



= β) erit $A_2B = \frac{2r^3}{r^2+x^2-2z\beta+\beta^2}$; et $A_3B - A_1B$
 sive recta $1B_2B$, erit $\frac{2r^3}{r^2+z^2-2z\beta+\beta^2} - \frac{2r^3}{r^2+z^2}$
 Sive, posita β infinite parva, (post destructiones et divisiones)
 erit $1B_3B = \frac{4r^3z\beta}{[2]r^2+z^2}$. Habita ergo recta $1B_1D$, et
 recta $1B_2B$, habebitur valor Rectanguli $1D_1B_2B$, multipli-
 catis eorum valoribus in se invicem; habebitur inquam
 $\frac{8r^5zz\beta}{[3]r^2+z^2}$, pro valore Rectanguli $1D_1B_2B$.

Sit jam Curvae $1P_2P_3P$ etc. natura pro arbitrio assumpta
 talis, ut Ordinata ejus $1N_1P$ (ex data abscissa Q_1N sive z)
 sit $\frac{8r^5z^2}{[3]r^2+z^2}$. Ideo, quoniam $1N_2N = \beta$, erit rectangulum
 $1P_1N_2N$, etiam $\frac{8r^5z^2\beta}{[3]r^2+z^2}$. Ac proinde aequale Rectangulo
 $1D_1B_2B$, et spatium $1P_1N_2N_3P_3P_1P$ aequale spatio
 Circulari respondenti $1D_1B_2B_2D_2D_1D$. Est autem quaelibet
 Ordinata NP rationalis, ex data abscissa QN ; quia, posita

$$QN = z, \text{ Ordinata NP est } \frac{8r^5z^2}{[3]r^2+z^2}, \text{ sive}$$

$\frac{8r^5z^2}{r^6+3r^4z^2+3r^2z^4+z^6}$. Ergo ipsa per infinitam Seriem
 Integrorum exprimi potest, dividendo. Et Spatium talibus Ordi-
 natis comprehensum, aequipollens Circulari, infinita Serie nume-
 rorum Rationalium, Methodo Mercatoris quadrari potest. Quod
 cum facillimum sit, facere hic omitto. Neque enim elegantiae
 suae, sed Methodi generalis explicandae causa, hoc exemplum
 assumpsi.

Ita siquis loco Circuli mihi dedisset Curvam, in qua Ordinata
 ascendisset ad gradum Cubicum, potuissem eam reducere ad
 Curvam, in qua Ordinata non assurrexisset ultra Quadratum,
 vel etiam ne quidem ad Quadratum.

Itaque semper, sive Extractionibus Radicum Newtonianis
 (gradus cujuslibet dati) vel Divisionibus Mercatoris, poterit cujus-
 libet Figurae spatium inveniri, interventu alterius Aequipollentis.
 Multum autem ad simplicitatem interest quid eligas.

Omnium vero possibilium Circuli, et Sectoris Conici Cen-
 trum habentis cujuslibet, per Series Infinitas quadraturarum
 simplicissimam hanc esse dicere ausim, quam nunc subjicio.

Sit QA_1F (Fig 17) Sector, duabus reclus in Centro Q con-
 currentibus, et Curva Conica A_1F_1 ad Verticem A sive Axis
 extremum perveniente, comprehensus. Tangenti Verticis AT oc-
 currat Tangens $1FT$. Ipsam AT vocemus t ; et Rectangulum
 sub Semilatere Recto in Semilatus Transversum sit Unitas.
 Erit Sector Hyperbolae, Circuli, vel Ellipseos, per Semilatus
 Transversum divisus, = $\frac{t}{1} \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7}$ etc. signo ambi-
 guo \pm , valente $+$ in Hyperbola, $-$ in Circulo vel Ellipsi. Unde,
 posito Quadrato Circumscripto 1 , erit Circulus $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$
 $- \frac{1}{7}$ etc. Quae expressio, jam Triennio abhinc et ultra a me
 communicata amicis, haud dubie omnium possibilium simplicissima
 est maximeque afficiens mentem.

Unde duco Harmoniam sequentem;

$$\begin{array}{cccccccccccc} \frac{1}{3} & \frac{1}{8} & \frac{1}{15} & \frac{1}{24} & \frac{1}{35} & \frac{1}{48} & \frac{1}{63} & \frac{1}{80} & \frac{1}{99} & \frac{1}{120} & \text{etc.} & = & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & & \frac{1}{15} & & \frac{1}{35} & & \frac{1}{63} & & \frac{1}{99} & & \frac{1}{120} & \text{etc.} & = & \frac{2}{4} \\ & \frac{1}{8} & & \frac{1}{24} & & \frac{1}{48} & & \frac{1}{80} & & \frac{1}{120} & \text{etc.} & = & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{35} & \frac{1}{99} & \text{etc.} & \left. \begin{array}{l} \text{Exprimit} \\ \text{Fig. 18.} \end{array} \right\} & \left(\begin{array}{l} \text{Circuli } A B C D, \\ \text{Hyperbola caequila-} \\ \text{terae } CBEFC, \text{ Fig. 18.} \end{array} \right) & \left. \begin{array}{l} \text{Cujus Quadratum} \\ \text{Inscriptum est } \frac{1}{4} \end{array} \right\} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{48} & \frac{1}{120} & \text{etc.} & \left. \begin{array}{l} \text{arcum} \end{array} \right\} & & & & & & & & & & \end{array}$$

Numeri 3, 8, 15, 24, etc. sunt Quadrati Unitate minuti.
 Vicissim, ex Seriebus Regressuum pro Hyperbola hanc in-
 veni. Si sit numerus aliquis Unitate minor $1 - m$, ejusque Lo-
 garithmus Hyperbolicus 1 , erit $m = \frac{1}{1} - \frac{1^3}{1 \times 2} + \frac{1^5}{1 \times 2 \times 3}$
 $- \frac{1^7}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ etc. Si numerus sit major Unitate, ut $1 + n$, tunc
 pro eo inveniendi mihi etiam prodit Regula, quae in Newtoni
 Epistola expressa est; scilicet erit $n = \frac{1}{1} + \frac{1^3}{1 \times 2} + \frac{1^5}{1 \times 2 \times 3}$
 $+ \frac{1^7}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ etc. Prior tamen celerius appropinquat. Ideoque
 efficio ut ea possim uti, etiam cum major est Unitate numerus
 $1 + n$. Nam idem est Logarithmus pro $1 + n$ et pro $\frac{1}{1+n}$.



Unde, si $1 + n$ major Unitate, erit $\frac{1}{1+n}$ minor Unitate. Fiat ergo $1 - m = \frac{1}{1+n}$, ac inventa m , habebitur et $1 + n$, numerus quaesitus.

Quod regressum ex Arcubus atinet, incideram ego directe in Regulam quae ex dato Arcu, Sinuum Complementi exhibet. Nempe, Sinus Complementi $= 1 - \frac{a^2}{1 \times 2} + \frac{a^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ etc. Sed postea quoque deprehendi, ex ea illam nobis communicatam pro inveniend Sinu Recto, qui est $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{a^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$ etc. posse demonstrari. Quod tribus Verbis sic fit. Summa Sinuum Complementi ad Arcum, seu omnium $1 - \frac{a^2}{1 \times 2} + \frac{a^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ etc. est $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{a^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$ etc. Porro, Summa Sinuum Complementi ad Arcum (seu Arcui in locis debitis insistentium) aequatur Sinui Recto, ducto in Radium; ut notum est Geometris. Id est, aequatur ipsi Sinui Recto, quia Radius hic est Unitas. Ergo Sinus Rectus $= \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{a^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$ etc. Hinc etiam ex dato Arcu et Radio, sine ulla prorsus aliorum notitia, haberi potest Area Segmenti Circularis duplicati: quae est $\frac{a^3}{1 \times 2 \times 3} - \frac{a^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{a^7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}$ etc. Unde optime Segmentorum Tabula ad Gradus et Minuta etc. calculabitur.

