XVI[1]).

[1664][2]).

On connaîtra le pendule iſochrone avec une figure plane quelconque ſymétrique par rapport à un axe, ſuſpendue en un point ſitué ſur le prolongement de cet axe et oſcillant d'un mouvement plan [3]), lorſque le pendule iſochrone avec la même figure ſuſpendue au même point et oſcillant d'un mouvement ſolide [3]) eſt donné, ainſi que le pendule iſochrone avec la demi-figure oſcillant d'un mouvement ſolide autour de l'axe de la figure, et encore le centre de gravité de la demi-figure. En effet, la longueur du pendule cherché eſt égale à celle du premier des pendules donnés augmentée d'une droite, dont le rapport à la longueur du ſecond pendule donné eſt égal au rapport de la diſtance du centre de gravité de la demi-figure juſqu'à l'axe de la figure à la diſtance du centre de gravité de la figure juſqu'au point de ſuſpenſion.

Soit BAC [Fig. 72] la figure plane ſymétrique par rapport à l'axe AD. J'appelle ſymétrique par rapport à un axe toute figure dont les deux moitiés, ayant tourné autour de cet axe juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent, s'appliquent parfaitement l'une ſur l'autre. Et ſoit E le point ſur le prolongement de l'axe auquel la figure qui oſcille dans ſon plan eſt ſuſpendue. EH eſt la longueur donnée du pendule iſochrone avec la figure lorſqu'elle ſe meut d'un mouvement ſolide, étant ſuſpendue au même point; et HK la longueur du pendule iſochrone avec la demi-figure ADC lorſque cette dernière oſcille d'un mouvement ſolide autour de l'axe AD. Soit de plus L le centre de gravité de la figure ABC et M celui de la demi-figure DAC. Prenons HN de telle manière que EL : LM = KH : HN. Je dis que EN eſt la longueur du pendule iſochrone avec le mouvement plan de la figure ABC ſuſpendue en E. Appelant QP ou x le pendule iſochrone avec la figure, je montrerai donc que ce pendule a une longueur égale à EN.

En effet, ſuppoſons la demi-figure ABD diviſée en de très petits carrés égaux

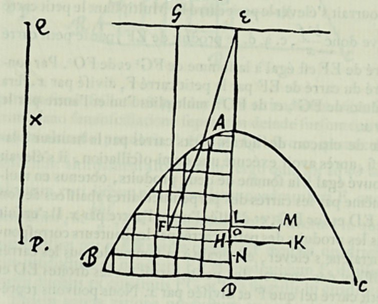
[1]) Manuscrit B p. 200—211.
[2]) Comparez la note 2 de la p. 435.
[3]) Comparez ſur le „motus planus" (mouvement plan) et le „motus ſolidus" (mouvement ſolide) les définitions données à la p. 499.

XVI[1]).

[1664][2]).

Figuræ cuivis planæ circa axem ordinatæ et a puncto in axe producto ſuſpenſæ motuque plano [3]) agitatæ pendulum iſochronon habebitur, ſi detur pendulum iſochronon figuræ eidem ab eadem ſuſpenſione motu ſolido [3]) agitatum; alterumque item iſochronon dimidiæ figuræ motu ſolido agitatæ circa figuræ axem ac præterea centrum gravitatis figuræ dimidiæ. Componitur enim quæſiti penduli longitudo, ex priore datorum pendulorum et ex ea linea quæ ſit ad poſterius pendulum datum ſicut diſtantia centri gravitatis figuræ dimidiæ ab axe figuræ, ad diſtantiam centri gravitatis figuræ a puncto ſuſpenſionis.

[Fig. 72.]



Sit figura plana BAC [Fig. 72] circa axem ordinata qui ſit AD. Intelligo autem circa axem ordinatam figuram omnem, cujus medietates duæ circa axem rotatæ donec ſibi mutuo occurrant, altera alteri congruant. Et ſit in producto axe punctum E, unde ſuſpenſa figura agitetur motu plano. Ponatur autem EH eſſe longitudo penduli ipſi iſochroni cum motu ſolido ex eadem ſuſpenſione agitatur. HK vero longitudo penduli iſochroni dimidiatæ figuræ ADC, ſi circa axem AD agitetur motu ſolido. Sit autem L centrum gravitatis figuræ ABC, et M dimidiatæ DAC. Et ut EL ad LM ita ſit KH ad HN. Dico EN eſſe longitudinem penduli iſochroni motui plano figuræ ABC ex E ſuſpenſæ. Poſito enim pendulo QP ſive x, quod ſit figuræ iſochronon, oſtendam hoc longitudinem habere ipſius EN.

Intelligatur enim dimidia figura ABD ſecta in quadratula minima æqualia, ducentre eux, et considérons, après avoir mené la droite EG perpendiculairement à ED, l'un quelconque de ces très petits carrés, p. e. celúi dont F est le centre, duquel nous pouvons abaisser sur les droites ED et EG les perpendiculaires FO et FG. Tirons de plus la droite FE.

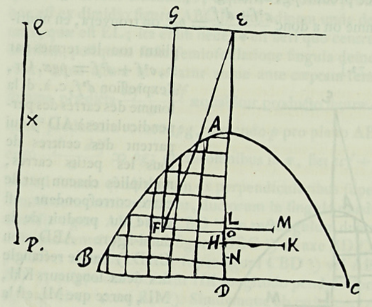
Or, le pendule x étant par hypothèse isochrone avec la figure ABC, si l'on suppose que l'un et l'autre exécutent une demi-oscillation maximale, c. à. d. d'un quart de cercle, après cette demi-oscillation la vitesse du poids P sera à celle du très petit carré F comme la longueur QP ou x est à la longueur EF que nous désignerons par b. En effet, il est évident que la vitesse du point F dépend de sa distance du point E, de sorte que d'autres points quelconques du plan ABC situés à la même distance du point E acquièrent la même vitesse. Mais comme QP^2 ou x^2 est à EF^2 ou b^2, ainsi est la hauteur à laquelle s'élève le poids P après avoir exécuté une demi-oscillation à la hauteur à laquelle monterait le petit carré F, si après avoir exécuté avec le plan une demi-oscillation il pouvait ensuite convertir seul son mouvement en ascension. Mais la dite hauteur du poids P est égale à QP ou x même, puisqu'il est certain que ce poids montera à une hauteur égale à celle dont il est descendu. Par conséquent, comme $x^2 : b^2 = x : \frac{b^2}{x}$, $\frac{b^2}{x}$ sera la hauteur à laquelle, comme nous l'avons dit, pourrait s'élever le petit carré F. Multipliant le petit carré par cette hauteur, on trouve donc $\frac{b^2 f}{x}$, c. à. d. le produit de EF^2 par le petit carré F, divisé par x. Or, le carré de EF est égal à la somme de FG^2 et de FO^2. Par conséquent le produit considéré du carré de EF par le petit carré F, divisé par x, sera égal à la somme des produits de FG^2, et de FO^2, multipliés l'un et l'autre par le petit carré F et divisés par x.

