reillement vostre chifre, et que nous puissions en suite abbreger entre nous le terme d'un an que vous avez accordé aux Geo metres, afin que j'aye d'autant plustost la satisfaction de voir ce que vostre Analyse aura produit de singulier.

$\frac{ri}{a} \propto c \,.\, \frac{ci}{a} \propto e \,.\, \frac{1}{2} rc + \frac{2}{3} ec$*) $\propto S \,.\, \odot \sqrt{2rv} \propto s \,.\, c \,.\, 45\, r \propto c$ $40000 \,.\, 8809 \,.\, 4134 \,.\, xxyy \propto a^4 - aayy \,.\, xxyy \propto aaxx - aayy$ d.h.c.q.c.p.q.i.p.c.t.i.i.p.e.r.e.i.i.i.a°.

Vous aurez vu, à ce que je crois depuis vostre derniere, mon Traité de la Lumiere et celuy de la Pesanteur, soit que l'exemplaire, qu'ensemble avec ma lettre j'avois recommandé à Mr. van der Heck, se soit trouvé ou qu'on vous en ait fait avoir d'ailleurs. Vous me ferez plaisir de m'en dire vostre sentiment, apres que vous l'aurez examiné à loisir. Je vois qu'on n'en dit rien dans les Acta de Leipsich, de quoy Mr. D. T. pourroit bien estre cause, qui depuis mon livre imprimé a fait inserer dans ce Journal quelque chose touchant la ligne de reflexion du miroir concave, qui se trouve de mesme chez moy, et que j'avois proposé dans l'Academie a Paris il y a plus de 12 ans. Il me souvient qu'en ce temps là je montray a Mr. D. T. quelques figures de ces lignes de reflexion et refraction, et je crois que de la vient la ressemblance de nos inventions, mais que cela soit dit entre nous s'il vous plait. Il est peut estre desia fasché contre moy, quoyque j'aye plus grande raison de l'estre contre luy, pour n'en avoir pas usé civilement en mon endroit, lors que je luy eus envoié quelques remarques sur sa Medicina Mentis et Corporis. Cela n'empesche pas que je n'estime son esprit et son sçavoir, et s'il peut montrer qu'il a veritablement trouvé ce qu'il a avancé touchant l'invention des quadratures, ou de leur impossibilité, je diray qu'il a fait une des belles decouvertes qu'on puisse faire dans la geometrie. Honorez moi d'un mot de response et croiez que je suis entierement etc.

---

*) Leibniz hat bemerkt: il faut écrire $\frac{1}{6}$ec au lieu de $\frac{2}{3}$ec suivant la lettre du 19 Nov. de cette année.

XVI.

Leibniz an Hugens.

A Hannover ce $\frac{3}{13}$ d'Octobre 1690.*)

Pendant que je vous prepare une lettre assés ample, tant pour m'acquitter de mon devoir, et pour vous remercier de l'honneur que vous m'avés fait en m'envoyant vostre excellent ouvrage, que pour profiter de vos instructions sur plusieurs points, que vous avés touchés; voicy une troisieme lettre qui m'arrive aujourdhui et qui me fait prendre la plume d'abord pour satisfaire par avance à une partie de ce que je dois, et pour vous dire, qu'il y a environ deux semaines, que le pacquet adressé par M. van der Heck s'est trouvé et m'a esté rendu enfin. Ceux qui l'avoient receu en mon absence, ne s'en estant pas souvenus à mon retour, que lorsque je l'ay fait demander.

Je conçois fort aisément, Monsieur, que vous avés une methode equivalente à celle de mon calcul des differences. Car ce que j'apelle dx ou dy, vous le pouvés designer par quelque autre lettre, ainsi rien ne vous empeche d'exprimer les choses à vostre maniere. Cependant je m'imagine qu'il y a certaines vues qui ne viennent pas aussi aisément que par mon expression, et c'est à peu près comme si, au lieu des racines et puissances, on vouloit toujours substituer des lettres, et au lieu de xx ou x^2 prendre m ou n, après avoir declaré que ce doivent estre les puissances de la grandeur x. Jugés, Mr., combien cela embarrasseroit. Il en est de meme de dx ou de ddx, et les differences ne sont pas moins des affections des grandeurs indeterminées dans leur lieux, que les puissances sont des affections d'une grandeur prise à part. Il me semble donc qu'il est plus naturel de les designer ensorte qu'elles fassent connoistre immediatement la grandeur dont elles sont les affections. Et cela paroist surtout convenable, quand il y a plusieurs lettres et plusieurs degres de differences à combiner, comme il m'est arrivé quelquefois, car il y a alors à observer une certaine loy d'homogenes toute particuliere, et la seule vue decouvre ce

---

*) Das Concept dieses Briefes ist bezeichnet mit: Nov. 1690.

qu'on ne deméleroit pas si aisément par des notes vagues, comme sont des simples lettres. Je voy que Mr. Newton se sert des minuscules pour les differences; mais quand on vient aux differences des differences, et au de là, comme il peut arriver, il faudra encor changer, de sorte qu'il me semble qu'on fait mieux de se servir d'une expression qui s'étend à tout.

Cependant quand on est accoustumé à une methode, on a raison de ne la pas changer aisément, quoyqu'on conseilleroit peut-estre à d'autres, qui n'en ont encor aucune, de se servir de celle qui paroist la plus naturelle. Aussi sans quelque chose d'approchant de mon expression, je ne sçay si on s'aviseroit d'exprimer les courbes trancendentes comme la cycloide ou la quadratrice, par des equations entre x et y abscisse et ordonnée, ou il n'entre aucune inconnue que ces grandeurs ou leur affections. Mais peut estre qu'il y a aussi quelques avantages dans vostre expression qui me sont encore inconnus, et je seray ravi d'en estre instruit, estant plus porté à profiter de vos lumieres, qu' à vouloir contester avec vous.

Je croy d'avoir trouvé les deux lignes que vous m'aviés proposées dans vostre lettre de Voorbourg. Appellant*) AB, x, CB, y et DB devant estre $\frac{2xxy - aax}{3aa - 2xy}$ je trouve $\frac{x^x y}{h} = b\frac{2xy}{\cdot}$. C'est une equation transcendente, ou les inconnues entrent dans l'exposant; h est une grandeur arbitraire, qui fait varier la courbe infinites fois; a est l'unité, et le logarithme de l'unité icy est o; et b est une grandeur dont le logarithme est l'unité. J'ay parlé quelques fois dans les Actes de Leipzig de ces Equations à exposans inconnus, et quand je les puis obtenir, je les prefere à celles qui ne se forment que par le moyen des sommes ou differences. Aussi peuvent elles estre toujours reduites aux Equations differentielles, mais non pas vice versa. Je voudrois bien sçavoir si les lignes que vous m'avés proposées peuvent avoir quelque usage.

En considerant vostre chiffre de la ligne de la chaine pendante, j'y trouve quelque rapport à mon calcul, mais aussi quelque difference, car au lieu de l'equation $xxyy = a^4 - aayy$, je voy dans mon calcul reduit à certains termes $xxyy = a^4 + aayy$ qui sert à arriver à la ligne de question, et quoyque

*) Vergl. die Figur zu Brief XIV.

cette ligne soit du nombre des transcendantes, je ne laisse pas (su posita ejus constructione) d'en pouvoir donner non seulement les touchantes, mais encor la dimension de la courbe, la surface du solide de sa rotation, et la dimension de l'espace compris de la courbe et de l'axe; et le calcul m'offre tout cela comme de soy meme. De la maniere que vous en parlés, Monsieur,, je ne doute point que vous n'ayies tout cela, et quelque chose de plus. Mais comme je me haste à present à vous repondre, je ne m'y arresteray pas presentement.

