

tum genera de curvarum flexu, arcibus, longitudinibus, centris gravitatis etc. Neque (sic pergit) ut Huddenii methodus de maximis et minimis, proindeque Slusii nova Methodus de tangentibus, (ut arbitror) restricta est ad aequationes, Surdarum quantitatibus immunes. Hanc methodum se intextuisse, ait Newtonus, alteri illi, quae aequationes expedit reducendo eas ad infinitas series; adjicitque, se recordari, aliquando data occasione, se significasse Doctori Barrovia lectiones suas jam jam edituro, instructum se esse tali methodo ducendi tangentes, sed avocamentis quibusdam se praepeditum, quominus eam ipsi describeret.

Quod spectat series infinitas pro aequationum radicibus, ait Collinius, putare se, Dn. Gregorium ei rei insudasse mediante alia methodo, extrahendo eas symbolice; qua de re haec sunt ipsissima verba Gregorii, litteris ipsius 17. Maii 1671 ad Collinium datis, inserta: Invenio ejusmodi serierum continuationem, immane quantum! prolixam. Et in alia ejusdem epistola 17. Jan. 1672 scripta, haec habet: Dari posse unam seriem, accommodatam omnibus aequationibus cubicis; aliam omnibus biquadraticis; aliam omnibus Sursolidis; quin imo pro quavis radice dari posse numeros serierum infinitos; et industria quaedam requiritur seriem ingrediendi, noscendique ad quam radicem referatur.

Quoad vero aequationum resolutionem ope logarithmorum, vel potestatum omnium intermediarum amotione, dixit idem Gregorius epistola sua 17. Jan. 1672 ad Collinium data, praestare se id posse; Sed aequationem sursolidam (quam constat esse 5 dimensionum) priusquam reduci possit ad puram, ascendere oportere ad 20am potestatem. Et litteris suis 26. Maji 1675 exaratis, ait, Facile esse ita constituere aequationes, ut vel 2, 3 etc. vel omnes intermedii termini sine difficultate tollantur, at vero tollere duos terminos intermedios in aequatione arbitraria, citra elevationem, penitus esse impossibile; seque ipsum posse, illam elevando, tollere omnes terminos intermedios; quod (quantum ipsi constaret) orbem eruditum hactenus latuerit.

Disquisitionis hujus occasionem suppeditatam fuisse ait a Dno du Laurens, in praeloquio suo asserente, se praestare id posse: Erat ille Dno. Freniclio familiaris: Scire avemus, num inter Freniclii et Du Laurentii Schediasmata aliquid ea de re inveniat. Rev. Dnum. Pardies quod attinet, nescimus quomodo tale quid de eo expectare liceat.

Quod attinet radicem exhibitionem omnium aequationum in surdis, haec dicenda habet Collinius.

Laudato Gregorio significatum cum fuisset Dnum. Tschirnhausium in talem methodum incidisse, aliquotque instantias de ea exhibuisse in casibus quibusdam particularibus ad Dn. Gregorium missis, hunc in responsione sua 20. Aug. 1675 dixisse, se nulum videre nexum inter suam ipsius methodum generalem exhibendi omnium aequationum radices surdas, et regulas illas particulares nobilis illius Germani, ad se transmissas, quandoquidem in sua (Gregoriana) Methodo frequentius occurrant casus impossibiles.

Atque in epistola sua Sept. 11. 1675 ex occasione regularum illarum, quas diximus, particularium, ait, In quavis aequatione habente ejusmodi relationem inter radices suas, ut data una reliquae omnes ope ejus possint inveniri, 1. Regulam constitui posse, qua ipsa reducat ad simplicem aequationem lateralem; 2. vel, si duarum Radicum adminiculo, ceterae omnes inveniri queant. earum beneficio reduci eam posse ad aequationem quadraticam, radicibus istis duabus inveniendis accommodatam; 3. vel, si trium radicum ope reliquae omnes possint inveniri, reduci eam posse ad aequationem cubicam pro istis tribus radicibus inveniendis, atque ita de caeteris omnibus in infinitum; 4. datis aequationibus duabus tribusve, novam aequationem inveniri posse, cujus radix sit radicem aequationum datarum summa vel earum differentia, vel productum, vel (verbo dicam) quodlibet quod constitui potest ex radicibus vel per radices aequationum priorum.

In litteris suis, 20. Aug. 1675 datis porro addit de methodo sua, aequationum surdis radicibus accommodata; probabile scilicet esse, laudati Germani methodum universalem, quando vulgata fuerit, magis esse compendiosam sua: cum (ut verum fateatur) inventio particularium canonum (unus namque canon semper inservit omnibus aequationibus, eodem numero dimensionum constantibus) sit admodum laboriosa, quin et excedens quicquid hactenus in praxin abiit: Atque (sic pergit) si ipsius methodus non compendificat meam, dubito, num integri anni spatium succerit in eundo calculo canonum aequationum pro 40 prioribus dimensionibus: Attamen meae methodi ratio fere me persuasum tenet non dari aliam compendiosorem; quin in aequationibus Cubicis et Biquadraticis majus habet compendium ulla mihi un-



quam visa: verum in immensum augetur labor auctis dimensionibus: et, si quis laborem subire vellet calculandi canones, lubens ipsi communicarem methodum meam demonstratione munitam: Cum, ut quod res est dicam in opere tam taedioso me destituit patientia.

Idem in epistola, Octbr. 2. 1675 scripta, ait, Variando signa quantitatum, radicem unam componentium (pro unaquaque dimensione respectiva) omnes alias radices componi, et Methodum canones hosce inveniendi in eo consistere ut deprimitur semper aequatio a gradu superiore ad gradum inferiorem.

Si de aliis Gregorii Scoti inventionibus scire aves, haec porro habet Collinius:

4. Illum ex Italia reducem factum Londini A. 1668 ostendisse manuscriptum quoddam de Astronomia, Planetarum Theorias ad Methodum Geometricam reducens, quod dicebat aliquando forte in lucem emissum iri: ostendisse eodem tempore aliud scriptum suum Dioptricum; Sed Doct. Barrovii lectiones, de eo argumento deinceps editas, in causa fuisse, quod illud suppressere statuerit, saltem donec videret, quid Hugenus et Newtonus ea de re commentati essent.

2. In litteris suis 5. Sept. 1670 sic scribet: Perlegi utrumque Barrovii librum, praelectionibus Opticis et Geometricis constantem, idque magna cum voluptate et attentione; deprehendique illum multis parasangis post se reliquisse omnes, qui ante ipsum de istis argumentis fuere commentati. Detexi ex ipsius methodo ducendi tangentes, nonnullis meis meditamentis sociata, generalem methodum Geometricam, absque calculo tangentes ducendi ad quasvis curvas, comprehendentem non modo Dni. Barrovii Methodos particulares, sed et generalem ejus methodum analyticam, sub lectionis ipsius 40^{mae} finem traditam. Mea Methodus non continet ultra propositiones 42.

Una mittebat exemplum praxeos ejus, ducendo tangentem ad spiralem arcum rectificatricem, supposita Circuli quadratura: Cujus curvae haec est indoles. Describe circulum, et per centrum ejus due aliquot radios secantes; intellige, arcus interceptos inter radios illos et unum diametri terminum extendi in chordas, et adaptatos intra extremitatem Diametri et radios illos secantes; curva transiens per puncta sic inventa vocatur spiritalis arcuum rectificatrix.

3. Idem in litteris scriptis 23. Novembr. 1670 haec habet.

Prope jam paratam habeo typis edendam, aliam editionem meae quadraturae circuli et hyperbolae, in qua, (ni fallor) multis et variis modis institutum meum demonstro.