Pro Trigonometricis autem operationibus, percommoda mihi videtur haec expressio: Ut Sinus Complementi c ponatur $= 1 - \frac{a^2}{1 \times 2} + \frac{a^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$; quoniam, sola memoria retenta, omnibus casibus et operationibus, directis scilicet simul et reciprocis, sufficit; Quod ideo fit, quoniam Aequatio $c = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24}$ est Plana. Unde si vicissim quaeras Arcum, ex Sinu Complementi radix extrahi potest; adeoque fiet Arcus $a = \sqrt{6 - \sqrt{24c + 12}}$ exacto satis ad usum eorum qui in itineribus Tabularum commoditate carent; quia error aequationis non est $\frac{a^6}{720}$.

Innumera alia possent dici, quae his fortasse elegantia et exactitudine non cederent. Sed ego ita sum comparatus ut plerumque, Methodis Generalibus detectis, rem in potestate habere contentus, reliqua libenter aliis relinquam. Neque enim ista omnia magnopere aestimanda sunt, nisi quod artem inveniendi perficiunt, mentemque excolunt. Si quae obscuriora videbuntur, ea libenter elucidabo: Et illud quoque explicabo, quomodo hac methodo Aequationum quoque, utcumque affectarum, Radices per Infinitam Seriem dari possint, sine ulla Extractione; quod mirum fortasse videbitur.

Sed desideraverim ut Clarissimus Newtonus nonnulla quoque amplius explicet: Ut, Originem Theorematis quod initio ponit: Item. Modum quo quantitates p, q, r , in suis Operationibus invenit: Ac denique, Quomodo in Methodo Regressuum se gerat; ut, cum ex Logarithmo quaerit numerum. Neque enim explicat quomodo id ex Methodo sua derivetur.

Nondum mihi licuit ejus Literas qua merentur diligentia legere: Quoniam tibi e vestigio respondere volui. Unde non satis nunc quidem affirmare ausim, an nonnulla eorum quae suppressit, ex sola earum lectione consequi possim. Sed optandum tamen foret, ipsum ea potius supplere Newtonum: Quia credibile est, non posse eum scribere, quin aliquid semper praecleari nos doceat Vir (ut apparet) egregiarum meditationum plenus.

Ad alia tuarum literarum venio, quae Doctissimus Collinius communicare gravatus non est. Vellem adjecisset appropinquationis Gregoriana linearis Demonstrationem. Credo tamen aliam haberi simpliciorum, etiam in infinitum euntem: quae fiat sine ulla Bisectione Anguli; imo, sine supposita Circuli Constructione; solo Rectarum ductu.

Vellem Gregoriana omnia conservari. Fuit enim his certe studiis promovendis aptissimus. Caeterum ejus Demonstrationi editae, de Impossibilitate Quadraturae Absolutae Circuli et Hyperbolae, multa haud dubie desunt.

De Aequationum Radicibus Surdis Generalibus inveniendis, sive, quod idem est, tollendis Aequationum potestabilibus intermediis, multa et ego meditatatus sum, et jam Vere anni superioris Specimina Hugenio communicaveram Regularum Cardanicis similia. Seriem enim habebam ejusmodi Regularum in infinitum euntem; in quibus et Cardanica continebatur. Sed ultra gradum Cubicum non erant Generales Perspexi tamen inde veram Me-



thodum progrediendi longius. Quamquam multis adhuc opus sit artibus, quas excutiendas libenter ingeniosissimo Tschirnhausio relinquo, qui hic ad eadem quae ego habebam Specimina, imo et alia praeterea, etiam de suo peruenit.

Ex iis quae Collinius ait de Gregoriana Methodo, difficile non fuit nobis certo divinare in quo consistat ejus substantia.

Imaginariorum quantitatuum in Realium Radicum expressiones ingredientium sublacionem, frustra putem sperari, imo quaeri. Neque enim illae ullo modo vel Calculis vel Constructionibus obsunt: Et Verae Realesque sunt Quantitates, si inter se conjunguntur, ob destructiones virtuales. Quod multis elegantibus Exemplis et Argumentis deprehendi.

Exempli gratia, $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$. Tametsi enim neque ex Binomio $\sqrt{1+\sqrt{-3}}$, neque ex Binomio $\sqrt{1-\sqrt{-3}}$, radix extrahetur; nec proinde sic destructur imaginaria $\sqrt{-3}$; supponenda tamen est destructa esse virtualiter, quod actu appareret si fieri posset Extractio. Alia tamen via haec summa reperitur esse $\sqrt{6}$. Unde in Cubicis Binomiis ubi realitas ejusmodi formularum (tunc cum Extractio ex singulis Binomiis fieri nequit) ad oculum ostendi non potest; mente tamen intelligitur. Quare frustra Cartesius alique expressiones Cardanicas pro particularibus habuere. Siquis posset invenire Quadraturam Circuli, et ejus Partium, ex data Hyperbola et ejus Partium quadratura; is posset eas tollere; modo in ipsam Quadraturam Imaginariae illae non rursus ingrediantur.

Caeterum ex illis quas habeo meditationibus circa Radices aequationum Irrationales, necessario sequitur res satis paradoxa: Scilicet omnes Aequationes gradus Octavi, Noni, Decimi, posse ad gradum Septimum reduci. Itaque et omnia Problemata ad Decimum gradum usque occurrentia, possunt ad Septimum deprimi.

Horribiles Calculi subeundi erunt illi, qui in hoc Argumentum velut per vim irrumpet; sed facillimi ipsi, qui ante meditabitur: cum, ut praevideo, ipsa natura rei ducat ad compendia quaedam, per quae spes est Calculi magnam partem absceindi, remque elegantibus artificijs, Ingenii potius vi quam Calculi labore, transigi posse.

Sed si quis laborem non subterfugeret, eum docere possum Methodum Analyticam generalem infallibilem, per quam omnium Aequationum radices generales invenire liceret.

Verum meliora illis proponerem agenda, qui Calculo delectarentur. Consilium enim habeo Tabularum Analyticarum, quae non minoris futurae essent usus in Analyti, quam Tabulae Sinuum in Geometria Practica; imo, arbitror, qui paulum in iis calculandis versatus sit, eum progressionem reperiendum in infinitum, quarum ope magna Tabulae pars sine labore continuari possit. Nihil est quod norim in tota Analyti momenti majoris. Nam in his Tabulis pleraque Problemata statim soluta haberentur, aut levi opera possent inde deduci.

Pendet negotium ex re longe majore; Arte scilicet Combinatoria generali ac vera, cujus vim ac potestatem nescio an quisquam hactenus sit consequutus. Ea vero nihil differt ab Analyti illa suprema, ad cujus intima, quantum judicare possum, Cartesius non pervenit. Est enim ad eam constituendam opus Alphabeto Cogitationum humanarum. Et ad inventionem ejus Alphabeti, opus est Analyti Axiomatum. Sed non miror ista nemini satis considerata: Quia plerumque facilia negligimus; et multa, quae clara videntur, assumimus. Quod quandiu faciemus, nunquam ad illud pervenimus, quod mihi videtur in rebus intellectualibus summum; nec genus Calculi, etiam non-Mathematicis accommodati, obtinebimus.

Optarim Cl. Pellium generalia sua Meditata, et illud speciatim quod memoras Cribrum Eratosthenis, non suppressere. Nam etsi omnia forte, quae destinarat, non absolverit; Meditata tamen ipsa, et consilia egregiorum Virorum non perire, publici interest. Utilia quoque futura sunt, quae de Sinuum Tabula ad Aequationes accommodanda habet. Item de Limitibus et Radicibus.

Quod dicere videmini, plerasque difficultates (exceptis Problematis Diophanteis) ad Series Infinitas reduci; id mihi non videtur. Sunt enim multa usque adeo mira et implexa, ut neque ab Aequationibus pendeant, neque ex Quadraturis. Qualia sunt (ex multis alijs) Problemata methodi Tangentium inversae; quae etiam Cartesius in potestate non esse fassus est.

