methodum supra traditam quaerantur Logarithmi Hyperbolici numerorum 10, 0.98, 0.99, 1.01, 1.02; id quod fit spatio unius et alterius horae. Dem divisis Logarithmis quatuor posteriorum per Logarithmum numeri 10, et addito indice 2, prodibunt veri Logarithmi numerorum 98, 99, 100, 101, 102 in Tabulam inserendi. Hi per dena intervalla interpolandi sunt, et exibunt Logarithmi omnium numerorum inter 980 et 1020, et omnibus inter 980 et 1000 iterum per dena intervalla interpolatis, habebitur Tabula eatenus constructa. Tunc ex his colligendi erunt Logarithmi omnium primorum numerorum et eorum multiplicium minorum quam 100: ad quod nihil requiritur praeter additionem et subtractionem, siquidem sit $\sqrt[(10)]{\frac{9984 \times 1020}{9945}} = 2$,

$$\sqrt[(4)]{\frac{8 \times 9963}{984}} = 3,\ \frac{10}{2} = 5,\ \sqrt{\frac{98}{2}} = 7,\ \frac{99}{9} = 11,$$

$$\frac{1001}{7 \times 11} = 13,\ \frac{102}{6} = 17,\ \frac{998}{4 \times 13} = 19,\ \frac{9936}{16 \times 27} = 23,$$

$$\frac{968}{2 \times 17} = 29,\ \frac{992}{32} = 31,\ \frac{999}{27} = 37,\ \frac{984}{24} = 41,$$

$$\frac{989}{23} = 43,\ \frac{987}{21} = 47,\ \frac{9911}{11 \times 17} = 53,\ \frac{9971}{13 \times 13} = 59,$$

$$\frac{9882}{2 \times 81} = 61,\ \frac{9849}{3 \times 49} = 67,\ \frac{994}{14} = 71,\ \frac{9928}{8 \times 17} = 73,$$

$$\frac{9954}{7 \times 18} = 79,\ \frac{996}{12} = 83,\ \frac{9968}{7 \times 16} = 89,\ \frac{9894}{6 \times 17} = 97.$$

Et habitis sic Logarithmis omnium numerorum minorum quam 100, restat tantum hos etiam semel atque iterum per dena intervalla interpolare.

Constructionis Tabulae sinuum, a qua pendet tota res Trigonometrica, fundamentum optimum est continua additio dati anguli ad se ipsum vel ad alium datum. Utpote in angulo addendo BAE inscribantur (Fig. 22) HI, IK, KL, LM, MN, NO, OP etc. aequales radio AB, et ad opposita latera demittantur perpendicula BE, HQ, IR, KS, LT, MV, NX, OY etc. Et angulorum HIQ, IKH, HLI, LMK, etc. differentiae erunt angulus A; sinus HQ, IR, KS etc. et cosinus IQ, KR, LS etc. Detur jam aliquis eorum LMK et ceteri sic eruentur. Ad SV, et MV, demitte perpendicula Ta et Kb, et propter sim. tri. ABE, TLa, KMb, ALT, AMV etc. erit AB . BE : : TL. La $\left(= \frac{SL - LV}{2}\right)$

: : KT $\left(\frac{1}{2}KM\right)$. $\frac{1}{2}$ Mb $\left(= \frac{MV - KS}{2}\right)$. Et AB . AE : : KT . Sa $\left(= \frac{SL + LV}{2}\right)$: : TL . Ta $\left(= \frac{KS + MV}{2}\right)$. Unde dantur sinus et cosinus KS, MV, SL, LV; et simul patet ratio continuandi progressiones. Nempe AB . 2 AE : : LV : TM + MX : : MX . VN + NY etc. : : MV . TL + XN · : XN . MV + OY etc. vel AB . 2BE : : LV . XN — TL : : MV . TM — MX : : MX . OY — MV : : XN . VN — NY etc. Et retro AB . 2 AE : : LS . KT + RK etc. Pone ergo AB = 1, et fac BE × TL = La, AE × KT = Sa, Sa — La = LV, 2AE × LV — TM = MX etc.

Sed nodus est inventio sinus aut cosinus anguli A. Et hic subveniunt series nostrae: Utpote cognito ex superioribus quadrantalis arcus longitudine 1.57079 etc, et simul quadrato ejus 2.4694 etc, divide quadratum hoc per quadratum numeri exprimentis rationem 90 gr. ad ang. A: Et quoto dicto z, tres vel quatuor primi termini hujus seriei $1 - \frac{z}{2} + \frac{zz}{24} - \frac{z^3}{720} - \frac{z^4}{40320}$ etc. dabunt cosinum istius anguli A. Sic primo quaeri potest angulus 5 gr. et inde Tabula computari ad quinos gradus, ac deinde interpolari ad gradus vel dimidios gradus per eandem methodum: nam non convenit progredi per nimios saltus. Duae tertiae partes Tabulae sic computatae dant reliquam tertiam partem per additionem vel substractionem more noto, siquidem posito KT cosinu 60 gr., sit AE = SV et BE = Mb. Tunc ad decimas et centesimas partes graduum pergendum est per aliam methodum, substitutis tamen prius Logarithmis sinuum inventorum, si ejus generis Tabula desideretur.

Ad computum Tabularum Astronomicarum Kepleri posui fundamentum quoddam in altera Epistola. Ejus seriei tres primi termini et aliquando duo sufficiunt. Sed ad diversas partes Ellipseos diversae ejusmodi series aptari debent: vel potius tales series computandae sunt, quae ex data area sectoris Ellipticae BGE, immediate exhibeant aream sectoris circuli, cujus angulus est BEG, radius CB. Et habitis hisce, computum earum ad duos, tres, vel forte quatuor terminos beneficio Logarithmorum, haud gravius erit quam solita resolutio tot triangulorum in aliis Hypothesibus: imo forte minus grave, si series prius debite concinnentur, siquidem unus Logarithmus e Tabula petitus determinet omnes istos terminos addendo ipsum et ejus multiplices ad Logarithmos datorum coefficientium in promptu habitos. Quae de hoc genere Tabularum dicuntur, ad alias transferri possunt, ubi ratiocinia geometrica locum non obtinent. Sufficit autem per has series computare triginta vel viginti aut forte pauciores terminos Tabulae in debitis distantiis, siquidem termini intermedii facile interseruntur per methodum quandam, quam in usum calculatorum fere hic descripsissem; sed pergo ad alia.

Quae Cl. Leibnitius a me desiderat explicanda, ex parte supra descripsi. Quod vero attinet ad inventionem terminorum p, q, r in extractione radicis affectae, primum p sic eruo. Descripto angulo recto BAC, latera ejus BA, AC divido in partes aequales et inde normales erigo distribuentes angulare spatium in aequalia parallelogramma vel quadrata, quae concipio denominata esse a dimensionibus duarum indefinitarum specierum, puta x et y, regulariter ascendentium a termino A, prout vides in Fig. 23. inscriptas: ubi y denotat radicem extrahendam et x alteram indefinitam quantitatem ex cujus potestatibus series constituenda est, deinde cum aequatio aliqua proponitur, parallelogramma singulis ejus terminis correspondentia insignio nota aliqua: et Regula ad duo vel forte plura ex insignitis parallelogrammis applicata, quorum unum sit humillimum in columma sinistra juxta AB, et alia ad Regulam dextrorsum sita, ceteraque omnia non contingentia Regulam supra eam jaceant; seligo terminos aequationis per parallelogramma contingentia Regulam designatos et inde quaero quantitatem quotienti addendam. Sic ad extrahendam radicem y ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a} y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + bbx^4 = 0$; parallelogramma hujus terminis respondentia signo nota aliqua * ut vides in Fig 24. Dein applico Regulam DE ad inferiorem e locis signatis in sinistra columna, eamque ab inferioribus ad superiora dextrorsum gyrare facio, donec aliam similiter vel forte plura e reliquis signatis locis coeperit attingere, videoque loca sic attacta esse x^3, $xxyy$ et y^6. E terminis itaque $y^6 - 7aaxxyy + 6a^3x^3$ tamquam nihilo aequalibus (et insuper si placet reductis ad $v^6 - 7vv + 6 = 0$ ponendo $y = v\sqrt{ax}$) quaero valorem y et invenio quadruplicem $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$ et $-\sqrt{2ax}$, quorum quemlibet pro primo termino quotientis accipere licet, prout e radicibus quampiam extrahere decretum est. Sic aequatio $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$,

quam resolvebam in priori Epistola, dat $-2a^3 + aay + y^3 = 0$ et inde $y = a$ proxime. Cum itaque a sit primus terminus valoris y, pono p pro caeteris omnibus in infinitum, et substituo $a + p$ pro y. Obvenient hic aliquando difficultates nonnullae, sed ex iis credo D. Leibnitius se proprio Marte extricabit. Subsequentes vero termini q, r, s etc. eodem modo ex aequationibus secundis, tertiis, ceterisque eruuntur, quo primus p e prima, sed cura leviori, quia ceteri termini valoris y solent prodire dividendo terminum involventem infimam potestatem indefinitae quantitatis x per coefficientem radicis p, q, r aut s.