Erat illud probare, utramque figuram incapacem esse exactae ullius quadraturae, sive in lineis, sive in numeris; nec aliquam inter ulla alterutrius portiones assignari posse aequalitatem.

4. Quoad duplicatas aequalitates Diophanti, et similia earum augmenta et explicationes, testatus est aliquot epistolis, posse ea plurimum excoli et proveli: quod idem et affirmatur a Pellio.

5. Quoad spectat constructiones, aequationibus idoneas, cum mentio fieret apud Gregorium, methodum deesse inveniendi, quatenam aequationes solvantur per ordinatas cadentes ab intersectionibus duarum quarumvis Sectionum Conicarum, aliarumve curvarum Geometricarum, in axes vel lineas ipsis parallelas alterutrius figurae, si figurae illae sint determinatae et ex suppositione in quovis posito ad libitum ductae: Respondit, cum hio ageret Londini A. 1673, se rem illam considerasse, et labore aliquo consecratum esse.

6. Difficile Problema cum ipsi proponeretur, viz. Summa quadratorum, et summa Cuborum, quatuor continue proportionalium datis, invenire proportionales; Ajebat coram, eodem anno 1673, se non dubitare quin resolvere id posset, tollendo omnes potestates inferiores in unaquaque aequatione proposita, atque ita tandem reductionum ope perveniendo ad duas potestates puras sublimiorum dimensionum, quarum unius radix daret primam Proportionalem quaesitam, alterius vero, rationem, proindeque problema solutum esse.

Sed ex eo tempore, in epistola data 28. Julii 1675, scripsit, se de hoc Problemate meditatum esse, et magnum sibi Apollinem fore, qui id solveret per aequationem 30 dimensionibus inferiorem. Adjicit, aequationes equidem illas, ad quas ipse rem deduxerat adeo fuisse taediosas, ut patientia ipsi deficeret, reductionum regulas applicandi; verum tot tamque diversas aequationes se explorasse, ut, si capaces reductionis fuissent, reductionum illarum nonnullas fuisse obvias futuras crederet.

Propositi hujus Problematis ratio erat, quod, cum praesumatur jam cognitum, quoad progressionem quamvis Arithmetica, quod datis duabus quibuslibet summis, viz. vel ipsius progressionis, vel ejus quadratorum, cuborum etc. una cum numero termino-

rum, progressio possit inveniri; disquisitione dignum foret simile dari respectu Progressionis geometricae. Res spinosa implexaque videtur. Interim Dn. Collinius de Methodo cogitavit quaestionem propositam solvendi, quae probabiliter (necdum enim vacavit ipsi calculos ea de re inire) non ascendet ad dimensiones adeo sublimes ut putatur: eaque hunc in modum se habet.

Pone quantitatem ignotam pro summa proportionalium, et juxta Doctrinam Billii, nactus summam & Proportionalium, summamque quadratorum ex iis emergentium, extunde & proportionales, quod fieri potest, vel omnimode per species, vel (brevitatis causa ad solvendum illud in particulari) partim per species, partim per numeros: easque hoc modo consecutus, cuba omnes, easque simul additas, aequales redde datae summae cuborum. Hac ratione obtinetur aequatio, qua valor ignoti Symboli, primo positi, inveniri potest; quem postquam consecutus et interpretatus fueris, in Proportionalibus speciosis vel mixtis, per Billii Doctrinam inventis, & Proportionales quaesitae habentur.

Quod attinet omnium Aequationum per Sinuum tabulas solvendarum rationem, Dn. Pellius id fieri posse saepius asseruit, et nuper me praesente rogatus, possetne aequationes omnes sex vel octo dimensionum, Canonis Sinuum beneficio solvere, affirmavit sese sublimiorum adhuc dimensionum aequationes ad dictum canonem reduxisse.

1. Ait laudatus Pellius, Sectionum angularium doctrinam posse in immensum ampliari; id quod verum esse videtur ex specimine, ad calcem Algebrae Germanicae, a discipulo ipsius Rhonio concinnatae, adjecto, ubi habentur 105 theoremata de Sinibus, Chordis, Tangentibus et Secantibus, quae in editione Anglica non habentur.

2. Praecipuus finis et usus hujus Doctrinae est, non tam confectio tabularum (quippe quae facilius peragi alia ratione potest) quam aequationum resolutio.

3. Circulus et Ellipsis una cum suis inscriptis adscriptisque, magis sunt hanc in rem idonea, quam ullae figurae aliae: e. g. in Dni. Gregorii Geometriae parte universali haec occurrit propositio p. 128.

„Si circuli circumferentia dividatur in partes quotcumque
„aequales, et numero impares, et a quolibet peripheriae puncto
„ad omnes ejusdem divisiones, rectae ducantur, si circulus di-
„vidatur in partes aequales, erit summa primarum aequalis ulti-

„mae; si in quinque, erit summa primarum et ultimae aequalis
„summae secundarum; si in septem, erit summa primarum et ter-
„tiarum aequalis secundarum et ultimae; si in novem, erit summa
„primarum, tertiarum et ultimae, aequalis summae secundarum et
„quartarum; atque ita deinceps in infinitum. Dicimus autem, rectas
„primas esse illas, quae ducuntur ad divisiones, ex utraque parte
„puncto assignato proximas; secundas, illas rectas, quae ducuntur
„ad divisiones, primis ex utraque parte succedentes; tertias, quae
„secundis succedunt etc.; rectam vero ultimam illam quae duci-
„tur ad divisionem a puncto assignato remotissimam.“

4. Consimile quid Wallisius noster praestitit, quando Peripheria dividitur in quemlibet numerum partium aequalium; deditque aequationes divisionibus tam paribus quam imparibus idoneas, in tractatu de Sectionibus angularibus, qui nunc penes Collinium est, typis mandandus.

5. Hae chordae, repraesentantes aequationum radices, transferri possunt a circulo, tamquam ordinatae, propriis suis resolvendis insistentes, per quorum summities ducta curva erit flexuosa, uti sunt omnium aequationum loca, prout saepius antehac innumis, ac evidenter jam cognitum est in cubicis: atque hinc lucem faenerari possumus, Methodo transferendi vicissim a loco ad circulum.

6. Afirmat Pellius, constituere se posse problemata, abitura in aequationem ejusdem formae cum quavis proposita: ad haec, posse se in istiusmodi constitutionibus pertingere ad limites ascendendo: Porro Doctrinam limitum hactenus etiam a praestantissimis ejus scriptoribus perquam imperfecte esse traditam: insuper comparando et accommodando invicem limites aequationum, et problemata Cardani, regulas innumeras alias, ipsis consimiles inveniri posse, atque Regulam illam et Doctrinam Huddenii de aequationum omnium tum numeralium tum litteralium invenendis Radicibus Surdis attingi et obtineri. Limitibus obtentis ad evitandam implexam illam surdorum complicationem, canone illo se uti ait idem Pellius, quod et fieri similiter potest in limitum ipsorum consecutione, quos postquam obtinuerimus, inveniuntur omnes ad quodvis Resolvendum propositum Radices, beneficio facilis methodi applicandi illud uni circulo, vel plura Resolvenda pluribus circulis, quorum quilibet intelligi potest diversas revolutiones habere. Denique afirmat Pellius, conscripsisse se dudum de hac doctrina exercitationes, quarum titulus: Tractatus de



habitudinibus repetitis, et usu Canonis mathematici; Sed Schediasmata illa ruri, ubi antehac commoratus est, asservari.