Je n'ay pas non plus que vous, Monsieur, raison d'estre trop content de Mr. D. T. car il m'est arrivé plus d'une foy qu'il a oublié d'avoir vû aupres de moy des echantillons des choses qu'il a données par apres. Je m'estois avisé de forger des courbes indeterminées, designées par une expression generale, comme $a + bx + cy + dxx + eyy + fxy$ etc. $= o$ et de determiner par ce moyen, s'il est possible de trouver des quadratices ordinaires des courbes données, c'est à dire s'il y a moyen de trouver une quadrature generale de la courbe donnée pour toutes ses portions. J'en avois dit quelque chose à Mr. Tschirnhaus, et je fus surpris de voir plusieurs années apres, qu'il en parloit comme de son invention dans les Actes de Leipzig. Par malheur il poussa sa methode trop loin, il s'imagina de pouvoir demonstrer par là encor les impossibilités des quadratures particulieres. Mais je luy donnay une instance, qui l'obligea à chercher des faux fuyans assés estrangers, et qui n'auroient pas servi, si j'avois voulu le pousser. J'avois aussi certaines notions philosophiques, que j'ay remarquées depuis dans sa Medicina Mentis. Considerant, par exemple, autrefois la demonstration pretendue de Mr. des Cartes sur l'Existance de Dieu, qui a esté inventée premierement par S. Anselme, je voyois que l'argument est effectivement demonstratif, quand on accorde que Dieu est possible. Cela me fit remarquer, qu'on ne sçauroit se fier sur une demonstration lorsqu'on n'est pas asseuré de la possibilité du sujet. Car s'il implique contradiction, ce qu'on demonstrera de luy, pourra estre vray et faux en même temps. Cela me donna occasion de faire cette distinction entre les definitions reelles et nominelles, que les nominelles se contentent de nous donner moyen de discerner ou reconnoistre la chose definie, si elle se rencontroit; mais les reelles doivent faire connoistre de plus qu'elle est possible. Et je jugeay aussi que c'estoit là le moyen de discerner les idées vraies et fausses; ne demeurant pas d'accord du principe de Mr. des Cartes, que nous avons l'idée des choses dont nous parlons, lorsque nous nous entendons. Sur cette reflexion, qu'il faut tacher de connoistre les possibilités des notions, Mr. D. T. a basti une partie de sa Medicina Mentis. Je luy envoyay aussi des remarques, apres la publication de son ouvrage, où je luy fis voir, que sa regle de determiner les tangentes par les foyers ne pouvoit reussir que rarement, dont je luy donnay un exemple. Je remarquay aussi que son denombrement des lignes courbes de chaque degré ne va pas bien. Je me mis à chercher une meilleure regle pour determiner les tangentes par les foyers et filets; et je la trouvay; mais pour la publication j'ay esté prevenu par Mr. Facio Duillier, dont je ne suis pas fort faché; car il me semble, qu'il a bien du merite. Je vous diray pourtant ma maniere: j'avois trouvé et demonstré ce principe general, que tout mobile ayant plusieurs directions à la fois, doit aller dans la ligne de direction du centre de gravité commun d'autant de mobiles qu'il y a de directions, si on s'imaginoit le mobile unique multiplié autant de fois pour faire reussir entierement, et en mesme temps chacune; et que la vistesse du mobile dans cette direction composée doit estre à celle du centre de gravité de la fiction, comme le nombre des directions est à l'unité. Cela posé, je consideray que le stile qui tend les filets, peut estre conçu comme ayant autant de directions (egales en vistesse entre elles) qu'il y a de filets. Car comme il les tire, il en est tiré. Ainsi sa direction composée, qui doit estre dans la perpendiculaire à la courbe, passe par le centre de gravité d'autant de points, qu'il y a de filets, qui sont les intersections d'un cercle (décrit du point de la courbe) avec ces filets. Mais il est temps de finir et de me dire, comme je le puis et dois avec toute la sincerité et toute la reconnoissance etc.

P. S. Ne continuerés vous pas, Monsieur de nous donner quelque chose de temps en temps du grand nombre des belles pensées que vous avés? Ne fait-on pas quelques découvertes en Hollande ou en Angleterre? Mr. Hudde ne songe-t-il plus aux sciences? Mr. Arnaud est-il en Hollande?

XVII.

Leibniz an Hugens.

Vous aurés receu la lettre que je me suis donné l'honneur de vous écrire, et ou je reponds touchant les lignes que vous me proposés à chercher par ma methode, et touchant la ligne de la corde pendante. Je n'ay pas encore mis au net une lettre plus longue, ou je mets mes pensées sur le mouvement des planetes. Cependant vous l'aurés aussi-tost que je pourray m'y attacher assez pour cet effect, et j'en espere alors vostre jugement. Cependant je crois que par ce peu que j'avois dit de la chaine pendante, vous jugerés si je me suis rencontré avec vous sans qu'il faille d'autre chifre, et j'en espere des nouvelles quand vostre commodité le permettra.

Il m'est venu dans l'esprit cependant, que l'equation que j'avois donnée pour vostre courbe, pourroit embarasser, n'estant pas aisé de juger, si elle peut satisfaire à vostre demande, puisqu'on n'a pas encor donné moyen de trouver les tangentes par des equations où l'exposant est inconnu. Et quoyque je n'aye pas encor communiqué à d'autres la methode dont je me sers pour cet effect, je ne laisse pas de vous en envoyer ici un echantillon par lequel vous la connoistrés assés.

Soit donc x l'abcisse et y l'ordonnée de la courbe, et l'equation, comme je vous ay dit, $\frac{x^3y}{h} = b^{2xy}$. Je designeray le logarithme de x par log. x et nous aurons $3\log.x + \log.y - \log.h = 2xy$, supposant que le log. de l'unité soit o, et le $\log.b = 1$. Donc par la quadrature de l'hyperbole nous aurons $3\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dy}{y} - \log.h = 2xy$, dont l'equation differentielle sera $\frac{3dx}{x} + \frac{dy}{y} = 2xdy + 2ydx$, ou bien $3ydx + xdy = 2x^2ydy + 2xy^2dx$, et par consequent dx sera à dy, ou bien DB à y (selon la figure de la lettre precedente) comme $2x^2y - x$ est à $3y - 2xy^2$, c'est à dire DB sera $\frac{2x^2y - xa^2}{3a^2 - 2xy}$ comme vous le demandiés, a estant l'unité.

Je croy, Monsieur, que vous trouverés ce calcul nouveau, et de consequence. L'analyse transcendante serait portée à sa perfection si on la ponvoit tousjours reduire à de telles equations.

Les equations differentielles sont un acheminement pour cet effect. J'ay beaucoup medité sur ce qu'il y a à faire la dessus, et si j'avois le loisir necessaire, ou si quelque jeune mathematicien intelligent estoit proche de moy pour m'assister, je croy qu'on pourroit avancer cette science bien au delà de l'estat ou elle se trouve. Plût à Dieu, qu'en put avancer en physique en proportion.

Que jugés vous, Monsieur, de l'explication du flus et reflus de Mr. Newton? et vous paroist il raisonnable, que les queues des cometes soyent une matiere effective, poussée hors de la comete à des distances immenses et qui ne laisse pas de suivre son mouvement? Je les aurois plustost pris pour un effect optique.

Un Ecossois qui estoit en Hollande, nommé Mr. Stear, dit dans sa Physiologie, d'avoir experimenté que les corps poussés dans le vuide d'air ne vont pas fort loin; j'ay de la peine à le croire.

N'a-t on rien decouvert sur les loix de la variation de l'éguille aimantée? Je m'imagine, Monsieur, que vous aurés medité la dessus aussi bien que sur beaucoup d'autres matieres de Physique, et je vous supplie de me faire quelques fois part de vos lumieres, quand même ce ne seroient que des conjectures, puisque vos conjectures mêmes valent mieux que les demonstrations de bien des gens. C'est à cet effect que je vous ay demandé vos sentimens dans cette lettre, aussi bien que dans la precedente, sur certains points, et j'espere que vous me connoissés assez, pour ne vous pas defier de ma sincérité.

