste. Il falloit dire: resistentia

est ad impressionem gravitatis ut quadratum velocitatis acquisitae ad quadratum velocitatis maximae; ou bien je pouvois dire quelque chose de semblable a ce cy: impressio nova (seu accessio velocitatis), resistentia (seu diminutio velocitatis), et incrementum velocitatis (quod est differentia impressionis et resistentiae) sont inter se ut quadratum velocitatis maximae, quadratum velocitatis acquisitae, et excessus quadrati maximae super quadratum acquisitae. La preuve de la proposition 3 infere ce cy et les preuves des propositions 4 et 6 le supposent, et je ne scay pas d'ou est venu ce qui-proquo. Mais je laisse enfin ce point, sur lequel la seule consideration que j'ay pour vous m'a rendu si prolix, afin de tacher de vous satisfaire s'il est possible; mais aussi je ne crois pas d'en pouvoir ou devoir dire d'avantage. Vous avés raison, Monsieur, de dire que les courbes que j'avois données pour vostre probleme sont invariables, et je n'avois pas pris garde que $\frac{r^2}{a}$ fait une seule quantité determinée. Mon calcul m'avoit pu mener aussi bien à $2a^2x^2 = a^2y^2 - y^4$ qu'à $2a^2x^2 = a^2y^2 + y^4$, mais ayant la solution qui s'estoit offerte, je n'y avois plus pensé. Vous dites que la premiere se peut quadrer et vous doutés si la seconde se pourroit quadrer aussi: je reponds qu'effectivement il est aussi aisé de quadrer la premiere, que de donner un plan egal à la surface decrite par un arc de cercle tourné à l'entour du diametre; mais la seconde depend de la quadrature de l'Hyperbole. Je ne vous ay pas donné la solution de vos problemes, comme une marque de la perfection de ma methode, mais comme une marque de son utilité. Je crois même de vous avoir déjà dit que pour les resoudre, je ne me suis pas servi de la methode qui peut toujours réussir pour toutes les lignes ordinaires, car elle est fort prolix, mais d'une autre, qui est bien plus courte, et bien plus directe et commune aux transcendantes et ordinaires, mais je ne l'ay pas encor mise en perfection pour la pouvoir toujours conduire jusqu'au bout parcequ'il y a encor des choses à découvrir pour applanir des difficultés qui se trouvent dans son chemin. Je n'ay garde de souhaiter qu'on me propose des problemes, dont la solution ne serve qu'à faire croire que je les puisse resoudre. Notre temps est trop pretieux, je suis trop distrait ailleurs pour le present,

et la methode pour les lignes ordinaires que je crois suffisante est trop prolix; il faudroit dresser des tables pour l'abreger, mais je n'en ay pas le loisir.

Pour ce qui est des expressions exponentiales, je les tiens pour les plus parfaites des toutes les manieres d'exprimer les transcendentes. Car les exponentiales donnent une equation finie, ou il n'entre que des grandeurs ordinaires quoique mises dans l'exposant, au lieu que les series donnent des equations infinies; et les equations differentielles, quoique finies, employent des grandeurs extraordinaires scavoir les differences infiniment petites. Et tout ce que je souhaite pour la perfection de la Geometrie, c'est de pouvoir reduire les autres expressions transcendentes aux exponentiales. Je ne divise donc pas les courbes transcendentes en exponentiales et non-exponentiales (comme il semble que vous l'avez pris) mais leurs expressions. Car une meme courbe peut recevoir les trois expressions, que je viens de dire. Par exemple la courbe susdite [qui exprime la relation entre les temps et les vistesses imprimées par la pesanteur (qui sont proportionnelles au temps) et entre les vistesses absolues, qui en restent à cause de la resistance du milieu] c'est à dire la courbe dont les abscisses sont v et les ordonnées t se peut exprimer serialement par $t = \frac{1}{1}v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc.

et differentiellement par $t = \int \frac{dv}{1-v^2}$, et enfin exponentialement par $b^{\frac{t}{b}} = \frac{1+v}{1-v}$; ce qui veut dire que $\frac{1+v}{1-v}$ estant comme les nombres, t sont comme les logarithmes; b estant une grandeur constante, dont le logarithme est 1, et le logarithme de 1 estant 0.

Vous faites une demande, Monsieur, à laquelle il est juste que je satisfasse, scavoir si les expressions exponentiales servent à donner quelque description de la courbe et à la marquer en quelque façon par points; ou si je m'en sers seulement à decider que la courbe est transcendente. Je reponds que les expressions exponentiales servent à trouver autant de points qu'on voudra d'une telle courbe, tout comme dans les helices et dans la quadratrice, au lieu que les autres expressions ordinaires ne donnent pas des points veritables, mais seulement des points approchans; autres qu'elles ne sont pas si maniables par le calcul. Mais il sera bon d'expliquer dans un exemple la maniere de construire ou de marquer des points de la courbe

susdite. Soit (fig. 47.) $AC = AB = 1$ representant la plus grande velocity, et BD , droite prise à discretion, soit b . Supposons AC , BD paralleles et cherchant entre elles des moyennes proportionnelles EF , GH , etc. decrivons la courbe des logarithmes $CFHDP$. Je dis donc que prenant un point quelconque de cette courbe comme P , et en menant à l'axe AB une ordonnée PT , alors le logarithme ou l'abscisse AT sera t , et le nombre ou l'ordonnée TP sera $\frac{1+v}{1-v}$ que nous appellerons e . Or e estant assignée, il ne reste que de trouver v , ce qui est aisé, car il y aura $v = \frac{e-1}{e+1}$, c'est à dire dans la droite TP prolongée prenant TK , TQ égales à AC . et erigeant QS normale à QP et égale à AC , et joignant PS qui coupera CK (parallele à AB) en R , et enfin dans TP prenant TV égale à KR , il est manifeste que TV sera v , AT estant t ; c'est à dire AT estant comme les temps, TV seront comme les velocities, et la ligne AVV asymptote à CK sera la courbe demandée. Il n'est gueres plus difficile de construire les courbes exponentialement exprimées, qui satisfont à une de vos soutangentes, et je m'imagine qu'à present vous serés plus content de ces sortes d'expressions.

Je seray bien aise de scavoir si la regle renversée des tangentes de Mr. Facio contenuë dans les lettres que vous dites avoir receues de luy vous donne quelque contentement, et en quelle sorte de cas vous la trouvés la plus practicable, afin que je puisse juger si elle a quelque rapport à mes meditations.

Feu Mr. Gericke m'envoya ses experiences sur un globe de matiere électrique, lorsque son livre n'estoit pas encor imprimé, car je luy avois procuré un privilege de l'Empereur pour ce livre par mes amis. Mais je m'imagine que la substance de ces experiences sera dans ce livre, et comme la lettre a esté écrite il y a bien du temps, il ne me seroit pas aisé maintenant de la trouver parmy mes vieux papiers. Je seray ravi d'apprendre un jour quelque chose de vos experiences électriques.