Intellexisti, credo, ex superioribus regressionem ab areis curvarum ad lineas rectas fieri per hanc extractionem radicis affectae.

Sed duo alii sunt modi, quibus idem perficio. Eorum unus affinis est computationibus quibus colligebam approximationes, sub finem alterius Epistolae, et intelligi potest per hoc exemplum. Proponatur aequatio ad aream Hyperbolae $z = x + \frac{xx}{2} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ etc. Et partibus ejus multiplicatis in se emerget $zz = xx + x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^5$ etc. $z^3 = x^3 \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^5$ etc. $z^4 = x^4 + 2x^5$ etc. $z^5 = x^5$ etc. Jam de z aufer $\frac{1}{2}zz$ et restat $z - \frac{1}{2}zz = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{24}x^4 - \frac{16}{60}x^5$ etc., in qua tollitur $\frac{x^2}{2}$. Huic addo $\frac{1}{6}z^3$ et fit $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 = x + \frac{1}{24}x^4 + \frac{3}{40}x^5$ etc. in qua tollitur etiam $\frac{x^3}{3}$. Aufero $\frac{1}{24}z^4$ et restat $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 = x - \frac{1}{120}x^5$ etc. Addo $\frac{1}{120}z^5$ et fit $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 = x$ quam proxime sive $x = z - \frac{1}{2}zz - \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ etc.

Eodem modo series de una indefinita quantitate in aliam transferri possunt. Quemadmodum si posito r radio circuli, x sinu recto arcus z et $x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} +$ etc. longitudine arcus istius atque hanc seriem e sinu recto ad Tangentem vellem transferre: quaero longitudinem Tangentis $\frac{rx}{\sqrt{rr - xx}}$ et reduco in infinitam seriem $x + \frac{x^3}{2rr} + \frac{3x^5}{8r^4} +$ etc. Qua dicta t, colligo potestates ejus $t^3 = x^3 + \frac{3x^5}{2rr}$ etc., $t^5 = x^5 +$ etc. Aufero jam t de z et restat $z - t = -\frac{x^3}{3} - \frac{3x^5}{10}$ etc. addo $\frac{1}{3}t^3$ et fit $z - t + \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{5}x^5 +$ etc. Aufero $\frac{1}{5}x^5$ et restat $z - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 = o$ quam proxime. Quare est $z = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 -$ etc. Sed si quis in usus Trigonometricos me jussisset exhibere expressionem arcus per Tangentem, eam non hoc circuitu, sed directa methodo quaesivissem.

Per hoc genus computi colliguntur etiam series ex duabus vel pluribus indefinitis quantitatibus constantes: et radices affectarum aequationum magna ex parte extrahuntur; sed ad hunc posteriorem usum adhibeo potius methodum in altera epistola descriptam tanquam generaliorem etc. (Regulis pro elisione superfluorum terminorum habitis) paulo magis expeditam. Pro regressione vero ab areis ad lineas rectas et similibus possunt hujusmodi Theoremata adhiberi.

Theorem. 1. Sit $z = ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5$ etc. et vicissim erit $y = \frac{z}{a} - \frac{bzz}{a^3} + \frac{2bb - ac}{a^5}z^3 + \frac{5abc - 5b^3 - aad}{a^7}z^4 + \frac{3a^2c^2 - 21abbc + 6aabd + 14b^4 - a^3e}{a^9}z^5$ etc. Ex. gr. proponatur aequatio ad aream Hyperbolae $z = y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}$ etc. Et substitutis in Regula 1 pro a, $-\frac{1}{2}$ pro b, $\frac{1}{3}$ pro c, $-\frac{1}{4}$ pro d et $\frac{1}{5}$ pro e, vicissim exurget $y = z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 +$ etc.

Theorem. 2. Sit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9 +$ etc., et vicissisim erit $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4} + \frac{3bb - ac}{a^7}z^5 + \frac{8abc - aad - 12b^3}{a^{10}}z^7 + \frac{55b^4 - 55abbc + 10aabd + 5aac - a^3e}{a^{13}}z^9 +$ etc. Ex. gr. proponatur aequatio ad arcum circuli $z = y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6}$ etc. Et substitutis in Regula 1 pro a, $\frac{1}{6rr}$ pro b, $\frac{3}{40r^4}$ pro c, $\frac{5}{112r^6}$ pro d etc. orietur $y = z - \frac{z^3}{6rr} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} +$ etc. Alterum modum regrediendi ab areis ad lineas rectas celare statui.

Ubi dixi omnia pene Problemata solubilia existere, volui de iis praesertim intelligi circa quae Mathematici se hactenus occuparunt vel saltem in quibus ratiocinia mathematica locum aliquem obtinere possunt: Nam alia sane adeo perplexis conditionibus implicata excogitare liceat ut non satis comprehendere valeamus et multo minus tantarum computationum onus sustinere quod ista requirerent, ne nimium dixisse videar, inversa de tangentibus Problemata sunt in potestate, aliaque illis difficiliora: ad quas solvenda usus sum duplici methodo, una concinniori, altera generaliori: utramque visum est in praesentia literis transpositis consignare, ne propter alios idem obtinentes, constitutum aliquibus mutare cogerer. 5accdae10effh11i4l3mqn60qqr8511t9v3x: 11ab3cdd10eaeg10ill4m7n603p3q6r5s11t8vx, 3acae4egh5i4l4msn8o94r356t4vaaddaeeeeeeiiimmnnoop rrrssssstttuu.*)

Inversum hoc Problema de tangentibus quando tangens inter punctum contactus et axem figurae est datae longitudinis, non indiget his methodis; est tamen curva illa Mechanica, cujus determinatio pendet ab area Hyperbolae. Ejusdem generis est etiam Problema, quando pars axis inter Tangentem et ordinatim applicatam datur longitudine. Sed hos casus vix numeraverim inter Ludos naturae: nam quando in triangulo**) rectangulo quod

---

*) So findet sich diese Stelle in der Abschrift geschrieben, die Leibniz erhielt. In Leib. op. omn. ed. Dutens, Tom. III. p. 76. ist sie zum Theil anders. Nach Wallis bedeuten diese Zeichen: Una Methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex aequatione simul involvente fluxionem ejus; Altera tantum in assumptione seriei pro quantitate qualibet incognita, ex qua cetera commode derivari possint, et in collatione terminorum homologorum aequationis resultantis ad eruendos terminos assumptae seriei.

**) Leibniz hat hier dazwischen geschrieben: TBC, (Fig. 25) und folgendes am Rande bemerkt:

ab illa axis parte et tangente ac ordinatim applicata constituitur, relatio duorum quorumlibet laterum per aequationem quamlibet definitur, Problema solvi potest absque mea methodo generali, sed ubi pars axis ad punctum aliquod positione datum terminata ingreditur vinculum, tunc res aliter se habere solet*).

