Leibnizens
gesammelte Werke

aus den Handschriften

der Königlichen Bibliothek zu Hannover

herausgegeben

von

Georg Heinrich Pertz.

Dritte Folge

Mathematik.

Zweiter Band.

BERLIN.
Verlag von A. Asher & Comp.
1850.

Leibnizens
mathematische Schriften

herausgegeben

von

C. I. Gerhardt.

Erste Abtheilung.

Band II.

Briefwechsel zwischen Leibniz, Hugens van Zulichem und dem Marquis de l'Hospital.

BERLIN.
Verlag von A. Asher & Comp.
1850.

BRIEFWECHSEL

zwischen

Leibniz

und

Hugens van Zulichem.

Leibniz wurde im Jahre 1672 von dem Kurfürsten von Mainz, in dessen Diensten er damals stand, mit einer politischen Mission an Ludwig XIV nach Paris gesandt. Er verweilte hier, einen kurzen Ausflug nach London abgerechnet, ununterbrochen bis zu seiner Rückkehr ins Vaterland gegen das Ende des Jahres 1676. Dieser Aufenthalt Leibnizens in der französischen Hauptstadt war für seine wissenschaftliche Entwickelung von der höchsten Wichtigkeit. Paris war damals der Brennpunkt des wissenschaftlichen Lebens; die höchsten Notabilitäten in Kunst und Wissenschaft hatte Ludwig XIV an seinen Hof gezogen. Leibniz, in der schönsten Periode jugendlicher Kraft, entbrannte von Begier, durch Bekanntschaft mit jenen ausgezeichneten Männern Kenntnisse auf allen Gebieten des Wissens zu sammeln. Schon seit dem Beginn seiner Studien hatte er eine besondere Hinneigung zu den mathematischen Disciplinen empfunden; sie waren seine Lieblingswissenschaft geworden. In Paris erwachte die alte Liebe zur Mathematik im Feuer jugendlicher Begeisterung von neuem. Leibniz machte hier nämlich die persönliche Bekanntschaft von Hugens*) der auf Colbert's Veranlassung, seit dem Jahre 1666 als höchste mathematische Autorität der damaligen Zeit zur Verherrlichung der neu gegründeten Königlichen

---

*) Diese Schreibart des Namens ist deshalb gewählt worden, weil alle an Leibniz gerichteten Briefe übereinstimmend unterzeichnet sind mit: Hugens de Zulichem.

Akademie der Wissenschaften in Paris seinen Wohnsitz genommen hatte. Zum ersten Male trat so Leibniz einem Meister seiner Lieblingswissenschaft gegenüber, und es konnte nicht fehlen, dass er sehr bald begriff, wie wenig er noch mit dem Umfange der mathematischen Disciplinen bekannt war. Auf der andern Seite konnte Hugens nicht entgehen, dass er ein ausgezeichnetes Talent vor sich hatte, dessen Ausbildung und geschickte Leitung die herrlichsten Früchte versprach.*) Leibniz wurde fortan der Schüler von Hugens, und er hat zu jeder Zeit offen bekannt, wie viel er Hugens verdanke.

Diesem Verhältniss zwischen Leibniz und Hugens verdanken wir den vorliegenden Briefwechsel, der bis zum Tode des letztern (8 Juli 1695) dauerte. Leibniz legte stets die neuen Ergebnisse seiner mathematischen Studien Hugens zur Begutachtung vor, und obwohl dieser öfters scharf critisirte, so bat Leibniz immer wieder von neuem um des Meisters Meinung, da er wohl wusste, dass für Hugens's Urtheil die strenge Wahrheit als die alleinige Richtschnur galt. Die ersten Briefe sind während ihres beiderseitigen Aufenthalts zu Paris geschrieben. Leibniz berichtet Hugens, der ihm, wie es scheint, das Studium der Algebra Bombelli's empfohlen hatte, über die Erfolge seiner algebraischen Untersuchungen; er legt ein besonderes Gewicht darauf, dass er zuerst die allgemeine Anwendbarkeit der Cardanischen Formel für die Auflösung der cubischen Gleichungen nachweisen könne. Ferner ergiebt sich aus dem zweiten Antwortschreiben von Hugens, dass Leibniz ihm die Reihe, die den Inhalt des Kreises zu dem umschriebenen Quadrate ausdrückt, und die nach ihm die Leibnizische genannt wird, mitgetheilt hat.

Durch den Abgang Leibnizens von Paris (gegen das Ende des Jahres 1676) wurde, wie es scheint, die Correspondenz auf einige Jahre unterbrochen. Seine Rückkehr nach Deutschland, seine neue Stellung am Hofe zu Hannover verhinderten Leibniz sich in nächster Zeit mit mathematischen Untersuchungen zu befassen. Erst im Jahre 1679 knüpft er den Briefwechsel wieder an. Sogleich im ersten Briefe (vom 8 September 1679) schreibt Leibniz, dass er in der Vervollkommnung der Analysis grosse Fortschritte gemacht. Er besitzt allgemeine Methoden, durch welche

*) Die näheren Umstände seines Zusammentreffens mit Hugens erzählt Leibniz selbst in der Abhandlung: Historia et origo calculi differentialis.