Pareillement le produit de chacun des autres petits carrés par la hauteur à laquelle il pourrait s'élever si, après avoir exécuté une demi-oscillation, il s'élevait ensuite librement, sera trouvé égal à la somme de deux produits, obtenus en multipliant le petit carré lui-même par les carrés des perpendiculaires abaissées de son centre respectivement sur ED et sur EG, et divisés l'un et l'autre par x. Il s'ensuit donc que la somme de tous les produits des petits carrés par les hauteurs correspondantes auxquelles ils pourraient s'élever, est égale à la somme de tous les carrés des perpendiculaires abaissées des centres des petits carrés sur les droites ED et EG, multipliée par un petit carré tel que F et divisée par x. Nous pouvons représenter cette somme par l'expression $\frac{c^2 f}{x} + \frac{d^2 f}{x}$, en appelant c^2 la somme des carrés de toutes les perpendiculaires nommées sur EG et d^2 celle des carrés de toutes les perpendiculaires sur ED. Mais la somme mentionnée des produits des petits carrés chacun par sa hauteur d'ascension doit être égale au produit de l'ensemble de tous les petits carrés, c. à. d. de la demi-figure ABC, par la hauteur dont son centre de gravité est descendu, c. à. d. par EL; en effet, ceci doit nécessairement avoir lieu

tâque EG perpendiculari in ED, consideretur unum quoddam dictorum quadratulorum, puta cujus centrum F, a quo in rectas ED, EG, ducantur perpendiculares FO, FG et jungatur FE.

Jam quia pendulum x isochronon ponitur figuræ ABC; si tum illud tum hæc maximam semioscillationem facere concipiantur, hoc est, quadrantalem, erit, in fine ejus, velocitas ponderis P ad velocitatem quadratuli F, sicut longitudo QP sive x ad longitudinem EF, quæ dicatur b. Patet enim velocitatem puncti F pendere a distantia ejus à puncto E, adeo ut quælibet alia puncta plani ABC quæ tantundem ab E distant eandem quoque acquirant velocitatem. Sicut vero quadr. QP sive xx ad quadr. EF sive bb ita est altitudo ad quam ascendit peracta semioscillatione pondus P, ad altitudinem ascensus quadratuli F, si peracta cum plano semioscillatione separatim deinde sursum convertat motum suum. Dicta autem altitudo ponderis P est ipsa QP sive x; quum constet ad æqualem ei unde descendit altitudinem ascensurum; ergo quia xx ad bb ut x ad $\frac{bb}{x}$, erit $\frac{bb}{x}$ altitudo ad quam, uti dictum est, ascenderet quadratulum F. quo itaque ducto in altitudinem istam, fit $\frac{bbf}{x}$, hoc est, quadratum EF ductum in quadratulum F productumque divisum per x. Est autem quadr. EF æquale quadratis FG et FO. Itaque dictum productum ex quadrato EF in quadratulum F, divisum per x, æquabitur productis duobus ex quadratis FG et FO singulis in quadratulum F, divisisque per x.

[Fig. 72.]

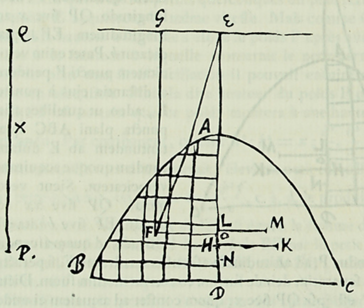


Eadem autem ratione productum ex unoquoque reliquorum quadratulorum in altitudinem ad quam ipsum ascenderet, si facta semioscillatione libere deinde sursum moveretur, invenietur æquale productis duobus ex quadratis perpendicularium a centro ejus in ED et EG cadentibus, ductis in ipsum quadratulum, singulisque divisis per x. Unde itaque sequitur summam omnium productorum ex quadratulis in dictas quo ascenderent altitudines, æquari summæ omnium quadratorum [1]) quæ

[1]) C. à. d. quadratorum perpendicularium.

afin que le centre de gravité de tous les petits carrés, lorſqu'ils ſe ſont élevés ſéparément et librement après avoir exécuté une demi-oſcillation, ſe trouve à la même hauteur qu'avant le commencement de la demi-oſcillation. Par conſéquent la ſomme mentionnée plus haut $\frac{c^2f+d^2f}{x}$ ſera égale au produit de la demi-figure ABD par la droite EL. Appelons ce produit pg, où la figure plane ABD eſt déſignée par p et la droite EL par g. Comme on a donc $\frac{c^2f+d^2f}{x}=pg$, on trouvera, en multipliant tous les termes par x, $c^2f+d^2f=pgx$. Or, l'expreſſion d^2f, c. à. d. la ſomme des carrés des perpendiculaires à AD [2]) qui partent des centres de tous les petits carrés, multipliés chacun par le carré correſpondant, eſt égale au produit de la demi-figure ABD ou CAD [2]) par le rectangle des deux longueurs KH, ML, parce que ML eſt la diſtance du centre de gravité de la figure DAC [2]) à l'axe AD [2]), et KH le bras de levier par rapport à AD [2]) correſpondant au centre de gravité du tronc érigé ſur la figure CAD [2]) ou ABD et limité par un plan paſſant par AD [2]); c'eſt ce qui réſulte de notre ſuppoſition que HK eſt la longueur du pendule iſochrone avec la demi-figure conſidérée oſcillant autour de l'axe AD [2]). Pour une raiſon ſemblable c^2f, c. à d. la ſomme des carrés des perpendiculaires ſur EG, multipliés chacun par un F correſpondant, eſt égale au produit de la demi-figure ABD par le rectangle des deux longueurs HE et EL. En poſant HE $=k$; EL, comme plus haut, $=g$; KH $=m$; ML $=n$, on aura donc

[Fig. 72.]



$$c^2f+d^2f=kgp+mnp.$$

Or, nous avions $\qquad c^2f+d^2f=pgx.$

Donc auſſi $\qquad pgx=pgk+pmn.$

Rayant partout p et diviſant par g, on obtient $x=k+\frac{mn}{g}$. Par conſéquent,

ex centris quadratulorum cadunt in rectas ED et EG ductæ in quadratulum unum ut F diviſæque per x. quæ ſumma dicatur $\frac{ccf}{x}+\frac{ddf}{x}$, ponendo cc pro quadratis dictarum perpendicularium omnium ſuper EG et dd pro quadratis omnium perpendicularium ſuper ED. Atqui illa productorum ſumma, ex quadratulis in eas quo aſcenderent altitudines, æqualis eſſe debet producto ex omnibus quadratulis hoc eſt ex dimidio figuræ ABC in altitudinem unde deſcendit ejus centrum gravitatis, quæ eſt EL; ita enim neceſſe eſt fieri quo centrum gravitatis quadratulorum omnium, poſtquam facta ſemioſcillatione ſingula deinde iiberæ [1]) ſurſum aſcenderunt, æque altum inveniatur atque ante cœptam ſemioſcillationem fuerat. Ergo ſumma prædicta $\frac{ccf+ddf}{x}$ æquabitur producto figuræ dimidiæ ABD in rectam EL. quod productum vocetur pg, ponendo p pro plano ABD, et g pro recta EL. quia ergo $\frac{ccf+ddf}{x}\infty pg$; ductis omnibus in x, fiet $ccf+ddf\infty pgx$. Eſt autem ddf, hoc eſt ſumma quadratorum ex perpendicularibus ſuper BD [2]) quæ a centris quadratulorum omnium exeunt, ductorum in ſingula quadratula, æqualis producto ex dimidia figura ABD ſeu CBD [2]) in rectangulum duarum KH, ML, quia ML eſt diſtantia centri gravitatis figuræ DBC [2]) ab axe BD [2]); KH vero diſtantia ex qua ponderat truncus erectus ſuper figura CBD [2]) vel ABD, abſciſſuſque plano per BD [2]); quippe cum ponatur HK longitudo penduli iſochroni dictæ dimidiæ figuræ agitatæ circa axem BD [2]). Similemque ob rationem ccf, hoc eſt ſumma quadratorum à perpendiculis ſuper EG, ductorum in ſingula F, æquatur producto ex dimidia figura ABD ducta in rectangulum duarum HE, EL. Ponendo itaque HE ∞k, EL uti ſuprà ∞g; KH ∞m; ML ∞n;