Communicatio Resolutionis affectarum aequationum per Methodum Leibnitii pergrata erit juxta et explicatio quomodo se gerat ubi indices potestatum sunt fractiones, ut in hac aequatione $20 + x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{6}{5}} y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{7}{11}} = 0$, aut surdae quantitates, ut in hac $\overline{x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}}\Big|^{\sqrt{(3)\frac{2}{3}}} = y$, ubi $\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}$ non designant coefficientes ipsius x, sed indices potestatum seu dignitatum ejus, et $\sqrt{(3)\frac{2}{3}}$ indicem dignitatis binomii $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$. Res, credo, mea methodo patet, aliter descripsissem.

Sed meta tandem prolixae huic Epistolae ponenda est. Literae sane excellentissimi Leibnitii valde dignae erant, quibus fusius hocce responsum darem, et volui hac vice copiosior esse, quia credidi amoeniora tua negotia severiori hocce scribendi genere non debere a me crebro interpellari.

Tui studiosissimus

Is. Newton.

Dieses Schreiben Newton's erhielt Leibniz sehr spät zugesandt, nachdem er bereits Paris verlassen und seinen Wohnsitz in Hannover genommen hatte (siehe den Brief Oldenburg's vom 2. Mai 1677). Bekanntlich nahm er seinen Weg über London, wo er eine Woche verweilte und die persönliche Bekanntschaft

---

*) Leibniz hat hier bemerkt: Imo tunc etiam succedit, quod si TB detur ad x seu sit $x^{(v)}$ fiet $x^{(v)} : y :: d\bar{x} : d\bar{y}$, Ergo $\frac{d\bar{x}}{x^{(v)}}$ aequ. $\frac{d\bar{y}}{y}$.

TB, t
BC, y
AB, x

TB aequ. $\frac{d\bar{x}}{d\bar{y}}y$. Sit t aequ. $y^{(v)}$ fiet $d\bar{x}$ aequ. $\frac{y^{(v)}\,d\bar{y}}{y}$ seu x aequ. $\int\frac{y^{(v)}\,d\bar{y}}{y}$, $\frac{TC}{y}$ aequ. $\frac{\sqrt{d\bar{x}^2 + dy^2}}{dy}$. Pone TC aequ. y, succedet ex Quadraturis.

von Collins machte. Von London begab er sich nach Amsterdam, von wo er einen Brief an Oldenburg schrieb, der uns in dem folgenden Schreiben Collins an Newton erhalten ist.

XXXIX.

Collins an Newton*).

Aderat hic D. Leibnitius per unam septimanam in mense Octobris, in reditu suo ad Ducem Hannoverae, cujus literis revocatus erat in ordine ad quandam Promotionem.

Dum aderat, impertivit mihi scripta quorum spero me tibi apographa propediem missurum. Allocutus sum eum de duobus assertis D. Jacobi Gregorii, quorum prius est in literis suis, 15 Febr. 1671 viz. „Quod attinet ad methodum meam pro inve-„niendis radicibus omnium aequationum: una series exhibet non-„nisi unam radicem. Sed pro quaque radice possunt esse se-„ries numero infinitae. Est autem industriae opus pro inchoanda „serie, et judicando, quam illa respicit radicem.“ Posterius est in literis suis, 17 Jan. 1672. „Unica (saltem optima) Methodus „universalis, quam hactenus novi, pro inveniendis radicibus „aequationum, est series infinita. Potest exhiberi una, quae in-„serviat cubicis aequationibus omnibus. Alia pro omnibus bi-„quadraticis. Alia pro omnibus supersolidis. Et credo, Tabulas „hujusmodi serierum fore methodum omnium optimam, pro sub-„levando taedio, in exquirendo quaesitas radices.“

Dixit Leibnitius, se posse et velle consilia impertire, pro obtinendis ejusmodi seriebus, absque speciosa extractione radicum aequationum affectarum, modo quis velit laborem illum obire.

Et consequenter ad hoc (postquam ego D. Bakerum ipsi nominaveram) literis ejus ad D. Oldenburgium, datis Amstelodami $\frac{18}{28}$ Novemb. 1676 haec scribit:

„Rogo a me officiosissime Cl. Newtonum salutes, atque ei „significes, Hugenium mihi asseverasse, captum a se aliquoties „experimentum duorum speculorum planorum metallicorum, quae

---

*) Siehe Leib. op. omn. ed. Dutens Tom. III. p. 77 sqq.

„rite juncta, etiam exhausto aëre in Recipiente non sunt dilapsa,
„nec proinde ea de re dubitari debere.

„D. Collinio haec quaeso communica. Dixit ille mihi D.
„Bakerum, doctum admodum et industrium apud vos Analyticum,
„utilibus consiliis exequendis parem esse. Elegi ego unum prae
„reliquis utile et facile. Nimirum, Methodus Tangentium a Slu-
„sio publicata nondum rei fastigium tenet. Potest aliquid am-
„plius praestari in eo genere, quod maximi foret usus ad om-
„nis generis Problemata: etiam ad meam (sine extractionibus
„aequationum) ad series reductionem. Nimirum, posset brevis
„quaedam calculari circa Tangentes Tabula, eousque continuanda,
„donec progressio Tabulae apparet, ut eam scilicet quisque, quous-
„que libuerit, sine calculo continuare possit.

„Fundamentum calculi hic exponam, ejusque simul exem-
„plum dabo.

„In Figura 26. sit AB vel $A\,{}_2B$ aequ. x, BC vel ${}_2B\,{}_2C$ sit y,
„quae duae quantitates indeterminatae. Sint aliae determinatae a, b,
„c, d, e, f, et sit aequatio exprimens relationem inter x et y talis:

$$ax^2 + by^2 + cyx + dx + ey + f \text{ aequ. } 0$$

„quae aequatio in suo gradu (quadratico scilicet) generalissima
„est, omnibusque exemplis applicari potest pro varia literarum
„determinatarum explicatione, cum etiam ipsi 0 (sive nihilo) vel
„terminis ipso nihilo minoribus (seu negativis) quoque applicari
„possit.

„Jam $\frac{BC}{TB}$ vocetur z. Posito TC esse Tangentem, erit (per
„methodum tangentium vel Huddenii vel Slusii) $-z$ aeq.
„$\frac{2ax + cy + d}{2by + cx + e}$, ut exponenti statim patebit.

„Verum id nondum est ultimum quod in eo genere fieri
„potest aut debet. Nam ex hoc valore ipsius z invento potest
„tolli alterutra indeterminatarum x vel y et inveniri relatio ip-
„sius z ad solam remanentem. Tollamus y et quaeramus rela-
„tionem z ad x.

„Tollemus autem y ex inventa aequatione ope datae aequa-
„tionis. Non ex data aequatione fiet y aeq. $\frac{-ax^2 - dx - f}{by + cx + e}$.
„Ponendo (compendii causa) $-ax^2 - dx - f$ aeq. p, et cx
$+ e$ aeq. q, et $2ax + d - cxz - ez$ aeq. r, et $2bz$
„$- c$ aeq. s, habebimus duos ipsius y valores, unum y aeq.

„$\frac{p}{by + q}$, alterum y aeq. $\frac{r}{s}$. Quos duos valores inter se aequando,
„fiet ps aeq. $bry + qr$, et ex hac aequatione novum habebi-
„mus valorem y aeq. $\frac{ps - qr}{br}$, quem aequando praecedenti y
„aeq. $\frac{r}{s}$, habebitur aequatio in qua sublata est litera y, nempe
„ps^2 aeq. $br^2 + qrs$. Et in locum literarum p, q, r, s, substi-
„tuendo valores assumptos aequationemque ordinando, prodibit

$$\begin{array}{llllllllll}
3bc^2 & & +6bce & & -12abc & & +4a^2b & & +3be^2 & \\
4ab^2 & x^2z^2 & +4b^2d & xz^2 & -c^3 & x^2z & +3ac^2 & x^2 & +4b^2f & z^2 \\
 & & -8abe & & +4abd & & -4bde & & +bd^2 & \\
 & & -4bcd & xz & +2ace & x & -ce^2 & z & +cde & \text{aeq. } 0\,{}^{*)} \\
 & & -3c^2e & & +2c^2d & & -4bcf & & +fc^2 &
\end{array}$$

„Quae est aequatio quaesita, exprimens relationem z ad so-
„lam x. Quae novissima est, neque ab ulla litera amplius pur-
„gari potest.