Pour ce qui est de l'aimant, il est vray que nous ne scavons pas la regle de declinaisons. Je crois neantmoins qu'elles sont réglées avec leurs changemens, et ne dependent pas des causes accidentaires et non liées comme seroient les fibres du globe de la terre suivant ce que Gilbert et Descartes ont cru. Si elles sont réglées et tant que nous ne scavons pas comment

et pourquoy, c'est une marque que nous n'avons pas encor la vraye hypothese.

Je seray bien aise de voir un jour ce qu'on a imprimé en France de la part de l'Academie Royale, sur tout ce qu'il y a de vous. Je me souviens d'avoir aussi remarqué autres fois des voyes de demonstrier la regle de l'equilibre differentes de celle d'Archimede. Mr. Römer me parla aussi d'une sienne et un Professeur de Jena nommé Weigelius en a aussi donné. Mais j'ay sur tout envie de voir un jour votre maniere, sçachant que vous avés coustume de donner quelque chose d'elegant.

J'ay honte de vous parler encore d'une lettre que je vous destine il y a longtemps touchant le systeme des planetes, et qui est demeurée imparfaite par des interruptions, sans que j'aye encor pu la finir. Cependant je m'y mettray au plustost, et il faut bien aussi que je mette en ordre mes pensées sur la courbe de la chaine pour les confronter avec les vostres. Les occupations Journalieres entierement éloignées de ces choses font que j'ay bien de la peine à reprendre le fil d'un travail interrompu, quand les idées ne me sont plus recentes.

Je souhaite beaucoup l'honneur de vous voir; mais quand S. A. S. Monseigneur le Duc d'Hanover iroit encor à la Haye, il n'y a pas d'apparence que je le pourrais accompagner, mon employ n'estant pas de suivre la Cour, mais de travailler à des choses dont je suis chargé. Si Dieu me donne la grace de depecher le travail qui m'occupe à present et qui est de longue haleine, je serai plus libre. Je prie Dieu de vous conserver, dont j'espere de profiter avec le public et je suis avec passion etc.

P. S. Quant à la ligne de la chaine pendante donnant une oeillade à mon calcul, je m'apperçois que pour la relation entre deux points de la chaine situés dans le meme horison et entre la partie de la chaine pendante dessous, je me puis servir d'une ligne dont l'equation est de la forme de celle que vous aviez marquée $x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$. Mais une autre dont je vous avois parlé et dont la forme est $x^2y^2 = a^4 + a^2y^2$ ne laisse pas d'avoir aussi son usage dans ce probleme.

XXIII.

Hugens au Leibniz.

A la Haye 23. Février 1691.

J'ay vu avec bien du déplaisir dans votre derniere lettre que vous avez entendu tout autrement et au contraire de mon intention ce que je vous avois escrit, que votre excuse estoit merveilleuse. Car j'ay voulu dire par là que cette excuse estoit tout à fait superflue, et que j'estois fort éloigné d'avoir aucun soupçon, que vous eussiez contribué à ce qu'on avoit mis abusivement dans les Actes de Leipsich à mon prejudice. C'est la pure verité, et il me semble que par toute sorte de raison vous deviez l'avoir pris de cette maniere. Ja n'ay pas encore pu avoir ces Actes des mois de Novembre et Decembre de l'année derniere, de sorte que je ne scay si la faute aura esté réparée. Cependant j'ay fort bien compris depuis ma derniere comment ma series pour l'Hyperbole se raporte à celle de vos logarithmes, et j'ay aussi trouvé que j'aurois pu apprendre cette series du livre de Mr. Wallis qu'il a escrit de l'Algebre en Anglois p. 329, où il range la progression de Mercator et la siene l'une au dessus de l'autre conjointement, qui estant adjoutées ensemble font le double de la progression $a + \frac{1}{3} a^3 + \frac{1}{5} a^5$ etc., de mesme que vous le faites voir dans votre lettre du 25. Nov. Je m'etonne que Mr. Wallis n'ait pas remarqué cela, ni combien cette progression doublée est plus utile, pour la quadrature de l'Hyperbole et pour trouver les Logarithmes, que n'est la siene ni celle de Mercator, car le calcul en devient plus court de la moitié.

Depuis quinze jours j'ay revu, non sans peine les brouillons que j'avois touchant les mouvements à travers un milieu qui fait resistance, sçavoir dans la vraie hypothese, et j'ay fait quelques calculs en suite, pour voir comment ils s'accorderoient avec les vostres. Je trouve qu'une partie de nostre dispute vient de ce que vous prenez le mot de resistance dans une autre signification que moy et Mr. Newton; car vous appelez resistance la velocité perdue ou la perte de velocité cau

sée par le milieu, et en consequence de cela, pour comparer des resistences differentes, vous voulez que la consideration des elemens du temps entre en compte, et qu'à parler exactement on ne doit pas dire que les resistences sont en raison des velocitez, ni en raison des quarrés des velocitez. En quoy il est evident que vous prenez l'effect de la resistance pour la resistance mesme. Mais à Mr. Newton et à moy la resistance est la pression du milieu contre la surface d'un corps; comme par exemple, quand on tient dans la main une feuille de carton, et qu'on l'agite à travers l'air, on sent une pression qui se peut comparer à celle d'un poids, et qui devient quatre fois plus grande lorsqu'on remue cette feuille deux fois plus viste qu'auparavant, ainsi que j'ay trouvé autre fois à Paris par des experiences fort exactes. Vous voyez, Monsieur, qu'il n'y a que la differente vitesse dont depend cette pression, sans considerer des parties egales ni inegales du temps. Et c'est sans doute la veritable et la plus naturelle notion de la resistance.

Je comprends bien pourtant comment, suivant la vostre, vous voulez conserver l'inscription de vostre article 5, mais c'est comme j'ay dit en prenant l'effect pour la cause; et toute l'obscurité de vostre discours vient principalement d'icy; laquelle, à ce que je crois, est cause que personne ne l'a assez examiné pour comprendre ce qu'il y a de vray, ni pour remarquer les abus que vous y corrigez maintenant vous mesme. J'avois fait la mesme correction mot à mot dans la prop. 3. art. 5, que vous m'envoiez dans vostre derniere lettre. A la prop. 6. du mesme article les espaces parcourus, qui à moy sont comme les logarithmes de $\frac{aa}{aa-vv}$, selon vous sont comme les logarithmes de $\sqrt{aa-vv}$, (il falloit $\frac{\sqrt{aa-vv}}{aa}$) ou de $\sqrt{1-vv}$: ce qui revient pourtant à la mesme chose (si non que vos logarithmes deviennent negatifs), car les logarithmes des racines ont entre eux la mesme raison que ceux de leurs quarrés. Vous aviez de mesme des logarithmes negatifs, en disant que les temps sont comme les logarithmes de $\frac{1-v}{1+v}$, mais dans vostre derniere vous l'avez redressé en mettant $\frac{1+v}{1-v}$. Je m'apperçois assez, Monsieur, en tout cela, qu'il ne vous manque ni habilité ni science