In tomo 3. Epistolarum, una habetur ad Beonium; in qua, ad proposita a Beonio, Curvas quasdam invenire conatur; quarum una est Ludus Naturae, ut intervallum inter Tangentem ad (axem) directricem usque productam, et ordinatim applicatam, ex Curva ad directricem, sit semper idem; recta scilicet constans. Hanc Curvam nec Cartesius nec Beonius nec quisquam alius (quod sciam) invenit. Ego vero qua primum die, imo hora, coepi quaerere, statim



certa Analysisi solvi. Fateor tamen nondum me quicquid in hoc genere desiderari potest consecutum: quamquam maximi momenti esse sciam. Ac de his quidem nunc satis.

Ego id agere constitui, ubi primum otium nactus ero, ut rem omnem Mechanicam reducam ad puram Geometriam; Problemataque circa Elateria, et Aquas et Pendula, et Projecta, et Solidorum Resistentiam, et Frictiones, etc. definiam. Quae hactenus attingit nemo. Credo autem rem omnem nunc esse in potestate; ex quo circa Regulas Motuum mihi penitus perfectis demonstrationibus satisfeci; neque quicquam amplius in eo genere desidero. Tota autem res, quod mireris, pendet ex Axiomate Metaphysico pulcherrimo; quod non minoris est momenti circa Motum, quam hoc, Totum esse majus parte, circa Magnitudinem.

De Centro baricis quoque singularem quandam aditum reperi ad novas ac plane a prioribus diversas contemplationes, in Geometria pariter ac Mechanica, magno usui futuras. Haec ubi (Deo volente) absolvero; reliquum temporis, quod scilicet Philosophicis meditationibus destinare fas erit, Naturae indagacioni debeo.

Tschirnhausius proximo Tabellione scribet.

XXXVIII.

Newton an Leibniz*).

Cantabr. Octob. 24. 1676.

Quanta cum voluntate legi Epistolas clarissimorum virorum D. Leibnizii et D. Tschirnhausii, vix dixerim. Perelegans sane est Leibnizii methodus perveniendi ad series convergentes, et satis ostendisset ingenium Authoris, etsi nihil aliud scripisset. Sed quae alibi per Epistolam sparguntur suo nomine dignissima, efficiunt etiam, ut ab eo speremus maxima. Diversitas modorum, quibus eodem tenditur, eo magis placuit, quod mihi tres methodi perveniendi ad ejusmodi series innoverant, adeo ut novam nobis communicandam vix expectarem. Unam e meis prius descripsi; jam addo aliam, illam scilicet qua primum incidi in has series: nam incidi in eas antequam scirem divisiones et

*) Oldenburg hat bemerkt: Copied Nov. 4. 1676. — Dieses Schreiben ist bereits gedruckt.

extractiones radicum quibus jam utor. Et hujus explicatione pandendum est fundamentum Theorematis sub initio Epistolae prioris positi, quod D. Leibnizius a me desiderat.

Sub initio studiorum meorum Mathematicorum, ubi incidere in opera celeberrimi Wallisii nostri, considerando series, quarum intercalatione exhibet aream circuli et hyperbolae, utpote quod in serie curvarum, quarum basis sive axis communis sit x , et ordinatim applicatae

$$\sqrt{1-xx}^{\frac{1}{2}}, \sqrt{1-xx}^{\frac{1}{3}}, \sqrt{1-xx}^{\frac{1}{4}}, \sqrt{1-xx}^{\frac{1}{5}}, \sqrt{1-xx}^{\frac{1}{6}}, \sqrt{1-xx}^{\frac{1}{7}}, \text{ etc. si areae alternarum, quae sunt } x, x - \frac{1}{3}x^3,$$

$x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5, x - \frac{3}{5}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$ etc. interpolari possent, haberemus areas intermediarum, quarum prima

$\sqrt{1-xx}^{\frac{1}{2}}$ est circulus: ad has interpolandas notabam quod in omnibus primis terminis esset x , quodque secundi termini $\frac{0}{8}x^3, \frac{1}{3}x^3, \frac{2}{3}x^3, \frac{3}{3}x^3$ etc. essent in arithmetica progressionem; et proinde quod duo primi termini serierum intercalandarum deberent esse $x - \frac{1}{3}x^3, x - \frac{2}{3}x^3, x - \frac{3}{3}x^3$ etc.

Ad reliquas intercalandas considerabam, quod denominatores 1, 3, 5, 7 etc. erant in arithmetica progressionem adeoque solae numeratorum coefficientes numerales restabant investigandae. Hae autem in alternis datis areis erant figurae potestatum

numeri 4!, nempe harum $\sqrt{4!}^0, \sqrt{4!}^1, \sqrt{4!}^2, \sqrt{4!}^3, \sqrt{4!}^4$, hoc est, primo 4; dein 4, 4; tertio 4, 2, 4; quarto 4, 3, 3, 4; quinto 4, 4, 6, 4, 4 etc.

Quaerebam itaque, quomodo in his seriebus ex datis duabus primis figuris reliquae derivari possent, et inveni, quod posita secunda figura m , reliquae producerentur per continuam multiplicationem terminorum hujus seriei, $\frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5}$ etc.

E. gr. sit $m = 4$, et erit $4 \times \frac{m-1}{2}$, hoc est 6, tertius terminus; et $6 \times \frac{m-2}{3}$ hoc est 4, quartus; et $4 \times \frac{m-3}{4}$



hoc est 4, quintus; et $4 \times \frac{m-4}{5}$ hoc est 0, sextus, quo series in hoc casu terminatur. Hanc regulam itaque applicui ad series interserendas, et cum pro circulo secundus terminus esset $\frac{4x^3}{3}$, posui $m = \frac{1}{2}$ et prodierunt termini $\frac{4}{2} \times \frac{4-1}{2}$ sive $-\frac{4}{8}$, $-\frac{4}{8} \times \frac{4-2}{3}$ sive $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{16} \times \frac{4-3}{4}$ sive $-\frac{5}{128}$, et sic in infinitum. Unde cognovi, desideratam aream segmenti circularis esse: $x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{7}x^4 - \frac{1}{9}x^5$ etc.

Et eadem ratione prodierunt etiam interserendae areae reliquarum curvarum, ut et area hyperbolae et ceterarum alternarum in hac serie $\sqrt{1+xx}$, $\sqrt{1+xx}^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{1+xx}^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{1+xx}^{\frac{3}{4}}$ etc. Et eadem est ratio intercalandi alias series idque per intervalla duorum pluriumve terminorum simul deficientium. Hic fuit primus meus ingressus in has meditationes; qui e memoria sane exciderat, nisi oculos in adversaria quaedam ante paucas septimanas retulisset.