Considerant ce que j'ay dit de la resistance du milieu dans les Actes de Leipzig, Fevrier 1689, vous trouverés, Monsieur, art. 5. n. 3, qu'encor chez moy (les élemens des temps estant pris egaux, condition que vous et Mr. Newton avés dissimulée) les resistences sont comme les quarrés des vistesses. Et par le n. 4. et 6. de cet article, il s'ensuit aussi que la somme $a + \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{5}a^5$ etc. se reduit à la quadrature de l'hyperbole. Dans l'ouvrage que j'avois composé autrefois sur la quadrature Arithmetique, je trouve cette proposition generale: Sector comprehensus arcu sectionis conicae a vertice incipiente et rectis ex centro ad ejus extrema ductis, aequatur rectangulo sub semilatere transverso et recta $t \pm \frac{1}{3}t^3 \pm \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7$ etc. posito t esse portionem tangentis in vertice, inter verticem et tangentem*) alterius extremi interceptam, et rectangulum sub dimidiis lateribus recto et transverso (id est quadratum a semiaxe transverso) esse unitatem. Est autem $\pm$ in hyperbola $+$ in ellipse vel circulo $-$.

Quelqu'un m'a dit qu'on scait en Hollande la carte de l'Asie septentrionale, et si l'Amerique en est divisée par la mer. Si vous en scavés quelque chose, je vous supplie de m'en dire un mot. Voila à quoy vostre bonté et vostre scavoir vous exposent. Mais il est tousjours bon d'estre riche au hazard d'estre importuné par des pauvres. Je suis avec zele etc.

XVIII.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 18 Nov. 1690.

Je repons a deux de vos lettres, par la premiere des quelles j'ay esté bien aise d'apprendre que le pacquet où estoit mon Traité de la Lumiere s'est enfin trouvé, et je vois dans l'autre que vous avez commencé d'en examiner le contenu, à quoy je vous prie de continuer; vous assurant que je recevray avec joye non seulement vostre approbation mais aussi vos objections. Je ne vous avois pas envoié les deux questions des lignes courbes pour vous donner de la peine en cherchant les solutions, mais croiant que vous auriez une methode preste pour trouver les courbes par la proprieté de leur Tangentes, ou pour determiner quand cela se peut ou non. Je commence a croire maintenant que cela n'est point, puisque la courbe dans la quelle (Fig. 13.) AB estant x, et sa perpend. BC, y, on trouve BD

*) Hugens hat bemerkt: Secantem.

distance du concours de la tangente egale à $\frac{2xxy - aax}{3aa - 2xy}$; cette courbe, dis-je, a pour equation qui exprime sa nature, $x^3 + xyy \propto aay$. Car par la regle des Tangentes BD se trouve premierement $\propto \frac{2xyy - aay}{yy + 3xx}$, et si pour xx on substitue sa valeur $\frac{aay}{x} - yy$, ou aura $\frac{2xxy - aax}{3aa - 2xy}$. J'ay fabriqué cette ligne en mettant AE $\propto$ a, EF perpendiculaire à BAE, et en faisant que dans la droite FAC, le quarré de AC soit egal au rectangle de AE, EF; car alors C est un point dans la courbe ACH, qui a son asymptote AG perpendic. à AB. Elle n'est donc point de ces Transcendantes comme votre Equation l'a faite. Et vous examinerez s'il vous plait, comment peut subsister la demonstration que vous en donnez dans vostre derniere. Pour moy j'avoue que la nature de ces lignes supertranscendantes, où les inconnues entrent dans l'Exposant, me paroit si obscure, que je ne serois pas d'avis de les introduire dans la geometrie, a moins que vous n'y remarquiez quelque notable utilité.

De ce que vous me mandez touchant vos speculations sur la ligne de la chaine pendante, qu'on peut appeller Catenaria, sçavoir que certaines choses donées, vous en determinez les Tangentes, la dimension de la courbe, la surface du solide de sa rotation, et la dimension de l'espace compris de la courbe et de l'axe (vous ne dites pas de quelle ligne encore, car ces deux ne comprennent point d'espace) je croirois certainement que nous aurions trouvé les mesmes choses; car tout cela est dans le chifre que je vous ay envoiè; si ce n'estoit cette difference dans nos equations d'une courbe auxiliaire, où j'ay $xxyy \propto a^4 - aayy$, au lieu que vous avez $xxyy \propto a^4 + aayy$. Cela me paroit etrange, et s'il n'y a point d'abus dans vostre calcul, il faut que vous ayez suivi quelqu'autre chemin que moy, par le quel peut estre vous serez allé plus avant. C'est pourquoy je vous prie de m'envoier vostre chifre, ou les grandeurs soient determinées comme dans le mien, afin de voir si nous differons en quelque chose. Je trouve qu'au lieu de ma courbe, que je viens de marquer, je puis substituer cette autre $xxyy \propto 4a^4 - x^4$, mais non pas la vostre. Il y a une faute à mon chifre que vous aurez la bonté de corriger, en mettant $\frac{1}{6}$ec où j'avois escrit $\frac{2}{3}$cc.

Vostre meditation pour les Tangentes par les foiers me paroit bien profonde. Elle suppose pourtant des choses qui ne peuvent estre admises comme evidentes. Et quoy que des tels raisonnements puissent quelque fois servir à inventer, l'on a besoin en suite d'autres moiens pour des demonstrations plus certaines. J'eus quelque part à la Regle de Mr. Fatio par les centres de gravité, comme il l'a avoué luy mesme dans les Journaux. Mais ce fut luy qui me montra le premier la faute de Mr. D. T.

Pour ce qui est de la Cause du Reflus que donne Mr. Newton, je ne m'en contente nullement, ni de toutes ses autres Theories qu'il bastit sur son principe d'attraction, qui me paroit absurde, ainsi que je l'ay desia temoigné dans l'Addition au Discours de la Pesanteur. Et je me suis souvent etonnè, comment il s'est pu donner la peine de faire tant de recherches de calculs difficiles, qui n'ont pour fondement que ce mesme principe. Je m'accommode beaucoup mieux de son Explication des Cometes et de leur queues; Et quoy que la chose ne soit pas sans cette grande difficulté, que vous remarquez fort bien, je ne trouve encore rien de meilleur que ce qu'il en dit, qui vaut mieux incomparablement que ce qu'en a imaginé desCartes. Mr. Stair a tort, s'il dit que les corps poussez dans le vuide ne vont guere loin. Où est ce qu'il en a fait l'experience? et que peut il dire a celle, que moy et d'autres ont faite, de la plume qui tombe dans un tuyau de verre vuide d'air, aussi viste que du plomb.

J'ay quelques meditations sur l'Aimant, mais la raison de la Variation de l'Eguille m'est inconnue; qui ne suit pas des loix certaines que je scache, quoy qu'il y en a qui en ont voulu etablir. Je trouve les effets de l'Ambre encore plus difficiles à expliquer que ceux de l'Aimant, principalement a l'egard de quelques nouveaux phenomenes, que j'ay trouvez, il n'y a guere, par mes experiences. J'ay regardé ce que vous avez donné dans les Acta de Leipzich en Jan. 1689 artic. 5. n. 3, où je ne puis pas dire que je trouve que vous ayez consideré des resistences du milieu qui soient comme les quarrez des vitesses; tout vostre raisonnement dans cette matiere m'estant obscur et inintelligible. Je vois au contraire qu'a la teste de cet artic. 5. vous supposez motum retardatum proportione velocitatis, et non pas duplicata proportione velocitatis. Aussi ces Elemens egaux des temps que vous croiez qu Mr. Newton et moy avons dissimulez, n'ont rien à faire, à mon avis avec les resistances, puis qu'elles dependent uniquement de la vitesse des corps. Vous me pardonnerez aussi, si aux nombres 4 et 6 de ce mesme article je ne trouve rien d'où je puisse entrevoir la quadrature de l'hyperbole par la progression $a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5$ etc. puis qu'il n'y est pas dit un mot ni de progression ni d'hyperbole. Je vous assure que je n'ay pas pris cette progression de là, et que je n'ay point sceu non plus, que vous eussiez la Proposition generale qui comprend le cercle et l'hyperbole, qu'apres l'avoir appris dans vostre derniere lettre. Vous deviez bien l'avoir publiée en suite de vostre premiere quadrature du cercle.