pour demesler toute cette matiere, et d'autres plus difficiles, mais que seulement vous n'avez pas assez de loisir pour ajouter plus d'exactitude et de clarté aux choses que vous avez trouvées. Je ne sçay pas pourquoy dans tout ce discours de la Resistance vous n'avez rien voulu determiner des choses qui sont comme le fruit de cette recherche et qu'on peut souhaiter de sçavoir, comme si quaeratur tempus descensus liberi ad tempus descensus impediti donec data celeritas obtineatur, hoc est, quae ad celeritatem terminalem datam rationem habeat; aut si quaeratur ratio spatiorum sic peractorum; item quae sit ratio temporis ascensus ad tempus descensus, cum corpus recta sursum projicitur celeritate terminali. Je souhaiterois de voir comment vos calculs s'accordent aux miens dans ces problemes, et en les comparant ensemble nous pourrions estre assurez tous deux d'avoir raisonné juste. Le Traité de Mr. Newton en cecy n'est pas sans faute. Dans l'art. 6 prop. 1. vous faites la ligne du jet bien plus facile à trouver: qu'elle n'est en effet; sur quoy je vous prie d'examiner la remarque que j'ay faite dans l'Addition à mon discours de la Pesanteur.

J'ay considéré vostre construction de la Courbe Exponentiale qui est fort bonne. Toutefois je ne vois pas encore que cette expression $b^{\frac{t}{1-v}}$ soit d'un grand secours pour cela. Il y a longtemps que je connois cette mesme courbe, aussi bien que sa compagne, qui sert aux jets montants, et je la construis par la ligne logarithmique en supposant les velocitez données, au lieu que vous supposez les temps.

Quoyque cette lettre soit desjà bien longue, il faut que je vous responde à ce que vous souhaitez de sçavoir touchant la methode renversée des Tangentes de Mr. Fatio. Vous scaurez donc que l'auteur est depuis quelque temps en cette ville, et qu'il me fait souvent l'honneur de me voir. J'avois examiné sa lettre dont je vous ay parlé, où la dite methode estoit amenée jusqu'à un certain point, mais depuis qu'il est icy, il l'a beaucoup perfectionnée, et m'a trouvé les deux mesmes courbes dont je vous avois proposé les soutangentes, des quelles la 2. a plus de difficulté. Ses calculs ne sont pas longs, ni n'ont besoin d'aucunes tables; mais il ne sçaurait resoudre jusqu'icy les cas où il entre des racines qui contiennent des inconnues et plus

d'un terme; par exemple, si la soutangente est donnée $\frac{yy\sqrt{aa-xx}}{ax}$,
 x estant l'abscisse, y l'appliquée à angles droits, et a une ligne connue. Si votre methode ne s'arreste pas à ces racines, vous avez quelque chose de plus que Mr. Fatio, quoyqu'il ait desia surpassé mon attente. Peut estre c'est pour ces racines que les Tables, dont vous parlez, sont necessaires dans la methode que vous dites reussir tousjours.

Cette quadrature de la 4^e de mes courbes que vous dites estre aisée, marque aussi quelque connoissance extraordinaire. Vous me ferez plaisir de la determiner, à fin que Mr. Fatio se puisse assurer que vous l'avez trouvée, à quoy il m'a avoué ne pouvoir reussir. La figure, au reste, de cette courbe ne consiste pas dans les seules deux demioales, comme je vous avois marqué, mais elles sont jointes par une croix, et le tout ressemble à un 8, ce qui se connoit facilement par l'equation. Quant à la courbe exponentiale que vous trouvastes au lieu de cette ligne, lorsque les signes $+$ et $-$ estoient renversez, Mr. Fatio assure, et m'a démontré en quelque façon, que cette Exponentiale est impossible, par où vous voyez que votre demonstration pour prouver qu'elle satisfait à la soutangente donnée, ne nous est pas claire.

Vous m'obligerez, Monsieur, d'achever ce que vous avez trouvé sur la chaine pendante, afin que nous nous communiquions nos meditations. Je crois qu'il y aura bien d'autres geometres qui resoudront ce probleme, car à dire vray, il ne me paroît pas bien difficile, si ce n'est que vous en demandiez quelque chose de plus que ce que j'en ay trouvé.*)

Ce n'est pas sans regret que je perds l'esperance de vous voir icy, et je n'aurois pas esté si longtemps sans vous escrire si je ne vous avois toujours attendu. Je suis etc.

*) In der Sammlung Uyenbroek's kommt nach diesen Worten Folgendes, das in dem Briefe von Hugen's, wie er ihn an Leibniz übersandte, fehlt: Mr. Spener m'a dit que, pour faire reussir la boule de souphre de Mr. Guericke, il faut ajouter pour chaque livre 13 grains salis tartari fixi; peut estre l'auteur vous aura donné la mesme recepte. — Il me dit aussi qu'il pouvoit oster au fer l'attraction vers l'aimant, mais je ne m'y fie pas trop depuis que j'ay trouvé fausse une experience avec le vif argent, qu'il debitoit comme tres certaine.

Ce n'est pas sans regret etc.

XXIV.

Leibniz an Hugen's.

Hannover ce $\frac{20}{30}$ de Fevrier 1691.

Je suis ravi de m'estre trompé en vous attribuant un soubçon, dont, malgré vos paroles, je ne vous devois pas juger capable. La faute de la relation de Leipzig n'aura pas encor esté redressé, mais ce sera fait au plustost, car il y a quelque temps que je n'y ay pas écrit. J'avois cru de pouvoir estimer la resistance par son effect prochain, c'est à dire par la diminution de la vistesse du corps qui la sent, et je m'estois assez expliqué la dessus dans tout mon discours, mais l'advoue qu'il demande de l'attention. Je ne scay si vous aurés examiné ce que je dis de la resistance absolue, comme il s'en trouve dans le frotement. Il est tres vray, comme vous avés remarqué, Monsieur, que dans un jet libre par un milieu resistent, la simple composition des deux mouvemens ne peut avoir lieu et pour que mon article 6 puisse trouver place, il faut une hypothese particuliere.