Assertiones hae Pellianae parere in Philomathematici mente possent cogitationem, 1. Annon detur possibilitas augendi, minuendi, multiplicandi et dividendi quasdam ex aequationum radicibus, reliquis in eo quo sunt statu servatis; 2. Si duae aequationes habeant eosdem plane limites, sive paria radicum aequalium, excepto tantum uno par, in utrisque communia, quaedam habitudines variationesque dentur inter radices in singulis, et inter quot radices ex illis? 3. Probabile videri, quodlibet radicum par, in qualibet sublimiori aequatione habere posse diversos ad eas inveniendas canones. Ex. g. Regulae Cardani idoneae sunt inveniendae radices aequationis cubicae, quando non nisi una radix est possibilis, et post novam aequationis efformationem diminuendo radices limitum alii possunt strui canones ad inveniendas radices, quando tres sunt possibiles.

7. Harum rerum notitia fretus Pellius dudum in Idea sua mathematica typis edita A. 1657 proposuit sive promisit p. 43: Juxta Methodum suam descriptam deducere non solum quicquid invenire est in praedecessorum nostrorum scriptis, et quicquid illis in mentem venisse videri potest, sed etiam omnia inventa, Theoremata, Problemata et praecepta Mathematica quae fecunda successorum nostrorum ingenia excogitare poterunt, idque uno certo et immutato ordine, inde a primis Mathematicum principis usque ad summas nobilissimasque eorum applicationes, aequae ac imas maximeque vulgares; non tradendo eas tumultuarie prout mentem subeunt, uti facilitarunt majores nostri, qui in problemata sua eorumque solutiones casu, non vero una constante et invariata methodo scientifica incidisse videntur. Cui subjungit p. 45. quovis argumento proposito determinare numerum omnium Problematum, quae de eo concipi possunt; et quovis problemate proposito, ostendere demonstrative vel omnia media iis solvendis idonea vel solvendi impossibilitatem; et, si posterius, utrum necdum, vel plane non sit solutu possibile; qua de re exercitationem scripsit, Cribrum Eratostenis dictum, quam Dn. Boyleus perlustravit.

Has assertiones Dn. Descartes censura sua aliquot litteris perstrinxit, quae si obtineri possent a Dno. Clerkselie, si quidem penes ipsum sint, magni beneficii loco poneremus.

8. Ad majorem dictis fidem astruendam, in nonnullorum fide dignorum praesentia, chartam aliquoties deprompsit ex loculis, ulnae longitudine, diversis columnis notatam, in qua e regione 400 resolvendorum, Arithmetice crescentium, aequationis sex dimensionum (si rite memini) tradebantur, in diversis columnis, diversae series radicum ad ea pertinentes, quas e tabula sinuum desumptas afferebat, nec tamen aequatio illa Sectionibus angularibus erat accommodata. Adiciebat ille, ad opus hoc melius conficiendum necessum esse, ampliorem strui canonem, dividendum quemlibet arcus gradum in 4000 partes. Cui respondebatur, utilitate hujus ei intellecta, forsitan non defore viros, qui canonem illum struendum susciperent; cujus tabulae radicum ope ipse accurate descripsit locum aequationis una cum omnibus flexuris, ostendentem ubinam radices lucrabantur vel omittebant possibilitatem suam per paria; hanc radicum seriem aequae fere facile strui posse ac transcribi, velleque eam suscipere Methodo Vietae, esse laborem, quem humeri humani ferre recusent, nec nisi ut Warnerus dicitabat, ei possibilem, qui Alpibus Italae in Angliam transferendis locare operam suam vellet.

9. Ex sermone cum Pello habito non patet, ipsum studio doctrinae infinitarum serierum adeo multum incubuisse; et quamvis agnoscat, posse eas esse usui in Theorematibus vel potius habitudinibus per eas inventis; attamen quoad partem calculativam vel applicativam, ait, posse eam vel plane amoveri, vel plurimum facilitari Methodorum suarum beneficio, quas evulgare recusat, nisi prius viderit, quid Gregorii vel Newtoni methodi praestare valeant, quorum posterior lectiones ea de re et de Algebra habuit, quas publicae Bibliothecae Cantabrigensi commisit.

Digna sane haec videntur Mathematicorum Parisiensium meditatione, et spes nos fovet, ipsos communicaturos esse suos hac in re labores et conatus. Vale, et cito, si placet rescribere.

Dabam Londini d. 26 Julii 1676.



XXXVI.

Oldenburg an Leibniz *).

Quamquam Dni. Leibnitii modestia in excerptis, quae ex Epistola ejus ad me nuper misisti, nostratibus multum tribuat circa speculationem quandam infinitarum serierum, de qua jam coepit esse rumor: nullus dubito tamen, quin ille non tantum quod asserit methodum reducendi quantitates quascunque in ejusmodi series, sed et varia compendia, forte nostris similia, si non et meliora, adinvenit. Quoniam tamen ea scire pervelit, quae ad Anglis ea in re inventa sunt, et ipse ante annos aliquot in hanc speculationem inciderim: ut votis ejus aliqua saltem ex parte satisfacerem, nonnulla eorum, quae mihi occurrunt, ad te transmisi.

Fractiones in infinitas series reducuntur per divisionem, et quantitates radicales per extractionem radicum, perinde instituendo operationes istas in speciebus istis ac institui solent in decimalibus numeris. Haec sunt fundamenta harum reductionum; sed extractiones radicum multum abbreviantur per hoc theorema:

$$\sqrt[m]{P + PQ} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} A Q + \frac{m-n}{2n} B Q^2 + \frac{m-2n}{3n} C Q^3 + \frac{m-3n}{4n} D Q^4 + \text{etc.}^{**}), \text{ ubi } P + PQ \text{ significat}$$

*) Oldenburg hat bemerkt: Apographum literarum a Dno. Newtono scriptarum ad H. Oldenburgium, Cantabrigia d. 13. Junii 1676. — Diese sowie die folgende Nummer sind bereits gedruckt.

**) Leibniz hat über die einzelnen Glieder dieses Ausdrucks die Buchstaben A, B, C, D, E geschrieben und am Rande des Briefes Folgendes bemerkt: Conferendum cum extractione mea radices quad. cub.

$$\begin{matrix} A & B & C \\ P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} Q P^{\frac{m}{n}} + \frac{m^2 - mn}{1, 2n^2} Q^2 P^{\frac{m}{n}} \\ D \\ + \frac{m^3 - 3m^2n + 4, 2mn^2}{1, 2, 3n^3} Q^3 P^{\frac{m}{n}} \text{ etc. } \sqrt[m]{P + PQ} \end{matrix}$$

Numerator in B est m, in C est m, m-n; in D est m, m-n, m-2n, et ita porro, arimmeticis continue in se ductis. Nominator fit ex arimmeticis crescentibus, numerator ex descrecentibus. Numerator per m divisus foret formula

quantitatem, ejus radix vel etiam dimensio quacvis vel radix dimensionis investiganda est P, primum terminum quantitatis ejus, Q reliquos terminos divisos per primum, et $\frac{m}{n}$ numeralem indicem dimensionis ipsius P + PQ, sive dimensio illa integra sit, sive (ut ita loquar) fracta, sive affirmativa sive negativa. Nam sicut Analystae pro aa, aaa etc. scribere solent a^2, a^3 , sic ego pro $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a^2}, \sqrt[4]{a^3}$ etc. scribo $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{3}{4}}$, et pro $\frac{1}{a}, \frac{1}{aa}, \frac{1}{a^3}$ scribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} .