Ce qu'on vous a dit de la Carte de l'Asie Septentr. n'est pas sans fondement; Mr. Witsen Bourgem. d'Amsterdam estant sur le point de donner au public celle qu'il en faite avec bien de la peine et de la depense; à quoy mesme il se trouve pressé par ce qu'on dit qu'une autre personne en promet une pareille. J'ay vu il y a plus d'un an la Carte de Mr. Witsen, mais elle n'avoit rien de certain touchant la continuité de l'Asie et de l'Amerique. Je n'ay plus sujet de me plaindre de Mrs. de Leipsich, ayant vu le raport exact qu'ils ont donné de mon Traité de la Lumiere avec des Eloges plus grands que je ne merite.

Je m'etonne de ne recevoir aucune nouvelle de Mr. Spener, qui avoit promis qu'il m'escriroit. Il est vray qu'il doit estre bien occupé a tenir ce college du quel il m'a laissé un projeet imprimè. Je ne scay s'il vous a debité une Experience avec du Mercure attiré par un siphon, que je ne pus croire, et que j'ay aussi trouvé fausse, et Mr. de Volder de mesme. Pour ce qui est de mes estudes dont vous demandez des nouvelles, je tasche de mettre en estat de paroitre au jour divers traitez, où la forme manque plus que la matiere, mais je ne puis pas travailler avec assiduité sans incommoder ma santé. Je ne crois pas que nous devions rien attendre de Mr. Hudde, quoy que je ne laisse pas de l'en presser quand je le vois. Mr. Arnaut est en ce pais, ou, fort peu loin. C'est une merveille que cet esprit, qui ne se sent pas de la vieillesse. J'attens vostre lettre pour le mouvement des Planetes et suis etc.

XIX.

Leibniz an Hugens.

A Hannover ce $\frac{14}{24}$ de Novembre 1690.

Je reponds incontinent à la vostre du 18 de Novembre, afin que vous ne me soubçonniés pas d'une vanité ridicule, comme si j'avois cru, que ce que j'avois dit dans les Actes de Leipzig vous avoit servi pour vostre series $\frac{1}{1}a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5$ etc. Vous estes trop sincere pour dissimuler l'usage que vous faites des pensées des autres, et vous avés marqué en cela même que celles de Mr. Newton vous avoient servi. J'avois dit seulement qu'il y a de l'accord, et cela est ainsi, car je dis en termes expres art. 5. n. 3, *resistentias esse in ratione composita elementorum temporis et quadratorum velocitatum*. De sorte que les elemens du temps estant pris egaux, comme on les prend ordinairement, les resistences sont en raison doublée des vistesses; et cela s'ensuit de ce que j'avois dit, que les resistences sont en raison composée des vistesses et des elemens de l'espace. Car les elemens de l'espace sont en raison composée des elemens du temps et des velocités. En symboles, soit resistence r, vistesse v, temps t, espace s, leurs elemens, dr, dv, dt, ds, il est tousjours vray que les ds sont comme dt.v, et icy r est comme ds.v, donc r comme dt.v². Et quoyque les resistences dependent de la vistesse, comme vous dites, elles dependent aussi de la quantité des parties du milieu qui resiste. Un globe en mouvement rencontrant un globule en repos, la perte, qu'il fait de sa velocité (les grandeurs des globes et tout le reste demeurant, hormis la velocité) comme il est aisé de demonstrer. Mais plus il rencontre des globules, et plus grande est la perte; or le milieu estant uniforme, le nombre des globules sera comme les parties de l'espace. Mais afin que vous jugiés mieux de cet accord, je dis que j'ay precisement determiné le mesme rapport entre les temps et les velocités. Il est vray qu'il y a eu une trajection ou transposition dans l'edition, qui est de ma faute, mais j'estois en voyage et bien distrait. En voicy la correction: c'est qu'il faut mettre les espaces pour les temps et vice versa dans les propositions 4 et 6 de l'article 5, et apres avoir ainsi corrigé les propositions, il faut donner la demonstration de l'une à l'autre, et vice versa. De sorte voicy comme il falloit dire dans la prop. 4 en y mettant la prop. 6 corrigée: si velocitates acquisitae sunt ut sinus, erunt tempora impensa ut logarithmi sinuum complementi, posito radium seu sinum totum esse ut velocitatem maximam. Et à cela s'ajuste la demonstration qui est mise à la prop. 4, cum enim (j'en repete les paroles) incrementum velocitatis sit differentia inter impressionem et resistentiam, hinc ex praecedenti statim sequitur impressionem (gravitatis) esse ad incrementum velocitatis, ut quadratum velocitatis maximae ad excessum hujus quadrati super quadratum praesentis velocitatis. Ex quo scimus per quadraturas, summam impressionum, quae est proportionalis assumto tempori, esse ut logarithmum, si numerus sit, qualem in propositione hac enuntiavimus. Ce sont mes paroles precises et pour vous faire voir qu'elles s'ajustent à la proposition ainsi corrigée et transposée, aussi bien qu'avec vos découvertes, appellons comme auparavant le temps t, les velocités v, la plus grande velocité a, les resistences r. Or il est manifeste que les elemens des velocités, c'est à dire les differences de deux velocités prochaines se trouvent en adjoutant à la velocité precedente la nouvelle impression faite par la gravité et en soustrayant en mesme temps la resistence ou perte causée par le milieu, donc dv (increment de la velocité precedente pour faire la suivante) est $dt - r$. Or $r = \frac{dt.v^2}{a^2}$, donc $dv = dt - dt\frac{v^2}{a^2}$ ou bien $\frac{dt}{dv} = \frac{a^2}{a^2 - v^2}$, c'est à dire, comme parle ma demonstration: impressio gravitatis (dt) est ad incrementum velocitatis (dv) ut quadratum velocitatis maximae (a^2) ad excessum hujus quadrati super quadratum praesentis velocitatis ($a^2 - v^2$). Car dt expriment aussi bien les elemens des temps, que les impressions de la pesanteur, qui sont proportionelles à ces elemens. Par là vous voyés, Monsieur, que $t = \frac{dv.a^2}{a^2 - v^2}$ ou, parlant à l'ordinaire, que le temps est la somme de $\frac{a^2}{a^2 - v^2}$,