Ce que j'ay vu de Mr. Fatio me le fait estimer et j'attends beaucoup de sa penetration. Je suis bien aise d'entendre qu'il est à la Haye, et je luy enverrois ce bonheur, dont il ne m'est pas permis de jouir, si je ne considerois, qu'il profitera beaucoup en vous voyant quelques fois, et qu'il en sera d'autant plus en estat de rendre service au public. Il n'a pas mal choisi en se mettant à chercher les courbes dont les tangentes sont d'une nature connue, c'est presque ce qu'il y a de plus difficile et de plus important en Geometrie; je contribuerois volontiers à l'aider si je puis dans cette recherche, s'il en croyoit avoir besoin. Comme il a aussi trouvé vos courbes, je m'imagine qu'il aura pris quelque biais, qui serve à abreger; comme en effect je puis fabriquer plusieurs canons particuliers pour retrancher le calcul. Pour ce qui est d'une courbe dont la soutangente soit $\frac{yy\sqrt{aa-xx}}{ax}$, j'ay trouvé qu'il y en a plusieurs, qui y peuvent satisfaire, mais les plus simples sont comme je croy celles dont les equations sont $aaxx = a^4 - y^4$, ou bien $4aaxx = 4aayy - y^4$. Le calcul fera connoistre que tant l'une que l'autre reus-



sit. Si Mr. Fatio trouve bon de me communiquer sa methode pour vos deux lignes, je luy communiqueray la mienne pour ces deux d'à present où il a trouvé de la difficulté. J'avois cru que l'aire de la courbe dont l'equation est $2aax = aay + y^4$ dependoit de la quadrature de l'hyperbole, mais ayant revu mon calcul, je trouve qu'elle est quadrable absolument aussi bien que l'autre, dont l'equation est $2aax = aay - y^4$. Et comme vous me demandés la determination de l'aire de la dernière, afin que Mr. Fatio se puisse asseurer que je l'ay trouvée, de quoy il avoit douté, parce qu'il n'y avoit pas reussi luy même, je vous donneray les aires des parties quelconques de toutes deux. Soit (fig. 18.) AC, a et AD, y, et DH, x, et $aax = aay - y^4$, et soit $\sqrt{aa - yy} = z$, je dis que ADHA est $\frac{a^2 - z^2}{3a}$, et par consequent ACHA estant $\frac{a^2}{3a}$, CHDC sera $\frac{z^2}{3a}$. Caeteris iisdem positis, soit $aax = aay + y^4$ et soit $\sqrt{aa + yy} = z$, je dis que (fig. 19.) CDHC est $\frac{z^2}{3a}$, comme auparavant, si au lieu de aax on met $2aax$ comme vous le demandés, on n'a qu'à écrire $3a\sqrt{2}$ au lieu de $3a$.

Puisque la première achevée retourne en elle même, en forme de 8, on en peut juger que le theoreme de Mr. Newton p. 105. qui pretend, qu'il n'y a point de courbe recourrante (de la Geometrie ordinaire) indefiniment quadrable, ne scauroit subsister, et qu'il y a quelque faute dans sa demonstration. Mais je ne l'en estime pas moins; opere in longo fas est obrepere somnum. Mr. Bernoulli a aussi trouvé enfin la ligne de la chaine. Je croy que la connoissance de mon calcul l'aura un peu aidé, car quoyque ce probleme ne soit pas de plus difficiles, je m'imaginais qu'il n'est pas trop aisé d'y reussir sans avoir quelque chose d'equivalent à ce calcul. Je n'ay pas vu sa solution, je ne laisse pas de croire qu'il a donné dans le but. Mons. Tschirnhaus n'y a pas mordu, quoyque j'aye parlé expres d'une maniere à l'y engager, pour luy donner occasion d'exercer sa methode, dont il nous promettoit tant, jusqu'à me reprendre obliquement, de ce que j'avois dit que l'Analyse ordinaire ne suffit pas dans ces rencontres. Je croy que Mr. Fatio est allé trop viste en pretendant que mon exponentiale est impossible. Je verray un de ces jours, si je vous en pourray donner la construction. On ne donnera la solution de Mr. Bernoulli

que quand j'auray envoyé la mienne; et si vous le trouvés à propos nous y joindrons la vostre, mais j'espere de la voir prealablement et de vous faire juger de la mienne.

Je voudrois bien scavoir ce que vous jugés des variations de l'eguille aimantée et des causes de l'inclination, et s'il est bien seur, que dans des lieux qui ne sont pas éloignés l'un de l'autre, il se trouve une grande difference entre les declinaisons. — Je suis disposé à croire que cela n'est point. Mais l'experience en doit juger souverainement. Je desire aussi de scavoir votre sentiment sur la cause du flux et reflux de Mr. Descartes, Je me souviens que vous avés traité autres fois de la cause des parelies. J'espere que vous en mettrés la demonstration dans votre dioptrique, et que vous nous donnerés après tant de delais cet ouvrage si désiré. Mr. Newton n'a pas traité des loix du ressort; il me semble de vous avoir entendu dire autres fois que vous les avés examinées, et que vous avés démontré l'isochronisme des vibrations.

N'y a-t-il personne à present qui medite en philosophe sur la medecine? Feu Mr. Crane y estoit propre, mais Messieurs les Cartesiens sont trop prevenus de leur hypotheses. J'aime mieux un Leeuwenhoek qui me dit ce qu'il voit, qu'un Cartesien qui me dit ce qu'il pense. Il est pourtant necessaire de joindre le raisonnement aux observations. Mais je finis en me qualifiant avec beaucoup de zele etc.

XXV.

Hugens an Leibniz.

A la Haye 26 Marz 1691.

J'ay esté indisposé pendant plus de 3 semaines, et sur la fin j'ay esté aussi attaqué de la goute dont je ressens encore un reste, et cela pour la première fois de ma vie. Sans cet accident j'aurois répondu plustost à la dernière que vous m'avez fait l'honneur de m'ecrire. J'y ay vu avec beaucoup de satisfaction que vous avez si bien seue trouver la ligne courbe, dont l'equation est $4aax \circ 4aay - y^4$ pour la soutangente $yy \frac{\sqrt{aa - xx}}{ax}$. Mais j'ay de la peine à croire ce que vous dites, qu'il y a plu-



sieurs autres courbes qui y satisfont, et j'oserois presque assurer que cela est impossible; du moins celle que vous apportez $aaxx \propto a^4 - y^4$, ne donne pas cette mesme soutangente, mais $-\frac{2yy \sqrt{aa - xx}}{ax}$, qui est double de l'autre, et qui doit estre prise au delà de x , à cause du signe negatif.

J'ay proposé votre offre à Mr. Fatio touchant l'échange de votre methode dans cette recherche, contre la siene dont il s'est servi à trouver mes deux autres courbes par leur soutangentes; mais je vois qu'il ne desespere pas de surmonter la difficulté des Racines, et qu'il ne peut pas se resoudre à vous envoyer un traité assez long qu'il a sur cette matiere. Il avoue au reste qu'elle est d'une estude penible et infinie, et il est seur, dit il, qu'on ne scauroit venir à bout de tous les divers deguisemens possibles des soutangentes, ce que j'ay aussi tous-jours creu. Je ne laisse pas de l'exhorter de donner ce qu'il en a trouvé, et je souhaiterois, Monsieur, que vous en voulussiez faire de mesme, parceque le Probleme est de grande utilité, quand bien il ne seroit pas generalement resolu. Vous obligeriez aussi le public en produisant votre methode des quadratures dont vous venez de donner un si joli echantillon dans la courbe que je vous avois proposée, scavoir $2aaxx \propto ayy - y^4$; où j'admire certes votre adresse, et l'excellence de votre regle, quoyque limitée aussi bien que l'autre, comme je crois.