Et sic pro $\sqrt[c]{\frac{aa}{c: a^3 + bbx}}$ scribo $aa \times a^3 + bbx |^{-\frac{1}{c}}$
 et pro $\sqrt[c]{\frac{aab}{c: a^3 + bbx \times a^3 + bbx}}$ scribo $aab \times a^3 + bbx |^{-\frac{1}{c}}$
 in quo ultimo casu, si $a^3 + bbx |^{-\frac{1}{c}}$ concipiatur esse $\sqrt[m]{P + PQ}$

serviens pro aequatione ejus radices progressionis Arithmeticae; posito m pro incognita et n, 1n, 2n etc. pro radicibus veris. Hinc facile condetur tabula pro continuanda hae serie in infinitum. $P^{\frac{m}{n}}$ potest esse rationalis vel irrationalis; diversa serie per $P^{\frac{m}{n}}$ reliquum rationale; imo prorsus evanescet $P^{\frac{m}{n}}$ vel ipsa P. Hinc semper fieri potest commode, ut P sit 1, erit $P^{\frac{m}{n}}$ etiam 1.

Si m \square n, et tam m quam n integer, series non ibit in infinitum, sed aliquis terminus fiet \square o adeoque omnes quoque sequentes. Potest m vel n etiam esse fractus vel irrationalis, quod magni est momenti. Quin et potest esse litera. (Vicissim $\frac{m}{n}$ potest inveniri ex P + PQ, logarithmus ex numero; denique et numerus ex logarithmo, Methodis alibi a me traditis). Eadem quantitas infinitis modis hinc haberi potest, faciendo m, n alias atque alias, eadem semper manente $\frac{m}{n}$.

Quaerenda et theoremata pro extractione radicum inaequalium, ut si sint progressionis arithmeticae, exemplum est, dato numero extrahere radicem quam vocant pronicam, ut $\frac{y^2 + y}{2} \square b$ invenire y, aut $y^3 + by^2 + cy \square d$ seu y in $y^3 + by + c \square d$. Unde non tantum y, sed et $y^2 + by + c$ sunt divisores ipsius d. Si pro n ponatur $\frac{1}{2}$, fiet $\frac{m}{n} \square m$, et nulla erit litera in fractione; etiam pro Q potest poni $\frac{1}{S}$.



in Regula, erit $P = a^3$, $Q = \frac{bbx}{a^3}$, $m = -2$ et $n = 3$. Denique pro terminis inter operandum inventis in quoto, usurpo A, B, C, D etc. nempe A pro primo termino $P^{\frac{m}{n}}$, B pro secundo $\frac{m}{n} A Q$, et sic deinceps. Ceterum usus Regulae patebit exemplis.

Exempl. 1. Est $\sqrt{cc+xx}$ (seu $cc+xx$)^{1/2} =
 $c + \frac{xx}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256a^9} +$ etc. nam in hoc casu est $P = cc$, $Q = \frac{xx}{cc}$, $m = 1$, $n = 2$, $A (= P^{\frac{m}{n}} = cc)^{1/2}$
 $= c$. $B (= \frac{m}{n} A Q) = \frac{xx}{2c}$, $C (= \frac{m-n}{2n} B Q) = -\frac{x^4}{2c^3}$ et sic deinceps.

Exempl. 2. Est $\sqrt{(5)c^5+c^4x-x^5}$ (i. e. $c^5+c^4x-x^5$)^{1/2}
 $= c + \frac{c^4x-x^5}{5c^4} - \frac{2c^5xx+4c^4x^6-2x^{10}}{25c^4} +$ etc. ut patebit substituendo in allatam Regulam, 4 pro m, 5 pro n, c^5 pro P^* , et $\frac{c^4x+c^5}{-x^5}$ pro Q et tunc evadet $\sqrt{(5)c^5+c^4x-x^5}$
 $= -x + \frac{c^4x+c^5}{5x^4} + \frac{2c^5xx+4c^9x+c^{10}}{25x^6} +$ etc. Prior modus eligendus est, si x valde parvum sit, posterior, si valde magnum.

Exempl. 3. Est $\frac{N}{\sqrt{(3)y^3-aa}}$ (hoc est $N \times \sqrt{y^3-aa}$)^{-1/2}
 $= N \times \frac{1}{y} + \frac{aa}{3y^3} + \frac{a^4}{9y^5} + \frac{7a^6}{81y^7} +$ etc. Nam $P = y^3$, $Q =$

*) So heisst diese Stelle in der Abschrift, die L. zugeschickt wurde. Offenbar ist hier etwas ausgefallen; in den Opusc. Newt. ed. Castillon Tom. I. p. 409. folgt nach den Worten pro P: et $\frac{c^4x-x^5}{c^5}$ pro Q. Potest etiam $-x^5$ substitui pro P, et $\frac{c^4x+c^5}{-x^5}$ pro Q, et tunc etc.

$-\frac{aa}{yy}$, $m = -1$, $n = 3$, $A (= P^{\frac{m}{n}} = y^{3 \times -1/3}) = y^{-1}$,
hoc est $\frac{1}{y}$, $B (= \frac{m}{n} A Q = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{y} \times -\frac{aa}{yy}) = \frac{aa}{3y^3}$ etc.

Exempl. 4. Radix cubica ex quadrato-quadrato ipsius $d+e$ (hoc est $\overline{d+e}^{\frac{1}{2}}$) est $d^{\frac{1}{3}} + \frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{2ee}{9d^{\frac{2}{3}}} - \frac{c^2}{81d^{\frac{5}{3}}} +$ etc.
nam $P = d$, $Q = \frac{e}{d}$, $m = 1$, $n = 3$, $A (= P^{\frac{m}{n}}) = d^{\frac{1}{3}}$ etc.

Eodem modo simplices etiam potestates eliciuntur. Ut si quadratocubus ipsius $d+e$ (hoc est $\overline{d+e}^3$ seu $\overline{d+e}^{\frac{1}{3}}$) desideretur: erit juxta Regulam $P = d$, $Q = \frac{e}{d}$, $m = 5$ et $n = 4$; adeoque $A (= P^{\frac{m}{n}}) = d^{\frac{5}{4}}$, $B (= \frac{m}{n} A Q) = 5d^{\frac{1}{4}}e$, et sic $C = 10d^{\frac{3}{4}}ee$, $D = 10dde^3$, $E = 5de^4$, $F = e^5$, et $G (= \frac{m-n}{6n} F Q) = 0$. Hoc est $\overline{d+e}^{\frac{1}{3}} = d^{\frac{5}{4}} + 5d^{\frac{1}{4}}e + 10d^{\frac{3}{4}}ee + 10dde^3 + 5de^4 + e^5$.

Quin etiam Divisio, sive simplex sit, sive repetita, per eandem Regulam perficitur. Ut si $\frac{1}{\overline{d+e}}$ (hoc est $\overline{d+e}^{-1}$ sive $\overline{d+e}^{\frac{-1}{1}}$) in seriem simplicium terminorum resolvendum sit, erit juxta regulam $P = d$, $Q = \frac{e}{d}$, $m = -1$, $n = 1$, et $A (= P^{\frac{m}{n}} = d^{-1}) = d^{-1}$ seu $\frac{1}{d}$, $B (= \frac{m}{n} A Q) = -1 \times \frac{1}{d} \times \frac{e}{d} = -\frac{e}{dd}$, et sic $C = \frac{ee}{d^3}$, $D = -\frac{e^3}{d^4}$ etc. Hoc est $\frac{1}{\overline{d+e}} = \frac{1}{d} - \frac{e}{dd} + \frac{ee}{d^3} - \frac{e^3}{d^4} +$ etc.