Ubi vero haec didiceram, mox considerabam terminos $\sqrt{1-xx}^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{1-xx}^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{1-xx}^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{1-xx}^{\frac{1}{5}}$ etc., hoc est 4, $4 - xx$, $4 - 2xx + x^4$, $4 - 3xx + 3x^4 - x^6$ etc., eodem modo interpolari posse ac areas ab ipsis generatas: et ad hoc nihil aliud requiri quam omissionem denominatorum 4, 3, 5, 7 etc. in terminis exprimentibus areas; hoc est coefficientes terminorum quantitatis intercalandae $\sqrt{1-xx}^{\frac{1}{2}}$, vel $\sqrt{1-xx}^{\frac{1}{3}}$ vel generaliter $\sqrt{1-xx}^m$, prodire per continuam multiplicationem terminorum hujus seriei $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ etc. Adeo ut e. gr. $\sqrt{1-xx}^{\frac{1}{2}}$ valeret $4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$ etc. et $\sqrt{1-xx}^{\frac{1}{3}}$ valeret $4 - \frac{3}{2}xx + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6$ etc. et $\sqrt{1-xx}^{\frac{1}{4}}$ valeret $4 - \frac{1}{3}xx - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6$ etc. Sic itaque innotuit mihi generalis reductio radicalium in infinitas series per regulam illam, quam posui initio epistolae prioris, antequam scirem extractionem radicum. Sed hac cognita non potuit altera me diu latere: nam, ut probarem has operationes, multiplicavi $4 - \frac{1}{2}x^2$

$-\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$ etc. in se, et factum est $4 - xx$; terminis reliquis in infinitum evanescentibus per continuationem seriei. Atque ita $4 - \frac{1}{3}xx - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6$ etc. bis in se ductum produxit etiam $4 - xx$. Quod, ut certa fuerit harum conclusionum demonstratio, sic me manuduxit ad tentandum e converso, num hae series, quas sic constitit esse radices quantitatis $4 - xx$, non possent inde extrahi more arithmetico. Et res bene successit. Operationis forma in quadraticis radicibus haec erat,

$$4 - xx \left(4 - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 \text{ etc.} \right)$$

$$\frac{1}{0 - xx}$$

$$\frac{-xx + 4x^4}{0 - \frac{1}{2}x^2}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{8}x^6}{0 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4}$$

His perspectis neglexi penitus interpolationem serierum, et has operationes tanquam fundamenta magis genuina solummodo adhibui. Nec latuit reductio per divisionem, res utique facilior. Sed et resolutionem affectarum aequationum mox aggressus sum, eamque obtinui: Unde simul ordinatim applicatae, segmenta axium, aliaeque quaelibet rectae ex arcis curvarum vel arcibus datis innotuere. Nam regressio ad haec nihil indigebat praeter resolutionem aequationum, quibus areae vel arcus ex datis rectis dabantur.

Eo tempore pestis ingruens coegit me hinc fugere, et alia cogitare: addidi tamen subinde condituram quandam Logarithmorum ex area Hyperbolae, quam hic subjungo. Sit dFD hyperbola (Fg. 19), cujus centrum C, vertex F, et quadratum interjectum CAFE = 4. In CA cape AB, Ab, hinc inde = $\frac{1}{10}$ sive 0.1, et erectis perpendicularibus BD, bd ad hyperbolam terminatis, erit semisumma spatiorum AD et Ad = $0.4 + \frac{0.001}{3} + \frac{0.00001}{5} + \frac{0.0000001}{7}$ etc. et semidifferentia = $\frac{0.01}{2} + \frac{0.0001}{4} + \frac{0.000001}{6} + \frac{0.00000001}{8}$ etc. quae reductae sic se habent,



0.400000000000	0.005000000000
3333333333	250000000
20000000	4666666
442857	12500
444	400
9	1
0.4003353477310	0.0050254679267

Horum summa 0.1033605156577 est Ad, et differentia 0.0953404798043 est A D. Et eadem ratione positus A B, Ab hinc inde = 0.2, obtinebitur Ad = 0.2234435543142, et A D = 0.1823215567939.

Habitis sic Logarithmis Hyperbolicis numerorum quatuor decimalium 0.8, 0.9, 1.1, 1.2; cum sit $\frac{1.2}{0.8} \times \frac{1.2}{0.9} = 2$, et 0.8 et 0.9 sint minores unitate: adde logarithmos illorum ad duplum logarithmi 1.2 et habebis 0.6934471805597, logarithmum hyperbolicum numeri 2. Cujus triplo adde log. 0.8, siquidem sit $\frac{2 \times 2 \times 2}{0.8} = 10$, et habebis 2.3025850929933

logarithmum numeri 10, indeque per additionem simul prodeunt logarithmi numerorum 9 et 44; adeoque omnium primorum 2, 3, 5, 11, logarithmi in promptu sunt. Insuper ex sola depressione numerorum superioris computi per loca decimalia, et additione, obtinentur Logarithmi decimalium 0.98, 0.99, 1.01, 1.02, ut et horum 0.998, 0.999, 1.001, 1.002, et inde per additionem et subtractionem prodeunt Logarithmi primorum 7, 13, 17, 37 etc. qui una cum superioribus per log. num. 10 divisi evadunt veri Logarithmi, in Tabulam inserendi. Sed hos postea propius obtinui.

Pudet dicere ad quot figurarum loca has computationes otiosas eo tempore perduxi. Nam tunc sane nimis delectabar inventis hisce. Sed ubi prodit ingeniosa illa N. Mercatoris Logarithmotechnia (quem suppono sua primum invenisse) coepi ea minus curare, suspicatus vel eum nosse extractionem radicum aequae ac divisionem fractionum, vel alios saltem, divisione patefacta, inventuros reliqua, priusquam ego aetatis essem matura ad scribendum. Eo ipso tamen tempore, quo liber iste prodit, communicatum est ab amico ad D. Collinsium, Compendium *) quod

*) Es ist dies die Abhandlung: De Analysis per aequationes numero terminorum infinitas, die erst nach Newton's Tode durch den Druck veröffentlicht wurde. Sie findet sich in Newton. opusc. ed. Castillon. Tom. I. p. 1. sqq.

dam methodi harum serierum, in quo significaveram, areas et longitudo curvarum omnium et solidorum superficies et contenta ex datis rectis, vice versa ex his datis rectas determinari posse, et methodum ibi indicatam illustraveram diversis seriis. Suborta deinceps inter nos Epistolari consuetudine, D. Collinsius, vir in rem mathematicam provehendam natus, non destitit suggerere, ut haec publici juris facerem: Et ante annos quinque cum, suadentibus amicis, consilium coeperam edendi Tractatum de refractione Lucis et Coloribus, quem tunc in promptu habebam, coepi de his seriis iterum cogitare, et tractatum de iis etiam conscripsi ut utrumque simul ederem. Sed ex occasione Telescopii catadioptrici Epistola ad te missa, qua breviter explicui conceptus meos de natura Lucis, inopinatum quiddam effecit. ut mei interesse sentirem ad te festinanter scribere de impressione istius Epistolae. Et subortae statim per diversorum Epistolas, objectionibus aliisque refertis, crebrae interpellationes me prorsus a consilio deterruerunt, et effecerunt, ut me arguerem imprudentiae quod umbram captando eatenus perdideram quietem meam, rem prorsus substantialem.

Sub eo tempore Gregorius ex unica tantum serie quadam e meis quam D. Collinsius ad eum transmiserat, post multam considerationem, ut ad Collinsium rescripsit, pervenit ad eandem methodum, et tractatum de ea reliquit, quem speramus ab amicis ejus editum iri. Siquidem pro ingenio, quo pollebat, non potuit non adicere de suo nova multa, quae rei mathematicae interest ut non pereant. Ipse autem tractatum meum non penitus absolveram, ubi destiti a proposito; neque in hunc usque diem mens rediit ad reliqua adjicienda. Deerat quippe pars illa, qua deereveram explicare modum solvendi Problemata, quae ad quadraturas reduci nequeunt, licet aliquid de fundamento ejus posuissem.

Ceterum in tractatu isto series infinitae non magnam partem obtinebant. Alia haud pauca congeffi, inter quae erat methodus ducendi tangentes, quam solertissimus Slusius ante annos duos tresve tibi communicavit; de qua tu, suggerente Collinsio, rescripsisti, eandem mihi etiam innotuisse. Diversa ratione in eam incidimus. Nam res non eget demonstratione, prout ego operor. Habito meo fundamento nemo potuit tangentes aliter ducere, nisi volens de recta via deviare. Quin etiam non hic haeretur ad aequationes radicalibus, unam vel utramque indefinitam



quantitatem involventibus, utemque affectas; sed absque aliqua talium aequationum reductione (quae opus plerumque redderet immensum) tangens confestim ducitur. Et eodem modo se res habet in quaestionibus de Maximis et Minimis, aliisque quibusdam, de quibus jam non loquor. Fundamentum harum operationum, satis obvium quidem, quoniam jam non possum explicationem ejus prosequi, sic potius celavi, Gaecdaoc43eff7i319n4o4qrr4s8(12vx. *) Hoc fundamentum conatus sum etiam reddere speculationes de Quadratura curvarum simpliciores, pervenique ad Theoremata quaedam generalia. Et ut candide agam, ecce primum Theorema.