Il m'a falu un assez long calcul pour voir si votre quadrature se rapportoit à la mienne. Votre figure AHC^* est le quart du 8 que forme cette courbe. Et comme en posant (fig. 20.) $AC \propto a$, $AG \propto x$, $GH \propto y$, $\sqrt{aa - yy} \propto z$, vous trouvez l'espace $AHKCA \propto \frac{a^3}{3a\sqrt{2}}$, et l'espace $AHD \propto \frac{a^3 - z^3}{3a\sqrt{2}}$, et

par consequent $DHKEC \propto \frac{z^3}{3a\sqrt{2}}$, il s'ensuit que l'espace $AKCA$ est à $DHKEC$ comme le cube de AC au cube de EG , car cette EG est z ; Et que le mesme espace $AKCA$ est à CEF , comme le cube AC au cube HG . J'avois fermé cette courbe en faisant un demi-cercle BNL (fig. 24.) et dans les droites qui coupent BL perpendiculairement, comme NGE , prenant GE egale aux soutangentes NB , NL , d'où nait aussi GH egale à leur difference.

*) Die erste Figur des vorbergehenden Briefes.

Il est aise de voir par là que l'espace $ACKL$ devient egal à deux espaces paraboliques, et l'espace AKL à leur difference. Je n'ay pas encore eu le temps d'examiner votre autre quadrature de la courbe $2aaxx \propto ayy + y^4$, et je doute si j'en trouveray le moyen. Car je n'ay pas penetré bien avant cette matiere, et je ne crois pas mesme que je doive m'y occuper, puis que j'espere de participer un jour à ce que vous en savez, qui m'avez devancé de si loin que j'aurois trop de peine à vous atteindre.

Mr. Fatio ne peut pas bien soutenir la Proposition de Mr. Newton pag. 105, sur tout quand pour son Ovale indeterminée, je luy marque deux portions egales de parabole qui aient la mesme base (fig. 22.). Il commence aussi à douter si l'impossibilité de votre courbe Exponentiale est telle qu'il l'avoit crue.

Je verray avec plaisir comment s'accorderont vos découvertes et celles de Mr. Bernouilly avec les miens sur la chaine pendante. Mais pour faire connoitre au vray ce qu'un chacun aura trouvé, et pour prevenir toute dispute, il est absolument necessaire qu'on se communique premierement les chiffres, comme j'ay fait il y a longtemps. Je ne doute pas que vous et Mr. Bernouilly n'en conveniez; car si sans cette precaution vous luy envoyiez le premier votre solution, on pourra douter s'il est auteur de la siene. Voicy mon chiffre que j'ay mis d'une maniere moins embarrassée qu'il n'estoit, en marquant seulement les premieres lettres des mots, ce qui se fait avec facilité et s'examine de mesme. J'y ay enformé aussi quelque chose de plus que dans l'autre, m'estant aperçu du depuis d'une chose qui estoit in potestate (pour me servir de votre terme) sans que je l'eusse remarqué.

scapssefæuagcqsiea.

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| 1. pñidqep. | 4. suactapaqiaedepev, is |
| 2. ræcvcep. | ticcaa, qiaa; eehcœiaccaa; |
| 3. reiv. | hipapddtciihp. |
| 4. cæsceræca. | 2. uticc, da, eaa, isadcl. |
| 5. cellceccd. | 3. aiqaarciiu. |
| 6. mæcøpc. | 4. sccæcraæeccrem p. |
| pclppqcah | idrcivepaqivct. |
| xyyy $\propto a^4 - ayy$ | 5. ureaediteaagsircivaccccd. |
| xyyy $\propto 4a^4 - x^4$ | 6. scapcœreledecæcesrcciv. |

Vous pouvez, si vous le trouvez bon, communiquer cet Enigme à Mr. Bernouilly, en luy demandant le sien. Je m'étonne du silence de Mr. D. T. sur ce Probleme, apres y avoir esté invité plus particulièrement que tous les autres, mais il luy reste encore du temps. Pour ce qui est de vos demandes, je me souviens qu'en examinant dans l'Academie des Sciences la cause du flux et reflux selon Mr. des Cartes, les Astronomes n'en estoient pas contents et trouvoient des phenomenes contraires.

La declinaison de l'Eguille aimantée, et encore plus sa variation, me paroissent irreduisibles à quelque regle certaine. La variation, ou bien le changement de declinaison marque assez clairement qu'au dedans de la Terre il doit arriver quelque changement.

J'ay une demonstration de l'isochronisme des vibrations du ressort, estant supposé qu'il cede dans la mesme proportion de la force qui le presse, comme l'experience l'enseigne constamment.

La demonstration des Parahes sera dans ma Dioptrique, à laquelle je vay travailler cet esté, sans m'en laisser détourner par d'autres speculations, pourveu que j'aye de la sante.

Il y avoit un article dans ma lettre precedente touchant le calcul de quelques cas du mouvement avec resistance du milieu, au quel article vous n'avez rien répondu: ce que pourtant je vous pardonne facilement, ne vous ayant que trop fatigué par mes problemes des lignes courbes. Vous me direz aussi quel jour comment vous trouvez mes explications de la Refraction et du Cristal d'Islande, de quoy jusqu'icy je n'ay pas appris la moindre chose. Je suis etc.

XXVI.

Hugens an Leibniz.

A la Haye 21 Avril 1694.

N'ayant pas eu jusqu'icy de réponse à ma lettre du 26. du mois passé, que je vous adressay par la voie de Mr. Meyer, j'escris celle cy pour scavoir si elle vous a esté rendue, ou si peutestre cette entremise aura moins bien reussi que la voie directe de la poste dont je me suis servi auparavant. J'espere

du moins que ce n'est pas vostre indisposition qui est cause de ce retardement, car j'en serois incomparablement plus fâché que de la perte de ma lettre. J'y repondis à tous les articles de la vostre du $\frac{20}{30}$ Fevrier. Je vous remontray la necessité du chiffre pour pouvoir connoitre, ce qu'un chacun auroit trouvé au sujet du Probleme de Mr. Bernoulli, et j'adjoutay mon chiffre second, contenant quelque chose de plus que le premier; auquel second je m'apperçus, incontinent apres, que j'avois laissé glisser deux fautes, l'une au nomb. 5, qui finit par rcivacecd, où au lieu des lettres rciv, il ne faut que a. L'autre à l'article premier, qui n'est pas nommé, où j'avois oublié d'ajouter à la fin ces lettres daife cp. Ce n'estoit icy qu'une omission, et l'autre un abus d'avoir pris une lettre pour une autre dans le calcul Algebraique. Et je corrigeay l'un et l'autre dans un pareil chiffre que j'envoïay le jour d'après à un autre de mes amis. J'y ay encore adjouté depuis à la fin ce que contiennent ces lettres vddcgaaiecp, et si je voulois resver d'avantage à cette question, j'y ferois peut estre encore de nouvelles decouvertes, ne pouvant pas m'assurer qu'il n'y ait plus rien à trouver.