c'est à dire selon vostre expression, que le temps est $\frac{1}{1}v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc. Mais selon la mienne, les temps sont comme les logarithmes de $\sqrt{(a^2 - v^2)}$, c'est à dire les velocités v estant comme les sinus, les temps sont comme les logarithmes sinuum complementi. Et vous trouverés que ces deux expressions s'accordent. J'avois crû mieux faire en m'exprimant ainsi. — En échange la proposition 4 corrigée (les espaces estant mis pour les temps) doit estre mise à la place de la sixieme et alors la proposition sixieme veritable sonnera ainsi: si rationes inter summam et differentiam velocitatis maximae et minoris assumtae sunt ut numeri, spatia quibus assumtae velocitates sunt acquisitae, sunt ut logarithmi. Et alors la demonstration de la proposition 6 repondra à sa proposition. En symboles les espaces estant marqués de s et les elemens de ds comme auparavant, puisque $r = \frac{ds.v}{a}$ et $dt = \frac{a}{v}ds$, substituant ces valeurs dans l'equation susdite $dv = dt - r$, on aura $ds = \frac{dv.av}{a^2 - v^2}$ ou $s = \int \frac{dv.av}{a^2 - v^2}$. Ce qui depend encor de la quadrature de l'Hyperbole ou des Logarithmes. On le pourroit encor exprimer par cette series $s = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{6}v^6$ etc. mais j'ay crû mieux faire en disant, que les velocités estant v, les espaces sont comme les logarithmes des raisons de $a + v$ à $a - v$. Ainsi j'ay ces expressions exponentiales (que vous appellés en riant supertranscendentes) $\sqrt{(1 - v^2)}$ comme b^t et $\frac{1 - vv}{1 + v}$ comme b^s, b estant un certain nombre constant. Je ne voy pas pourquoy vous trouvés d'obscurité dans ces expressions, car il n'y en scauroit plus avoir que dans les logarithmes ordinaires qui ne vous scauroient donner aucune peine. Et puisque vous avés adjouté quelque limitation à vostre arrest contre ces sortes de formules, en les rejettant, à moins que je n'y aye remarqué quelque utilité notable, j'acheveray d'instruire le procès, afin que vous puissiés prononcer une sentence definitive. Je crois donc que dans les lignes qui passent les equations de l'Algebre ordinaire, c'est tout ce qu'on peut souhaiter à leur egard en Analyse, que de les exprimer par ces equations nouvelles. Si on le pouvoit toujours faire, on connoistroit par là parfaitement la nature de la ligne, on pourroit donner ses tangentes, ses quadratures, extensions, centres et même ses intersections avec une courbe donnée, et resoudre par ce moyen des problemes transcendans determinés, enfin, je ne voy rien de possible, qui resteroit à faire apres cela, et le tout ne supposeroit que la construction des logarithmes, outre les constructions de la geometrie ordinaire. On pourra encor determiner les cas quand certains points demandés se peuvent donner par la geometrie commune. Si ces raisons ne valent rien, je me suis bien trompé de mon calcul. Je croyois vous avoir communiqué quelque chose de fort bon et de grand usage. Et quand j'aurois fait une beveue dans le cas, que je vous ay envoyé, cela ne pourroit rien diminuer de la force de la methode. Par les expressions susdites je donne une equation qui exprime la relation entre l'espace et le temps, car il se trouve $\frac{1-b^s}{1+b^s}=\sqrt{(1-b^t)}$. De sorte que les temps estant donnés en nombres, les espaces se trouvent par là et vice versa; en supposant la construction des logarithmes, on aura bien de la peine à arriver icy, par une autre voye, à une equation finie.

Apres avoir examiné la courbe que vous assignés pour la proprieté des Tangentes, que vous m'aviés proposée, Monsieur, je trouve que vostre courbe semble y repondre, mais qu'elle n'y repond pas de la maniere que la formule est conçue; au lieu que les miennes y repondent. Et il s'y passe quelque chose de curieux à l'égard des signes. Je trouve donc que l'équation estant $x^3+xy^2=a^2y$, il provient $DB=\frac{a^2x-2x^2y}{3a^2-2xy}$, au lieu que vous m'aviés proposé $\frac{2x^2y-a^2x}{3a^2-2xy}$. Et afin qu'on ne pense pas que c'est la mesme chose, et qu'il faut parler de la façon posterieure, lorsque le point D doit estre pris ad partes oppositas, et non vers A, je reponds que suivant le calcul il est toujours vray, soit que CD se mene supra ou infra, c'est à dire vers A ou ad partes oppositas, que DB est $\frac{a^2x-2x^2y}{3a^2-2xy}$ dans votre courbe, puisque cette valeur s'obtient par un calcul general, et cela prouve seulement, que lorsque cette valeur est une grandeur negative D doit estre pris, non supra (vers A) mais infra B. Et afin que vous jugiés mieux de la fidelité de cette re-

marque, et que l'analyse ne scauroit mener à vostre courbe par la proprieté que vous aviez proposée, vous trouverés que les courbes, que j'avois envoyées, satisfont rigoureusement et uniquement à la valeur $(2x^2y-a^2x):(3a^2-2xy)$ et ne scauroient satisfaire à la valeur $(a^2x-2x^2y):(3a^2-2xy)$; car jettant les yeux sur ma derniere lettre, vous trouverés cette equation $\frac{3dx}{x}+\frac{dy}{y}=2xdy+2ydx$, dont je puis venir à bout. Car la somme de $2xdy+2ydx$ est $2xy$. Mais si la valeur est $(a^2x-2xy^2):(3a^2-2xy)$, vous trouverés $\frac{3dx}{x}-\frac{dy}{y}=-2xdy+2ydx$. Mais la somme de $-2xdy+2ydx$ ne se trouve pas de même, et il faut avoir recours à d'autres adresses, dont je ne m'estoit pas servi, parceque j'estois devenu fort aisément à ce que vous m'aviés demandé. Apres tout cela, je m'imagine que vostre arrest provisionnel sera addouci, et comme vous devés juger en dernier ressort et sans appel, vous serés d'autant plus porté à faire droit aux parties.

Je suis bien aise, que Mrs. de Leipzig vous ont fait justice dans leurs Actes; mais en rapportant la seconde partie de vostre traité il y a une beveue dont je suis fasché. Celui qui a donné cette relation s'est imaginé que vostre quadrature de l'hyperbole par $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$ etc. estoit la même que celle que j'avois jointe à ma quadrature arithmetique du cercle, par ceque je voyois une certaine analogie assez belle. Cependant la mienne est celle de Mercator, tirée de $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ etc. et par consequent differente de la vostre. Je vous asseure que je n'ay aucune part à ce mesentendu et même je feray en sorte que cela soit remarqué et redressé.

Je voudrois pouvoir satisfaire à tous les autres points de vostre lettre, et sur tout examiner attentivement ce que j'ay fait sur la figure de la chaine, pour faire la comparaison avec vos decouvertes. Mais je suis à present enfoncé dans des vieux papiers et parchemins de nos archives et pressé pour les depecher. Ainsi il me faut prendre du temps pour cela. J'ay demonstration de la regle de la compositon des mouvemens, qui me sert de fondement à la decouverte des tangentes par les foyers. Je suis bien aise de scavoir que c'est vous dont Mr. Fatio entendoit parler, pour joindre cette obligation aux autres qu'on vous a. — Mr. Spener ne m'a pas écrit non plus. J'espere qu'il sera plus exact en experiences qu'en correspondences. J'avois eu autrefois la vue d'essayer, si, par le moyen du vuide, on ne pourroit tirer quelque chose des corps, entre autres en y joignant des filtres, puisque se seroit une espece de presse, plus subtile et plus uniforme que l'ordinaire. Peut-estre que Mr. Spener a pensé à quelque chose de semblable avec son siphon, qui doit attirer, mais si cela estoit, il ne devroit pas avoir manqué. Ainsi je ne scay pas bien ce que c'est.

Puisque vous avés fait des experiences de consequence avec l'ambre, je vous diray que feu Mr. Gericke en avoit fait de fort considerables avec des corps electriques. Il m'en ecrivit un jour et j'en chercheray le détail. Ce qui m'a fait croire que la variation de l'éguille a quelque regle (quoyqu'inconnue encor) c'est que j'ay vu des journaux des grands voyages, ou elle estoit tres souvent observée et ou elle ne changeoit pas par sauts mais peu à peu.