er Probleme, die bisher dem Calcul widerstanden, bewältigt, z. B. Quadraturen, das umgekehrte Tangentenproblem (d. h. aus der gegebenen Gleichung für die Tangente die Curve zu finden), irrationale Wurzeln der Gleichungen, Arithmetik des Diophantus (d. i. Methode der unbestimmten Coefficienten). Er fordert Hugens auf, ihm ein Problem aus der umgekehrten Tangentenmethode vorzulegen, um seine Erfindung daran zu prüfen. Besonders aber wünscht Leibniz Hugens's Ansicht über die diesem Schreiben beiliegende Skizze der Characteristica geometrica oder, wie er auch sonst noch diese von ihm geschaffene Disciplin nennt, Analysis situs zu vernehmen, in der er durch eine besondere Charakteristik nicht allein die Quantität, sondern zugleich auch die Lage der Grössen in Betracht zieht.*) Aus den Schreiben VI. und 11. Jan. 1680 erhellt jedoch, dass Hugens sich nicht von der Wichtigkeit dieser neuen Disciplin überzeugen konnte, und er spricht sich in ziemlich schroffer Weise dahin aus, dass sie seiner Ansicht nach gar nichts Neues sei. Da aber Leibniz wiederholt behauptet, von der Wahrheit und Wichtigkeit derselben überzeugt zu sein, so fordert er zuletzt Leibniz auf, seine neue Lehre, so wie auch die Tangentenmethode an Beispielen zu erläutern, um seine Ungläubigkeit zu überwinden. Leibniz lässt jedoch in der Folge die Diskussion über die Analysis situs ganz fallen, wie er gewöhnlich that, wenn er sah, dass man ihn nicht begriff (er sagte dann mit Socrates: non habet hujus rei ansas) und giebt nur ein Beispiel zur Erläuterung seiner Tangentenmethode.

Die nun folgende lange Unterbrechung der Correspondenz erklärt sich entweder dadurch, dass Hugens's Antworten ausblieben, da er 1681 Paris verliess, um seine durch angestrengte Ar-

*) Sogleich bei dem ersten Bekanntwerden des Briefwechsels zwischen Hugens und Leibniz hat diese Skizze mit Recht die Aufmerksamkeit der Mathematiker der Gegenwart auf sich gelenkt; aus ihr konnte man zuerst eine Vorstellung über das Wesen dieser neuen Disciplin sich bilden, denn weder von Leibniz noch späterhin war irgend etwas über die Analysis situs publicirt worden. Man wusste bis dahin nur aus seinen hier und da zerstreuten gelegentlichen Aeusserungen, welche Wichtigkeit Leibniz auf diese Disciplin legte, und dass er in der schönsten Periode seiner Kraft vielfach daran gearbeitet. Unter seinen hinterlassenen Manuscripten finden sich noch mehrere umfassende Abhandlungen über diesen Gegenstand, die demnächst in einer neuen Ausgabe der mathematischen Schriften Leibnizens einen Platz finden werden.

beiten sehr angegriffene Gesundheit im Vaterlande wiederherzustellen, oder dass Leibniz den Briefwechsel abbrach, da er sah, dass er durch Hugens das nicht erreichen konnte, wonach er sich so sehr sehnte, einen Platz in der Pariser Akademie zu erhalten.

Veranlassung zur Wiederanknüpfung der Correspondenz gab das Problem der isochronischen Curve. Leibniz hatte nämlich in Folge seines Streites mit den Cartesianern über das Maass der lebendigen Kräfte (um, wie er sagte, diesen Streit für die Geometrie nützlich zu machen) seinen Gegnern im Jahre 1687 die Aufgabe gestellt: diejenige Curve zu finden, welche ein schwerer Körper beschreiben muss, der sich in gleichen Zeiten gleichviel der Horizontalebene nähert (Trouver une ligne de descente dans laquelle le corps pesant descende uniformément, et approche également de l'horison en temps égaux; oder wie Leibniz anderswo dieses Problem ausdrückt: Invenire lineam isochronam, in qua grave descendat uniformiter sive aequalibus temporibus aequaliter accedat ad horizontem, atque adeo sine acceleratione et aequali semper velocitate deorsum feratur). Hugens war auf dies Problem aufmerksam geworden und hatte im Octoberheft der Nouvelles de la republique des lettres desselbigen Jahres die Eigenschaften und die Construction der verlangten Curve bekannt gemacht. Indessen hatte Leibniz seine grosse Reise nach Italien angetreten und er erhielt jenes Heft erst zu Anfang des Jahres 1688. Sichtlich überrascht beeilt er sich, um Hugens seine Freude auszudrücken, dass er das Problem seiner Aufmerksamkeit für werth gehalten und dass die gegebene Auflösung mit der seinigen übereinstimme. Hiermit beginnt der bei weitem wichtigste Theil der Correspondenz, die nun bis zum Tode von Hugens ununterbrochen fortdauert.

Wenige Wochen nach seiner Rückkehr aus Italien richtet Leibniz sogleich wieder eine Mittheilung an Hugens und er bringt, wie es scheint, geflissentlich die Differentialrechnung zur Sprache. Hugens, gebildet und gewöhnt an die äusserst scharfe und lichtvolle Ausdrucksweise der Geometer des Alterthums, hatte die Abhandlungen Leibnizens über die neue Analysis in den Actis Eruditorum etwas dunkel gefunden, und da er selbst eine ähnliche Methode zu besitzen meinte, zu studiren unterlassen; er entschliesst sich jedoch nun seine Aufmerksamkeit darauf zu richten, da Leibniz behauptet, dass in seiner neuen Methode die

Methodus tangentium inversa enthalten sei. Indessen will er noch die Leibnizische Auflösung des Problems der Kettenlinie, das Jacob Bernoulli vorgelegt hatte, abwarten, um daran die Vorzüglichkeit des Leibnizischen Algorithmus zu beurtheilen. Hugens hatte sich nämlich schon seit seinem 15. Jahre mit diesem Problem beschäftigt und war jetzt so glücklich, dasselbe mittelst der bis dahin gebräuchlichen bewährten Methoden zu lösen, ein Umstand, der auf das glänzendste sein eminentes Talent und seine hohe Meisterschaft beweist. Da nun aber Leibniz und die Bernoullis durch den neuen Calcul zu denselben Resultaten gelangten, ja das Problem noch vollständiger lösten, als Hugens es anfangs vermochte, so wird endlich auch Hugens, der Meister der alten Methode, für die neue Analysis gewonnen, und er arbeitet sich hinein. Je consideray ensuite, schreibt er 1 Sept. 1691, pourquoy plusieurs de vos decouvertes m'estoient echappées et je jugeay que ce devoit estre un effet de vostre nouvelle façon de calculer, qui vos offre, à ce qu'il semble, des veritez, que vous n'avez pas mesme cherchées; und 17 Sept. 1693: J'admire de plus en plus la beauté de la geometrie dans ces nouveaux progres qu'on y fait tous les jours, où vous avez si grande part, Monsieur, quand ce ne seroit que par vostre merveilleux calcul. M'y voila maintenant mediocrement versé, si non que je n'entens encore rien aux ddx, et je voudrois bien scavoir si vous avez rencontré des problemes importants ou il faille les emploier, afin que cela me donne envie de les etudier. Auf Hugens's Mahnung entschloss sich auch Leibniz zur Abfassung eines Compendiums der neuen Analysis; da jedoch bald darauf, im Jahre 1696, das erste Lehrbuch der Differentialrechnung, die Analyse des infiniment petits des Marquis de l'Hospital erschien, so blieb die Sache unausgeführt. — So wurde das Problem der Kettenlinie der Prüfstein für die Zuverlässigkeit der Differentialrechnung Leibnizens. Deshalb macht auch dieses Problem Epoche in der Geschichte der Mathematik; die frühere Methode wurde verlassen, die neue Analysis hatte sich unwiderleglich bewährt.