„Idem optarim fieri in sequente gradu, assumpta aequatione
$gx^3 + hy^3 + lx^2y + mxy^2 + ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$ aequ. 0
„eodemque modo quaerendo ipsius z ad x relationem.

„Quodsi in aliquot gradibus, quosque commodum, continua-
„retur, haberemus Tabulam Tangentium analyticam usus maximi,
„tum ad alia multa, tum ad meam aequationum per series re-
„solutionem.

„Rectius initio scripsissem $a + bx + cy + dxy + ex^2$
„$+ fy^2 + g = 0$, ut servato eodem ordine, postea pergi pos-
„sit in sequente gradu ad hanc formam
$a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 + gx^2y + hxy^2 + lx^3 + my^3$ aeq. 0
„et sic porro.

„Amstelodami cum Huddenio locutus sum, cui negotia civi-
„lia tempus omne eripiunt. Est enim ex numero 12 urbis Con-
„sulum, qui subinde imperium obtinent. Nuper Consul Regens
„erat, nunc Thesaurarii munus exercet. Praeclara admodum in
„ejus schedis superesse certum est. Methodus Tangentium a
„Slusio publicata dudum illi fuit nota. Amplior ejus Methodus
„est, quam quae a Slusio fuit publicata. Sed et quadratura
„hyperbolae Mercatoris ipsi jam anno 1662 innotuit. Hactenus
„Leibnitius."

---

*) So findet sich dieser Ausdruck in der oben citirten Stelle. Offenbar liegt hier eine Zeichenverwechselung zu Grunde.

D. Baker est indefatigabilis industriae vir, qui lubenter in se suscipiet laborem calculi, qui censebitur utilis. Sed credo eum in Methodo Tangentium vix satis peritum, quam puto in scriptis hactenus editis nondum esse demonstratam. Si itaque tu dignaberis ipsi impertire consilia tua hac in re, hoc promovebit opus.

Bakerus huc imprimendam misit Exercitationem suam de Continue-proportionalibus, aliamque cui titulus: Cardanus Promotus.

Narrat mihi D. Loggan (Chalcographus) quod effigiem tuam delineavit ille in ordine ad sculpturam, quae praefigenda sit libro tuo de Lumine, Coloribus, Dioptricis etc. quem edendum intendis. Qua de re desideramus esse certiores. Sum etc. Lond. 5. Martii 167$\frac{6}{7}$.

P. S. Exemplar Epistolae tuae (quatuor schedarum) nondum est ad D. Leibnitium missum, sed intra septimanam est quidam hinc-profecturus Hanoveram, qui tum illud, tum libros quosdam laturus est.

XL.

Oldenburg an Leibniz.

Epistolam tuam utramque, unam Amstelodami, alteram Hanoverae datam, rite accepi. Procrastinavi hactenus, ad Te scribere, quod nollem ea periclitari, quae ad te transmittenda mihi suppetunt, quorum e numero litterae sunt Newtonianae, non minus argumento graves, quam scripto prolixae. Si quidem intellexero, prodromum hunc ad te recte delatum esse, (quem sub Dni. Scroteri involucro expedio) fidentius, quae penes me sunt, curare ad te potero. Quantocius igitur si placet, rescribas, nec ulla utaris inscriptione alia, quam ad Grubendolium, ut nosti, quoties scil. per tabellionem ordinarium me invisis.

Quid causae sit, quod Spinosae non tradidisti literas meas, divinare equidem non possum. Quas velis demonstrationes Metaphysicas, quae a te lectae et examinatae in literis tuis Amstelodamensibus dicuntur, non intelligo, cum earum Authorem subticueris.

Dnus Balduinus, Saxo Dresdensis, dono nuper misit Regi nostro, ceu Fundatori Soc. Regiae, nec non ipsi Societati, Phosphorum suum, qui soli vel candelae expositus, lucem ita imbibit, ut eam in tenebris reddat. Experimentum tum in Aula nostra, tum apud Societatem Regiam peractum, felicissime successit, induxitque coetum illum Philosophicum, ut Inventorem in Socio rum suorum altum cooptaverit. Fama fert, Kunckelium quendam invenisse aliud quoddam Phosphori genus, quem Noctilucam appellat, qui non modo prioris ad instar in obscuro lucet, sed et per vices fulgurat, et vim urendi inexstinguibilem habet. Dissertationem de eo edidit Kirchmayerus, Professor Witenbergensis, quam vidimus, sed cui vix fidem adhibemus; cum manus nostrae in rebus Physicis oculatae sint, nec nisi quod viderint, credant. Tu si quid hujus rei inaudiveris, quid veri subesse putes, significare ne graveris, oro. Postquam hisce responderis, fasciculum satis tumentem accipies, qui hujus brevitatem levitatemque, et prolixitate et momento compensabit. Vale et a Dno. Boylio, qui te valde amat, plurimum salve. Dabam Londini d. 22. Febr. 1677.

Aquae Rabelii vulnerariae fama adhuc integra est. Illa quam vobis oblatam esse scribis, ex eadem forte materia parata est.

Mons. Scroter dit, que dans peu de temps il ira en Allemagne, et qu'il verra Hannover. Ditez donc, s'il vous plait, si ie dois bailler la grande lettre de Newton, et le reste, que i'ay pour vous.

XLI.

Oldenburg an Leibniz.

Rumpo tandem moram, quam ex eo nexui, quod verebar, epistolam Neutonianam hic inclusam et mihi inscriptam, extra periculi aleam non esse, si per tabellionem ordinarium transmitteretur. Nunc demum occasio se obtulit, eum cum reculis quibusdam Schroederianis, quae navi Anglica Hamburgum, atque inde per ministrum Hanoveranum Hanoveram curandae sunt, transmittendi. Solenniter promisit Guilielmus Schroederus, se parem hujus fasciculi cum suismet rebus curam habiturum. Quamprimum ad manus tuas pervenerit, certiorem me fieri de eo velim; responsionem tuam Amstelodamo vel Antverpia Londinum mittendo, eamque ut soles, ad Grubendolium, citra ullum alium titulum, inscribendo. Mitto tibi apographum literarum Newtoni, autographum ad memet directum, mihi reservans. Tanta id ipsum cura relegi, quantam occupationes meae confertissimae patiebantur. Ad alia nunc distrahitur Newtonus ab iis, qui Leodii, Francisco Lino succenturiati, novam ipsius de Lumine et Coloribus Theoriam vehementer insectantur: qua de re brevi plura accipies, ni rationes meas male subduxi. Nihil hac vice de Collino apud te commemoro, quum Te omnino satiatum iri pro tempore prolixa hac Newtoni epistola autumem. Nec de aliis a te quaesitis fusius nunc agam, cum id alii scriptioni reservaverim, quam forte laudatus Schroeterus ipse, intra paucas septimanas Hannovera transiturus, secum feret. Verbo duntaxat innuam, Ignivorum Anglum, Parisiis nunc commorantem, certo quodam medicamento os et viscera sua munire, cujus virtute rotusa, medicinam suam iterare toties, quoties debet. Bondii de longitudine Tractatus, tanti nominis mensuram haud implet. De Tschirnhusio nihil omnino accepi, ex quo Lutetia Parisiorum discessit. Gaudeo, in re telescopica laborare Goltinium. Quas lentes, a Parisiensi Borellio elaboratas, exploravimus, sic satis probamus. Multa et ingentia nobis promittuntur a Germanis quibusdam circa Phosphoros et Noctilucas; nec spes deest, quin fidem datam, saltem quoad rei summam, sint liberaturi. Nuper in Soc. Regiam cooptavimus Dn. Balduinum, qui Phosphori sui specimen pulcherrimum, thecae deauratae inclusum, Serenissimo Regi nostro, ceu Soc. Regiae Fundatori, nec non Societati ipsi, dono transmiserat, insigni effectu conspicuum.