Comme ma lettre sur les planetes et autres points, que je vous destinois il y a longtemps, est quasi faite, je la finiray et la mettray au net, pour la vous envoyer aussitost que je seray un peu plus libre pour pourvoir vaquer à des pensées que je n'ay plus presentes dans l'esprit. Je vous remercie de ce que vous dites de Mrs. Hudde et Witsen. Quoyque je souhaite fort de voir vos pensées publiées, je prefere l'interest de vostre santé à celui de nostre utilité. Peut-estre pourriés vous donner souvent des pensées detachées qui seroient de consequence sans vous tant attacher à la forme des ouvrages reguliers. Je suis avec tout le zele que je dois, etc.

XX.

Leibniz an Hugens.

A Hannover ce 25 de Novembre v. s. 1690.

J'apprehende de vous importuner trop souvent et d'interromper vos pensées que j'estime pretieuses. Mais la raison qui me fait écrire maintenant, est que ma derniere, qui, comme j'espere vous aura esté rendue maintenant, a besoin de suite pour satisfaire entierement aux deux problemes que vous m'aviés

proposés. Je crois qu'il n'ya plus rien à demander à l'égard de l'une des lignes proposées, ou DB devoit estre $\frac{2x^2y - a^2x}{3a^2 - 2xy}$, car en ce cas, prenant les signes au pied de la lettre comme vous les aviés exprimés, les lignes transcendantes, dont je vous ay envoyé l'equation, y satisfont parfaitement. Mais en cas qu'on veuille $DB = \frac{a^2x - 2x^2y}{3a^2 - 2xy}$, la ligne que vous avés donnée vous meme y satisfait. Je viens à l'autre question, scavoir quelle ligne satisfait, DB devant estre $\frac{y^2}{2x} - 2x$, ou bien $2x - \frac{y^2}{2x}$, car j'ay voulu chercher l'un et l'autre, afin qu'il ne manque rien quelque interpretation que vous puissiés donner à vostre demande. Et il est à noter que les courbes encor icy sont toutes differentes selon qu'on change les signes, bienqu'il arrive icy qu'elles deviennent toutes deux ordinaires, au lieu qu'auparavant le changement des signes a fait venir une ordinaire pour une transcendante. Je dis donc que lorsqu'on demande $DB = \frac{y^2}{2x} - 2x$, comme vous l'aviés proposé, l'équation de la courbe est $6a^6x^2y^4 = a^6y^6 + x^{12}$, d'ou la dite valeur de DB viendra incontinent par le calcul ordinaire des tangentes. Mais lorsqu'on demande $DB = 2x - \frac{y^2}{2x}$. la courbe qui satisfait est assez differente de la precedente et son equation est $2r^4x^2 = r^4y^2 + a^2y^4$, qui est moins élevée que l'autre de deux degrés. On peut varier la courbe en changeant la proportion de r à a. Ainsi j'espere maintenant de m'estre justifié un peu et que vous reconnoistrés, Monsieur, que j'ay eu quelque raison de m'attacher aux signes de la maniere que vous les aviés marqués vous meme. Car suivant l'Analyse toute pure (comme il est necessaire de faire quand on veut chercher des solutions par son moyen) les signes doivent estre gardés tels que le calcul les fournit, sauf par apres à celui qui fait la construction de mener la ligne CD comme il faut, selon que la valeur de DB est affirmative ou negative. Ces petits changemens sont quelquefois cause des beveues, surtout en des methodes, ou l'on ne s'exerce pas souvent, comme il m'est arrivé en vous escrivant ma derniere, ou le calcul que je vous ay envoyé touchant la relation entre les espaces et velocités, item entre les temps et les velocités, est bon: mais la consequence que j'en avois tirée n'est pas bonne entierement. Car les temps estant t, espaces s, velocités v, la plus grande velocité a, il est vray, comme j'ay marqué, que les temps sont comme les sommes de $\frac{a^3}{a^2 - v^2}$ et les espaces comme les sommes de $\frac{a^2 v}{a^2 - v^2}$. Mais au lieu d'en tirer cette consequence que les temps sont comme les logarithmes de $\sqrt{(a^2 - v^2)}$ et les espaces comme les logarithmes de la raison de $a + v$ à $a - v$, je devois dire le contraire. Et peut-estre ne seriés vous pas faché, Monsieur, d'en voir la demonstration. Soit (fig. 14.) ECG l'hyperbole, dont le centre A, le vertex C, les asymptotes AB, AH; et BC costé du carré AC soit l'unité ou a, dont le logarithme o. L'on scait que l'espace ou parallelogramme hyperbolique (comme vous l'appellés) BG sera le logarithme de AF, mais $-$ BE sera le logarithme de AD, ou bien BE sera le logarithme de DE ou de $\frac{1}{AD}$. Donc il est clair que BD ou BF estant v, alors BG ou le log. de $1 + v$ sera $\frac{1}{1} v - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{3} v^3$ etc., et BE ou le log. de $\frac{1}{1 - v}$ sera $\frac{1}{1} v + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{4} v^4$ etc. donc BG + BE ou le log. de $\frac{1 + v}{1 - v}$, sera $\frac{2}{1} v + \frac{2}{3} v^3 + \frac{2}{5} v^5$ etc ce qui est le double de la somme de $\frac{a^3}{a^2 - v^2}$; mais BG $-$ BE ou le log. $(1 + v)$ par $(1 - v)$ c'est à dire le log. de $1 - v^2$ sera $-\frac{2}{2} v^2 - \frac{2}{4} v^4 - \frac{2}{6} v^6$ etc. Ou bien le log. de $\frac{1}{\sqrt{(1 - v^2)}}$ sera $\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{4} v^4 + \frac{1}{6} v^6$ etc. Ainsi $\sqrt{(1 - v^2)}$ estant en progression geometrique decroissante, $\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{4} v^4 + \frac{1}{6} v^6$ (c'est à dire la somme de $\frac{a^2 v}{a^2 - v^2}$) seront en progression arithmetique croissante. Cette methode servira en beaucoup d'autres rencontres; donc les velocités estant v, les temps seront les logarithmes de $\frac{1 - v}{1 + v}$, et les espaces seront les logarithmes de $\sqrt{(1 - v^2)}$. Ainsi ce que j'avois dit dans les Actes imprimés n'a pas besoin de la correction que j'avois crû. Et l'equation exponentiale que je vous avois envoyée pour la relation des espaces et temps aura lieu, pourveu qu'on y change s en t et vice versa.

Je m'imagine que vous jugerés maintenant que les equations exponentiales n'ont rien d'obscur. Elles n'introduisent point de nouvelles lignes comme il semble que vous l'aviés pris, mais elles expriment mieux celles dont a besoin, et les expriment d'une maniere au delà de laquelle il n'y a rien à pretendre. Aussi quand j'ay dit que l'équation d'une certaine ligne est

$\frac{x^3 y}{h} = b^{2xy}$, vous voyés bien maintenant que c'est comme si j'avois dit la nature de la ligne estre telle que $x^3 y$ estant en progression geometrique, $2xy$ ou meme xy sont en progression arithmetique. On peut proposer de semblables problemes en nombres, par exemple soit $x^x + x = 30$, alors on satisfera faisant $x = 3$. Et ces problemes ne se peuvent construire geometriquement que par les lignes dont je me sers, lorsque les racines ne sont pas rationelles. Et je croirois avoir perfectionné l'Analyse, si je pouvois toujours reduire les quantités transcendantes à un tel calcul. Et je seray bien aise de scavoir ce qui vous en semblera maintenant que le proces est assés instruit pour que vous puissiés donner arrest.