Ausserdem verbreitet sich die Correspondenz zwischen Leibniz und Hugens über alle wichtigen Fragen der Physik und Mechanik, die zu Ende des 17. Jahrhunderts die ausgezeichnetsten Männer fast ausschliesslich beschäftigten. Newton hatte in seinem unsterblichen Werke: Principia philosophiae naturalis mathematica (1686) die Mechanik des Himmels durch das Gravitationsgesetz, die glücklichste aller Hypothesen, begründet; eine Besprechung desselben konnte zwischen den beiden grossen Männern nicht ausbleiben, und es ist interessant zu sehen, wie ein so eminenter Geist, als Hugens war, sich mit den auf das Attractionsgesetz basirten Theorien Newton's nicht einverstanden erklärt. Pour ce qui est de la cause du reflus, schreibt er am 18 Nov. 1690 an Leibniz, que donne Newton, je ne m'en contente nullement, ni de toutes ses autres theories qu'il batit sur son principe d'attraction qui me paroist absurde. Leibniz hatte in verschiedenen Abhandlungen, die in den Actis Eruditorum erschienen waren, ein anderes Prinzip zur Erklärung der Erscheinungen der Himmelskörper zu Grunde gelegt; ihm war der starre Mechanismus der Newtonschen Lehre zuwider, und er nahm ausser der Schwerkraft noch eine „matiere liquide deferante commune" an, die eine Bewegung, ähnlich dem „tourbillon de Descartes" haben sollte. La correspondance, schreibt Leibniz $\frac{1}{11}$ April 1692 an Hugens, qu'il y a des planetes ou satellites d'un même systeme est favorable à une matiere liquide deferante commune; und in einem andern Briefe desselben Jahres: Et la raison qui fait que je ne me repens pas encor de la matiere deferente, depuis que j'ay appris l'explication de Mr. Newton, est entre autres, que je voy toutes les planetes aller à peu pres d'un même costé et dans une même region, ce qui se remarque encor à l'égard des petites planetes de Jupiter et de Saturne. Au lieu que sans la matiere deferente commune, rien n'empescheroit les planetes d'aller en tous sens; ebenso 10 März 1693: Ainsi je m'imagine que si quelque cause extraordinaire detournoit l'axe de la terre, il reprendroit bientost sa veritable situation, comme fait un aimant, au lieu que, selon l'hypothese de Mr. Newton, la terre vogve dans l'ether comme feroit une isle flottante, que rien ne dirige que sa propre tendance deja prise. Diese Ansichten Leibnizens unterwirft Hugens in dem Schreiben 11 Jul. 1692 einer scharfen Kritik.

Trotz dieser differenten Meinungen spricht jedoch Leibniz an verschiedenen Stellen dieser Correspondenz mit hoher Anerkennung und nichts weniger als eifersüchtig über Newton. So unter andern antwortet er, als ihn Hugens berichtet, dass Fatio eine neue Ausgabe der Principia Newton's beabsichtige, dass die erste von Druckfehlern wimmle und selbst in der Theorie Fehler vorkämen: Le livre de Newton est un de ceux qui meritent le plus d'estre perfectionnés et Mr. Fatio fera bien de s'y appliquer. Je ne m'etonne pas si parmy tant de recherches difficiles, il s'y est glissé quelque faute de doctrine. Ebenso spricht Leibniz seine Theilnahme aus, als er von Hugens erfährt, dass Newton eine Störung seiner Geisteskräfte erlitten haben sollte: c'est à des gens comme vous, Monsieur et luy (Newton) que je souhaitte une longue vie et beaucoup de santé, und erkundigt sich später, ob derselbe noch nicht wiederhergestellt ist. — Diese Stellen verdienen hervorgehoben zu werden, um über Leibnizens Charakter in dem grossen Streite wegen des ersten Erfinders der Differentialrechnung ein gerechtes Urtheil zu fällen.

Es ist noch übrig, in wenigen Worten das Verhältniss zu bezeichnen, in dem die vorliegende Ausgabe der Correspondenz zwischen Leibniz und Hugens zu der Uylenbroek's steht, die in der Sammlung: Christiani Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae. Ex manuscriptis in bibliotheca Lugduno-Batavae servatis edidit P. I. Uylenbroek. Hagae Comitum 1833. II Part. enthalten ist. In dem Convolut, das auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover die Briefe beider Männer enthält, finden sich die eigenhändig geschriebenen Briefe von Hugens vollständig vor; sie sind getreu wiedergegeben, und der aufmerksame Leser wird sich bei Vergleichung beider Ausgaben überzeugen, dass die gegenwärtige mehrere enthält, die in der ersten fehlen, und dass andere Briefe, die in der Sammlung Uylenbroek's nur nach dem Entwurfe von Hugens mitgetheilt sind, hier vollständig erscheinen. Dagegen bot das erwähnte Convolut auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover nur wenige Leibnizische Briefe. Es war deshalb nöthig, diese letztern, mit einigen neu aufgefundenen vermehrt so wieder zu geben, als sie sich in der Uylenbroekschen Sammlung finden. Selbst wenn auch die Entwürfe oder Abschriften der Leibnizischen Briefe auf der Königlichen Bibliothek zu Hannover vorhanden gewesen wären, so war damit keineswegs Berechtigung zu der Annahme gegeben, dass Leibniz sie in dieser Gestalt an Hugens übersandt, denn so wie er bei der Abfassung seiner mathematischen Abhandlungen verfuhr, dass er sie zwei- dreimal entwarf, alsdann abschreiben liess, die Abschrift nochmals verbesserte und wiederum eine Abschrift davon machen liess, die vielleicht nochmals verbessert und mit neuen Zusätzen versehen in die Druckerei gelangte, ebenso verfuhr er mit seinen Briefen. Es hätte mithin in jedem Falle auf die Sammlung Uylenbroek's Rücksicht genommen werden müssen, der die Leibnizischen Originale vor sich hatte.