erit $\qquad ccf+ddf\infty kgp+mnp.$

erat autem $\qquad ccf+ddf\infty pgx.$

Ergo et $\qquad pgx\propto pgk+pmn.$

Et delendo ubique p ac dividendo per g, fit $x\infty k+\frac{mn}{g}$. Ergo cum k ſit EH, et $\frac{mn}{g}$ quarta proportionalis tribus g, n, m, hoc eſt tribus EL, LM, KH, ac proinde

[1]) Liſez „libere" ou „libera".

[2]) La figure que nous avons déſignée par „Fig. 72", ſe trouve à la p. 200 du Manuſcrit; au revers de cette page Huygens reproduit la même figure en intervertiſſant les lettres A et B. Nous n'avons rien changé dans le texte latin, mais dans le texte français nous nous ſommes conformés à la Fig. 72.

comme k eſt EH, et que $\frac{mn}{g}$ eſt quatrième proportionnelle aux trois longueurs g, n, m, c. à. d. aux trois longueurs EL, LM et KH, que $\frac{mn}{g}$ eſt donc égale par conſtruction à HN, l'expreſſion $k+\frac{mn}{g}$ ſera égale à la ligne entière EN. Par conſéquent x, c. à. d. QP, ſera auſſi égale à EN. Ce qu'il fallait démontrer.

Il apparait donc qu'on peut trouver un pendule iſochrone avec une figure plane quelconque ſuſpendue en un point arbitraire du prolongement de l'axe et oſcillant d'un mouvement plan, pourvu qu'on connaiſſe les centres de gravité ſuivants: 1) celle de la figure entière, 2) celle de la demi-figure, ſituée de part et d'autre de l'axe. Il faut connaître en outre la diſtance du centre de gravité de l'onglet érigé ſur la figure entière et limité par un plan paſſant par l'axe d'oſcillation, jusqu'à un plan mené par le même axe d'oſcillation et perpendiculaire au plan de la figure; et enfin la diſtance du centre de gravité de l'onglet conſtruit ſur la demi-figure et limité par un plan paſſant par l'axe de la figure, jusqu'à un plan paſſant par le même axe et perpendiculaire à la figure [1]).

Trouver le pendule iſochrone avec un rectangle ſuſpendu en un point qui diviſe un des côtés en deux parties égales et qui oſcille dans ſon plan.

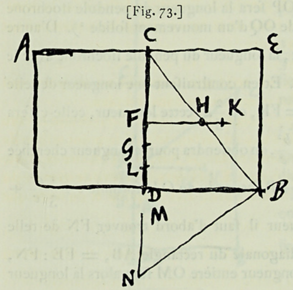
Suppoſons le rectangle AB [Fig. 73] ſuſpendu au point C qui diviſe le côté AE en deux parties égales, et ſoit CD l'axe du rectangle et F le point milieu de cet axe; F eſt donc le centre de gravité du rectangle AB, et ſi l'on tire la droite FH parallèle à CE et égale à la moitié de CE, H ſera le centre de gravité du rectangle CB. Et ſi l'on prolonge la même droite FH jusqu'en K de ſorte que $\mathrm{FK}=\frac{2}{3}\mathrm{CE}$, FK ſera la longueur du pendule iſochrone avec le rectangle CB, ſuppoſé que celui-ci oſcille autour de l'axe CD. Pareillement ſi l'on prend $\mathrm{CG}=\frac{2}{3}\mathrm{CD}$, CG ſera la longueur du pendule iſochrone avec le rectangle entier AB oſcillant autour de l'axe AE, bien entendu d'un mouvement ſolide. Soit $\mathrm{CE}=a$ et $\mathrm{CD}=b$. Il importe donc de conſtruire une nouvelle longueur FL de telle manière que l'on ait CF : FH, c. à. d. $\frac{1}{2}b:\frac{1}{2}a=\mathrm{FK}$, ou $\frac{2}{3}a:\mathrm{FL}$, laquelle ſera donc $\frac{2}{3}\frac{a^2}{b}$. Et en ajoutant cette longueur à $\mathrm{CG}=\frac{2}{3}b$, on trouve $\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}\frac{a^2}{b}$ pour la longueur cherchée du pendule iſochrone avec le rectangle AB. Or, on trouvera cette longueur par une conſtruction très facile en traçant la diagonale CB du demi-rectangle, et enſuite la droite BN perpendiculaire à CB et rencontrant le prolongement de l'axe CD au point N, enfin en

æqualis ex conſtructione ipſi HN; æquabitur $k+\frac{mn}{g}$ toti EN. Ideoque et x hoc eſt QP ipſi EN æqualis erit. quod erat demonſtrandum.

Patet igitur cuivis figuræ planæ a puncto quovis in axe producto ſuſpenſæ motuque plano agitatæ pendulum iſochronon inveniri poſſe, ſi modo hæc centra gravitatis noſcantur, nempe figuræ totius; figuræ dimidiæ ab alterutra parte axis. Præterea diſtantia centri gravitatis ungulæ ſuper figura tota plano per axem oſcillationis abſciſſæ, a plano per eundem oſcillationis axem ducto quod ſit plano figuræ ad angulos rectos ac denique diſtantia centri gravitatis ungulæ ſuper figura dimidia plano per axem figuræ abſciſſæ, à plano per eundem axem ducto atque ad figuram erecto [1]).

Rectangulo ſuſpenſo ex puncto quod latus bifariam dividit, motuque plano agitato pendulum iſochronon invenire.

[Fig. 73.]



Eſto rectangulum AB [Fig. 73] ſuſpenſum ex Ç puncto, latus AE bifariam dividente. ſitque axis rectanguli CD, qui bifariam dividatur in F: Eſt ergo F centrum gravitatis rectanguli AB et ducta FH parallela CE ipſique dimidiae CE æquali, erit H centrum gravitatis rectanguli CB. Eadem vero FH producta ad K ut ſit FK $\infty\ \frac{2}{3}$ CE; erit FK longitudo penduli iſochroni rectangulo CB, ſi ſuper axi CD agitari concipiatur. ſimiliterque ſumta CG $\infty\ \frac{2}{3}$ CD, erit ea longitudo penduli iſochroni rectangulo toti AB agitato circa axem AE, hoc eſt motu ſolido. Sit CE $\infty\ a$, CD $\infty\ b$. Oportet igitur facere ſicut CF ad FH, hoc eſt, ſicut $\frac{1}{2}b$ ad $\frac{1}{2}a$ ita FK ſive $\frac{2}{3}a$ ad aliam FL, quæ erit $\frac{2}{3}\frac{aa}{b}$. quâ addita ad CG $\infty\ \frac{2}{3}b$, fit $\frac{2}{3}b+\frac{2}{3}\frac{aa}{b}$ longitudo penduli iſochroni rectangulo AB quæ quærebatur. Conſtructione autem facillima invenietur ea longitudo ſi ducatur CB diagonalis rectanguli dimidij. ipſique CB ad angulos rectos BN quæ cum producto axe CD conveniat in N; ac ſumatur CM æqualis $\frac{2}{3}$ CN. Erit enim tota

[1]) Comparez, à la p. 477, les deux derniers alinéas de la note 2 de la p. 476.

prenant $CM = \frac{2}{3} CN$. En effet, la longueur totale CN ſéra égale à $b + \frac{a^2}{b}$, et par conſéquent $CM = \frac{2}{3} CN = \frac{2}{3} b + \frac{2}{3} \frac{a^2}{b}$ ſera égale à la longueur cherchée.