Mr. Fatio est encore icy, et m'a communiqué sa methode au Probleme des Tangentes renversé, à laquelle il adjoute de jour en jour quelque chose à l'occasion des difficultez et des doutes que je luy propose. Cette speculation a une grande étendue et nous fournira encore pour longtemps matiere d'exercice. Il faudra voir s'il y aura moyen de demesler cette partie où il y a des racines composées à la soutangente donnée, où vous m'avez fait voir que vous estes bien avancé, et qui me paroît la plus considerable. Mais le quantité d'autres points qu'il y a à resoudre, nous a empesché jusqu'icy d'entreprendre cette recherche.

Je ne scay, si vous aurez vu la Theorie de la Pesanteur de Mr. Varignon, qui ne me satisfait point du tout. Item les Quaestiones Alnetanae de Mr. Huet, Evesque d'Avranches, où il y a beaucoup d'erudition, et non pas tout à fait autant de solidité de raisonnement. Il traite de statuendis limitibus Rationis et Fidei, matiere, comme vous scavez, tres difficile. Je vous supplie de faire réponse à celle cy et de me croire inviolablement etc.



P. S. Je n'ay remarqué que depuis fort peu le Paralogisme de Mr. de Tschirnhaus, là où il propose, dans les Acta de l'an 1682 sa fausse construction de la courbe par reflexion du miroir concave. Il paroît clairement qu'en ce temps là il ne connoissoit pas encore cette ligne, ni la maniere generale, dont il s'y vante, pour determiner ces lignes dans d'autres figures, et il est fort vraisemblable qu'il n'a appris la veritable construction que par ce que j'en ay donné dans mon Traité de la Lumiere.

XXVII.

Leibniz an Hugen.

A Hannover ce $\frac{10}{20}$ d'Avril 1691.

Je suis bien aise que ma solution de vos Problemes vous a satisfait. Vous doutés de ce que j'avois dit, qu'il y a plusieurs lignes qui puissent donner la soutangente $yy\sqrt{aa-xx} : ax$, et meme cela vous paroist impossible. En voicy pourtant une, dont l'equation est $xx = 2yy - \frac{1}{4aa}y^4 - 3aa$. Et tant que yy sera moindre que $4aa$, la valeur de la soutangente sera affirmative et donnera $yy\sqrt{aa-xx} : ax$, mais lorsqu' yy deviendra plus grande que $4aa$, alors $yy\sqrt{aa-xx} : ax$ sera une grandeur negative ou moindre que rien, et doit estre prise en sens contraire. Pour ce qui est de $aaxx = a^4 - y^4$, que je vous avois envoyé, je voy que dans mes brouillons il y a $aaxx = a^4 - \frac{y^4}{4}$ (c'est à dire $4aaxx = 4a^4 - y^4$); à quoy je n'avois pas pris garde en vous écrivant. Il est vray qu'alors $yy\sqrt{aa-xx} : ax$ devient une grandeur negative, mais j'ay deja marqué que cela n'empeche point qu'elle ne satisfasse. Pourtant, si vous n'en voulés point, la precedente suffit, outre la premiere, marquée dans la lettre passée.

Vostre construction de la ligne qui donne 8 me plaist fort à cause de sa simplicité. Considerés s'il vous piaist, Monsieur, si contre vostre instance des deux portions egales de parabole sur une meme base, Monsieur Newton, pour soutenir l'impossi-

bilité de la quadrature des ovales, ne pourroit repondre qu'une telle ovale seroit fausse et non pas composée d'une même ligne recourante, comme il semble que son raisonnement demande, puisqu'une parabole continuée ne tombe pas dans l'autre. Mais vostre ligne qui fait 8 est veritablement recourante, et son raisonnement y est applicable, quoyqu'elle n'ait pas justement la forme d'une ovale, et selon luy, elle ne devoit pas estre generalement quadrable. Il seroit bon de considerer son raisonnement en luy même pour voir où gist le manquement. Quant au cercle et à l'ellipse, l'impossibilité de leur quadrature generale est assez demonstrée, mais je n'ay pas encore vu, qu'on aye donné aucune demonstration pour prouver que le cercle entier, ou quelque portion determinée n'est pas quadrable.

Je n'avois pas fait attention à l'endroit de vostre precedente, où vous aviés parlé des calculs sur la resistance du milieu. Mais quand j'y aurois pris garde, je n'estois pas en estat d'entrer assés là dedans, estant extremement distrait et occupé à des matieres qui en sont trop éloignées et pour lesquelles je suis extremement pressé. Et le plus grand mal est que je commence à avoir les yeux incommodés.

C'est la même raison qui m'a fait tant tarder à mettre au net ce que j'ay sur la ligne de la chaine. Mr. Bernoulli a déjà envoyé sa solution à Mrs. de Leipzig, qui en ont averti le public, quoyqu'ils n'ayent pas encor mis sa solution dans leur Actes. Ils m'en ont averti aussi, et je leur ay écrit que vous en aviés aussi la solution, et que je scaurois de vous si vous la voudriés envoyer pour estre publiée dans leur Actes avec les autres. Comme je n'écris pas immédiatement à Mr. Bernoulli et que d'ailleurs il est à couvert de tout soubçon, ayant deja envoyé sa solution, je ne croy pas qu'il soit necessaire de luy envoyer un chiffre. Et comme le terme est expiré en effect, parceque j'avois promis seulement d'attendre jusqu'à la fin de l'année précédente, Mrs. de Leipzig m'ont sommé d'envoyer ce que j'ay sur ce probleme pour ne pas trop retarder l'edition de ce que Mr. Bernoulli leur a envoyé. C'est donc ce que je dois faire bien-tost; et il depend de vous, Monsieur, comment vous en voudrés user. En cas que vous voulussiez l'envoyer à Mrs. de Leipzig, il n'y a pas lieu de douter qu'ils en usent fidelement, comme je croy qu'ils ont fait à l'égard de celle de Mr. Bernoulli,



dont je n'ay rien veu, et j'aurois esté fâché de la voir, pour les raisons que vous avés marquées.

Je croy qu'il sera bien difficile de trouver la regle de la declinaison de l'aimant, mais je ne voy pas pourquoy vous jugés qu'il n'y en a point, si ce n'est qu'on y trouve des sauts, c'est à dire qu'il y ait une grande difference de declinaison entre des lieux ou des temps, dont la difference n'est pas grande. Je souhaite d'apprendre si les observations ont fait voir cela.