I.

Leibniz an Hugens.

Je vous envoye le livre de Bombelli, dont je vous ay parlé. Vous y verrez page 292 comment il se sert des racines imaginaires (il appelle par exemple $\sqrt{-121}$, ou $11\sqrt{-1}$, piu di meno 11; et $-\sqrt{-121}$ ou $-11\sqrt{-1}$ mene di meno 11), et comment il trouve par là la racine de l'équation $1^3 \sqcap 15^1$ plus 4, c'est à dire $y^3 \sqcap 15y + 4$. Il dit d'en avoir une demonstration en lignes, qu'il met aussi page 298, mais il y prouve seulement qu'une telle équation est possible, et que sa racine est quelque chose de reel, qui se peut donner en lignes. Mais il ne s'ensuit pas que l'operation par son piu di meno est bonne. Car quoyqu'il dise à la fin de la page 294 que ses racines sont venues de l'equation, ce n'est pas pourtant sans supposition. Il paroist aussi par la page 293 qu'il ne pouvoit pas resoudre par cette methode l'equation $y^3 \sqcap 12y + 9$, dont la racine rationelle est fausse ou negative, sçavoir -3. Il trouve neantmoins en essayant, par une autre methode (tirée aussi de Cardan, que l'equation se peut diviser par $y + 3$, ne scachant pas que par cette mème raison -3 en est la racine fausse: et il trouve par ce moyen la vraye $1\frac{1}{2} + \sqrt{5\frac{1}{4}}$, laquelle estant composée d'un nombre et d'une racine quarrée, ne pouvoit pas estre tirée des formules de Cardan; parceque les racines qu'on a par ces formules, sont tousjours ou irrationelles cubiques ou nombres. D'ou vient qu'il a cru que les formules de Cardan ne servent pas en cette rencontre, et ne sont pas generales.

Ainsi je croy d'avoir demonstré le premier (1) que les formules de Cardan sont absolument bonnes et generales, soit extrahibles, soit non extrahibles, soit vrayes soit fausses ou negatives. (2) Que nous avons par ce moyen la resolution generale de toutes les equations cubiques. (3) J'ai trouvé le premier qu'on peut former des racines composées non extrahibles de tous les degrez pairs, qui contiennent des imaginaires et dont neantmoins la realité peut estre renduë palpable sans extraction; pour faire juger que la realité de telles formules n'est pas bornée par l'extrahibilité: dont l'exemple de la formule
$\sqrt{(1+\sqrt{-3})}+\sqrt{(1-\sqrt{-3})}$, qui vaut 6, est une preuve tres considerable. (4) Je demonstre, ce que personne a demonstré encor, que toute l'equation cubique, qui peut être deprimée, contient une racine rationelle pourveu que l'equation même soit proposée en termes rationaux. D'ou il s'ensuit que celle qui ne peut estre divisée par l'inconnue + ou — un diviseur rationel du dernier terme, est solide. Proposition tres importante, puisqu'elle nous donne un moyen asseuré de scavoir si un probleme est solide en effect, ou s'il l'est seulement en apparence. Mr. Descartes ne parle pas si positivement, car il dit, qu'il faut examiner *toutes les quantités* qui peuvent diviser le dernier, qu'il suppose estre en entier et rationel: et il semble qu'il n'ose pas dire, *tous les nombres*, ou toutes les *quantités rationelles*. De sorte qu'il nous laisse en doute, s'il ne faut pas aussi examiner les diviseurs irrationels: soit qu'il n'avait point de demonstration assez convaincante pour les diviseurs rationels à l'exclusion des irrationels; soit qu'il n'ait negligé de parler plus exactement. De la vient aussi qu'on peut demonstrer en cinquième lieu (5) par la seule analyse, sans aide de Geometrie, que toute l'equation cubique est possible, pourveu qu'elle soit conceue en termes possibles. De plus (6) l'obstacle qui a embarassé principalement la resolution des equations par racines irrationelles estant levé, ceux qui chercheront des formules pour les plus haut degrez, ne seront plus rebutez par la rencontre des irrationelles, au lieu que sans cela ils chercheront envain des expressions differentes de celles qu'ils ont deja trouvées. D'ou vient que des personnes fort habiles en ces matieres ont cru avant cela qu'on ne scauroit trouver une expression generale pour tout un degrez: persuasion, qui les obligeroit à examiner inutilement toutes les formules, et toutes les combinaisons

possibles des irrationelles, pour chercher des expressions particulieres pour certains cas qui semblent n'estre pas compris dans la generale. (7) Lorsqu'on aura trouvé les racines irrationelles des equations, tous les problemes qui peuvent estre reduits à une equation reviendront seulement à deux problemes de Geometrie, sçavoir à la section de l'angle et à celle de la raison. J'entends par la section de la raison, ou si vous voulez, des logarithmes, qui répondent en quelque façon aux arcs: l'extraction des racines. (8) Vous connoistrez mieux tout ceci par l'écrit, que je vous ay fait voir, et vous jugerez par les autres, que vous avez veu de même, de ce que j'appelle *section des puissances*, et de cette table de theoremes, que peut estre continuée à l'infini, et qui a de grands usages, tant pour resoudre quelques equations affectées que pour donner des abregez considerables dans le calcul, lorsqu'il s'agit de purger une equation de quantités irrationelles, et de calculer par les puissances des grandeurs composées. Et comme ces theoremes donnent aussi la resolution de quelques formules des equations affectées de tous les degrez à l'infini, vous trouverez en (9) lieu, que c'est la premiere fois qu'on donne la resolution de quelques equations indeprimables plus que solides, par les irrationelles de leur propre degrez, puisqu'on n'en a pas encor trouvé aucun exemple dans le 5^e degré seulement, bien loin d'avoir donné une table, qui passe par tous les degrez à l'infini, comme j'ay fait.