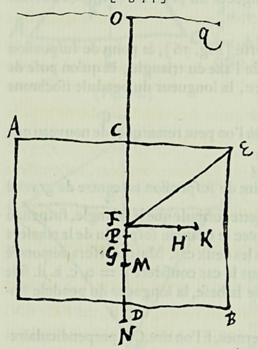
Mais pour trouver le pendule iſochrone avec ce même rectangle lorſqu'il eſt ſuspendu en un point O ſitué ſur le prolongement de l'axe DC [Fig. 74], nous pouvons poſer $OF = c$ et conſtruire la longueur FP de telle manière que OF : FC, c. à. d. $c : \frac{1}{2} b = GF$, ou $\frac{1}{6} b$: FP, laquelle ſera donc $\frac{1}{12} \frac{b^2}{c}$. Par conſéquent $PO = c + \frac{1}{12} \frac{b^2}{c}$ ſera le bras de levier du tronc conſtruit ſur le rectangle AB et limité par un plan mené par OQ parallèlement à AE, d'après la propoſition. . . [1]) et par conſéquent la même longueur OP ſera la longueur du pendule iſochrone avec le rectangle AB oſcillant autour de OQ d'un mouvement ſolide [2]). D'autre part $FK = \frac{2}{3} a$ eſt, comme plus haut, la longueur du pendule iſochrone avec le rectangle CB oſcillant autour de CD. Et en conſtruiſant une longueur de telle manière que OF : FH, c. à. d. $c : \frac{1}{2} a = FK$, ou $\frac{2}{3} a$: cette longueur, celle-ci ſera $\frac{1}{3} \frac{a^2}{c}$, et en l'ajoutant à $OP = c + \frac{1}{12} \frac{b^2}{c}$, on obtiendra pour la longueur cherchée du pendule iſochrone avec le rectangle AB ſuspendu en O la formule $c + \frac{1}{3} \frac{a^2}{c} + \frac{1}{12} \frac{b^2}{c}$. Pour conſtruire cette longueur il faut d'abord trouver FN de telle manière que OF : FE, moitié de la diagonale du rectangle AB, = FE : FN, dont il faut prendre le tiers FM; la longueur entière OM ſera alors la longueur cherchée du pendule. En effet, comme $FE = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} b^2}$, on aura $FN = \frac{a^2 + \frac{1}{4} b^2}{c}$, et ſon tiers $FM = \frac{\frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{12} b^2}{c}$; et par conſéquent la longueur entière $OM = c + \frac{\frac{1}{3} a^2 + \frac{1}{12} b^2}{c}$, ce qui était la formule donnant la longueur du pendule [3]).

On trouvera de la même manière le pendule iſochrone avec le triangle iſoſcèle

$CN \infty b + \frac{aa}{b}$, ideoque $CM \infty \frac{2}{3} CN \infty \frac{2}{3} b + \frac{2}{3} \frac{aa}{b} \infty$ longitudini quæſitæ.

Rectangulo autem eidem ex puncto O in axe DC [Fig. 74] producto ſuſpenſo iſochronon pendulum ut inveniatur ſit $OF \infty c$ et fiat ut OF ad FC, hoc eſt, ut c ad $\frac{1}{2} b$, ita GF hoc eſt $\frac{1}{6} b$ ad FP, quæ itaque erit $\frac{1}{12} \frac{bb}{c}$. Eritque $PO \infty c + \frac{1}{12} \frac{bb}{c}$ brachium trunci ſuper rectangulo AC abſciſſi plano per OQ parallelam AE ducto, per prop.... [1]) ac proinde eadem OP longitudo penduli iſochroni rectangulo AB motu ſolido circa OQ agitato. FK autem $\infty \frac{2}{3} a$, eſt, ut prius, longitudo iſochrona rectangulo CB circa CD agitato [2]). Quare faciendo ut ſicut OF ad FH, hoc eſt, ut c ad $\frac{1}{2} a$, ita $FK \infty \frac{2}{3} a$ ad aliam, ea erit $\frac{1}{3} \frac{aa}{c}$, qua addita ad $OP \infty c + \frac{1}{12} \frac{bb}{c}$, fiet longitudo quæſita penduli iſochroni rectangulo AB ex O ſuſpenſo æqualis $c + \frac{1}{3} \frac{aa}{c} + \frac{1}{12} \frac{bb}{c}$ quæ longitudo invenietur, ſi quemadmodum OF ad FE ſemidiagonium rectanguli AB, ita ſit FE ad FN, cujus tertia pars ſumatur FM, tota enim OM erit longitudo penduli quæſita. Quia enim $FE \infty \sqrt{aa + \frac{1}{4} bb}$, fit $FN \infty \frac{aa + \frac{1}{4} bb}{c}$, ejuſque triens $FM \infty \frac{\frac{1}{3} aa + \frac{1}{12} bb}{c}$; ac proinde tota $OM \infty c + \frac{\frac{1}{3} aa + \frac{1}{12} bb}{c}$, quæ erat inventa penduli longitudo [3]).

[Fig. 74.]



Eadem methodo triangulo iſoſceli ABC [Fig. 75], ſuſpenſo ex puncto D in

[1]) Huygens n'a pas indiqué la propoſition qu'il avait en vue. Voir les p. 507—509 (Fig. 67).
[2]) Voir la p. 509 qui précède.
[3]) Comparez la p. 469.

ABC [Fig. 75] fuſpendu au point D ſitué ſur le prolongement de l'axe BE. En effet, ſi l'on poſe DE $= a$, BE $= b$, EC, moitié de la baſe, $= c$, la longueur du pendule iſochrone deviendra $a - \frac{1}{3}b + \frac{\frac{1}{18}b^2 + \frac{1}{6}c^2}{a - \frac{1}{3}b}$. Remarquons que $a - \frac{1}{3}b$ eſt la longueur DF, c. à. d. la diſtance du point de ſuſpenſion au centre de gravité du triangle. Dans le cas $a = b$, c. à. d. ſi le triangle eſt ſuſpendu en ſon ſommet B, il apparaît que la dite longueur ſera $\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}\frac{c^2}{a}$. Et ſi en outre $c = a$, c. à. d. ſi l'angle ABC eſt droit, la dite longueur du pendule iſochrone devient égale à a, c. à. d. à BE.