Illustris Boylius et doctissimus Collinius plurimam tibi salutem dicunt. Prior semper aliquid molitur novi, et jam imprimis circa Poros et Figuras corporum occupatum se videt. Posterior brevi ad Te nonnulla scribet, quae forte non displicebunt.

Fere memoria exciderat, me nuper vidisse et appendisse magnetem parvulum, qui cum nonnisi 13 grana penderet, suum met pondus centies et quadragesies novies, me coram sustinere potuit. Thesauro quovis hunc lapillum preciosiorem censeo.

Vale et Tui studiosissimum amare perge.

Dabam Londini d. 2. Maji 1677.

P. S.

Non obstante tam enormi prolixitate petiit Dn. Collinius, ut sequentia haec prioribus subjicerem; nempe:

1. Non nisi post sex mensium lapsum secundum Volumen Algebraicum Dni Kersy praelo commissum iri: Sperare se proinde, Clarissimi Freniclii opus interea proditurum, quod suppeditaturum nobis credit complures breves intermediatasque responsiones in istis inventi novi Fermatiani Problematibus: quod ipsum licet et hic praestitum a viro quodam docto fuerit, non tamen ipse nos hactenus edocuit, qua methodo. Addit, nos percipere, Fermatum, Wallisium et Kersium, omnes (consiliis haud communicatis) in idem Theorema incidisse, dividendi sc. summam duorum Cuborum in duos Cubos, neminem vero eorum posse beneficio ejus invenire parvos illos numeros, quos Dn. Frenicius nobis dedit in quadam epistola sua in Wallisii Commercio Epistolico.

2. Narrationi illi de Constructione ad dividendum Aequationem Biquadraticam in duas Quadraticas, subjungit idem Collinius: Hoc praestari citra opem Aequationis Cubicae, quando Biquadratica aequatio sit per multiplicationem duorum quadraticorum: Subtilitatem consistere ait in determinando, quando id fieri possit absque ope Aequationis ejusmodi Cubicae, et quando non item.

3. Ad Cartesii solutionem Problematis Pappi ait idem, Virum quendam doctum in Operatione sive Processu Problematis, semper eam continebat intra duas Aequationes quadraticas, quae multiplicatae per se invicem producebant Aequationem illam biquadraticam, quae solvebat Problema, poteratque dividi in duas Aequationes Quadraticas citra opem Cubicae.

Jungo hic summam eorum, quae destinantur secundo volumini Algebraico, quod meditantur Angli lingua vernacula; eamque mitto Anglice, prout acceperam ab amico, satis compertum habens, Te linguam hanc satis callere ad haec intelligendum.

Vale iterum atque iterum etc.

XLII.

Leibniz an Oldenburg.

Accepi hodie literas Tuas diu expectatas cum inclusis Neutonianis sane pulcherrimis; quas plus semel legam cum cura ac meditatione, quibus certe non minus dignae sunt quam indigent. Nunc pauca quae festinante oculo obeunti incidere e vestigio annotabo.

Egregie placet quod descripsit qua via in nonnulla sua elegantia sane theoremata inciderit, et quae de Wallisianis interpolationibus habet, vel ideo placent, quia hac ratione obtinetur harum interpolationum demonstratio, cum res antea quod sciam, sola inductione niteretur, tametsi pars eorum per tangentes sit demonstrata.

Cl. Slusii methodum tangentium nondum esse absolutam Celeberrimo Neutono assentior, et jam a multo tempore rem tangentium longe generalius tractavi, scilicet per differentias ordinatarum. Nempe $T\,{}_1B$ (Fig. 27) (intervallum tangentis ab ordinata in axe sumtum) est ad ${}_1B\,{}_1C$ ordinatam, ut ${}_1CD$ (differentia duarum abscissarum $A\,{}_1B$, $A\,{}_2B$) ad $D\,{}_2C$ (differentiam duarum ordinatarum, ${}_1B\,{}_1C$, ${}_2B\,{}_2C$) nec refert quem angulum faciant ordinatae ad axem. Unde patet nihil aliud esse invenire tangentes, quam invenire differentias ordinatarum, positis differentiis abcissarum, si placet, aequidifferentibus. Hinc nominando imposterum $d\overline{y}$ differentiam duarum proximarum y: et $d\overline{x}$ differentiam duarum proximarum x, potet $d\overline{y^2}$ esse $2y\,d\overline{y}$ et $d\overline{y^3}$ esse $3y^2\,d\overline{y}$ etc. Nam sint duae proximae sibi (id est differentiam habentes infinite parvam) scilicet y et $y + d\overline{y}$, quoniam ponimus $d\overline{y^2}$ esse differentiam quadratorum ab his duabus, ejus valor erit $y^2 + 2yd\overline{y} + \overline{d\overline{y}|}^2 - y^2$, seu omissis $y^2 - y^2$, quae se destruunt, item omisso quadrato quantitatis infinite parvae, et ob rationes ex methodo de maximis et minimis notas erit $d\overline{y^2} \sqcap 2yd\overline{y}$, idemque est de caeteris potentiis. Hinc etiam haberi possunt differentiae quantitatum ex diversis indefinitis in se invicem ductis factarum, ut: $d\overline{yx}$ erit $\sqcap y\,d\overline{x} + x\,d\overline{y}$ et $d\overline{y^2x} = 2xy\,d\overline{y} + y^2 d\overline{x}$. Hinc si sit aequatio

$$a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2 \text{ etc.} \sqcap 0,$$

statim habetur tangens curvae ad quam est ista aequatio. Nam

ponendo $A_1B \sqcap y$ et $A_2B \sqcap y + d\overline{y}$ (scilicet quia ${}_1B_2B$ seu ${}_1CD \sqcap d\overline{y}$) itemque ponendo ${}_1B_1C \sqcap x$ et ${}_2B_2C \sqcap x + d\overline{x}$ (scilicet quia ${}_2CD \sqcap d\overline{x}$) et quia eadem aequatio exprimit quoque relationem inter $A\,{}_2B$ et ${}_2B\,{}_2C$, quae eam exprimebat inter $A\,{}_1B$ et ${}_1B\,{}_1C$, tunc in aequatione illa pro y et x substituendo $y + d\overline{y}$ et $x + d\overline{x}$ fiet:

$$\begin{array}{l}
a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2 \text{ etc.} \\
\hline
+ bd\overline{y} + cd\overline{x} + dyd\overline{x} + 2eyd\overline{y} + 2fxd\overline{x} + 2gxyd\overline{y} + 2hxyd\overline{x} \\
\qquad + dxd\overline{y} \qquad\qquad\qquad\qquad + gy^2d\overline{x} + hx^2d\overline{y} \quad \sqcap 0 \\
\hline
\qquad + d\,d\overline{x}d\overline{y} + e\,\overline{d\overline{y}|}^2 + f\,\overline{d\overline{x}|}^2 + g\,\overline{d\overline{y}|}^2x + h\,\overline{d\overline{x}|}^2y \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + 2gyd\overline{y}d\overline{x} + 2hxd\overline{x}d\overline{y}
\end{array}$$

ubi abjectis illis quae sunt supra primam lineam quippe nihilo aequalibus per aequationem praecedentem, et abjectis illis quae sunt infra secundam, quia in illis duae indefinite parvae in se invicem ducuntur, hinc restabit tantum aequatio haec:

$$\begin{array}{l} bd\overline{y} + cd\overline{x} + byd\overline{x} \\ \qquad\qquad\quad bxd\overline{y} \end{array} \text{ etc.} \sqcap 0,$$

quicquid scilicet reperitur inter lineam primam et secundam, et mutata aequatione in rationem seu analogiam, fiet

$$\frac{-d\overline{y}}{d\overline{x}} \sqcap \frac{c + dy + 2fx + gy^2 + 2hxy \text{ etc.}}{b + dx + 2ey + 2gxy + hx^2 \text{ etc.}}$$