On avoit publié en Angleterre un petit livre sur le ressort, qui est je crois de Mr. Hook, mais il me semble que j'y trouvay quelque difficulté. Je vous supplie de me dire quelles sont les experiences que vous dites d'avoir esté faites sur cette matiere. Je m'etonne de ne vous avoir pas dit que j'ay admiré vostre explication de la refraction, puisque je l'ay écrit à d'autres. Mr. Meier, Theologien de Breme, est fort scavant et fort honnete, et qui fait gloire d'avoir receu des faveurs de feu Mr. vostre pere. Je crois que Mr. vostre frere fait tousjours la charge de secretaire d'Etat auprès du Roy de la grande Bretagne, comme auprès du prince d'Orange. Ainsi il doit estre bien occupé. C'est pourquoy je ne seay si ce seroit une demande civile de vous supplier de voir si par sa faveur on pourroit disposer quelque scavant Anglais versé dans les manuscrits et chartres et ayant accès aux Archives, de nous fournir quelques diplomes ou particularités non vulgaires concernant Henry Duc de Saxe (de la maison de Bronsvic) genre de Henry II, Roy d'Angleterre, et touchant les enfans de ce Duc, parmi lesquels estoit Otton Duc de York et Comte du Poitou, depuis Empereur IV^e de ce nom. En tout cas j'espere que par vostre intercession il aura la honte de me pardonner cette liberté et d'agreer mes respects à vostre exemple. Je suis etc.

XXVIII.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 5 Maj. 1691.

J'ay reconnu qu'il est vray ce que vous me mandez de vos courbes qui satisfont a la mesme construction de soutangente,

et je tombe d'accord que la chose est possible. Je devois bien avoir remarqué qu'il y a du moins trois courbes qui satisfont a une soutangente sans racine, scavoir une sans quantité connue, une autre avec une telle quantité affirmative et la troisieme avec une negative. Mais comme vous vous estes servi du mot de plusieurs, il semble que ce nombre de tois courbes ne vous borne point, du moins dans les soutangentes avec racine. Mr. Fatio au reste, voiant combien le probleme renversé des Tangentes est important dans ce cas où il y entre des racines composées dans la soutangente donnée, et y aiant, comme je crois trouvé plus de difficulté qu'il n'avoit pensé, veut bien que l'echange se fasse de vostre methode en cela, contre la seiné, dont il a resolu mes problemes des soutangentes et plusieurs autres, ainsi que vous l'aviez souhaité, de sorte, Monsieur, qu'il ne tiendra qu'a vous que le traité s'execute, duquel je seray garand, et si tost que j'auray receu l'exposition de vostre methode, je vous feray avoir celle de Mr. Fatio, qui en verité est tres belle. Je vous prie d'estre clair en ce que vous nous donerez, et de ne pas supposer que nous entendions vostre calculus differentialis.

Je vous prie d'envoyer la lettre cy jointe à Messieurs les autheurs des Acta de Leipsich. Elle contient le resultat de mes meditations sur la Chaine, et je vous l'envoie fermée expres, croiant que vous ne voudriez pas voir mes decouvertes devant que d'avoir envoieé les vostres, ainsi que vous l'avez tesuoigné a l'égard de celles de Mr. Bernouilly, que si vous les avez desia envoiées, vous verrez les mienes dans peu avec toutes les autres. Je ne crois pas, en considerant ce que vous m'avez mandé cy devant, que j'aye rien trouvé touchant ce probleme que vous n'avez de mesme.

Je ne vois pas qu'on puisse accorder sa proposition pag. 405 à Mr. Newton, parceque ne considerant aucunement la nature de ce qu'il appelle Ovale, mais seulement que c'est une ligne fermée tout au tour, il n'exclud pas mesme le quarré ou le triangle.

J'ay vu autrefois le traité de Hooke touchant le ressort, et j'y ay remarqué quelque paralogisme, que je pourrois trouver parmi mes papiers. L'experience principale qu'on a faite est que lors que les forces, dont un Ressort est comprimé, sont accrues d'accessions egales, aussi les espaces de son etendue di-

minuent également. Ce que l'on voit bien précisément observé quand les compressions sont legeres, et ne violentent pas le ressort jusqu'au bout. Mais dans le ressort de l'air la proportion reussit toujours parfaitement, dont il y a des experiences dans les livres de Mr. Boyle.

Pour ce qui est de la declinaison de l'aiguille aimantée, ce qui me persuade plus qu'autre chose qu'on n'y sçaurait trouver de regle, c'est que je sçay qu'il y en a eu qui s'en sont enquis par beaucoup d'experiences, esperant de parvenir par ce moien au secret des Longitudes, mais sans succes.

J'ay escrit a mon frere en Angleterre touchant la recherche des Archives que vous demandez, quoyque je doute s'il trouvera des gens qui s'en veulent donner la peine parmi cette nation assez paresseuse.

Je suis extremement fashé de vostre incommodité aux yeux, qui fait que je vous demande avec scrupule la response a cellecy, et cependant je seray fort aise d'apprendre si vous demeurez d'accord du trocq que je vous ay proposé. Je suis de tout mon coeur etc.

XXIX.

Leibniz an Hagens.

A Hannover ce $\frac{12}{22}$ de May 1691.

Il y a quatre semaines que je suis hors d'Hanover, ayant esté à Hildesheim, Wolfenbutel, puis à Zel, d'où je suis retourné à Wolfenbutel, et y ay trouvé vostre lettre, qu'on m'avoit envoyée suivant l'ordre que j'avois donné. De Zel j'ay envoyé vostre incluse à Mrs. de Leipzig avec ma solution, et il sera curieux de comparer nos solutions et celle de Mr. Bernoulli. Je n'ay pas encor repondu à vostre precedente, parceque celle que j'avois écrite avant que de la recevoir, et à laquelle repond vostre dernière, y avoit satisfait en partie.

Quand j'auray respiré un peu des distractions du voyage dont les recherches dans les archives et bibliothèques m'ont imposé la nécessité, j'envoyeray ma methode en échange de celle de Mr. Fatio.

Ce que j'ay vu de la cause de la pesanteur proposée par Mr. Varignon, ne me satisfait pas non plus. C'est comme s'il disoit, qu'une riviere avec la meme rapidité a plus de force quand elle est plus longue, au lieu qu'à mon avis il ne s'agit que de l'endroit où le fluide opere.

Tout ce que donne Mr. Huet est plein d'erudition; mais la matiere de concordia Rationis et Fidei est bien delicate, et il est difficile de satisfaire en meme temps à la verité et à l'opinion, encor plus que de satisfaire ensemble à la foy et à la raison. J'avois esperé que quelque habile Cartesien repondroit à la censure de Mr. l'Evêque d'Avranches, mais ceux que j'ay vu rampent bien bas à mon avis et ne disent que des choses vulgaires. Peterman à Leipzig, Sulling à Breme et Schotanus chez vous. Il me semble que les Cartesiens ont fort déchû et qu'ils n'ont pas trop d'habiles gens.