Sic et $\overline{d+e}^{-3}$ (hoc est unitas ter divisa per $d+e$ vel semel per cubum ejus) evadit $\frac{1}{d^3} - \frac{3e}{d^4} + \frac{6ee}{d^5} - \frac{10e^3}{d^6} +$ etc.
Et $N \times \overline{d+e}^{-\frac{1}{3}}$ hoc est N divisum per radicem cubicam



ipsius $d + e$ evadit $N \times \frac{4}{d^{\frac{1}{3}}} - \frac{e}{3d^{\frac{2}{3}}} + \frac{2ee}{9d^{\frac{1}{3}}} - \frac{44e^3}{84d^{\frac{1}{3}}}$ etc. *)
 Et $N \times \overline{d + e}^{-\frac{1}{3}}$ (hoc est N divisum per radicem quadrato
 eubicam ex cubo ipsius $d + e$ sive $\frac{N}{\sqrt{(5)d^3 + 3dde + 3dee + e^3}}$
 evadit $N \times \frac{4}{d^{\frac{1}{3}}} - \frac{3e}{5d^{\frac{2}{3}}} + \frac{12ee}{25d^{\frac{1}{3}}} - \frac{52e^3}{125d^{\frac{1}{3}}}$ etc.

Per eandem Regulam Geneses potestatum per Potestates aut per quantitates radicales, et extractiones radicum aliorum in numeris etiam commode instituuntur.

Extractiones Radicum aequationum affectarum in Speciebus imitantur earum extractiones in numeris, sed methodus Vietae et Oughtredi nostri huic negotio minus idonea est, quapropter aliam excogitare adactus sum, cujus specimen exhibent sequentia Diagrammata, ubi dextra columna prodit substituendo, in media columna valores ipsorum p, q, r etc. in sinistra columna expressos. Prius Diagramma exhibet resolutionem hujus numeralis aequationis $y^3 - 2y - 5 = 0$ et hic in supremis numeralis pars negativa Radicis subducta de parte affirmativa, relinquit absolutam Radicem 2,09455148 et posterius Diagramma exhibet resolutionem hujus literariae aequationis $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$.

	$y^3 - 2y - 5 = 0$	+ 2,1000000 - 0,00344852 2,09455148 = y
$2 + p = y$	y^3 $- 2y$ $- 5$ Summa	+ 8 + 12p + 6pp + p ³ - 4 - 2p - 5 - 4 + 10p + 6pp + p ³
$+ 0,4 + q = p$	$+ p^3$ $+ 6pp$ $+ 10p$ $- 1$ Summa	+ 0,001 + 0,03q + 0,3qq + q ³ + 0,06 + 1,2 + 6 + 4 + 40 + 0,061 + 11,23q + 6,3qq + q ³
$- 0,0051 + r = q$	$+ q^3$ $+ 6,3qq$ $+ 11,23q$ $+ 0,061$ Summa	- 0,0000001 + 0,000 r etc. + 0,001837 - 0,068 - 0,060642 + 11,23 + 0,061 + 0,0005416 + 11,162 r
$- 0,00004852 + s = r$		

*) Leibniz hat hier bemerkt: Hoc pulchrum, et hinc etiam elegantissimum compendium pro mea circuli dimensione ope transformationis facta. Et pro aliis transformationibus.

	$y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$	$\left(a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512aa} + \frac{509x^4}{16384a^3} \text{ etc.} \right)$
$a + p = y$	y^3 $+ axy$ $+ aay$ $- x^3$ $- 2a^3$	$a^3 + 3aap + 3app + p^3$ $+ a^3 + axp$ $+ a^3 + aap$ $- x^3$ $- 2a^3$
$-\frac{1}{3}x + q = p$	p^3 $+ 3app$ $+ axp$ $+ 4aap$ $+ aax$ $- x^3$	$-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}xxq$ etc. $+\frac{3}{16}axx - \frac{3}{2}axq + 3aqq$ $-\frac{1}{4}axx + axq$ $- axx + 4aaq$ $+ aax$ $- x^3$
$+\frac{xx}{64a} + r = q$	$3aqq$ $+\frac{3}{16}xxq$ $-\frac{1}{2}axq$ $+\frac{1}{16}aaq$ $-\frac{65}{64}x^3$ $-\frac{1}{16}axx$	$+\frac{3x^4}{4096a}$ etc. $+\frac{3x^4}{1024a}$ etc. $-\frac{1}{128}x^3 - \frac{1}{2}axr$ $+\frac{1}{16}axx + 4aar$ $-\frac{65}{64}x^3$ $-\frac{1}{16}axx$
$+ 4aa - \frac{1}{2}ax$		$+\frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a} \left(+ \frac{131x^3}{512aa} + \frac{509x^4}{16384a^3} \right)$

In priori Diagrammate primus terminus valoris ipsorum p, q, r in prima columna invenitur dividendo primum terminum summae proxime superioris per coefficientem secundi termini ejusdem summae (ut - 4 per 10, aut 0,061 per 11,23) et mutando signum quoti. Et idem terminus eodem fere modo invenitur in secundo Diagrammate. Sed hic praecipua difficultas est in inventionem primi termini radices: id quod methodo generali perficitur; sed hoc brevitate gratia, jam praetereo; ut et alia quaedam, quae ad concinnandam operationem spectant: neque enim hic compendia tradere vacat. Sed dicam tantum in genere, quod radix cujusvis aequationis semel extracta pro regula resolvendi consimiles aequationes asservari possit, et quod ex



pluribus ejusmodi regulis regulam generalem plerumque efformare liceat, quodque radices omnes sive simplices sint sive affectae, modis infinitis extahi possint, de quorum simplicioribus itaque semper consulendum est.

Quomodo ex aequationibus sic ad infinitas series reductis, arcae et longitudines curvarum, contenta et superficies solidorum vel quorumlibet segmentorum figurarum quarumvis eorumque centra gravitatis determinantur, et quomodo etiam curvae omnes mechanicae ad ejusmodi aequationes infinitarum serierum reduci possint, indeque problemata circa illas resolvi perinde ac si geometricae essent, nimis longum foret describere. Sufficiat specimina quaedam talium Problematum recensuisse: inque iis brevitatis gratia literas A, B, C, D etc. pro terminis seriei, sicut sub initio, nonnunquam usurpabo.

4. Si ex dato sinu recto vel sinu verso arcus desideretur: sit radius r et sinus rectus x eritque arcus $= x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^3} + \frac{5x^7}{112r^5} + \text{etc.}$ hoc est $= x^3 + \frac{1 \times 1 \times xx}{2 \times 3 \times rr} A + \frac{3 \times 3 \times xx}{4 \times 5 \times rr} B + \frac{5 \times 5 \times xx}{6 \times 7 \times rr} C + \frac{7 \times 7 \times xx}{8 \times 9 \times rr} D + \text{etc.}$ vel sit d diameter ac x sinus versus, et erit arcus $= d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} + \text{etc.}$ hoc est $= \sqrt{dx}$ in $1 + \frac{x}{6d} + \frac{3xx}{40d} + \frac{5x^3}{112dd} + \text{etc.}$

2. Si vicissim ex dato arcu desiderentur sinus: sit radius r et arcus z , eritque sinus rectus $= z - \frac{z^3}{6rr} + \frac{z^5}{120r^3} - \frac{z^7}{5040r^5} + \frac{z^9}{36288r^7} + \text{etc.}$ hoc est $= z - \frac{zz}{2 \times 3 \times rr} A - \frac{zz}{4 \times 5 \times rr} B - \frac{zz}{6 \times 7 \times rr} C + \text{etc.}$; et sinus versus $= \frac{zz}{2r} - \frac{z^3}{24r^3} + \frac{z^5}{720r^5} - \frac{z^7}{40320r^7} + \text{etc.}$ hoc est $= \frac{zz}{1 \times 2 \times r} - \frac{zz}{3 \times 4 \times rr} A - \frac{zz}{5 \times 6 \times rr} B - \frac{zz}{7 \times 8 \times rr} C + \text{etc.}$

3. Si arcus capiendus sit in ratione data ad alium arcum: esto diameter d , chorda arcus dati $= x$, et arcus quaesitus ad arcum illum datum ut n ad t , eritque arcus quaesiti chorda $= n x + \frac{1-nn}{2 \times 3 dd} xx A + \frac{9-nn}{4 \times 5 dd} xx B + \frac{25-nn}{6 \times 7 dd} xx C + \frac{36-nn}{8 \times 9 dd} xx D + \frac{49-nn}{10 \times 11 dd} xx E + \text{etc.}$ ubi nota, quod cum n est numerus impar, series desinet esse infinita, et evadet eadem, quae prodit per vulgarem Algebram ad multiplicandum datum angulum per istum numerum n .