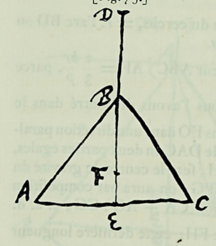
Mais ſi le même triangle iſoſcèle eſt renverſé [Fig. 76], le point de ſuſpenſion D ſe trouvant toujours ſur le prolongement de l'axe du triangle, et qu'on poſe de nouveau DE $= a$, EB $= b$, EC ou EA $= c$, la longueur du pendule iſochrone deviendra égale à $a + \frac{1}{3}b + \frac{\frac{1}{18}b^2 + \frac{1}{6}c^2}{a + \frac{1}{3}b}$, où l'on peut remarquer de nouveau que $a + \frac{1}{3}b$ n'eſt autre que DF, diſtance du point de ſuſpenſion au centre de gravité du triangle ABC. On voit aiſément d'après cette formule que le triangle, ſuſpendu comme nous l'avons fait ici, ſera iſochrone avec le triangle ſuſpendu de la manière précédente, ſi la diſtance DF eſt la même dans les deux cas. Mais ceci ſera démontré plus loin d'une façon plus générale [1]). Si dans le cas conſidéré $a = 0$, c. à. d. ſi le triangle eſt ſuſpendu en E, point milieu de la baſe, la longueur du pendule iſochrone ſera égale à $\frac{1}{2}b + \frac{\frac{1}{2}c^2}{b}$; en d'autres termes, ſi l'on tire CN perpendiculairement au côté CB et rencontrant le prolongement de l'axe en N, la moitié de la longueur entière BN ſera la longueur du pendule iſochrone. Et ſi de plus $c = b$, cette longueur ſera égale à b, c. à. d. à EB. D'où il apparaît que le triangle droit iſoſcèle a des oſcillations iſochrones dans les deux cas où il eſt ſuſpendu reſpectivement au ſommet et au milieu de la baſe.

Cette méthode nous permet auſſi de trouver le pendule iſochrone avec le ſecteur ABDC [Fig. 77] ſuſpendu en A, centre du cercle dont il fait partie, ou en un point quelconque ſitué ſur le prolongement de ſon axe AD. Ce qui ne peut être

[1]) Comparez la note 3 de la p. 461, ainſi que le quatrième alinéa de la note 3 de la p. 462 et les Prop. XII, XIII et XVI de la Pars Quarta de l'„Horologium oſcillatorium".

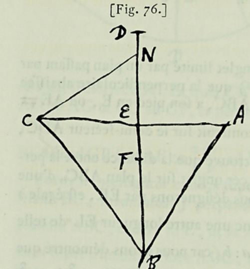
axe producto BE, pendulum iſochronon invenietur. Nam poſitis DE ∞ a; BE ∞ b; EC dimidia baſi ∞ c fit longitudo penduli

[Fig. 75.]



iſochroni $a - \frac{1}{3}b + \frac{\frac{1}{18}bb + \frac{1}{6}cc}{a - \frac{1}{3}b}$. notetur vero quod $a - \frac{1}{3}b$ eſt DF, quæ nempe à puncto ſuſpenſionis pertingit ad trianguli gravitatis centrum. Si vero $a \infty b$, hoc eſt ſi triangulum ex vertice B ſuſpendatur, patet prædictam longitudinem fore $\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}\frac{cc}{a}$. Quod ſi inſuper $c \infty a$, hoc eſt angulus ABC rectus, fit dicta penduli iſochroni longitudo ∞ a, hoc eſt, ∞ BE.

[Fig. 76.]



Si vero inverſum fuerit triangulum idem iſoſceles [Fig. 76] ut tamen punctum ſuſpenſionis D ſit in axe trianguli producto; ponendo rurſus DE ∞ a; EB ∞ b; EC vel EA ∞ c; fiet longitudo penduli iſochroni $\infty\ a + \frac{1}{3}b + \frac{\frac{1}{18}bb + \frac{1}{6}cc}{a + \frac{1}{3}b}$. ubi notetur rurſus $a + \frac{1}{3}b$ eſſe DF, quæ nempe à puncto ſuſpenſionis pertingit ad centrum gravitatis trianguli ABC. unde facile perſpicitur, triangulum ita ut hic ſuſpenſum iſochronum fore priori modo ſuſpenſo, ſi diſtantia DF utrobique eadem fuerit. ſed hoc poſtea univerſalius demonſtrabitur [1]). Quod ſi hic fuerit $a \infty 0$, hoc eſt, ſi triangulum ex puncto mediæ [2]) baſis E ſuſpendatur, erit longitudo penduli iſochroni $\infty\ \frac{1}{2}b + \frac{\frac{1}{2}cc}{b}$. hoc eſt ducta CN perpendiculari ſuper latus CB, quæ occurrat axi producto in N, erit ſemiſſis totius BN, longitudo penduli iſochroni. Si vero inſuper ſit $c \infty b$; erit ea longitudo ∞ b, hoc eſt, EB. Unde patet triangulum rectangulum iſoſceles, ſive ex vertice ſive ex media baſi ſuſpendatur iſochronas oſcillationes habere.

[2]) Liſez plutôt „medio".

calculé d'une autre manière excepté dans le cas de la ſuſpenſion en A: dans ce dernier cas toutefois on peut aiſément trouver le résultat d'après une autre méthode comme nous le montrerons plus loin [1]).

Soit AD, le diamètre du ſecteur, c. à. d. le rayon du cercle, $= r$; l'arc BD ou DC $= p$; le ſinus BG $= b$, le ſinus verſus GD $= a$.

On a donc (F étant le centre de gravité du ſecteur ABC) AF $= \frac{2}{3}\frac{br}{p}$, parce que $\frac{2}{3}$ DA : AF = l'arc BD : ſinus BG, comme nous l'avons démontré dans le livre ſur la quadrature du cercle [2]). Or, ſi nous tirons FO dans une direction parallèle à GC et AP de telle manière qu'elle diviſe l'angle DAC en deux parties égales, l'interſection des deux droites FO et AP, ſavoir H, ſera le centre de gravité du demi-ſecteur ADC. Et comme CA : AG = CP : PG, on aura par compoſition CA + AG : AG = CG : GP, et par permutation CA + AG : CG, c. à. d. $2r - a : b$, = AG : GP ou bien = AF, ou $\frac{2}{3}\frac{br}{p}$: FH; cette dernière longueur ſera donc $\dfrac{\frac{2}{3}b^2r}{2rp - ap}$.