id est $\left(\text{quia } \dfrac{-d\overline{y}}{d\overline{x}} \text{ seu } \dfrac{-{}_1B\,{}_2B \text{ seu } -{}_1CD}{D\,{}_2C} \sqcap \dfrac{-T_1B}{{}_1B\,{}_1C}\right)$ erit $\dfrac{c + dy \text{ etc.}}{b + dx \text{ etc.}} \sqcap \dfrac{-T_1B}{{}_1B\,{}_1C}$. Quod coincidit cum regula Slusiana, ostenditque eam statim occurrere hanc methodum intelligenti. Sed methodus ipsa nostra longe est amplior, non tantum enim adhiberi potest, cum plures sunt literae indeterminatae quam y et x (quod saepe fit maximo cum fructu) sed et tunc utilis est, cum interveniunt irrationales, quippe quae eam nullo morantur modo, neque ullo modo necesse est irrationales tolli, quod in methodo Slusii necesse est; et calculi difficultatem haud dubie in immensum auget. Quod ut appareat, tantum utile erit in irrationalitatibus simplicioribus rem explanare: Et primum in simplicissimis: generaliter si sit aliqua potentia aut radix: x^z erit $d\overline{x^z} \sqcap z\,x^{z-1}\,d\overline{x}$. Si z sit $\frac{1}{2}$ seu si x^z sit $\sqrt[2]{x}$, erit $d\overline{x^z}$ seu hoc loco $d\overline{\sqrt[2]{x}} \sqcap \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}d\overline{x}$ seu $\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$, ut notum aut facile demonstrabile. Sit jam binomium ut $\sqrt[3]{\overline{a + by + cy^2}}$ etc. quaeritur

$d\sqrt[3]{a+by+cy^2}$ seu $d\overline{x^z}$ posito $\frac{1}{3} \sqcap z$, et $a + by + cy^2$ etc. $\sqcap x$. Est autem $d\bar{x} \sqcap bd\bar{y} + 2cyd\bar{y}$ etc. Ergo $d\overline{x^z}$ seu $\frac{d\bar{x}}{3\sqrt[3]{x}}$ erit $\sqcap \frac{bd\bar{y} + 2cy\,d\bar{y}\text{ etc.}}{3\sqrt[3]{a+by+cy^2}}$. Eadem methodus adhiberi potest etsi radices in radicibus implicentur. Hinc si detur aequatio valde intricata, ut:

$a + bx\sqrt[2]{y^2+b\sqrt[3]{1+y}} + hyx^2\sqrt[2]{y^2+y\sqrt[2]{1-y}} \sqcap 0$ ad aliquam curvam, cujus abscissa sit y, AB, ordinata x, ${}_1BC$, tunc aequatio proveniens, utilis ad inveniendam tangentem TB, statim sine calculo scribi poterit, et haec erit

$$
\begin{aligned}
&bd\bar{x}\sqrt[2]{y^2+b\sqrt[3]{1+y}} \\
&+ \frac{bx}{2\sqrt[2]{y^2+b\sqrt[3]{1+y}}} \frown \overline{2y\,d\bar{y} + \frac{b\,d\bar{y}}{3\sqrt[3]{1+y}}} \\
&+ \frac{hyx^2}{2\sqrt[2]{y^2+y\sqrt{1-y}}} \frown 2y\,d\bar{y} + d\bar{y}\sqrt[2]{1-y} + \frac{y \frown - d\bar{y}}{2\sqrt[2]{1-y}} \\
&\qquad + 2hxy\,d\bar{x} \frown \sqrt[2]{y^2+y\sqrt{1-y}} \sqcap 0 \\
&\qquad + hx^2\,d\bar{y}
\end{aligned}
$$

seu $\frac{-d\bar{y}}{ad\ d\bar{x}}$ id est $\frac{-T_1B}{ad\,{}_1B_1C}$ erit ut omnes provenientis aequationis termini per $d\bar{x}$ multiplicati, ad omnes ejusdem terminos per $d\bar{y}$ multiplicatos. Ubi sane mirum et maxime commodum evenit, q od $d\bar{y}$ et $d\bar{x}$ semper extant extra vinculum irrationale. Methodo autem Slusiana omnes ordine irrationales tollendas esse nemo non videt, quod immensi calculi res est. Arbitror quae celare voluit Neutonus de tangentibus ducendis, ab his non abludere. Quod addit, ex hoc eodem fundamento quadraturas quoque reddi faciliores, me in ea sententia confirmat, nimirum semper figurae illae sunt quadrabiles quae sunt ad aequationem differentialem. Aequationem differentialem voco talem qua valor ipsius $d\bar{x}$ exprimitur, quaeque ex alia derivata est, qua valor ipsius x exprimebatur. Exempli causa, (Fig. 28) sit $AB \sqcap y$, $EB \sqcap \omega$, ponatur $\omega \sqcap \frac{b + cy + dy^2 + ey^3\text{ etc.}}{z\sqrt[z]{1 + by + \frac{c}{2}y^2 + \frac{d}{3}y^3 + \frac{e}{4}\text{ etc.}}}$ quaeritur quadratura figurae ABEA (quanquam forte saepe tale

trilineum non sit proditurum, quale depinximus, sed curva habitura asymtoton). Describatur alia curva AC, talis ut BC sit $\sqrt[z]{1 + by + \frac{c}{2}y^2 + \frac{d}{3}y^3 + \frac{e}{4}y^4\text{ etc.}}$ et rectangulum sub recta AV, repraesentante Unitatem constructionis, et sub ordinata nova BC, aequabitur figurae ABEA. Ejusmodi theoremata condi possunt indefinita, imo pleraque sub generalissimis quibusdam complecti licet. etc. significat nihil referre sive hae series producantur sive ubilibet finiantur, unde patet hanc unicam regulam pro infinitis figuris quadrandis servire diversae plane naturae ab iis, quae hactenus quadrari solebant.

Pulcherrimae sunt illae series Neutonianae, quae ex infinitis in finitas degenerant, qualis illa est, quam exhibet pro extractione radicis binomii aut ejus quadratura. Quod si id in generali illa aequationis affectae indefinitae extractione, cum sit $z \sqcap ay + by^2 + cy^3$ etc. et y fit: $\frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3}$ etc. vel $y \sqcap \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^4}$ etc. idem praestari posset, ut scilicet liceret inter extrahendum radices ex aequationibus vel binomiis invenire radices rationales finitas, quando eae insunt, vel etiam irrationales; tunc dicerem methodum serierum infinitarum ad summam perfectionem esse productam. Opus esset tamen praeterea discerni posse varias aequationis ejusdem radices, item necesse esset ope serierum discerni aequationes possibiles ab impossibilibus. Quod si haec nobis obtinuerit vir in his studiis maximus, atque effecerit, scilicet ut possimus seriem infinitam convertere in finitam, quando id fieri potest, aut saltem agnoscere ex quanam finita sit deducta, tunc in methodo serierum infinitarum quae divisione atque extractione inveniuntur, vix quicquam amplius optandum restabit. Haec si quisquam mortalium, certe Neutonus praestare poterit. Eadem credo opera efficietur, ut ex multis seriebus infinitis possimus deligere maxime naturales, quales haud dubie illae erunt, quae ita erunt comparatae, ut cum fieri potest, atque opus est, degenerent in finitas. Atque ita egregie apparebit Methodum extractionum per series infinitas minime indirectam, sed maxime naturalem esse. Problema est perelegans, cujus meminit, curvam describere, quae per data quotcunque transeat puncta. Huddenius mihi Amstelodami dixit, posse se curvam describere Analyticam seu certa aequatione uniformi constantem, quae faciei hominis cujusdam noti lineamenta designet. Caeterum quaerendum est an hoc Neutonus intelligat de punctis infinitis, ut si sit Axis (Fig. 29) $A\,{}_1B\,{}_2A\,{}_2B\,{}_3A$ etc. in infinitum productus, et duae datae curvae infinitae analyticae, una $A\,{}_1C\,{}_2C\,{}_3C$ etc. altera $A\,{}_1D\,{}_3D$ etc. Si ponamus $A\,{}_1B$, ${}_1B\,{}_2A$, ${}_2A\,{}_2B$, ${}_2B\,{}_3A$ etc. inter se et datae cuidam quantitati F aequales, quaeritur an dari possit curva analytica seu aequationis capax, quae in infinitum producta transeat (alternis) per puncta ${}_1C$, ${}_2D$, ${}_2C$, ${}_3D$, ${}_3C$ etc. Fermatius alicubi scribit se methodum habere per quam curva inveniri possit, cujus proprietas specifica data non pertineat ad unum punctum, ut vulgo fit, cum ordinatae referuntur ad partes axis, sed ad duo quaelibet simul, vel etiam ad tria quaelibet simul etc.