Enfin, il n'y a personne, qui puisse mieux juger que vous de la qualité de deux inventions, que je n'ay pas encor expliquées, qui sont (10) l'une de la methode de tirer en nombres veritables ou approchans, les racines des binomes, ou il entre des imaginaires: et l'autre du compas des equations, qui donne sans aucun calcul, tout à la fois, toutes les racines d'une equation proposée de quelque degré et de quelque formule d'un degré donné qu'elles puissent estre; soit geometriquement en lignes soit arithmetiquement en nombres approchans, dont on peut incontinent tirer les veritables s'il y en a, sans aucun calcul. Il semble qu'apres cet instrument il n'y a quasi plus rien à desirer pour l'usage qu'Algebre peut ou pourra avoir dans la mechanique et dans la practique. Il est croyable que c'estoit le bût de la Geometrie des anciens (au moins de celle d'Apollonius) et la fin des lieux qu'ils avoient introduits, parcequ'ils avoient reconnus que peu de lignes determinent en un instant, ce que de grands calculs en nombres ne scauroient faire, qu'apres un long travail, capable de rebuter le plus ferme. Ils n'avoient pas poussé la chose fort loin; Mr. Descartes a suivi leurs traces, et a donné une methode de digerer par ordre les courbes et de les accommoder aux problemes. Mais il ne s'y est pas pris de la maniere la plus simple et la plus naturelle pour ce qui est de les accommoder aux equations; d'ou vient que pour ces sursolides par exemple, il aura déja besoin quasi d'autant d'instrumens differens qu'on luy proposera de problemes. J'ay eu le bonheur de rencontrer le chemin que la nature semble avoir fait expres. Les constructions s'y font sans calculs et sans autre preparation que celles de changer les ouvertures des parties d'un même instrument; lequel, à raison de sa grandeur, sert à toutes les equations imaginables.

Vous m'exhortez, Monsieur, de publier ces pensées et quelques autres, que vous avez veues de moy, du temps passé. Si vous témoignez d'estre encor de cette même opinion, j'y travailleray tout de bon, et le sentiment que vous en avez me tiendra lieu d'approbation generale, dont je me flatte apres la vostre.

Au reste je suis etc.

II.

Hugens an Leibniz.

Ce 30 Sept.

J'ay retenu plus longtemps que je ne devois, Monsieur, les escrits que vous m'avez prestez, mais je crois que vous recevrez mes excuses quand je vous diray qu'ayant este fort longtemps hors d'exercice pour ce qui regarde ces sortes d'Equations Algebraiques, il m'a falu du temps pour les estudier de nouveau a fin de pouvoir juger de vos nouvelles inventions. Vous vous estes mis a chercher une chose qui doit estre bien difficile a trouver puisqu'elle ne l'a pas esté encore, qui est de donner des formules de racines pour les Equations du 5e. degré et au delà. Et quoyque vous n'en serez pas encore venu a bout, c'est quelque chose d'avoir trouvé de ces racines dans beaucoup de cas,

et d'avoir decouvert des Theoremes, qui semblent devoir faciliter le chemin aux regles generales.

Pour ce qui est de l'usage des racines de Cardan dans les cas mesme ou elles sont meslees de quantitez imaginaires, il est certain qu'elles servent tousjours dans les problemes d'Arithmetique, et vous avez plus fait que Bombelli en faisant voir que lors mesme que l'on ne peut pas tirer la racine des binomes, leur racines ne laissent pas de signifier des quantitez reelles. Mais a fin que l'on s'en puisse servir utilement il faut que vous nous donniez la methode que vous dites avoir trouvee pour tirer les racines de ces sortes de binomes tant au cas qu'elles sont extrahibles, qu'a ceux ou l'on ne les peut avoir que par approximation. Je vois que Bombelli en a extraict dans ces premiers cas, mais il y a apparence que ce n'a esté qu'en tastonnant, comme dans les autres extractions des racines cubes des binomes reguliers: quoyque il pretende d'avoir aussi quelque regle assurée pag 151, de la quelle je seray bien aise d'entendre vostre avis.

Vous assurez une chose que je voudrois bien voir demontrée, sçavoir qu'il n'est pas possible de trouver des formules de racines sans quantitez imaginaires dans les cas ou la regle de Cardan produit de cette sorte de quantitez. La preuve de ces negatives est difficile. Pour ce qui est de celle de cette autre proposition importante que toute equation cubique qui peut estre deprimée contient une racine rationelle, il sera bon que vous fassiez voir comment elle suit de la realité des racines de Cardan dans tous les cas, car j'avoue que je ne le conçois pas encore clairement.

La remarque que vous faites touchant des racines inextrahibles, et avec des quantitez imaginaires, qui pourtant adjoutees ensemble composent une quantité reelle, est surprenante et tout a fait nouvelle. L'on n'auroit jamais cru que $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}}$ fist $\sqrt{6}$, et il y a quelque chose de caché la dedans qui nous est incomprehensible.

L'instrument que vous promettez pour resoudre toute sorte d'Equations me paroit quelque chose de fort beau et je vous deferois d'en venir a bout si je n'avois veu desia ce que vous scavez faire par la machine d'Arithmetique. Je suis etc.

III.

Hugens an Leibniz.