Suppoſons conſtruit ſur le ſecteur ABC un onglet limité par un plan paſſant par AQ parallèle à BC; nous avons déjà trouvé [3]) que la perpendiculaire abaiſſée du centre de gravité de l'onglet ſur le plan ABC, a ſon pied en E, où AE $= \frac{3}{8}r - \frac{3}{8}a + \frac{3}{8}\frac{pr}{b}$. Conſidérons encore l'onglet conſtruit ſur le demi-ſecteur ADC, limité par un plan paſſant par AD; nous avons trouvé que la diſtance entre la perpendiculaire, abaiſſée du centre de gravité de cet onglet ſur le plan ABC, d'une part et l'axe AD d'autre part, diſtance que nous déſignerons par EK, eſt égale à $\frac{3}{8}b - \frac{3}{8}\frac{br}{a} + \frac{3}{8}\frac{pr}{a}$ [4]). Si l'on conſtruit donc une autre longueur EL de telle manière que le rapport AF:FH, c. à. d. $2r - a : b$ (car nous avons démontré que c'eſt là la valeur du rapport AF : FH) ſoit égal au rapport de EK, ou $\frac{3}{8}b - \frac{3}{8}\frac{br}{a} + \frac{3}{8}\frac{pr}{a}$, à EL, celle-ci ſera $\dfrac{\frac{3}{8}b^2a - \frac{3}{8}b^2r + \frac{3}{8}pbr}{2ar - a^2}$, en d'autres termes, parce que $2ar - a^2 = b^2$ [5]), la même longueur EL ſera égale à $\frac{3}{8}a - \frac{3}{8}r + \frac{3}{8}\frac{pr}{b}$. Et

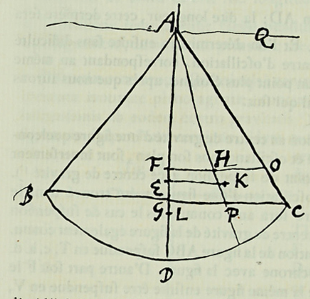
[1]) Comparez lez p. 487—488, ainsi que le Theorème XXI de la Pars Quarta de l'„Horologium oscillatorium (deuxième méthode pour trouver le „centrum oscillationis sectoris circuli").

[2]) Voir à la p. 309 du T. XI le Theor. VIII des „Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis et Circuli ex dato portionum gravitatis centro".

[3]) En marge: „superius in hoc libro". Voir la p. 487 qui précède.

Sectori ABDC [Fig. 77] ex A centro circuli ſui ſuſpenſo vel ex puncto quovis in producto axe AD pendulum iſochronum hoc modo inveniri poterit. quod alio fieri non poteſt, licet ex A ſuſpenſo facile inveniatur alia via, ut poſtea oſtendetur [1]).

[Fig. 77.]



Sit AD diameter ſectoris hoc eſt radius circuli ∞ r arcus BD vel DC ∞ p. ſinus BG ∞ b. ſinus verſus GD ∞ a.

Eſt igitur AF (poſito F centro gravitatis ſectoris ABC) ∞ $\frac{2}{3}\frac{br}{p}$; quia ut arcus BD ad ſinum BG ita eſt $\frac{2}{3}$ DA ad AF, ut demonſtravimus in libro de quadratura circuli [2]). Ducta autem FO parallela GC, et AP quæ bifariam dividat angulum DAC, erit interſectio duarum FO, AP, nempe H centrum gravitatis dimidij ſectoris ADC. Et quia CA ad AG ut CP ad PG, erit componendo, CA + AG ad AG ut CG ad GP, et permutando CA + AG ad CG hoc eſt ut $2r - a$ ad b ita AG ad GP ſive AF ∞ $\frac{2}{3}\frac{br}{p}$, ad FH, quæ erit $\dfrac{\frac{2}{3}bbr}{2rp - ap}$.

Porro ſi intelligatur cuneus ſuper ſectore ABC, abſciſſus plano per AQ parallelam BC, invenimus [3]) perpendicularem a centro gravitatis cunei ductam in planum ABC, cadere in E, ut ſit AE ∞ $\frac{3}{8}r - \frac{3}{8}a + \frac{3}{8}\frac{pr}{b}$. Item ſi intelligatur cuneus ſuper dimidio ſectore ADC, abſciſſus plano per AD, invenimus diſtantiam inter perpendiculum à centro gravitatis cunei hujus ductam in planum ABC, interque axem AD, quæ diſtantia ſit EK, eſſe ∞ $\frac{3}{8}b - \frac{3}{8}\frac{br}{a} + \frac{3}{8}\frac{pr}{a}$ [4]). Ergo ſi fiat ut AF ad FH, hoc eſt, ut $2r - a$ ad b (nam hæc oſtenſa eſt ratio AF ad FH) ita EK ∞ $\frac{3}{8}b - \frac{3}{8}\frac{br}{a} + \frac{3}{8}\frac{pr}{a}$, ad aliam EL; ea erit $\dfrac{\frac{3}{8}bba - \frac{3}{8}bbr + \frac{3}{8}pbr}{2ar - aa}$; ſive quia $2ar - aa \infty bb$ [5]), erit eadem EL ∞ $\frac{3}{8}a - \frac{3}{8}r + \frac{3}{8}\frac{pr}{b}$. qua addita ad AE ∞ $\frac{3}{8}r - \frac{3}{8}a +$

[4]) Cette longueur EK a été trouvée dans le calcul de la p. 481, ou elle s'appelait KC.

[5]) En marge: „Euclid." (Prop. XXXV du Lib. III des „Elementa").

en ajoutant cette longueur à $AE = \frac{3}{8}r - \frac{3}{8}a + \frac{3}{8}\frac{pr}{b}$, on obtient $AL = \frac{3}{4}\frac{pr}{b}$, ce qui eſt la longueur cherchée du pendule iſochrone avec le ſecteur. C'eſt-à-dire, ſi l'on conſtruit une longueur de telle manière qu'on ait: ſinus BG : arc BD (ou bien corde BC: arc BDC) $= \frac{3}{4}$ rayon AD: la dite longueur, cette dernière ſera AL, longueur cherchée du pendule. Et l'on déterminera enſuite ſans difficulté le pendule iſochrone, ou bien le centre d'oſcillation, correſpondant au même ſecteur dans le cas de ſuſpenſion en un point plus éloigné, après que nous aurons démontré d'abord le théorème général qui ſuit.

Les diſtances des centres d'oſcillation au centre de gravité d'une figure quelconque ſymétrique par rapport à un axe et oſcillant dans ſon plan, ſont inverſement proportionnelles aux diſtances du point de ſuſpenſion à ce centre de gravité [1]). Par conſéquent, lorſque le centre d'oſcillation d'une figure a été trouvé dans le cas de ſuſpenſion contigue, ce centre ſera auſſi connu dans le cas de ſuſpenſion éloignée, pourvu que l'on ſuppoſe le centre de gravité de la figure également connu.

Soit L [Fig. 78] le centre d'oſcillation de la figure ABC ſuſpendue en T, c. à. d. ſoit TL la longueur du pendule iſochrone avec la figure. D'autre part ſoit F le centre de gravité de la figure. Puiſſe la même figure enſuite être ſuſpendue en V, et qu'on ait VF : FT = LF : FO. Je dis que O eſt le centre d'oſcillation de la figure ſuſpendue en V [2]).

En effet, ſoit FH la diſtance de l'axe AD au centre de gravité de la demi-figure ADC, et EK la diſtance du même axe à la perpendiculaire paſſant par le centre de gravité de l'onglet conſtruit ſur ADC et limité par un plan paſſant par AD. Soit E pareillement le pied de la perpendiculaire abaiſſée du centre de gravité du tronc ſur la figure ABC, limité par un plan paſſant par la droite TX, perpendiculaire à l'axe AD et ſituée dans le plan de la figure. Par conſéquent ſi l'on conſtruit FN de telle manière que VF : FT = EF : FN, N ſera le pied de la perpendiculaire abaiſſée du centre de gravité du tronc limité par un plan paſſant par VM. Et ſi l'on conſtruit enſuite EP de ſorte que VF : FH = KE : EP, VN ajoutée à la longueur EP conſtituera la longueur du pendule iſochrone avec le ſecteur ſuſpendu en V. Mais puiſque, par hypothèſe, le pendule de longueur TL eſt iſochrone avec

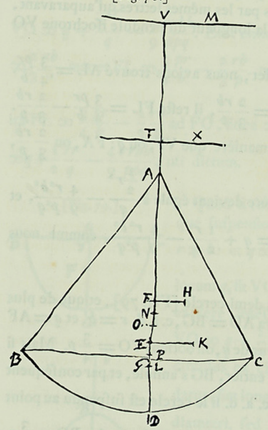
[1]) Comparez la note 1 de la p. 508 où l'on trouve la même proposition pour un autre cas spécial: celui de l'oscillation solide d'une figure plane.