4. Si in axe alterutro AB Ellipseos ADB (cujus centrum C et axis alter DH) detur punctum aliquod E circa quod recta EG occurrens Ellipsi in G motu angulari feratur, et ex data area sectoris Ellipticae BEG quaeratur recta GF quae a puncto G ad axem AB normaliter demittitur: esto $B=q$, $DC=r$, $EB=t$, ac duplum areae BEG $= z$: et erit $GF = \frac{z}{t} - \frac{qz^3}{6rrt^4} + \frac{40qq - 9qt}{120r^4t^7} z^5 - \frac{280q^3 + 504qqt - 225qtt}{5040r^6t^{10}} z^7 + \text{etc.}$ Sic itaque Astronomicum illud Kepleri problema resolvi potest. (Fig. 11.)

5. In eadem Ellipsi, si statuatur $CD=r$, $\frac{CB^2}{CD} = c$, et $CF=x$, erit arcus ellipticus $DG = x + \frac{1}{6cc} x^3 + \frac{1}{10rc^3} x^5 + \frac{1}{14rrc^5} x^7 + \frac{1}{18r^3c^7} x^9 + \frac{1}{22r^5c^9} x^{11} + \frac{1}{40c^4} - \frac{1}{28rc^3} - \frac{1}{24rrc^5} - \frac{1}{22r^3c^7} + \frac{1}{112c^6} + \frac{1}{48rc^7} + \frac{3}{88rrc^9} - \frac{5}{1152c^8} - \frac{5}{352rc^9} + \frac{7}{2816c^{10}}$

Hic numerales coefficientes supremorum terminorum $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{14}, \text{etc.}\right)$ sunt in musica progressionem, et numerales coefficientes

*) Nach Horsley (Newton, op. om. Tom. I. p. 310.) muss dieses Glied heissen: $-\frac{280q^3 + 225q^2t - 504q^2t}{5040r^6t^{10}}$



tes omnium inferiorum in unaquaque columna prodeunt multiplicando continuo numeralem coefficientem supremi termini per terminos hujus progressionis $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}, \frac{\frac{1}{2}n-3}{4}, \frac{\frac{1}{2}n-5}{6},$

$\frac{\frac{1}{2}n-7}{8}, \frac{\frac{1}{2}n-9}{10}$ etc. ubi n significat numerum dimensionum ipsius c in denominatore istius supremi termini. E. g. ut terminorum infra $\frac{1}{22r^4c^6}$ numerales coefficientes inveniuntur,

pone $n=6$, ducoque $\frac{1}{22}$ (numeralem coefficientem ipsius $\frac{1}{22r^4c^6}$) in $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, hoc est in 4, et prodit $\frac{4}{22}$ (numeralis coefficiens termini proxime inferioris), dein duco hunc $\frac{4}{22}$

in $\frac{\frac{1}{2}n-3}{4}$ sive in $\frac{n-3}{4}$, hoc est in $\frac{3}{4}$, et prodit $\frac{3}{88}$ numeralis coefficiens tertii termini in ista columna. Atque ita $\frac{3}{88} \times \frac{\frac{1}{2}n-6}{6}$ facit $\frac{5}{352}$ num. coeff. 4ti termini et $\frac{3}{352} \times \frac{\frac{1}{2}n-7}{8}$ facit $\frac{7}{2816}$ numeralem coefficientem infimi termini. Idem in aliis ad infinitum columnis praestari potest, adeoque valor ipsius DG per hanc Regulam pro lubitu produci. Ad haec, si BF dicatur x, sitque r latus rectum Ellipseos et $e = \frac{r}{AB}$: erit arcus Ellipticus

$$BG = \sqrt{rx} \text{ in } \left. \begin{array}{l} 1 + 2 \left\{ \begin{array}{l} x - 2 \\ -\frac{1}{3}e \end{array} \right\} + 3e \\ -\frac{1}{3r} \left\{ \begin{array}{l} xx \\ -\frac{1}{5}ee \end{array} \right\} + \frac{1}{5}ee \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x^2 - 10 \\ + 30e \\ -\frac{1}{7}e^2 \end{array} \right\} x^4 + \text{etc.}$$

Quare si ambitus totius Ellipseos desideretur: biseca CB in F, et quaere arcum DG per prius theorema, et arcum GB per posterius.

6. Si vice versa ex dato arcu Elliptico DG quaeratur sinus ejus CF, tum dicto $CD = r, \frac{CB^2}{CD} = c$ et arcu illo $DG = z$ erit

$$CF = z - \frac{1}{6cc} z^3 - \frac{1}{40rc^3} z^5 - \frac{1}{44rc^4} z^7 - \text{etc.}$$

$$+ \frac{43}{120c^4} + \frac{71}{420rc^5} - \frac{493}{5040c^6}$$

Quae autem de Ellipsi dicta sunt, omnia facile accommodantur ad Hyperbolam: mutatis tantum signis ipsorum c et e ubi sunt imparium dimensionum.

7. Praeterea si sit CE Hyperbola (Fig. 12), cujus Asymptoti AD, AF, rectum angulum FAD constituent, et ad AD erigantur utcumque perpendiculara BC, DE, occurrentia hyperbolae in C et E, et AB dicatur a; BC, b, et area BCED, z, erit $BD = \frac{z}{b}$

$+ \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6abb^2} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5}$ etc. ubi coefficientes denominatorum prodeunt multiplicando terminos hujus arithmeticae progressionis, 1, 2, 3, 4, 5 etc. in se continuo; et hinc ex logarithmo dato potest numerus ei competens inveniri.

8. Esto VDE quadratrix (Fig. 13), cujus vertex V, existente A centro et AE semidiametro circuli, ad quem aptatur, et angulo VAE recto, demissoque ad AE perpendicularo quovis DB et acta quadraticis tangente DT occurrente axi ejus in T: dic AV = a, et AB = x, eritque $BD = a - \frac{xx}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5}$

- etc. et $VT = \frac{xx}{3a} + \frac{x^4}{45a^3} + \frac{2x^6}{489a^5} + \text{etc.}$ et

area AVDB = $ax - \frac{x^3}{9a} - \frac{x^5}{225a^3} - \frac{2x^7}{6615a^5} - \text{etc.}$ Et

arcus VD = $x + \frac{2x^3}{27aa} + \frac{44x^5}{2025a^4} + \frac{604x^7}{893025a^6} + \text{etc.}$

unde vicissim ex dato BD, vel VT, ausarea AVDB arcuve VD per resolutionem affectarum aequationum erui potest x seu AB.