Ce 6. Novembre.*)

Je vous renvoie, Monsieur, Vostre escrit touchant la Quadrature Arithmetique, que je trouve fort belle et fort heureuse; Et ce n'est pas peu à mon avis d'avoir decouvert, dans un Probleme qui a exercé tant d'esprits, une voye nouvelle qui semble donner quelque esperance de parvenir a sa veritable solution. Car le Cercle, suivant vostre invention estant a son quarré circonscrit comme la suite infinie de fractions $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. à l'unité, il ne paroistra pas impossible de donner la somme de cette progression ni par consequent la quadrature du cercle, apres que vous aurez fait voir que vous avez determiné les sommes de plusieurs autres progressions qui semblent de mesme nature. Mais quand mesme l'impossibilite seroit insurmontable dans celle dont il s'agit, vous ne laisserez pas d'avoir trouvé une proprieté du cercle tresremarquable, ce qui sera celebre a jamais parmi les geometres. Pour ce qui est de la ligne courbe Anomyme qui sert a Vostre demonstration, j'avois envie de la baptizer, en luy donnant quelque nom composé des noms de deux lignes dont je trouvois qu'elle estoit produite, qui sont le cercle et la Cissoïde des anciens. Mais ayant vu du depuis que cette mesme ligne a esté premierement mise en avant par I. Gregorius, je crois qu'il luy faut laisser le droit de la nommer comme il voudra. Il s'en est servi pour demonstrer le rapport qu'il y a entre la mesure de la Cissoïde et celle du cercle, qui est de mon invention, ainsi qu'il paroit par le traité de M. Wallis de Cissoide, et par ce que le mesme autheur en a dit dans son traité du Mouvement, ou la demonstration que j'ay donnée de ce Theoreme est inserée. Laquelleestant supposée, vous pourriez par là abbreger de beau-

*) Im Original fehlt das Jahr, ebenso wie im vorhergehenden Briefe. Uylenbroek datirt diesen Brief vom 7 November 1674.

coup vostre demonstration de la Quadrature Arithmetique. Mais vous ferez en cela comme vous le jugerez à propos. Je vous donne le bon jour et suis tout a vous etc.

IV.

Leibniz an Hugens.

A Hannover ce 8 de Sept. 1679.

Un de mes amis, nommé M. Hansen, qui a eu l'honneur de vous parler, me mande, que vous continués d'avoir de bons sentimens pour moy, de quoy je vous suis fort obligé, et j'en ay voulu prendre l'occasion de vous témoigner combien j'honnore vostre merite extraordinaire, que tout le monde reconnoist avec moy, et qui vous met au premier rang.

J'ay appris de Mr. de Mariotte, que vous nous donnerés bientost la Dioptrique si longtemps souhaittée. J'ay grande envie de la voir un jour, et je voudrois scavoir par avance si vous estes content des raisons de la refraction, que Mr. Descartes propose. J'avoue, que je ne le suis pas entierement, non plus que de l'explication de Mr. Fermat, qui est dans le 3e tome des lettres de Descartes.

J'ay laissé à Paris mon manuscrit de la quadrature arithmetique, à fin de l'y faire imprimer un jour. Mais j'ay fort avancé depuis ces sortes de recherches, et je croy qu'on pourroit venir à bout de la pluspart des choses, qui paroissoient jusqu'icy au dessus du calcul: par exemple, les quadratures, et methodus tangentium inversa, et les racines irrationelles des equations, et l'arithmetique de Diophante. Car j'ay des methodes generales, qui donnent la plupart de ces choses d'une manière aussi determinée, que celle dont l'Algebre ordinaire se sert pour arriver à une equation. Et je ne crains pas de dire, qu'il y a moyen d'avancer l'Algebre au de là de ce que Viete et Mr. des-Cartes nous ont laissé, autant que Viete et des-Cartes ont passé les anciens. Mais comme ces methodes generales menent ordinairement à des grands calculs, lorsque les conditions du probleme ne fournissent pas quelque adresse singuliere, j'ai projetté un moyen pour les abreger. Ce sont certaines Tables qu'on pourroit faire calculer en lettres et qui seroient aussi importantes en Algebre, que les Tables des Sinus et des logarithmes le sont dans le calcul ordinaire. De plus elles ne seroient pas difficiles à faire, car on y trouveroit bientost des progressions. Si ces tables estoient faites, les operations d'Algebre s'y trouveroient pour la pluspart, et si on les joignoit aux methodes que j'ay, il resteroit peu à faire en cette matiere.

Si vous avés quelque beau probleme qui dépande a methodo tangentium inversa, je serois bien aise de voir, si j'en pourrois venir à bout. J'ay demonstrè l'impossibilité du Triangle rectangle en nombres dont l'aire soit un quarré, autrement que Mr. Frenicle; et pour les racines irrationelles des equations, j'ay une voye demonstrative pour y arriver; mais la chose est plus difficile que l'on ne pense. J'en avois communiqué mes essais que vous avés veu à Paris, et les pensées que j'avois alors, à une personne tres ingenieuse,*) qui y a fort travaillé depuis, et croyoit d'en estre venue à bout, mais je ne trouvay pas mon compte dans les lettres qu'elle m'en écrivit: ainsi j'en remets l'execution aux tables.

Il y a encor une espece de calcul qui m'arreste, mais aussi personne ne s'en est servi. Il seroit pourtant utile à certaines choses. En voicy un exemple. Soit $x^z + z^x$ égal à b, et $x^x + z^z$ égal à c. Or b et c estant données, on demande x et z. Prenons un exemple plus aisé. $x^x - x$ est égal à 24, on demande la valeur de x et l'on trouvera que c'est 3, car $3^3 - 3$ est $27 - 3$, c'est à dire 24. Voila donc une equation qui est nullius certi gradus cogniti, et dont le degré même est demandé. On pourroit bien décrire des lignes, dont l'intersection pourroit donner la solution de ces problemes, mais je demande une solution qui me donne la valeur de l'inconnue. Je vous supplie, Monsieur, d'y songer un peu, car vous voyés que ce sont des veritables problemes determinés, et il faut bien qu'il y ait une methode dans la nature pour les resoudre. Mais apres tous les progres que j'ay faits en ces matieres, je ne suis

*) In dem Entwurfe dieses Briefes nennt Leibniz den Namen, es ist Tschirnhauss.

pas encor content de l'Algebre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Geometrie. C'est pourquoy lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encor une autre analyse proprement geometrique ou lineaire, qui nous exprime directement situm, comme l'Algebre exprime magnitudinem. Et je croy d'en avoir le moyen, et qu'on pourroit representer des figures et mesme des machines et mouvemens en caracteres, comme l'Algebre represente les nombres ou grandeurs; et je vous envoye un essay qui me paroit considerable.*) Il n'y a personne qui en puisse mieux juger que vous, Monsieur, et vostre sentiment me tiendra lieu de celuy de beaucoup d'autres.