[2]) Sur une des feuilles collées dans le Manuscrit B (voir la note 2 de la p. 435), plus précisément sur la p. 98 recto d'après la numération nouvelle, on lit la même Proposition dans la forme suivante: „Sicut distantiæ puncti suspensionis à centro gravitatis figuræ suspensæ inter se ita distantiæ centrorum oscillationis à centro gravitatis figuræ cujuslibet contraria ratione respondent distantijs puncti suspensionis ab eodem centro gravitatis. Ideoque invento centro oscillationis figuræ in suspen-

$+ \frac{3}{8}\frac{pr}{b}$, fit AL ∞ $\frac{3}{4}\frac{pr}{b}$, longitudo penduli ſectori iſochroni quæ quærebatur. Hoc eſt ſi fiat ut ſinus BG ad arcum BD, ſive ut ſubtenſa BC ad arcum BDC, ita $\frac{3}{4}$ radij AD ad aliam ea erit AL longitudo penduli quæſita. Eidem vero ſectori in ſuſpenſione remota nunc facile pendulum iſochronon ſive centrum oſcillationis aſſignabitur, demonſtrato prius hoc theoremate univerſali.

Diſtantiæ centrorum oſcillationis à centro gravitatis figuræ cujuslibet circa axem ordinatæ motuque plano agitatæ, contraria ratione reſpondent diſtantijs puncti ſuſpenſionis ab eodem centro gravitatis [1]). Ideoque invento centro oſcillationis figuræ in ſuſpenſione contigua, idem quoque centrum habebitur in ſuſpenſione remota, dummodo et centrum gravitatis figuræ datum ponatur.

[Fig. 78.]



Sit figuræ ABC [Fig. 78] ſuſpenſæ ex T centrum oſcillationis L, hoc eſt, ſit TL longitudo penduli figuræ iſochroni. F vero ſit figuræ centrum gravitatis. Deinde eadem figura ex V ſuſpendatur, et ſicut VF ad FT, ita ſit LF ad FO. Dico O eſſe centrum oſcillationis figuræ ex V ſuſpenſæ [2]).

Sit enim FH diſtantia axis AD à centro gravitatis dimidiæ figuræ ADC, EK vero ejuſdem axis diſtantia à perpendiculari per centrum gravitatis cunei ſuper ADC, abſciſſi plano per AD. Sitque E ſimiliter ſub centro gravitatis trunci ſuper figura ABC, abſciſſi plano per rectam TX, perpendicularem axi AD, inque plano figuræ ſitam. Si igitur fiat ut VF ad FT ita EF ad FN, erit N ſub centro gravitatis trunci abſciſſi plano per VM. Rurſus ſi fiat ut VF ad FH ita KE ad EP, conſtituet VN una cum EP longitudinem penduli iſochroni ſectori ſuſpenſo ex V. Quia autem eidem ex T ſuſpenſo iſochro-

sione contigua, idem quoque inventum erit in suspensione remota". Ici aussi il n'est question que de „figuræ" c. à. d. de surfaces planes; plus tard Huygens a étendu ce théorème aux corps oscillants quelconques („Horologium oscillatorium", Pars Quarta, Prop. XIX).

le même ſecteur ſuſpendu en T, laquelle longueur eſt la ſomme de TE et de EL, et que E eſt le pied de la perpendiculaire abaiſſée du centre de gravité du tronc limité par un plan paſſant par TX, il eſt néceſſaire que EL : EK = HF : FT. Or, nous avions EK : EP = VF : FH. Par conſéquent, par la règle de la proportion dérangée [1]) on aura EL : EP = VF : FT. Mais nous avions auſſi EF : FN = VF : FT. Par conſéquent auſſi la ſomme LE + EF, c. à. d. LF, eſt à la ſomme EP + FN, comme VF eſt à FT. Mais nous ſavions que la même longueur LF eſt à FO, comme VF eſt à FT. Par conſéquent FO = FN + EP, et VO = VN + EP. Et il a été démontré que cette dernière ſomme conſtitue la longueur du pendule iſochrone lorsque la ſuſpenſion eſt en V. La ligne VO ſera donc, elle auſſi, la dite longueur du pendule, en d'autres termes, O ſera le centre d'oſcillation. Ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on poſe donc, dans le cas du ſecteur que nous avons conſidéré plus haut [2]), la diſtance VF, depuis le point de ſuſpenſion juſqu'au centre de gravité du ſecteur, $= q$, et qu'on déſigne les autres longueurs par les mêmes lettres qu'auparavant, ſavoir $AD = r$, $BG = b$, l'arc $BD = p$, la longueur du pendule iſochrone VO devient égale à $q + \frac{\frac{1}{2}r^2}{q} - \frac{4}{9}\frac{r^2b^2}{p^2q}$. En effet, nous avions trouvé $AL = \frac{3}{4}\frac{pr}{b}$. Si nous retranchons de cette longueur $AF = \frac{2}{3}\frac{rb}{p}$, il reſte $FL = \frac{3}{4}\frac{pr}{b} - \frac{2}{3}\frac{rb}{p}$. En conſtruiſant la longueur FO de telle manière que VF, ou q : FA, ou $\frac{2}{3}\frac{rb}{p}$, $=$ FL, ou $\frac{3}{4}\frac{pr}{b} - \frac{2}{3}\frac{rb}{p}$: FO, cette dernière devient égale à $\frac{\frac{1}{2}r^2}{q} - \frac{4}{9}\frac{r^2b^2}{p^2q}$, et en y ajoutant $VF = q$ on obtient $VO = q + \frac{1}{2}\frac{r^2}{q} - \frac{4}{9}\frac{r^2b^2}{p^2q}$, comme nous l'avons dit.