Quae de variis seriebus suis ac nostris examinandis atque inter se comparandis dicit Cl. Neutonus, in ea me immergere non audebo, antequam in gratiam cum Analysi rediero, nam harum rerum vestigia in animo meo prope nunc obliterata sunt. Agnosco interim pulcherrima et utilissima ab eo annotari. Elegantissima et minime expectata est via, qua seriem meam $\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}$ etc. deducit ex sua.

Quod ait problemata Methodi Tangentium inversae esse in potestate, hoc arbitror ab eo intelligi per series scilicet infinitas. Sed a me ita desiderantur, ut curvae exhibeantur geometrice quatenus id fieri potest, suppositis (minimum) quadraturis. Exempli causa cycloidem deprehendit Hugenius sui ipsius evolutione describi; difficile autem fuisset, credo, solvere hoc problema: invenire curvam, quae sui ipsius evolutione describitur. Nec refert quod istius curvae descriptio quadraturam circuli supponit. Et hoc problema etiam ex eorum est numero, quae voco Methodi Tangentium inversae. Ita inter methodos tangentium inversas generales est, invenire curvam analyticam cujus longitudines sint areis datae figurae, curva analytica comprehensae, proportionales (contrarium enim dudum possumus). Quod problema arbitror non esse insolubile, et videtur non contemnendum, facilius enim est lineam quam spatium organice metiri, et reducta spatiorum dimensione ad dimensionem linearum, solis filis in rectum extensis mechanica fieri poterit constructio; et spatia poterunt in data ratione secari instar linearum rectarum. Cum ait Neutonus, inventionem Curvae, quando tangens vel intervallum tangentis et ordinatae in axe sumtum est recta

constans, non indigere his methodis, innuit credo se intelligere Methodum tangentium inversam generalem in potestate esse per methodos serierum appropinquatorias; in hoc vero casu speciali non opus esse seriebus; ego vero methodum quaerebam quae accurate curvam quaesitam exhibeat (saltem ex suppositis quadraturis) et cujus ope ejus aequationem si quam habet, aut aliam primariam proprietatem possimus invenire. Quod ait problemata in quibus datur relatio inter duo latera Trianguli (Fig. 30) TBC, semper posse solvi,*) id verum est et ex meis quoque artibus fluit, ac saepe ne quadraturis quidem accitis, simplici analytica operatione praestari potest, ut si BC posita x, sit $TB \sqcap bx + cx^2 + dx^3$ quaeraturque qualisnam sit haec curva quae hanc tangentium habeat proprietatem, id est quaenam sit aequatio relationem exprimens inter AB seu y et BC seu x, ajo eam fore $y \sqcap bx + \frac{cx^2}{2} + \frac{dx^3}{3} \ldots$. Si fuisset $TB \sqcap a + bx + cx^2 + \ldots$ opus fuisset quadratura Hyperbolae ad inveniendam curvam quaesitam. Generaliter autem quandocunque datur relatio inter duo ex lateribus hujus trianguli, quod ego Characteristicum (ob crebros usus) vocare soleo, semper suppositis quadraturis figurarum analyticarum haberi potest curva quaesita. Quod tamen nescio an praeter Neutonium praestiturus sit quisquam; mea methodo res unius lineolae calculo peragitur ac demonstratur. Sed et infinitis casibus rem praestare possum, tametsi ipsa y ingrediatur in ipsius TB expressionem, ut si sit $TB \sqcap bx + cx^2 + dx^3 + \ldots - y$**), fiet aequatio curvae $yx \sqcap bx + \frac{cx^2}{2} + \frac{dx^3}{3} + \ldots$***) Itaque si habeatur valor ipsius TA ex BC haberi poterit curva.†)

---

*) Im vorhandenen Entwurfe hatte Leibniz ursprünglich hier geschrieben: ut si sit $TB \sqcap a + bx + cx^2$, seu $\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} \sqcap \frac{a + bx + cx^2}{x}$ etc. id verum est, nam posita $d\overline{x}$ constante, quod a nobis pendet, fiet $y \sqcap \int \overline{\frac{a + bx + cx^2}{x}}$ seu $\int \frac{a}{x} + bx + \frac{cx^2}{3}$ etc. Diese, wie die folgenden Stellen, wo Leibniz Integralrechnung gebraucht, hat er eingeschlossen, wahrscheinlich zum Zeichen, dass sie in der Abschrift auszulassen wären. Offenbar wollte er Newton in seine Bezeichnungsweise nicht einweihen!?

**) Muss vielleicht heissen: $TB \sqcap b + cx + dx^2 + \ldots - y$.

***) Wie oben steht hier: quia $\int \overline{x\,d\overline{y} + y\,d\overline{x}} \sqcap yx$.

†) Wie oben steht hier: si $\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}} \sqcap \frac{a + by + cy^2 + dy^3 \text{ etc.}}{x}$ fiet:

Quod vero addit Cl. Neutonus non aeque rem procedere, si detur relatio ipsius TB ad partem axis seu ad AB vel y; ad hoc respondeo, mihi aeque facile esse invenire unam, si detur relatio ipsius TB ad AB, quam si, ut ipse requirit, detur relatio ad BC. Generalem vero methodum Tangentium inversam nondum quod sciam habemus. Sunt et alia problematum genera, quae hactenus in potestate non habeo, quorum ecce exempla:

Sint duae aequationes $x^y + y^x \sqcap xy$ et $x^x + y^y \sqcap x + y$; duae sunt incognitae x, y, duaeque ad eas inveniendas aequationes, quaeritur valor tam unius quam alterius literae. Talia problemata vel in numeris vel in lineis solvere difficillimum arbitror; si tamen de appropinquationibus agatur, puto posse iis satisfieri. Si quam huic difficultati lucem afferre potest Neutonus pro ea qua pollet ingenii vi, multum Analysin promovebit. Analysis quoque Diophantea seu solutio problematum in numeris rationalibus nondum perfectionem nacta videtur.

Haec annotavi festinans atque inter legendum, ad reliqua majore otio opus est. Interea Celeberrimum Neutonum quaeso officiosissime a me saluta, et post actas maximas gratias eum roga, ut communicet continuationem harum serierum, nempe posita $z \sqcap ay + by^2 + cy^3 + dy^4$ etc. ait fore $y \sqcap \frac{z}{a} - b\frac{z^2}{a^3}$

$x\overline{dy} \sqcap a\overline{dx} + by\overline{dx} + cy^2\overline{dx}$; scribamus $x\overline{dy} + y\overline{dx} \sqcap a\overline{dx} + by\overline{dx} + 1y\overline{dx} + cy^2 dx$, fiet $xy \sqcap x + \int \overline{\frac{by\overline{dx}}{1y\overline{dx}} + cy^2 dx}$. $\frac{\overline{dx}}{x} \sqcap \frac{1}{a + by + cy^2 + dy^3}\overline{dy}$, posito $\overline{dy} \sqcap 1$ seu y arithmetice progredientibus fiet: $\overline{dx}\frac{1}{x} \sqcap \frac{1}{\frac{1}{a} + by + cy^2 + dy^3}$ $\overline{dy}$ seu area Hyperbol. $\sqcap \int\overline{\frac{1}{a + by \text{ etc.}}}$. Hinc ergo quandocunque valor ipsius TB habetur ex data AB sola, problema semper solubile: $\frac{\overline{dy}}{dx} \sqcap \frac{by \sqcap BT}{x \sqcap BC}$. Ergo $\frac{1}{by}\overline{dy} \sqcap \frac{1}{x}\overline{dx}$, ubi mirabile est, duabus quadraturis Hyperbolicis hoc loco solvendam esse rem aliunde manifestam, est enim aequatio ad aliquam paraboloidum, scilicet si $b \sqcap 1$, fiet $y \sqcap x$, generaliter autem fiet $y \sqcap x^6$, si $\frac{1}{by}\overline{dy} \sqcap \frac{1}{x}\overline{dx}$.