9. Esto denique AEB Sphaeroides (Fig. 14), revolutione Ellipseos AEB circa axem AB genita, et secta planis quatuor, AB

per axem transeunte, DG parallelo AB, CDE perpendiculariter bisecante axem, et FG parallelo CE: sitque recta CB = a, CE = c, CF = x et FG = y; et Sphaeroideos segmentum CDFG dictis quatuor planis comprehensum erit:

$$\begin{aligned}
 &+ 2cx y - \frac{x}{3c} y^3 - \frac{x}{20c^3} y^5 - \frac{x}{56c^5} y^7 - \frac{5x}{576c^7} y^9 - \text{etc.} \\
 &- \frac{cx^3}{3aa} - \frac{x^3}{18caa} - \frac{x^3}{40c^3aa} - \frac{5x^3}{336c^3aa} - \text{etc.} \\
 &- \frac{cx^5}{20a^4} - \frac{x^5}{40ca^4} - \frac{3x^5}{160c^3a^4} - \text{etc.} \\
 &- \frac{cx^7}{56a^6} - \frac{5x^7}{336ca^6} - \text{etc.} \\
 &- \frac{5cx^9}{576a^8} - \text{etc.} \\
 &- \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Ubi numerales coefficientes supremorum terminorum $(2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{15}, -\frac{5}{576} \text{ etc.})$ in infinitum producuntur multiplicando primum coefficientem continuo per terminos hujus progressionis $-\frac{1 \times 1}{2 \times 3}, \frac{1 \times 3}{4 \times 5}, \frac{3 \times 5}{6 \times 7}, \frac{5 \times 7}{8 \times 9}, \frac{7 \times 9}{10 \times 11}$, etc. Et numerales coefficientes terminorum in unaquaque columna descendendum in infinitum producuntur multiplicando continuo coefficientem supremi termini in prima columna per eandem progressionem, in secunda autem per terminos hujus $\frac{1 \times 1}{2 \times 3}, \frac{3 \times 3}{4 \times 5}$, etc. in tertia per terminos hujus $\frac{5 \times 5}{6 \times 7}, \frac{7 \times 7}{8 \times 9}$, etc. in quarta per terminos hujus $\frac{7 \times 7}{6 \times 7}, \frac{9 \times 9}{8 \times 9}$, etc. in quinta per terminos hujus $\frac{9 \times 9}{6 \times 7}$, etc. et sic in infinitum. Et eodem modo segmenta aliorum solidorum designari, et valores eorum aliquando commode per series quasdam numerales in infinitum produci possunt.

Ex his videre est, quantum fines Analyseos per hujusmodi infinitas aequationes ampliantur: quippe quae earum beneficio, ad omnia paene dixerim problemata (si numeralia Diophanti et similia excipias) sese extendit. Non tamen omnino universalis evadit, nisi per ultiores quasdam methodos eliciendi series infinitas. Sunt enim, quaedam Problemata, in quibus non liceat ad series infinitas per divisionem vel extractionem radicum simpli-

cium affectarumve pervenire: Sed quomodo in istis casibus procedendum sit, jam non vacat dicere, ut neque alia quaedam tradere, quae circa reductionem infinitarum serierum in finitas, ubi rei natura tulerit, excogitavi. Nam parcius scribo, quod hae speculationes diu mihi fastidio esse coeperint, adeo, ut ab iisdem jam per quinque fere annos abstinuerim. Unum tamen addam: quod postquam Problema aliquod ad infinitam aequationem deducitur, possint inde variae approximationes in usum mechanicae nullo fere negotio formari: quae per alias methodos quaesitae, multo labore temporisque dispendio constare solent, cujus rei exemplo esse possunt tractatus Hugeni aliorumque de quadratura circuli. Nam ut ex data arcus chorda A et dimidii arcus chorda B arcum illum proxime assequaris, finge arcum illum esse z, et circuli radium r; juxtaque superiora erit A (nempe duplum sinus dimidii z) = $z - \frac{z^3}{4 \times 6 rr} + \frac{z^5}{4 \times 4 \times 120 r^4} - \text{etc.}$

et B = $\frac{4}{2} z - \frac{z^3}{2 \times 16 \times 6 rr} + \frac{z^5}{2 \times 16 \times 16 \times 120 r^4} - \text{etc.}$ Duc jam B in numerum fictitium n et a producto aufer A, et residui secundum terminum (nempe $-\frac{nz^3}{2 \times 16 \times 6 rr} + \frac{z^5}{4 \times 6 rr}$) eo ut evanescat, pone = 0, indeque emerget n = 8, et erit 8B - A = $3z - \frac{3z^5}{64 \times 120 r^4} + \text{etc.}$ hoc est $\frac{8B - A}{3} = z$ errore tantum existente $\frac{z^5}{7680 r^4} - \text{etc.}$ in excessu. — Quod est theorema Hugenianum.

Insuper si in arcus Bb (Fig. 15.) sagitta AD indefinite producta quaeratur punctum G, a quo actae rectae GB, Gb abscondant tangentem Ee, quam proxime aequalem arcui isti: esto circuli centrum C, diameter AK = d et sagitta AD = x et erit DB (= $\sqrt{dx - xx}$) = $d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}} - \text{etc.}$; et AE (= AB) = $d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} + \text{etc.}$ Et AE - DB : AD :: AE : AG, quare AG = $\frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x - \frac{12xx}{175d} - \text{vel} + \text{etc.}$ Finge ergo AG = $\frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x$, et vi-



cissim erit $DG \left(\frac{3}{2}d - \frac{6}{5}x \right) : DB :: DA : AE - DB$.

Quare $AE - DB = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} + \frac{23x^{\frac{3}{2}}}{300d^{\frac{1}{2}}} + \text{etc.}$

Adde DB et prodit $AE = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{40d^{\frac{1}{2}}} + \frac{17x^{\frac{3}{2}}}{1200d^{\frac{1}{2}}} + \text{etc.}$ Hoc aufer de valore ipsius AE supra habito et restabit error $\frac{16x^{\frac{3}{2}}}{525d^{\frac{1}{2}}} + \text{vel} - \text{etc.}$ Quare in AG cape AH quantum partem AD et $KG = HC$, et actae GBE , Gbc abscedent tangentem Ee , quam proxime aequalem arcui BAB errore tantum existente $\frac{16x^{\frac{3}{2}}}{525d^{\frac{1}{2}}} \sqrt{dx} + \text{vel} - \text{etc.}$; multo minore scilicet quam in Theoremate Hugenii. Quod si fiat $7AK : 3AH :: DH : n$, et capiatur $KG = CH - n$, erit error adhuc multo minor.

Atque ita si circuli segmentum aliquod BAb per mechanicam designandum esset: primo reducerem aream istam in infinitam seriem, puta hanc $BbA = \frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{44d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{36d^{\frac{1}{2}}} - \text{etc.}$; dein quaerem constructiones mechanicas, quibus hanc seriem proxime assequeretur: cujus modi sunt haec.

Age rectam AB , et erit segm. $BbA = \frac{2}{3}AB + BD \times \frac{4}{5}AD$ proxime, existente scilicet errore tantum $\frac{x^3}{70dd} \sqrt{dx} + \text{etc.}$ in defectu: vel proximius, erit segmentum illud (bisecto AD in F et acta recta BF) $= \frac{4BF + AB}{15} \times \frac{4}{5}AD$, existente errore solummodo $\frac{x^3}{560dd} \sqrt{dx} + \text{etc.}$ qui semper minor est quam $\frac{4}{1500}$ totius segmenti, etiamsi segmentum illud ad usque semicirculum augetur.

Sic et in Ellipsi BAb cujus vertex A , axis alteruter AK et latus rectum AP , cape $PG = \frac{4}{2}AP + \frac{49AK - 21AP}{40AK} \times AP$;

in Hyperbola vero cape $Pg = \frac{4}{2}AP + \frac{49AK + 21AP}{40AK} \times AP$,

et acta recta GBE abscedet tangentem AE , quam proxime aequalem arcui Elliptico vel Hyperbolico AB , dummodo arcus ille non sit nimis magnus; et pro area segmenti hyperbolici

BbA (Fig. 46): in DP cape $Dm = \frac{3AD^2}{4AK}$, et ad D et m erige perpendicularia $D\beta$, mn occurrentia semicirculo super diametro AP descripto, eritque $\frac{4An + A\beta}{45} \times \frac{4}{5}AD = BbA$ proxime;

vel proximius, erit $\frac{21An + 4A\beta}{75} \times \frac{4}{5}AD = BbA$, si modo capiatur $Dm = \frac{5AD^2}{7AK}$ *).