Vous reconnoitrés peut-estre aussi que je n'ay pas eu tant de tort de dire que ma maniere de calculer sert pour les problemes des tangentes données. Quand j'avois vu que vos deux lignes proposées estoient *in potestate*, je m'estois contente d'en calculer l'une qui venoit plus aisement, et j'attendois pour l'autre d'apprendre si elles pouvoient servir. Mais je voy que vous les aviés proposées *tentandi gratia*. Néantmoins j'ay esté bien aise de voir si je vous pourrois donner satisfaction depuis que j'ay vu que la premiere n'avoit pas trouvé une audience favorable. Cependant je ne me vante pas d'avoir poussé cette methode à sa perfection. Il s'agit sans doute de ce qu'il y a de plus profond et de plus difficile dans la Geometrie et dans l'Analyse. Mais je puis dire que je n'en suis pas fort éloigné et j'espererois d'en venir à bout si j'avois le loisir qu'il faut. Ce qu'il y a de beau entre autres, dans cette methode, est qu'elle mene directement à des transcendantes, comme elle doit aussi, puisque ordinairement on y doit venir dans ces questions, à peu pres comme ordinairement les racines des equations sont sourdes. Mais lorsque les courbes ordinaires peuvent satisfaire, les transcendantes memes le monstrent. J'ay une autre maniere particuliere qui reussit toutes les fois que la courbe est ordinaire, mais je ne m'en sers pas volontiers à cause de sa prolixité; il faudrait faire des tables pour la rendre aisée. J'estime bien plus la generale mais je ne l'ay pas encore portée à sa perfection. Mais vous serés las de ces bagatelles. — Il est temps que je finisse en me disant comme je puis faire avec beaucoup de zele et de sincerité etc.

P. S. Je vous envoyeray tout ce que j'ay promis lorsque je seray un peu plus en estat de mediter à des choses que je n'ay plus presentes dans l'esprit.

XXI.

Hugens an Leibniz.

A la Haye ce 19. Decembre 1690.

A cause d'un voiage de quelques jours que j'ay esté obligé de faire à Amsterdam, pour avoir soin de l'embarquement de mes horloges à Pendule dans les vaisseaux qui vont aux Indes, je n'ay pu repondre plustost à deux lettres que j'ay eu l'honneur de recevoir de vostre part.

J'estime beaucoup vostre solution pour ma seconde ligne courbe, et si vous avez une methode qui reussisse tousjours, quand ce ne seroit que lorsque la courbe est ordinaire, vous augmenterez la Geometrie d'une invention fort considerable en la donnant au public. Mais j'ay tousjours de la peine à croire que la regle universelle se puisse trouver, sur tout quand les termes algebraiques de la construction donnée pour la Tangente sont beaucoup deguisez par la substitution des valeurs. Et il faudroit encore une epreuve où il eust plus de difficulté que dans ma dite courbe. Mais je ne veux pas vous en donner la peine, si vous ne le souhaitez vous mesme. Il me semble que dans cette courbe, par un calcul retrograde on peut connoistre l'Equation d'où les termes de la construction ont esté produits: et surtout, cela n'est pas difficile dans ce cas ou vous avez trouvé l'Equation de 6 dimensions, scavoir où la soutangente estoit donnée $\frac{yy}{2x} - 2x$. Je me sers icy de vostre correction pour les signes $+$ et $-$, et j'avoue que dans toutes les deux courbes je les devois avoir mis comme vous dites, parce qu'en suivant simplement l'operation de la Regle, les termes vienent de cette façon. Mais comme j'ay accoutumé de m'en servir avec des signes contraires au numerateur, en avertissant de quel costé la Tangente doit estre prise, cela a esté cause de ce renversement. J'ay autrefois escrit la demonstration et l'origine de cette Regle des Tangentes, et Mrs. de l'Academie de Paris ont fait imprimer ce petit traité depuis peu, avec quelques autres, tant de moy que

de quelques uns d'entre eux. Il y a là aussi de moy une nouvelle demonstration, et tout a fait differente de celle d'Archimede, pour l'Equilibre de la Balance, laquelle je seray bien aise que vous voyez; celle d'Archimede m'ayant tousjours paru defectueuse, ainsi qu'à bien d'autres. Mais on ne peut rien avoir de ce qu'on imprime en France.

Pour ce qui est de vostre Courbe de 4 dimensions, dont l'Equation est $2r^4xx \propto r^4yy + aay^4$, ou qui est la mesme chose, $2aaxx \propto aayy + y^4$, elle satisfait parfaitement, je l'avoue, à ma soutangente donnée $-\frac{yy}{2x} + 2x$. Et pourtant ce n'est pas là l'Equation de ma courbe dont j'avois tiré ces termes; ce qui peut estre vous surprendra. Mon Equation estoit $2aaxx \propto aayy - y^4$, qui donne tout une autre courbe que la vostre. Il sembleroit d'abord qu'il y aurait une mesme construction de tangente pour deux courbes differentes; mais à y prendre bien garde, on voit que les constructions different aussi, parce que dans la vostre, la quantité $-yy + 4xx$ est tousjours affirmative, et que dans la mienne elle est tousjours negative. Vostre ligne a la figure d'une croix (fig. 15.) et la mienne celle de deux demi-ovales posées à certaine distance (fig. 16.). Celle-cy se peut quadrer, ce que je ne sçay s'il convient aussi à la vostre. Je voudrois bien essaier dans toutes deux ce que pourroit faire Mr. D. T. par la methode qu'il pretend d'avoir.

Touchant la courbe Exponentiale que vous avez trouvée pour ma premiere soutangente donnée $\frac{2xxy - aax}{3aa - 2xy}$, je vous prie de me dire, si vous pouvez representer la forme de cette courbe en y marquant des points, ou par quelque maniere que ce soit, ou si elle vous sert seulement à pouvoir decider qu'il n'y a point de courbe ordinaire qui y convienne, ni de transcendante non Exponentiale, comme sont les cycloides, quadratices, etc.

J'ay dit que vostre equation $2r^4xx \propto r^4yy + aay^4$ ne differe pas de $2aaxx \propto aayy + y^4$. Et cela paroit par ce qu'elle se reduit à $\frac{2r^4xx}{aa} = \frac{r^4yy}{aa} + y^4$ et que $\frac{r^4}{aa}$ est une quantité donnée. Par consequent cette courbe ne se peut point varier, comme vous avez creu, en changeant la proportion de a à r; non plus que la parabole se varie en prenant le parametre plus ou moins grand. Par la mesme raison vostre Equation de 6 dimensions $6a^6xxy^4 \propto a^6y^6 + r^{12}$ revient à $6xxy^4 \propto y^6 + a^6$, et la courbe est de mesme invariable.

Il y a plus d'un an que j'ay receu deux lettres de Mr. Fatio, dans lesquelles il propose une Regle renversée des Tangentes, mais comme elle paroissoit d'une longue discussion, et que d'ailleurs je ne pouvois croire qu'elle fust parfaite, j'ay esté jusqu'icy sans l'examiner: ce que j'ay maintenant envie de faire, mais je n'ay pas ces lettres dans cette ville.

Je ne sçay pas pourquoy vous voulez que j'aye prononcé trop severement contre les courbes Exponentiales, puis que je n'ay pretendu les rejetter qu'en cas qu'elles ne soient de nulle utilité. Car si elles servent à exprimer d'autres courbes dont on a besoin, et si par leur moyen vous trouvez les espaces des chutes par un medium resistens, lorsque les temps sont donnez, et que de plus elles vous aident à trouver les courbes par la proprieté des tangentes, je les estimeray grandement, car je n'aime rien tant que les nouveautez qui tendent à l'accroissement des sciences. Il s'agit de scavoir s'il est bien seur qu'on en puisse tirer tous ces avantages; ce que voulant me prouver, vous supposez que j'entens parfaitement tout vostre calcul des Equations Exponentiales et Logarithmiques, ce qui n'est point; et ainsi vous instruisez le proces (pour demeurer dans les termes de vostre similitude) devant un juge qui n'entend pas bien vostre langue. Je n'ose pas aussi vous demander plus d'eclaircissement, voiant bien que cela seroit trop long pour des lettres. Je souhaiterois de vous pouvoir entretenir coram sur ces matieres, et je ne desespere pas qu'à cette occasion que les Princes d'Allemagne vont venir icy à l'arrivée du Roy d'Angleterre Mr. le Duc de Hanovre ne s'y rende aussi, et vous, Monsieur, à la suite de Son Altesse, dont certainement j'aurois bien de la joye.