$+ \frac{2b^2 - ac}{a^5}z^3$ etc. item $y \sqcap \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7}z^5$ etc. Et si qua alia in promtu habet theoremata nonnihil generalia, quoniam ad calculum contrahendum plurimum serviunt, quod si eorum origenem sive demonstrationem addet, tanto magis obligabit. Velim etiam nosse an per extractiones in seriebus discernere possit aequationes possibiles ab impossibilibus, nam si generalis ejusmodi extractio procederet, sequeretur nullam aequationem fore impossibilem. Item quomodo inveniat diversas ejusdem aequationis radices; item an tales habeat series, quarum ope extrahendo aequationes inveniantur valores finiti quando tales insunt aequationi. Denique quid sentiat de resolutione aequationum, quales paulo ante posui, ut $x^y + y^x \sqcap xy$, et $x^x + y^y \sqcap x + y$, ubi scilicet incognita ingreditur in exponentem. Oblitus eram dicere, pulchram mihi videri cyssoidis extensionem in rectam quam Neutonus invenit, ex supposita quadratura Hyperbolae; ego mihi videor eodem modo etiam metiri posse curvam Hyperbolae aequilaterae, sed nondum omnis, neque curvam Ellipseos quantum memini.

Antequam finiam, adjiciam usum pulcherrimum serierum, qui imprimis Collinio nostro non erit ingratus. Scis magnam esse difficultatem circa extrahendas radices ex binomiis Cubicis, quando eas ingreditur quantitas negativa, ut $\underbrace{\sqrt[3]{a + \sqrt[2]{-b^2}}}_{M} + \underbrace{\sqrt[3]{a - \sqrt[2]{-b^2}}}_{N}$, ubi utraque quantitas M et N est singulatim impossibilis, summa autem ut alibi ostendi, est quantitas possibilis et realis. Ut vero ea eruatur et ut extrahatur radix, nempe ut inveniatur $\frac{z}{2} + e\sqrt[2]{-b^2} \sqcap \sqrt[3]{a + \sqrt[2]{-b^2}}$ et $\frac{z}{2} - e\sqrt[3]{-b^2} \sqcap \sqrt[3]{a - \sqrt[2]{-b^2}}$ (unde fit $\sqrt[3]{a + \sqrt[2]{-b^2}} + \sqrt[3]{a - \sqrt[2]{-b^2}} \sqcap z$) non potest adhiberi methodus Schotenii Geometriae Cartesianae subjecta, quia opus est ad eam, ut valor ipsius $\sqrt[3]{a + \sqrt[2]{-b^2}}$ exhibeatur saltem approximando, quod notis methodis impossibile est. Quis enim valorem ipsius $\sqrt[3]{-b^2}$ prope verum dabit? necesse est enim invenire $b\sqrt{-1}$. Quis autem exprimet $\sqrt{-1}$

appropinquando? Scripsi olim Collinio me remedium invenisse, quod etiam ad omnes gradus superiores valeat. Id ecce hic uno verbo: ex binomio $\sqrt[3]{a + \sqrt[2]{-b^2}}$ extraho radicem per seriem infinitam, sive per theorema Neutonianum, sive etiam more meo priore, instituendo calculum secundum naturam cujusque gradus, cum scilicet nondum theorema generale abstraxissem: quae radix ponatur esse $l + m\sqrt{-b^2} + n + p\sqrt{-b^2}$ etc. Extrahatur jam et radix ex binomio altero $\sqrt[3]{a - \sqrt[2]{-b^2}}$, fiet illa $+ l - m\sqrt{-b^2} + n - p\sqrt{-b^2}$ etc. ut facile demonstrari potest ex calculo. Ergo addendo haec duo extracta destruentur imaginariae quantitates, et fiet $z \sqcap 2l - 2n$ etc.*) Invento ergo valore ipsius z quantum satis est propinquo, quemadmodum Schotenius postulat, reliqua methodo Schoteniana, perinde ac in aliis binomiorum extrahendorum generibus transigentur.

XLIII.

Leibniz an Oldenburg.

Nuperas meas credo acceperis. Nunc istas mature summitto, ne facilitate Dn. Newtoni abutamur. Rogaveram enim in prioribus, ut quaedam suae Epistolae loca explicaret; nempe, quomodo invenisset Theoremata, quod posito $z \sqcap ay + by^2 + cy^3$ etc. fit $y \sqcap \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5} z^3$, vel [si sit $z \sqcap ay + by^3 + cy^5$ etc. erit] $y \sqcap \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7} z^5$ etc. Nunc vero, relectis ejus literis, video id facile non tantum ex ejus Extractionibus derivari, sed et altera illa methodo sub finem literarum ejus exposita inveniri; qua me quoque aliquando usum in veteribus meis schedis reperio, sed cum in exemplo, quod forte in manus meas sumpseram, nihil prodiisset elegans, solita impatientia eam porro adhibere neglexisse.

*) In dem Abdruck dieses Briefes (Leib. op. Tom. III. p. 87) findet sich hier folgender Satz: Quae sunt eae seriei portiones in quibus nulla reperitur imaginaria.

Difficultatem moveram in praecedentibus literis circa Aequationes Impossibiles, quarum Radices Possibiles videntur inveniri per series infinitas. Necdum vero illa sublata est, et meretur res excuti diligentius.

Illud tamen video, si in Aequatione data $z \sqcap ay + by^2 + cy^3$ etc. literae z et y sint indeterminatae, tunc Aequationem semper esse Possibilem: sed si z esset determinata, rursusque in ipsis a vel b etc. lateret Aequatio, posset esse Impossibilis; et tamen per seriem generalem aliqua prodire videretur Radix possibilis. Cujus difficultatis solutionem, re diligenter expensa, reperiri posse arbitror; sed nunc in ista accuratius inquirere non licet. Meretur autem explicari, tum quomodo ex seriebus agnosci possit, aequationes esse Impossibiles (quamquam id alias satis facile inveniatur), tum quomodo dignoscantur diversae Radices.

Praeter ea quae in superiore Epistola notavi, scilicet Methodum Tangentium Inversam et Geometricam (saltem suppositis Curvarum Analyticarum quadraturis) et alia id genus, deest nobis circa quadraturas, ut scire certe possimus, annon quadratura figurae alicujus propositae reducatur ad quadraturam Circuli aut Hyperbolae. Nam pleraeque figurae, hactenus tractatae, ope alterutrius quadrari potuerunt. Quod si demonstrari potest (ut arbitror) quasdam figuras non esse quadrabiles nec per Circulum nec per Hyperbolam, restat ut alias quasdam figuras primarias altiores constituamus, ad quarum quadraturam reducantur caeterae omnes, quando id fieri potest. Hoc quamdiu non fit, haeremus; et saepe per Seriem Infinitam particularem quaerimus, quod ad Circuli aut Hyperbolae aut aliam notioris figurae quadraturam reduci poterat.

Crediderat Gregorius, dimensionem Curvarum Hyperbolae et Ellipseos non pendere a quadratura Circuli aut Hyperbolae. Ego vero reperi aliquam speciem curvae Hyperbolicae, quam ex data ipsius Hyperbolae quadratura metiri possum. De caeteris nondum mihi liquet.

Hannoverae, 12 Julii 1677.