Je vous envoye aussi un peu de ce feu corporel, qu'on peut à bon droit appeller lumiere perpétuelle (car estant gardée comme il faut, elle dure plusieurs années sans se consumer). C'est une petite piece, mais belle, car on n'en fait pas toujours de semblabes, et ordinairement la matiere vient en petits grains seulement. Elle est enveloppée dans une vessie et celle-cy est mise dans de la cire, à fin que rien n'exhale, et que la piece ne prenne pas feu par le mouvement et la friction comme cela arrive aisément. Un tel morceau peut suffire à quantité d'experiences, car la moindre particelle est capable de rendre les choses rayonnantes; et quand on la manie avec les mains, elles en restent luisantes plusieurs heures, et cependant il n'y a rien de visible dessus qui paroisse au jour. On peut écrire avec cela en lettres luisantes, et quelques heures apres, quand elles paroistront mortes, estant frottées derechef, elles se font voir de nouveau. Je tiens qu'il y a un veritable feu enfermé la dedans; mais pas assez ramassé pour se faire toucher: quand on souffle contre, la lumiere disparoist et revient incontinent aprés; ce qui est remarquable. Cependant j'ay veu que le seul vent a allumé un morceau de papier qui m'avoit servi à nettoyer les doigts, en vuidant le recipient, lorsque j'avois fait ce feu. On allume aisément la poudre à canon au soleil et par le mouvement, un peu de ce phosphore estant mèlé parmy. Il seroit bon de l'essayer dans le vuide. Au reste je me rapporte aux experiances, que j'avois mandées à Mr. le Duc de Cheuvreuse. Pour mieux conserver ce morceau il faut verser un peu d'eau

*) Siehe die Beilage zu diesem Schreiben,

dessus et au reste le tenir dans un petit verre bouché; sans cela il s'exhale à l'air. Dans l'eau il jettera des éclairs par intervalles, particulierement lorsqu'on la remue, ou lorsqu'on l'échauffe un peu en le touchant avec la main; mais estant sec et à l'air il luit continuellement. Vous n'avés pas sujet de le ménager trop; car je vous en puis faire avoir d'autres, puisque j'en puis faire. Je vous supplie, Monsieur, d'en monstrer l'effect chez Mr. Colbert et Mr. le Duc de Cheuvreuse et à l'Academie. Si vous trouvés qu'on l'agrée, je suis prest à communiquer la composition à l'Academie, quoyqu'elle m'ait cousté beaucoup de peine.

Je vous supplie, Monsieur, de me mander quelque chose de ce qui se passe de curieux chez vous. Mr. Brosseau, resident de mon Prince, demeurant à la rue des Rosiers derrière le petit S. Antoine, fera tenir la lettre. Vous aurés entendu parler de l'entreprise de Mr. Becher en Hollande, de tirer l'or du sable. Il y a des personnes qui en ont bonne opinion. Vous scavés que Mr. Hudde est un des commissaires. Mr. Becher dit qu'il traite aussi avec les François. Je serois bien aise de sçavoir si vous en avez ouy parler à Paris. Pour moy je doute du succes, car je croy de sçavoir à peu près en quoy consiste son experience. Il y a un vestige d'or: mais je ne scay s'il y a de quoy gagner, car il pretend qu'il y aura plus en grand qu'en petit à proportion, ce qui est paradoxe. Je suis avec zèle etc.

Beilage.

J'ay trouvé quelques élémens d'une nouvelle caracteristique, tout à fait différente de l'Algebre, et qui aura des grands avantages pour representer à l'esprit exactement et au naturel, quoyque sans figures, tout ce qui depend de l'imagination. L'algebre n'est autre chose que la caracteristique des nombres indeterminés ou des grandeurs. Mais elle n'exprime pas directement la situation, les angles et le mouvement, d'où vient qu'il est souvent difficile de reduire dans un calcul ce qui est dans la figure, et qu'il est encor plus difficile de trouver des demonstrations et des constructions géometriques assez commodes lors meme que le calcul d'Algebre est tout fait. Mais cette nouvelle caracteristique suivant des figures de vue, ne peut manquer de donner en meme temps la solution et la construction