Hactenus Dn. Newtonus, quae ipsi mihi non vacabat transcribere. Vereor autem, ne Amanuensis meus saepicula fuerit hallucinatus, cum nonnisi perfunctorie et valde cursim relegero mihi licuerit. Tua ipsius sagacitas errores emendabit. Quando visum tibi fuerit respondere (quod ut otiosus fiat, precor) more solito literas mihi destinatas inscribi velim, nempe etc. Devincias me, si Nobilissimum Dn. Tschirnhausa meo et Dn. Collinii nomine officiosissime salutes, ipsique dicas, has duas epistolas vos ambos spectare, et ab utroque vestrum responsionem expectere. Valete, et rem Mathematicam Philosophicamque augeto pergite. Dabam Londini d. 26. Julii 1676.

P. S.

Ut Germanum hunc, Vratislaviensem, consiliis tuis juvare velis, impense oro. Nomen ipsius est Samuel Regius; vir videtur ob doctrinam et modestiam amore et omni officiorum genere dignus.

Sinas, Te moneam tui, quo Sc. Regiae obstrictus es, promissi, de Machina tua Arithmetica ipsi mittenda. Velim profecto, Te, Germanum, et dictae Societatis membrum, fidem datam liberare, et me istae sollicitudine, quae, concivis nomine, non parum me augit, quantocius levare. Iterum vale, et huic libertati meae ignosce.

*) Soweit ist der Brief von einem Abschreiber geschrieben; das Folgende hat Oldenburg eigenhändig hinzugefügt.



XXXVII.
Leibniz an Oldenburg.

27 Aug. 1676.

Litterae tuae, die 26 Junii datae, plura ac memorabiliora circa rem Analyticam continent, quam multa volumina spissa de his rebus edita. Quare Tibi pariter ac Clarissimis Viris, Newtono ac Collinio, gratias ago, qui nos participes tot meditationum egregiarum esse voluistis.

Inventa Newtoni ejus ingenio digna sunt, quod ex Opticis Experimentis et Tubo Catadioptrico abunde eluxit.

Ejusque methodus inveniendi Radices Aequationum, et Areas Figurarum per Series Infinitas, prorsus differt a mea: Ut mirari libeat diversitatem itinerum per quae eodem pertingere licet.

Mercator Figuras Rationales, seu in quibus Ordinarum valor ex datis Abscissis rationaliter exprimi potest (ut scilicet Indeterminata Quantitas in vinculum non ingrediatur) quadravit, et ad Infinitas Series reducere docuit per Divisiones: Newtonus autem per Radicum Extractions. Mea Methodus, Corollarium est tantum doctrinae generalis de Transformationibus, cujus ope Figura proposita quaevis, quaecunque Aequatione explicabilis, transmutatur in aliam analyticam aequipollentem, talem ut in ejus Aequatione ordinatae dimensio non ascendat ultra Cubum aut Quadratum, aut etiam simplicem Dignitatem, seu infimum gradum. Ita fiet ut quaelibet Figura, vel per Extractionem radice Cubicae vel Quadraticae, Newtoni more; vel etiam, methodo Mercatoris, per simplicem Divisionem, ad Series Infinitas reduci queat.

Ego vero, ex his Transmutationibus, simplicissimam ad rem praesentem delegi. Per quam scilicet unaquaeque Figura transformatur in aliam aequipollentem rationalem, in cujus aequatione Ordinata in nullam prorsus ascendit Potestatem: Ac proinde sola Mercatoris Divisione per Infinitam Seriem exprimi potest.

Ipsa porro generalis Transmutationum methodus, mihi inter potissima Analyseos censenda videtur. Neque enim tantum ad Series Infinitas et ad Approximationes, sed et ad solutiones Geometricas, aliae innumera vix alioqui tractabilia inservit. Ejus vero Fundamentum vobis candide libereque scribo; persuasus quae apud vos habentur praeclara mihi quoque non denegatum iri.

Transformationis fundamentum hoc est: Ut figura proposita rectis innumeris utunque, modo secundum aliquam regulam sine

legem ductis, resolvatur in partes; quae partes, aut aliae ipsis aequales, alio situ, aliave forma reconjunctae, aliam component figuram priori aequipollentem, seu ejusdem areae; etsi alia longe figura constantem. Unde ad Quadraturas absolutas, vel hypotheticas Geometricas, vel serie infinita expressas Arithmeticas, jamjam multis modis perveniri potest.

Ut intelligatur, sit (Fig. 17) AQCD. Ea, ductis rectis BD parallelis, resolvi potest in Trapezia ${}_1B{}_2D$, ${}_2B{}_3D$, etc. Sed, ductis rectis convergentibus ED, resolvi potest in Triangula $E{}_1D{}_2D$, $E{}_2D{}_3D$ etc. Si jam alia sit curva $A{}_1F{}_2F{}_3F$, cujus Trapezia ${}_1B{}_2F$, ${}_2B{}_3F$, sint Triangulis $E{}_1D{}_2D$, $E{}_2D{}_3D$, ordine respondentibus aequalia, tota figura $A{}_1E{}_3D{}_2D{}_1DA$, totius figurae $A{}_1F{}_2F{}_3F{}_3B{}_1A$ erit aequalis.

Quinetiam Trapezia Trapezis conferendo, fieri potest ut ${}_1N{}_2P$, vel quod eodem redit, Rectangulum ${}_1N{}_2N{}_3P$, sit aequale Trapezio respondententi ${}_1B{}_2D$, sive Rectangulo ${}_1B{}_2B{}_2D$, tametsi recta ${}_1N{}_1P$ non sit aequalis rectae ${}_1B{}_1D$, modo sit ${}_1N{}_2N$ ad ${}_1B{}_2B$ ut ${}_1B{}_1D$ ad ${}_1N{}_1P$; quod infinitis modis fieri potest.

Quae omnia talia sunt ut cuius statim ordine progredienti, ipsa natura duce, in mentem veniant; contineantque Indivisibilem Methodum generalissime conceptam, nec (quod sciam) hactenus satis universaliter explicatam. Non tantum enim Parallelae et Convergentes, sed et aliae quaecunque certa lege ductae, rectae vel curvae, adhiberi possunt ad resolutionem. Quanta autem et quam abstrusa hinc duci possint, judicabit qui methodi universalitatem animo erit complexus. Certum enim est omnes Quadraturas hactenus notas, absolutas vel hypotheticas, nonnisi exigua ejus specimina esse.

Sed nunc quidem suffecerit applicationem ostendere ad id de quo agitur; Series scilicet Infinitas, et modum Transformandi figuram datam in aliam aequipollentem rationalem, Mercatoris methodo tractandam.

AQCA sit Quadrans Circuli, Radius AQ = r, Abscissa $A{}_1B = x$, Ordinata ${}_1B{}_1D = y$, Aequatio pro Circulo $2rx - x^2 = y^2$. Ducatur recta $A{}_1D$: producaturque donec ipsi QC etiam productae occurrat in ${}_1N$: Et $Q{}_1N$ vocetur z. Et erit $A{}_1B$ seu $x = \frac{2r^2}{r^2 + x^2}$, et ${}_1B{}_1D$ sive $y = \frac{2zr^2}{r^2 + z^2}$. Eodem modo, ducta $A{}_2D{}_2N$; si $Q{}_2N = z - \beta$ (posita scilicet ${}_1N{}_2N$