Ad**) curvam aliquam sit $dz \sqrt{e + fz^2}$ ordinatim applicata, termino diametri seu basis z normaliter insistens: ubi

*) Dies hodie: Data aequatione quocunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, et vice versa.

**) Leibnitz hat hier am Rande des Briefes bemerkt:

$$\int dz z^m \sqrt{e + fz^2}, \quad \int dz z^m \omega^n = \Theta, \quad \omega = e + fz^2, \quad d\omega = fh \cdot z^{h-1} dz,$$

$$z = \frac{\omega - e}{f} \sqrt{\frac{1-h}{h}} \quad \text{et} \quad dz = d\omega : fh \frac{\omega - e}{f} \sqrt{\frac{1-h}{h}} \quad \text{et}$$

$$\Theta = \int \frac{\omega - e}{f} \sqrt{\frac{1-h+m}{h}} \omega^n d\omega.$$

Ita res: reducta ad terminos simpliciores, itaque si sit $1-h+m$, $h=g$, fiet $\Theta = \int \frac{\omega - e}{f} \sqrt{\frac{g}{h}} \omega^n d\omega$, unde si g sit integer habetur solutio absoluta, quae videtur esse theorematis hic scripti origo. Si loco z^m affuisset

$$z^m \sqrt{r|b + dz^c} \text{ prodiisset } \Theta = \int, \quad \frac{\omega - e}{f} \sqrt{\frac{g}{h}} \omega^n, \quad \sqrt{r|b + d \cdot \frac{\omega - e}{f} c|h},$$

Ergo si g = rationali, tunc $\int dz z^m \cdot b + d \cdot z^c \cdot e + f \cdot z^h$ reducitur ad aliquot finitas ω^n , $b + d \cdot \frac{\omega - e}{f} c|h$.

Haec maximi momenti. Si $h=1$, fit g integer, posito m integro Sed hinc nihil lucratur. Si faciamus $v = \sqrt{e + fz^2}$, fiet $v^{1:n} - e = f \cdot z^2$ et $\frac{1:n-1}{v} dv : nf = h \cdot z^{h-1} dz$ et $z = \sqrt{\frac{1:n}{h} - e} : f \sqrt{1:h}$ et $dz = \frac{dv}{hnf} \cdot \frac{1:n-1}{v}$ in $\frac{1:n}{v} - e : f \sqrt{\frac{1:n}{h}}$ et fit $\int dz \cdot z^m \cdot e + fz^2 \cdot b + dz^c$, et $dz \cdot z^m \cdot e + fz^2$ etc

literae d, e, f denotant quaelibet quantitates datas, et $\mathcal{S}, \eta, \lambda$, indices potestatum sive dignitatum quantitatum, quibus affixae sunt. Fac $\frac{\mathcal{S}+1}{\eta} = r, \lambda \times r = s, \frac{d}{\eta^1} + \frac{1}{e + fz^2} \lambda + 1 = Q,$

et $r\eta - \eta = \pi$, et area curvae erit Q in $\frac{z^\pi}{s} - \frac{r-1}{s-1} \times \frac{eA}{fz^7}$ + $\frac{r-2}{s-2} \times \frac{eB}{fz^7} - \frac{r-3}{s-3} \times \frac{eC}{fz^7} + \frac{r-4}{s-4} \times \frac{eD}{fz^7}$ etc. literis A, B, C, D etc. denotantibus terminos proxime antecedentes, nempe A terminum $\frac{z^\pi}{s}$, B terminum $-\frac{r-1}{s-1} \times \frac{eA}{fz^7}$ etc. Haec

series, ubi r fractio est vel numerus negativus, continuatur in infinitum: ubi viro r integer est et affirmativus, continuatur ad tot terminos tantum quot sunt unitates in eodem r, et sic exhibet geometricam quadraturam curvae. Rem exemplis illustro.

Ex. 1. Proponatur Parabola, cujus ordinatim applicata sit \sqrt{az} ; haec in formam Regulae reducta, fit $z^0 \times \sqrt{0 + az}^{\frac{1}{2}}$ quare est $d = 1, \mathcal{S} = 0, e = 0, f = a, \eta = 1, \lambda = \frac{1}{2}$. Adeoque $r = 1, s = 1\frac{1}{2}, Q = \frac{1}{2} \times \sqrt{az}^{\frac{1}{2}}, \pi = 0$. Et area quaesita $\frac{1}{a} + \sqrt{az}^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$, hoc est $\frac{2}{3}z\sqrt{az}$; et sic in genere, si cz^η ponatur ordinatim applicata, prodibit area $\frac{c}{\eta+1} z^{\eta+1}$.

Ex. 2. Sit ordinatim applicata $\frac{a^2z}{c^4 - 2ccz + z^4}$. Haec per reductionem fit $a^2z \times \frac{1}{cc - zz}^2$ vel etiam $a^2z^{-3} \times \frac{1}{-1 + ccz^{-2}}^2$. In priori casu est $d = a^4, \mathcal{S} = 1, e = cc, f = -1, \eta = 2, \lambda = -2$, adeoque $r = 1, s = -1, Q = \frac{a^4}{-2} \times \frac{1}{cc - zz}^{-1}$, hoc est $= \frac{-a^4}{2cc - 2zz}$, $\pi = 0$. Et

$= \frac{dv}{hmf} \frac{1:n}{v^{1:n}} \text{ in } v^{1:n} - e : f \sqrt{\frac{1-h+m}{h}}$ in $b + d \frac{1:n}{v^{1:n} - e} \sqrt{\frac{1-h+m}{h}}$, ita revera, posito $\frac{1-h+m}{h}$ esse integrum, obtenda est depressio. Si h sit 1, quantitate sub irrationali contenta resoluta in plures divisores, et unum ex his irrationalem ponendo v , habetur depressio.



area curvae = Q in $\frac{z^0}{1}$ id est = $\frac{a^4}{2cc - 2zz}$. In secundo autem casu est $d = a^4$, $\mathcal{S} = -3$, $e = -4$, $f = cc$, $\eta = -2$, $\lambda = -2$, $r = 1$, $s = -1$, $Q = \frac{a^4}{-2cc} \times \frac{1}{-1 + ccz^{-1}}$ ⁻¹
 id est = $\frac{-a^4zz}{2c^4 - 2cczz}$, $\pi = 0$. Et area = Q in $\frac{z^0}{1}$, hoc est = $\frac{a^4zz}{2c^4 - 2cczz}$. Area his casibus diversimode exhibetur, quatenus computatur a diversis finibus, quorum assignatio per hos inventos valores arearum facilis est.

Exempl. 3. Sit ordinatim applicata $\frac{a^3}{z^3} \sqrt{bz + zz}$, hoc est, per reductionem ad debitam formam, vel $a^{\frac{3}{2}} z^{-\frac{3}{2}} \times \sqrt{b + z}$ vel $a^{\frac{3}{2}} z^{-4} \times \sqrt{1 - bz^{-1}}$ ¹. Et erit in priori casu $d = a^3$, $\mathcal{S} = -\frac{9}{2}$, $e = b$, $f = 1$, $\eta = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, adeoque $r = -\frac{7}{2}$ etc. quare cum r non sit numerus affirmativus, procedo ad alterum casum; hic est $d = a^3$, $\mathcal{S} = -4$, $e = 1$, $f = b$, $\eta = -1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, adeoque $r = 3$, $s = 3\frac{1}{2}$, $Q = \frac{a^3}{-b} \times \sqrt{1 + bz^{-1}}$ ¹ seu = $-\frac{a^3z + a^3b}{bzz} \sqrt{zz + bz}$, $\pi = -2$. Et area = Q in $\frac{z^{-1}}{3\frac{1}{2}}$ - $\frac{2}{2\frac{1}{2}} \times \frac{z^{-1}}{3\frac{1}{2}b} + \frac{1}{4\frac{1}{2}} \times \frac{z}{2\frac{1}{2}} \times \frac{z^0}{3\frac{1}{2}bb}$, hoc est = $\frac{-30bb + 24bz - 16zz}{10\frac{1}{2}bbz}$
 $\times \frac{a^3z + a^3b}{bzz} \sqrt{zz - bz}$.