Les Acta de Leipsich ne nous vienent icy que de deux en deux mois; ainsi je n'ay pas encore vu ceux de Novembre, ou vous dites qu'on a fait une bevue à l'egard de ma progression pour la quadrature de l'Hyperbole. Cependant comme cela me fait tort, vous m'obligerez si vous pouvez faire en sorte qu'il soit redressé. Vostre excuse au reste est merveilleuse, quand vous m'assurez de n'avoir aucune part a ce mesentendu. J'adjoute icy à propos de cette quadrature, que je ne vois pas que vostre progression $v + \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{5} v^5$ etc. responde à la miene, parce que vous ne vous servez pas, comme moy, de la

tangente du secteur hyperbolique pour en faire v lorsque le demi-axe est 1. L'application que vous en faites aux chutes des corps est encore bien obscure, et vous devez l'avouer vous mesme, apres les corrections reiterées que vous avez apportées à ce raisonnement. Et quant aux resistences de l'air, s'il est vray que vous les ayez considerées comme estant en proportion double des vitesses, il faut au moins changer l'inscription de l'article 5 de vostre derniere, en mettant proportione quadratorum velocitatis.

J'ay le livre de Mr. Guericke où il raporte ses Experiences de l'Ambre. S'il vous en a communiqué encore d'autres, je seray bien aise d'y participer. Plusieurs des mienes ont esté faites en vue de certaines hypotheses que je me suis imaginées pour expliquer cette admirable attraction et ses divers phenomenes, mais je ne suis pas encor venu à bout de cette speculation. Je vous demande pardon de vous avoir derobé du temps par une si longue lettre et vous prie de croire que je suis etc.

XXII.

Leibniz an Hugens.

Hannover ce 27 de Janvier v. s. 1691.

Je n'ay pas osé vous importuner trop souvent en écrivant lettre sur lettre; de plus j'étois fort accablé depuis ma derniere ayant esté deux fois à Wolfenbuttel et une fois à Hildesheim pour chercher des memoires historiques et ayant repondu à plus de 40 lettres dont la pluspart avoient esté differées et demandoient quelque attention. Il est vray qu'il y avoit un mot dans la vostre, qui m'avoit tenté de repondre sur le champ, mais j'ay cru qu'il ne falloit pas écrire pour cela seul. En effect j'ay esté le plus surpris du monde de vous voir capable d'un soubçon aussi mal fondé que l'estoit celui qui paroissoit, lorsque vous disiés trouver mon excuse merveilleuse. Mais il n'y avoit point d'excuse, Monsieur, et je ne pouvois pas en faire d'une chose ou je vous asseure encor de n'avoir eu aucune part. Les Msr. de Leipzig ont mis dans leur journal qu'ils ont dit de la 2. partie de vostre ouvrage, ou est l'endroit dont vous vous plaignés, avant que je l'eusse sçu ou vu, ou y contribué en aucune façon. J'avois même dessein de leur envoyer quelque petit discours pour estre mis à la suite de ce qu'ils en diroient et pour comparer ce que vous et Mr. Newton avés dit de la resistance du milieu, avec ce que j'en avois publié, et je suis asseuré que vous n'auriés pas eu sujet de vous en plaindre. Mais j'appris qu'ils avoient déja depeché vostre ouvrage, et je differay mon dessein à une autre occasion pour voir premierement ce qu'ils en avoient dit. Si je ne vous honnorois pas autant que je fais, je negligerois une accusation qui n'a pas le moindre fondement. Car je ne voy pas ce qui vous a pu mouvoir à ne pas adjouter foy à une chose de fait dont je vous avois asseuré. Mais vous estimant autant que je dois, je bien aise de vous desabuser. J'ay une lettre de Mr. Mencken, Professeur de Leipzig, qui a soin des Actes, datée du 28. d'Octobre vieux stile, lorsque leur mois de Novembre étoit déja imprimé (car il paroist le premier jour de mois) ou il me mande (sur ce que je lui avois écrit à l'occasion de vôtre lettre, ou vous vous étonniés de leur silence) que j'en trouverois une relation convenable dans les mois d'Octobre et de Novembre (von des Herrn Hugenii Buch werden sie in den October und November Actorum gebührende relation finden). Il adjoute que cette fois leur Novembre avoit esté achevé trois semaines plustost qu'a l'ordinaire. Si vous en desirés voir l'original, je le vous envoyeray. Peut-estre que la vue de ce mois vous aura déja detrompé, et vous aurés remarqué aisément que ce qu'on y dit du consentement de vostre series avec celle que j'avois donnée il y a plusieurs années, estant manifestement erronnée, ne pouvoit estre attendu de moy. Je feray temoigner le contraire comme je vous l'ay promis. Mais tout ce proces importe bien peu. Car vous ou moy n'avions qu'a voir l'equation de la courbe pour connoistre la series, et vous ne l'aviés reduit à l'Hyperbole que sur la demonstration de Mr. Newton, au lieu que je l'avois fait immediatement et avois preferé l'expression par les logarithmes. Mais je n'ay garde de m'imaginer que ce que j'en avois dit vous y ait servi. Je n'avois pas pensé pour cette fois à la tangente, ny eu recours à mon theoreme general marqué dans une de mes precedentes, n'ayant eu en vue qu'une expression degagée de toute consideration de la figure, que les logarithmes me fournissoient

la plus analytique que je pouvois souhaiter. C'est pourquoy je ne comprends pas comment vous dites de ne pas voir que ma progression $v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc. réponde à la vôtre, parceque, dites vous, je ne me sers pas de la tangente et du secteur hyperbolique. Mais qu'ay je besoin de penser à cette tangente et à ce secteur? N'est ce pas assés que je donne moyen d'exprimer la quadrature de la figure dont l'ordonnée est $\frac{1}{1-v^2}$, c'est à dire d'exprimer la grandeur de la series $v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc. $= t$ par les logarithmes, disant que v estant les velocités, les temps t sont comme les logarithmes de $\frac{v+1}{v-1}$ et vous trouverés tousjours que $\int \frac{dv}{1-v^2}$ ou $v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc. repond au logarithme de $\frac{v+1}{v-1}$; c'est à dire les $\frac{v+1}{v-1}$ estant pris en progression geometrique, les grandeurs égales à $v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc. seront en progression arithmetique. C'est ce que j'avois dit art. 5. n. 4. Si rationes inter ($v+1$ et $v-1$) summam et differentiam velocitatis maximae (unitatis) et minoris assumtae (v) sunt ut numeri, tempora fore ut logarithmos. Or je suppose qu'on sçache que la construction des logarithmes revient à la quadrature de l'Hyperbole. Nous avions tous deux besoin pour un même dessein (c'est à dire pour donner la relation entre les temps et les velocités) de la quadrature de la figure dont l'ordonnée est $\frac{1}{1-v^2}$, l'abscisse estant v. Vous l'avés donnée par la series, j'ay cru mieux faire en la donnant par les logarithmes. Je croyois m'estre expliqué d'une maniere dans la derniere lettre plus à n'avoir plus laissé d'obscurité. Et pour ce qui est de la correction réiterée, ce n'est que la retraction de la correction, c'est à dire la restitution du premier estat. Car en refaisant le calcul pour vous satisfaire, un abus dans les signes me fit croire que j'avois fait un echange des temps pour les espaces dans les prop. 4. et 6. de l'art. 5; mais depuis j'ay vû qu'il n'y avoit rien à changer comme je vous ay déja mandé. Et lorsque vous dites, que s'il est vray que j'aye consideré les resistances de l'air comme en proportion doublée des velocités, il faudroit au moins changer l'inscription de l'article 5, en met-