Ce que vous avés remarqué, Monsieur, de la construction de la courbe faite par reflexion du miroir concave, donnée depuis peu par Mr. Tschirnhaus paroist fort vraisemblable. Car il a coutume d'aller un peu viste, ainsi il se peut qu'il n'ait pas connu au commencement la veritable construction. Dans les Actes de l'an 1682 il nous propose une methode generale d'oster les termes moyens des équations. Elle l'a trompé parcequ'elle reussit dans le 3^e degré; s'il en avoit voulu faire l'essay dans le cinquieme, qui n'est pas encore donné, il auroit trouvé la difficulté. Je suis avec zele etc.

XXX.

Leibniz an Hagens.

A Hannover ce $\frac{14}{24}$ de Juillet 1691.

Il y a plusieurs semaines, que je vous ay écrit de Wolfenbutel, que j'y avois receu votre lettre avec la solution de la ligne catenaire enfermée dans une lettre pour Mrs. de Leipzig, et que je n'avois pas manqué de la leur faire tenir. Depuis j'ay attendu à vous écrire de nouveau jusqu'à ce que j'ay receu le tout imprimé dans leur mois de Juin, ou vous trouverés, Monsieur, vostre solution avec celle de Mr. Bernoulli et la mienne.

J'ay pris plaisir de voir qu'on s'est rencontré. Cela nous assure de ne nous estre pas mépris au moins dans le fonds; il est vray que je n'ay pas eu le loisir de faire une comparaison exacte; neantmoins ayant vu, que plusieurs conclusions s'accordoient, j'en juge autant des autres, ou s'il y a quelque faute (quoyque je n'en aye point remarquée) il ne sera pas difficile de la redresser. J'ay aussi cherché quelques uns de vos cas particuliers par mon calcul, et il m'est venu la meme chose. Ainsi je m' imagine qu'il y a de l'accord. J'espere que Mr. Bernoulli fera une plus exacte comparaison; et comme il employe ma methode, je prends part à ce qu'il a fait Luy et moy nous avons reduit le probleme à la quadrature de l'Hyperbole, nous avons donné tous deux non seulement les tangentes et l'extension de la courbe, mais aussi le centre de gravité de la courbe, et moy j'y ay adjouté le centre de gravité de l'espace. Nous avons donné tous trois les tangentes et l'etendue de la courbe. Mr. Bernoulli s'est rencontré avec vous, Monsieur, à penser à la courbe dont l'evolution sert à descrire la ligne catenaire, et il a remarqué la dessus de fort jolies choses. De sorte qu'il me semble qu'il a tres bien fait. Cependant il estoit bien éloigné, il y a deux ou trois ans, dese pro mettre quelque chose de cette nature, avant qu'il s'est façonné à mon calcul, comme il avoue luy même.

Avec tout cela ses constructions sont fort differentes des miennes. Car il se contente de supposer la quadrature de l'Hyperbole ou l'extension de la courbe parabolique, et moy j'ay reduit le tout aux logarithmes, tant parcequ'ainsi tout vient d'une maniere tres simple et tres naturelle (tellement que la courbe catenaire semble estre faite pour donner les logarithmes) que parcequ'ainsi je puis trouver par la Geometrie ordinaire une infinité de points veritables, ne supposant qu'une seule proportion constante une fois pour toutes, qu'on ne sçauroit donner jusqu'icy geometriquement que par l'etendue d'une courbe, ou quelque chose de semblable, au lieu qu'autrement on est obligé à chaque point de la courbe qu'on demande de recourir aux voyes extraordinaires. Ne sçachant point, Monsieur, si vous avés déjà receu le mois de Juin de Leipzig, je mettray icy l'abregé de mon discours en peu de mots. (fig. 23.) FCA(C)G la catenaire, et Z ξ A(ξ) (Z) la logarithme. On prend AO et ZW en raison S et K, constante et perpetuelle, une fois pour

toutes les lignes catenaires et pour tous leur points. Faisant $OW = O(W) = AO$, et puis entre AO et WZ, item entre AO et (W) (Z) (supposant (W) (Z), AO et WZ en progression geometrique continue) on met pour ordoonnées comme N ξ ou (N) (ξ) autant de moyennes proportionnelles qu'on veut pour descrire la courbe logarithmique Z A (ξ) (Z). Or, posant ON et O(N) egales, NC ou OB ou OR est moyenne arithmetique entre N ξ et (N) (ξ) (dont la moyenne geometrique est AO parametre de la catenaire). Ainsi la courbe catenaire se construit fort bien par les logarithmes, et si elle se suppose construite par le moyen d'une chaînette, elle sert à donner les logarithmes sans calcul, ex dato numero, ou bien numeros ex dato logarithmo. Voicy le reste des propriétés. Je suppose $OR = OB$ et que G, P, Q sont les centres de gravité de CA(C), AC, AONCA. $OR - AR = N\xi$. $OR + AR = (N) (\xi)$. Triangula OAR et CBT sunt similia (ou bien EAT, $AR = AC$; $\psi \omega = CA(C) = bis AC$. Rectang. RAO = Spat. AONCA; $O\xi : OA :: BC : AR$, $O\xi + OB = bis OG = quater O\beta$; et $AE = GP = \beta Q$.

Je n'ay pas expliqué quelle doit estre la proportion de K à S ou de WZ à OA; mais vous jugerés aisement, Monsieur, qu'AO doit estre egale à la soustangentiale (comme vous l'ap. pelés) de la logarithmique, et que par consequent, posant $OW = AO$, la raison de AO à WZ est toujours la même et déterminée. Ainsi toutes les logarithmiques aussi bien que toutes les catenaires sont semblables ou d'une mesme espece.

J'ay donné encor quelque chose dans le mois precedente, ou j'ay redressé quelques fautes de mon vieux essay de resistantia medii; j'ay aussi rendu justice à votre series pour l'Hyperbole qu'on a eu tort de dire la même avec celle que j'avois donnée autres fois. Je me suis aussi servi de l'occasion pour expliquer la ligne loxodromique, ou des rumbes par les logarithmes, ce que j'avois trouvé il y a plusieurs années. Mais la catenaire m'en avoit fait ressouvenir. Aussi scait-on (ce me semble) que la chose se reduit à la somme des secantes appliquées à l'arc dont vous avés remarqué, Monsieur, dans votre solution que la catenaire depend aussi. Mr. Bernoulli y a joint aussi dans ce dernier mois la consideration de la Loxodromique. Mais il ne s'estoit pas apperçu, que la Loxodromique se reduit à la quadrature de l'Hyperbole, ou aux logarithmes ou à la catenaire.