Exempl. 4. Sit denique ordinatim applicata $\frac{bz^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{c^3 - 3accz^{\frac{1}{2}} + 3acz^{\frac{3}{2}} - a^3zz}}$. Haec ad formam Regulae reducta, fit $bz^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{c - az^{\frac{1}{2}}}}$ ¹; indeque est $d = b$, $\mathcal{S} = \frac{1}{3}$, $e = c$, $f = -a$, $\eta = \frac{2}{3}$, $\lambda = -\frac{3}{5}$, $r = 2$, $s = \frac{7}{5}$, $Q = \frac{3b}{-2a} \times \frac{1}{\sqrt{c - az^{\frac{1}{2}}}}$ ¹, $\pi = \frac{2}{5}$ et area = Q $\times \frac{5z^{\frac{1}{2}}}{7} - \frac{5}{2} \times \frac{bc}{-7a}$
 id est = $\frac{30abz^{\frac{1}{2}} + 75bc}{28a^2} \times \frac{1}{\sqrt{c - az^{\frac{1}{2}}}}$. Quod si res non

successisset in hoc casu, existente r vel fractione vel numero negativo, tunc tentassem alterum casum purgando terminum $-az^{\frac{1}{2}}$ in ordinatim applicata a coefficiente $z^{\frac{1}{2}}$, hoc est, reducendo ordinatim applicatam ad hanc formam $bz^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{-a + cz^{-\frac{1}{2}}}}$ ¹, et si r in neutro casu fuisset numerus integer et affirmativus, conclusissem curvam ex earum numero esse, quae non possunt geometrico quadrari. Nam, quantum animadverto, haec Regula exhibet in finitis aequationibus areas omnium, geometricam quadraturam admittentium curvarum, quarum ordinatim applicatae constant ex potestatibus, radicibus, vel quibuslibet dignitatibus binomii cujuscunque*).

At quando hujusmodi curva aliqua non potest geometrico quadrari, sunt ad manus alia Theoremata pro comparatione ejus cum conicis sectionibus, vel saltem cum aliis figuris simplicissimis quibuscum potest comparari: Ad quod sufficit etiam hoc ipsum unicum jam descriptum Theorema, si debite concinnetur. Pro trinomiis etiam et aliis quibusdam, Regulas quasdam concinnavi. Sed in simplicioribus vulgoque celebratis figuris vix aliquid relatu dignum reperi, quod evasit aliorum conatus, nisi forte longitudine Cissoïdis ejusmodi censeatur. Ea sic construitur (Fig. 20).

Sit VD Cissoïdis, AV diameter circuli, ad quem aptatur, V vertex, AF asymptotus ejus, ac DB perpendicularare quodvis ad AV demissum. Cum semiaxe AF = AV et semiparametro AC = $\frac{1}{3}$ AV, describatur Hyperbola FK, et inter AB et AV sumta AC media proportionali, erigantur ad C et V perpendiculara Ck et VK Hyperbolae occurrentia in k et K, et agantur rectae KT et kt tangentibus hyperbolam in iisdem K et k, et occurrentes AV in T ac t, et ad AV constituatur rectangulum AVNM aequale spatio TKkt; et cissoïdis VD longitudo erit sextupla altitudinis VN. Demonstratio perbrevis est; sed ad infinitas series redeo.

*) So lautet diese Stelle in der Copie, die Leibniz von Oldenburg zugesandt wurde; in Leib. op. omn. ed. Dutens. Tom. III. sowohl, als in Newton. opusc. ed. Castillon. Tom. I. folgen nach „cujuscunque“ die Worte: licet non directe, ubi index dignitatis est numerus integer.



Quamvis multa restent investiganda circa modos approximandi et diversa serierum genera, quae possunt ad id conducere; tamen vix cum Dn. Tschirnhausio speraverim dari posse aut simpliciora aut magis generalia fundamenta reducendi quantitates ad hoc genus serierum, de quo agimus, quam sunt divisionis et extractiones radicum, quibus Leibnitius et ego utimur. Saltem non generaliora, quia pro Quadratura et *εὐθύμετροι* curvarum ac similibus, nullae possunt dari series ex hisce simplicibus terminis Algebraicis, unicam tantum indefinitam quantitatem involventibus, constantes, quas non licet hac methodo colligere. Nam non possunt esse plures hujusmodi convergentes series ad idem determinandum, quam sunt indefinitae quantitates, ex quarum potestatibus series conflentur; et ego quidem ex adhibita quacunque indefinita quantitate seriem novi colligere. Et idem credo Leibnitio in potestate esse. Nam quamvis mea methodo liberum sit eligere pro conflanda serie quantitatem quamlibet indefinitam, a qua quaesitum dependeat, et methodus, quam ipse nobis communicavit, determinata videatur ad electionem talium indefinitarum quantitatum, quibus opus commode deduci potest ad fractiones, quae per solam divisionem evadant series infinitae; tamen aliae quaecunque indefinitae quantitates pro seriebus conflandis adhiberi possunt per methodum istam, qua affectae aequationes resolvuntur, dummodo resolvantur in propriis terminis, hoc est conficiendo seriem ex solis terminis, quos aequatio involvit.

Praeterea non video, cur dicatur his divisionibus et extractionibus problemata resolvi per accidens, siquidem hae operationes eodem modo se habeant ad hoc genus Algebrae, ac vulgares operationes Arithmeticae ad Algebraem vulgo notam. Quod autem ad simplicitatem methodi attinet, nolim fractiones et radicales absque praevia reductione semper resolvi in series infinitas. Sed ubi perplexae quantitates occurrunt, tentandae sunt omnimodae reductiones, sive id fiat augendo, minuendo, multiplicando, vel dividendo quantitates indefinitas, sive per methodum transmutatoriam Leibnitii, aut alio quocunque modo, qui occurrat. Et tunc resolutio in series per divisionem et extractionem optime adhibebitur. Hic autem praecipue nitendum est, ut Denominatores fractionum et quantitates in vinculo radicum reducantur ad quam paucissimas et minime compositas, et ad tales etiam, quae in seriem abeant citissime convergentem, etsi radi-

ces neque convertantur in fractiones, neque deprimantur. Nam per Regulam initio alterius epistolae, extractio altissimarum radicum aequae simplex et facilis est ac extractio radices quadratae, vel divisio, et series, quae per divisionem eliciuntur, solent minime omnium convergere. Hactenus de seriebus unicam indefinitam quantitatem involventibus locutus sum: Sed possunt etiam perspecta methodo series ex duabus vel pluribus assignatis indefinitis quantitatibus pro arbitrio confici. Quin etiam beneficio ejusdem methodi possunt series ad omnes figuras efformari, Gregorianis ad circulum et hyperbolam editis affines, hoc est, quarum ultimus terminus exhibebit quaesitam aream. Sed calculum hic onerosiorem nolim lubens subire. Possunt denique series ex terminis compositis eadem methodo constitui: quemadmodum si sit $\sqrt{aa - ax + \frac{x^3}{a}}$ ordinatum applicata curvae

alicujus, pono $aa - ax = zz$ et ex binomio $zz + \frac{x^3}{a}$ extracta radice, prodibit $z + \frac{x^3}{2az} - \frac{x^6}{8aaz^3}$ etc. cujus seriei omnes ter-

mini quadrari possunt per Theorema jam ante descriptum. Sed hoc minoris facio, quod ubi series simplices non sunt satis tractabiles, aliam nondum communicatam methodum habeo, qua pro libitu acceditur ad quaesitum. Ejus fundamentum est commoda, expedita, et generalis solutio hujus problematis: Curvam Geometricam describere quae per data quotecunque puncta transibit. Docuit Euclides descriptionem circuli per tria data puncta; potest etiam conica sectio describi per quinque data puncta, et curva trium dimensionum per septem data puncta, adeo ut in potestate habeam descriptionem omnium curvarum istius ordinis, quae per septem tantum puncta determinantur. Haec statim geometricae fiunt nullo calculo interposito: Sed superius Problema est alterius generis. Et quamvis prima fronte intractabile videatur; tamen res aliter se habet. Est enim fere ex pulcherrimis, quae solvere desiderem.