et la demonstration géometrique, le tout d'une maniere narurelle et par une analyse. C'est à dire par des voyes determinées. L'algebre est obligée de supposer les elemens de geometrie, au lieu que cette caracteristique pousse l'analyse jusqu'au bout. Si elle estoit achevée de la maniere que je la conçois, on pourrait faire en caracteres, qui ne seront que des lettres de l'Alphabet, la description d'une machine quelque composée qu'elle pourroit estre, ce qui donneroit moyen à l'esprit de la connoistre distinctement et facilement avec toutes les pieces et meme avec leur usage et mouvement sans se servir de figures ny de modelles et sans gener l'imagination, et on ne laisseroit pas d'en avoir la figure présente dans l'esprit autant que l'on se voudroit faire l'interpretation des caracteres. On pourroit faire aussi par ce moyen des descriptions exactes des choses naturelles, comme par ex. des plantes et de la structure des animaux, et ceux qui n'ont pas la commodité de faire des figures, pourveu qu'ils ayent la chose présente devant eux ou dans l'esprit, se pourront expliquer parfaitement et transmettre leur pensées ou experiences à la posterité, ce qui ne se sçauroit faire aujourd'huy, car les paroles de nos langues ne sont pas assés arrestées ny assés propres pour se bien expliquer sans figures. Mais c'est la moindre utilité de cette caracteristique, car s'il ne s'agit que de la description, il vaudra mieux, quand on en peut et veut faire la dépense, d'avoir les figures et mesme les modelles, ou plustost les originaux des choses. Mais l'utilité principale consiste dans les consequences et raisonnemens, qui se peuvent faire par les operations des caracteres, qui ne se scauroient exprimer par des figures (et encor moins par des modelles) sans les trop multiplier, ou sans les brouiller par un trop grand nombre de points et de lignes, d'autant qu'on seroit obligé de faire une infinité de tentatives inutiles: au lieu que cette methode meneroit seurement et sans peine. Je croy qu'on pourroit manier par ce moyen la mécanique presque comme la geometrie, et qu'on pourroit mesme venir jusqu'a examiner les qualités des materiaux, par ce que cela dépend ordinairement de certaines figures, de leurs parties sensibles. Enfin je n'espere pas qu'on puisse aller assez loin en physique, avant que d'avoir trouvé un tel abregé pour soulager l'imagination. Car nous voyons par exemple quelle suite de raisonnemens géométriques necessaire pour expliquer seulement l'arc en ciel, qui est un des plus simples effects de la nature, par oû nous pouvons juger combien de consequences seroient nécessaires pour penetrer dans l'interieur des mixtes, dont la composition est si subtile que le microscope, qui en decouvre bien plus que la cent-millieme partie, ne l'explique pas encor assés pour nous aider beaucoup. Cependant il y a quelque esperance d'y arriver en partie, quand cette analyse veritablement géometrique sera établie.

Mais comme je ne remarque pas que quelque autre ait jamais eu la meme pensée, ce qui me fait craindre qu'elle ne se perde, si je n'ay pas le tems de l'achever; j'adjouteray ici un essay, qui me paroist considerable, et qui souffira au moins à rendre mon dessein plus croyable et plus aisé à concevoir, afin que, si quelque hazard en empeche la perfection à present, cecy serve de monument à la posterité, et donne lieu à quelque autre d'en venir à bout.

Or, il est constant qu'il n'y a rien de plus important dans la géométrie que la consideration des lieux: c'est pourquoy j'en exprimeray un des plus simples par cette maniere de caracteres. Les lettres de l'alphabet signifieront ordinairement les points des figures. Les premiéres lettres, comme A, B, exprimeront les points donnés; les dernieres, comme X, Y, les points demandés. Et au lieu qu'on se sert des égalités ou equations dans l'algebre, je me sers icy des congruités que j'exprime par la caractere ♉. Par ex. dans la premiere figure (fig. 1.) ABC ♉ DEF veut dire qu'il y a de la congruité entre les deux triangles ABC et DEF suivant l'ordre des points, qu'ils peuvent occuper exactement la meme place, et qu'on peut appliquer ou mettre l'un sur l'autre sans rien changer dans ces deux figures que la place. Ainsi en appliquant D sur A et E sur B et F sur C, les deux triangles (estant posés égaux et semblables) seront manifestement coincidents. Mais sans parler des triangles, on en peut dire autant en quelque façon des points, sçavoir ABC ♉ DEF, dans la seconde figure (fig. 2.) c'est à dire, on pourra mettre en mesme temps A sur D, et B sur E, et C sur F, sans que la situation des trois points ABC entre eux, ny des trois points DEF entre eux, soit changée; supposant les trois premiers joints par quelques lignes inflexibles (droites ou courbes n'importe) et les trois autres de meme. Apres cette explication des caracteres, voicy les lieux:

Soit A ♉ Y (fig. 3.) c'est à dire, soit un point donné

A. On demande le lieu de tous les points Y ou (Y) etc. qui ont de la congruité avec le point A. Je dis que le lieu de tous les Y sera l'espace infini de tous cotés. Car tous les points du monde ont de la congruité entre eux, c'est à dire l'un se peut tousjours mettre à la place de l'autre. Or tous les points du monde sont dans un meme espace. On peut aussi exprimer ce lieu ainsi Y ♉ (Y). Tout cela est trop manifeste, mais il falloit commencer par le commencement.

Soit (fig. 4.) AY ♉ A (Y). Le lieu de tous les Y sera la surface de la sphere, dont le centre est A, et le rayon AY, tousjours le meme en grandeur, ou égal à la donnée AB ou CB. C'est pourquoy on peut aussi exprimer le mesme lieu ainsy: AB ♉ AY ou CB ♉ AY.

Soit (fig. 5.) AX ♉ BX; le lieu de tous les X sera le plan. Deux points A et B estant donnés, on demande un troisieme X, qui ait la mesme situation à l'égard du point A, qu'il a à l'égard du point B, [c'est à dire que AX soit égale ou (parceque toutes les droites egales sont congruentes) congruente à BX, ou que le point B se puisse appliquer au point A, gardant la mesme situation qu'il avoit á l'égard du point X] je dis que tous les points X, (X) d'un certain plan seul, continué à l'infini, satisferont à la question. Car comme AX ♉ BX, de mesme A (X) ♉ B (X). Mais il n'y en aura point qui satisfasse hors de ce plan. C'est pourquoy ce plan continué à l'infini sera le lieu commun de tous les points du monde, qui sont situés à l'égard de A, comme à l'égard de B. [Il s'ensuit que ce plan passera par le milieu de la droite AB, qui luy est perpendiculaire.]

Soit (fig. 6.) ABC ♉ ABY; le lieu de tous les Y sera la circulaire. C'est à dire, il y a trois points donnés A, B, C, on demande un quatrieme Y, qui a la meme situation que C à l'égard de AB. Je dis qu'il y a une infinité de points qui peuvent satisfaire, et le lieu de tous ces points est la circulaire. Cette description ou definition de la ligne circulaire ne présuppose pas le plan (comme celle d'Euclide) ny même la droite. Cependant il est manifeste que son centre est D, au milieu entre A et B. On pourroit aussi dire ainsi: ABY ♉ AB (Y), car alors le lieu seroit un cercle, mais qui ne seroit pas donné. C'est pourquoy il faut adjouter un point donné. L'on se peut imaginer que les points A, B demeurant fixes, et que le point C