Seriei a D. Leibnitio pro quadratura conicarum sectionum propositae affinia sunt theoremata quaedam, quae pro comparatione curvarum cum conicis sectionibus in catalogum dudum retuli. Possum utique cum conicis sectionibus geometricae compa-



rare curvas omnes numero infinites infinitas, quarum ordinatim applicatae sunt

$$\frac{dz^{\eta-1}}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}} \text{ vel } \frac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}} \text{ etc.}$$

Aut $\frac{dz^{\frac{1}{2}\eta-1}}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}} \text{ vel } \frac{dz^{\frac{3}{2}\eta-1}}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}} \text{ etc.}$

Aut $\frac{d}{z} \sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}} \text{ vel } dz^{\eta-1} \times \sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}} \text{ etc.}$

Aut $\frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}} \text{ vel } \frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}} \text{ etc.}$

Aut $\frac{dz^{\eta-1} \times \sqrt{e+fz^\eta}}{g+hz} \text{ vel } \frac{dz^{2\eta-1} \times \sqrt{e+fz^\eta}}{g+hz^2} \text{ etc.}$

Aut $\frac{dz^{\eta-1}}{g+hz^\eta \times \sqrt{e+fz^\eta}} \text{ vel } \frac{dz^{2\eta-1}}{g+hz^\eta \times \sqrt{e+fz^\eta}} \text{ etc.}$

Aut $\frac{d}{z} \frac{\sqrt{e+fz^\eta}}{g+hz^\eta} \text{ vel } dz^{\eta-1} \times \frac{\sqrt{e+fz^\eta}}{g+hz^\eta} \text{ etc.}$

Hic $d, e, f, g,$ significant quasvis datas quantitates cum suis signis $+$ et $-$ affectas, z axem vel basim curvae, et $\eta, 2\eta, \frac{1}{2}\eta - 1, \frac{3}{2}\eta - 1, \eta - 1, 2\eta - 1,$ indices potestatum vel dignitatum $z,$ sive sint affirmativi vel negativi, sive integri vel fracti; et singula bina Theoremata sunt duo primi termini seriei in infinitum progredientis. In tertio et quarto $4eg$ debet esse non majus quam $ff,$ nisi e et g sint contrarii signi: in ceteris nulla est limitatio. Horum aliqua (nempe secundum, tertium, quartum, quintum et decimum tertium) ex arcibus duarum conicarum sectionum conjunctis constant. Alia quaedam (ut nonum, decimum, et duodecimum) sunt aliter satis composita. Et omnia quidem in continuatione progressionum evadunt compositissima; adeo ut vix per transmutationes figurarum, quibus Gregorius et alii usi sunt, absque ulteriori fundamento inveniri posse putem. Ego equidem haud quicquam generale in his obtinere potui, antequam abstraherem a contemplatione figurarum, et rem totam ad simplicem considerationem solarum ordinatim applicatarum reducerem. Sed cum haec et his generaliora sint in potestate, non dubitabitur, credo, de binomialibus longe facilioribus, quae in his continentur, et prodeunt ponendo tantum litteram aliquam e vel f vel $g = 0,$ et $\eta = 1$ vel $2;$ etsi series, in quas ista re-

solvantur non posuerim in epistola priori, intentus non in omnia particularia enumeranda, sed in illustrandam methodum per unam et alteram in singulis rerum generibus instantiam, quae ad ostendendam ejus generalitatem sufficere videbatur.

Caeterum haec Theoremata dant series plusquam uno modo.

Nam primum si ponatur $f = 0$ et $\eta = 1,$ evadit $\frac{d}{e+gzz},$ unde prodit series nobis communicata. Sed si ponatur $2eg = ff,$ et $\eta = 1,$ inde tandem obtinemus hanc seriem $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$ etc. pro longitudine quadrantalis arcus, cujus chorda est unitas, vel, quod perinde est, hanc $\frac{1}{2} + \frac{1}{15} - \frac{1}{63} + \frac{1}{143}$ etc. pro longitudine dimidii ejus. Et has forte, quia aequae simplices sunt ac alterae et magis convergunt, non repudiabis. Sed ego rem aliter aestimo. Illud enim melius, quod utilius est, et Problema minori labore solvit. Sic quamvis haec aequatio $x^3 - x = 1$ appareat simplicior hacce $yy - 2y\sqrt{\frac{81}{25}} - \sqrt{20} = \sqrt{20},$ tamen in confesso est, posteriorem revera simpliciore esse, propterea quod radicem ejus y Geometra facilius eruit. Et ob hanc rationem series pro obtinendis arcibus circuli, vel (quod eodem recidit) pro obtinendis sectoribus conicarum sectionum pro optimis habeo, quae componuntur ex potestatibus sinuum.

Nam si quis vellet per simplex computum hujus seriei $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} +$ etc. colligere longitudinem quadrantis ad viginti figurarum loca decimalia, opus esset 5000000000 terminis seriei circiter, ad quorum calculum millenni anni requirerentur; et res tardius obtineretur per tangentem 45 grad. Sed adhibito sinu recto 45 grad. quinquaginta quinque vel sexaginta termini hujus seriei $\sqrt{\frac{1}{2}} \times 1 + \frac{1}{12} + \frac{3}{160} + \frac{5}{896}$ etc. sufficerent, quorum computatio tribus ut opinor vel quatuor diebus absolvi posset. Et tamen hic non est optimus modus computandi totam peripheriam: nam series ex sinu recto triginta graduum vel ex sinu verso sexaginta graduum conflata, multo citius dabit arcum suum, cujus sextuplum vel duodecuplum est tota peripheria. Neque minori labore eruitur area totius circuli ex segmento, cujus sagitta est quadrans diametri. Ejus computi



specimen, siquidem ad manus est, visum fuit apponere; et una adungere aream Hyperbolae, quae eodem calculo prodit.

Posito axe transverso aequali 4 et sinu verso seu segmenti sagitta = x, erit semisegmentum Hyperbolae } = x^{1/2} in Circuli }

2/3 x ± xx/5 - x³/28 ± x⁴/72 etc. Haec autem series sic in infinitum

producitur; sit 2x^{1/2} = a, ax/2 = b, bx/4 = c, 3cx/6 = d, 5dx/8 = e,

7ex/10 = f etc. et erit semisegmentum Hyperbolae } = a/3 ± b/5 Circuli }

- c/7 ± d/9 - e/11 ± f/13 etc. eorumque semisumma a/3 - c/7 -

e/11 etc. et semidifferentia b/3 + d/9 + f/13 etc. His ita praepa-

ratis suppono x esse 1/4, quadrantem nempe axis, et prodit a

(= 1/4) = 0.25; b (= ax/2 = 0.25/4) = 0.03125; c (= bx/4

= 0.03125/2) = 0.004953125; d (= 3cx/6 = 0.004953125/8)

= 0.000244140625. Et sic procedo usque dum venero ad ter-

minum depressissimum, qui potest ingredi opus. Deinde hos terminos per 3, 5, 7, 9, 11 etc. respective divisos dispono in duas tabulas; ambiguos cum primo in unam, et negativos in aliam et addo ut hic vides:

0.0833333333333333	0.0002790178571429
6250000000000000	34879056051
271267361111	834465027
5135169396	26285334
144628917	961296
4954581	38676
490948	1663
7963	78
352	4
46	0.0002825719389575.
4	
0.0896109885646618.	

Tunc a priori summa aufero posteriorem et restat 0.0893284166257043 area semisegmenti Hyperbolici. Addo etiam

easdem summas et aggregatum aufero a primo termino duplicato 0.1666666666666666 et restat 0.0767731061630473 area semisegmenti circularis. Huic addo triangulum istud quo completur

in sectorem, hoc est, triangulum 1/32 V3 seu 0.0541265877363274

et habeo sectorem sexaginta graduum 0.1308996938995747, cujus sextuplum 0.7853981633974482 est area totius circuli, quae

divisa per 1/4 sive quadrantem diametri dat totam peripheriam

3.1415926535897928. Si alias artes adhibuissem, potui per eundem numerum terminorum seriei pervenisse ad multo plura

loca figurarum, puta viginti quinque aut amplius; sed animus fuit hic ostendere, quid per simplex seriei computum praestari

posset: Quod sane haud difficile est, cum in omni opere multiplicatores ac divisores magna ex parte non majores quam 11 et nunquam majores quam 41 adhibere opus sit.

Per seriem Leibnitii etiam, si ultimo loco dimidium termini adiciatur et alia quaedam similia artificia adhibeantur, potest

computum produci ad multas figuras: ut et ponendo summam terminorum 1 - 1/7 + 1/9 - 1/15 + 1/17 - 1/23 + 1/25 - 1/31 + 1/33 etc.

esse ad totam seriem 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + etc. ut

1 + V2 ad 2. Sed optimus ejus usus videtur esse, quando vel conjungitur cum duabus aliis persimilibus et citissime convergentibus seriebus, vel sola adhibetur ad computandum arcum

30 grad. posita tangente V1/3. Tunc enim series illa evadit

1 - 1/3x3 + 1/5x9 - 1/7x27 + 1/9x81 etc., quae cito

convergit; vel si conjunges cum aliis seriebus, pone circuli diametrum = 1 et a = 1/2 et area totius circuli erit a/1 - a³/3

+ a⁵/5 - a⁷/7 + etc. + aa/4 + a⁵/3 - a⁸/5 - a¹¹/7

+ a¹⁴/9 + a¹⁷/11 - etc. + a⁴/4 - a¹⁰/3 + a¹⁶/5 - a²²/7

+ a²⁸/9 etc.

Hic consideravimus series, quatenus adhibentur ad computandum totum circulum. Sed quando computandae sunt partes ejus, tunc quaelibet series habet proprium usum et in suo ge-



nere optima est. Si datur tangens satis parva vel satis magna, non recurrendum erit ad sinum aliquem, ut inde computetur arcus, neque vice versa. Series dato congruens est aequatio pro solvendo proprio problemate.

Credo Cl. Leibnitium, dum posuit seriem pro determinatione cosinus ex arcu dato, vix animo advertisse seriem meam pro determinatione sinus versi ex eodem arcu, siquidem haec idem sunt. Neque observasse videtur morem meum generaliter usurpandi litteras pro quantitibus cum sigijs suis + et - affectis,

dum dividit hanc seriem $\frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} +$ etc.

Nam cum area Hyperbolica BE (Fig. 21) hic significata per z sit affirmativa vel negativa, prout jaceat ex una vel altera parte ordinatim applicatae BC, si area illa in numeris data sit l, et l substituat in serie pro z, oriatur vel $\frac{l}{b} + \frac{ll}{2abb} - \frac{l^3}{6aab^3} + \frac{l^4}{24a^3b^4}$ etc.

vel $-\frac{l}{b} + \frac{ll}{2abb} - \frac{l^3}{6aab^3} + \frac{l^4}{24a^3b^4}$ etc. prout l sit affirmativa

vel negativa. Hoc est, posito $a = 4 = b$ et l logarithmo Hyperbolico, numerus ei correspondens erit $4 + \frac{1}{4} + \frac{ll}{2} + \frac{l^3}{6} +$

$\frac{l^4}{24}$ etc. si l sit affirmativus, et $4 - \frac{1}{4} + \frac{ll}{2} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24}$ etc. si l

sit negativus. Hoc modo fugio multiplicationem Theorematum quae alias in nimiam molem crescerent. Tam v. g. illud unicum Theorema, quod supra posui pro quadratura curvarum, revolvendum esset in triginta duo Theoremata, si pro signorum varietate multiplicaretur.

Praeterea, quae habentur de inventionem numeri unitate majoris per datum Logarithmum Hyperbolicum ope seriei $\frac{1}{4} - \frac{ll}{4 \times 2}$

$\frac{l^3}{4 \times 2 \times 3} - \frac{l^4}{4 \times 2 \times 3 \times 4} +$ etc. potius quam ope seriei

$\frac{1}{4} + \frac{ll}{4 \times 2} + \frac{l^3}{4 \times 2 \times 3} + \frac{l^4}{4 \times 2 \times 3 \times 4} +$ etc. mihi quidem

haud ita clara sunt. Nam si unus terminus adjiciatur amplius ad seriem posteriorem quam ad priorem, posterior magis appropinquabit. Et certe minor est labor computare unam vel duas primas figuras adjecti hujus termini, quam dividere unitatem per prodeantem Logarithmum Hyperbolicum ad multa figu-

rarum loca extensum, ut inde obtineatur Logarithmus Hyperbolicus quaesitus. Utraque series igitur (si duas dicere fas sit) officio suo fungatur. Potest tamen $\frac{1}{4} + \frac{l^3}{4 \times 2 \times 3} + \frac{l^5}{4 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$

etc. series ex dimidia parte terminorum constans optime adhiberi, siquidem haec dabit differentiam duorum numerorum, ex qua et

rectangulo dato uterque datur; sic et ex serie $4 + \frac{ll}{4 \times 2} +$

$\frac{l^4}{4 \times 2 \times 3 \times 4}$ etc. datur semisumma numerorum indeque etiam

numeri. Unde prodit relatio serierum inter se, qua ex una data dabitur altera.

Theorema de inventionem arcus ex dato cosinu, ponendo radium 1, cosinum c, et arcum $\sqrt{6 - \sqrt{24c + 12}}$, minus appropinquat quam prima fronte videtur. Posito quidem sinu verso

v, error erit $\frac{v^3}{90} + \frac{v^4}{494} +$ etc. Potest fieri ut $420 - 47v$ ad

$420 - 47v$, ita chorda ($\sqrt{2v}$) ad arcum, et error erit tantum

$\frac{64v^3\sqrt{2v}}{44800}$ circiter, qui semper minor ut quam $\frac{1}{4}$ minuta secunda,

dum arcus non sit major quam 45 gr. et singulis etiam bisectionibus diminuitur 128 vicibus.

Series

$\frac{a^3}{4 \times 2 \times 3} - \frac{a^5}{4 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{a^7}{4 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}$

etc. applicari posset ad computationem Tabulae segmentorum, ut observat vir clarissimus. Sed res optime absolvitur per Canonem sinuum. Utpote cognita quadrantis area per continuam

additionem nonae partis ejus habebis sectores ad singulos decem gradus in semicirculo; dein per continuam additionem decimae

partis hujus habebis sectores ad gradus; et sic ad decimas partes graduum et ultra procedi potest. Tunc radio existente 1 ab unoquoque sectore et ejus complemento ad 180 gr.

auffer dimidium communis sinus recti et relinquentur segmenta in Tabulam referenda. Caeterum quamvis series hic non prosint, in aliis tamen locum obtinent; et quoniam hoc ad earum usum spectat non gravabor in aliquibus attingere.

Constructionem Logarithmorum non aliunde peti debere, credetis forte ex hoc simplici processu, qui ab istis pendet. Per