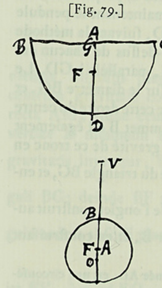
Dans le cas où le ſecteur occupe tout un demi-cercle [Fig. 79], et que de plus le point de ſuſpenſion eſt le centre A, on aura AD = BG, c. à. d. $r = b$, et $q = AF = \frac{2}{3}\frac{r^2}{p}$, et en ſubſtituant partout cette valeur de q, on obtient $VO = \frac{3}{4}p$. Mais ſi l'on ſuppoſe que le ſecteur remplit le cercle entier, BG s'annule, et par conſéquent $VO = q + \frac{1}{2}\frac{r^2}{q}$, dans quel cas, ſi $q = r$, c. à. d. ſi le cercle eſt ſuſpendu au point B [Fig. 79] de la circonférence, la longueur du pendule deviendra $BO = \frac{3}{2}r$, c. à. d. les trois quarts du diamètre. Mais nous arriverons à ce réſultat [3]) encore par

[1]) Voir la note 22 de la p. 304 du T. XI. [2]) Voir la p. 527. [3]) Voir les deux premiers alinéas de la p. 537.

num eſt pendulum longitudinis TL, ex hypotheſi, compoſitum nempe ex TE et EL eſtque E ſub centro gravitatis trunci abſciſſa plano per TX; neceſſe eſt EL eſſe ad EK, ſicut HF ad FT. Atqui EK erat ad EP ut VF ad FH. Ergo ex æquali in proportione perturbata [1]), erit EL ad EP ut VF ad FT. Sed ut VF ad FT ita quoque erat EF ad FN. Ergo etiam utraque ſimul LE, EF, hoc eſt LF ad utraque EP et FN, ſicut VF ad FT. Erat autem ut VF ad FT ita eadem LF ad FO. Ergo FO æqualis erit duabus FN et EP; ac proinde tota VO æqualis duabus VN et EP. Quas oſtenſum eſt conſtituere longitudinem penduli iſochroni cum ſuſpenſio eſt in V. Itaque et VO erit prædicta penduli longitudo, ſive O centrum oſcillationis, quod erat demonſtrandum.

In ſectore igitur de quo ante egimus [2]), ſi ponatur diſtantia VF, a puncto ſuſpenſionis uſque ad centrum gravitatis ſectoris $\infty\, q$; cæteris longitudinibus notatis ut prius, nempe AD $\infty\, r$, BG $\infty\, b$; arcu BD $\infty\, p$; fit longitudo penduli iſochroni VO $\infty\, q + \frac{\frac{1}{2}rr}{q} - \frac{4}{9}\frac{rrbb}{ppq}$. Erat enim inventa AL $\infty\, \frac{3}{4}\frac{pr}{b}$. à qua auferendo AF $\infty\, \frac{2}{3}\frac{rb}{p}$, manet FL $\infty\, \frac{3}{4}\frac{pr}{b} - \frac{2}{3}\frac{rb}{p}$. quare faciendo ut VF, $\infty\, q$, ad FA $\infty\, \frac{2}{3}\frac{rb}{p}$ ita FL $\infty\, \frac{3}{4}\frac{pr}{b} - \frac{2}{3}\frac{rb}{p}$ ad FO, fit ea $\infty\, \frac{\frac{1}{2}rr}{q} - \frac{4}{9}\frac{rrbb}{ppq}$, additaque VF $\infty\, q$, fit VO $\infty\, q + \frac{1}{2}\frac{rr}{q} - \frac{4}{9}\frac{rrbb}{ppq}$, uti dictum.

[Fig. 79.]



Quod ſi ſector ſemicirculum explet [Fig. 79], ſimulque ſuſpenſio ſit ex centro A, erit AD ∞ BG, hoc eſt, $r \infty b$: et $q \infty$ AF $\infty\, \frac{2}{3}\frac{rr}{p}$, quo ubique ſubſtituto in locum q, fit VO $\infty\, \frac{3}{4}p$. Si vero circulum integrum ſector explere intelligatur, fit BG nihilo æqualis, ideoque VO $\infty\, q + \frac{1}{2}\frac{rr}{q}$, ubi, ſi q fuerit æqualis r, hoc eſt ſi circulus ex circumferentiæ puncto B [Fig. 79] ſuſpendatur, fiet longitudo penduli BO $\infty\, \frac{3}{2}r$ ſive tribus quartis diametri. ſed hæc alijs modis quoque inveſtigabimus [3]). Dignum vero eſt animadverſione, quod in quolibet ſectore, ſi longitudo VA [Fig. 78] ex qua ſuſpenſus eſt, fit $\infty\, \sqrt{\frac{1}{2}rr}$, hoc eſt, quæ poſſit dimidium quadratum radij AB, erit longitudo penduli iſochroni VO dupla VA, hoc eſt æqualis lateri d'autres procédés. Ce qui mérite d'être remarqué, c'eſt que, dans le cas d'un ſecteur quelconque, ſi la longueur de la ligne VA [Fig. 78] à laquelle le ſecteur eſt ſuſpendu, eſt égale à $\sqrt{\frac{1}{2}r^2}$, c. à. d. ſi la longueur de cette ligne eſt telle que ſon carré eſt égal à la moitié du carré du rayon AB, la longueur du pendule iſochrone VO ſera le double de VA, ce qui veut dire qu'elle ſera égale au côté d'un carré inſcrit dans le cercle du ſecteur; ce qu'on vérifie en ſubſtituant partout q, ou VF, $=\sqrt{\frac{1}{2}r^2}+\frac{2}{3}\frac{rb}{p}$, c. à. d. $=$ VA $+$ AF, dans la valeur de VO trouvée auparavant, ſavoir VO $= q+\dfrac{\frac{1}{2}r^2}{q}-\dfrac{4}{9}\dfrac{r^2b^2}{p^2q}$: on trouvera ainſi VO $=\sqrt{2r^2}$. Mais nous avons obtenu ce réſultat par une méthode différant de celle que nous avons expliquée ici.

Soit ABG [Fig. 80] une barre impondérable ſuſpendue en A; on demande d'attacher en un point donné B de cette barre deux triangles égaux BC et BD, formant avec l'axe AB des angles égaux (triangles dont les angles B sont par hypothèſe très petits ou plutôt infiniment petits), de telle manière que les triangles, ſuſpendus de cette façon en A, ayent leurs oſcillations iſochrones avec un pendule ſimple de longueur donnée AL. Je dis que les baſes des triangles, D et C (car ces baſes peuvent être conſidérées comme des points), ſe trouvent ſur une circonférence de cercle [1]).

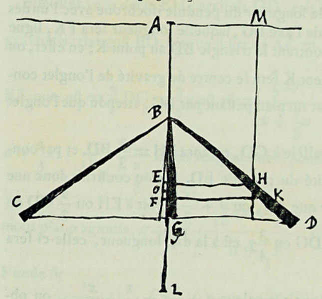
En effet, ſoit AB $= a$, et la longueur AL $= b$. Abaiſſons la perpendiculaire DG ſur AG et appelons BG, x et GD, y. Pour trouver maintenant le pendule iſochrone avec la figure compoſée par les triangles BC et BD, ſuivant la méthode indiquée dans la propoſition... [2]), ſuppoſons conſtruit au-deſſus de chacun des deux triangles un tronc limité par un plan paſſant par AM, parallèle à GD. Le centre de gravité commun de ces deux troncs ſe trouvera ſur le diamètre BG, et ſera ſitué de la droite AM à une diſtance égale à la diſtance de cette droite du centre de gravité d'un tronc ſur le triangle BG, dont l'angle au ſommet B eſt également infiniment petit par hypothèſe. Et l'on trouve le centre de gravité de ce tronc en prenant BE $=\frac{2}{3}$BG, de ſorte que E eſt le centre de gravité du triangle BG, et enſuite BF $=\frac{3}{4}$BG, de ſorte que F eſt le centre de gravité de l'onglet conſtruit au-deſſus du même triangle et limité par un plan paſſant par B, et en conſtruiſant

[1]) Ou plutôt: que le lieu des points C et D, pour une longueur donnée AL, est une circonférence de cercle.
[2]) Voir à la p. 515 le premier alinéa de la Pièce XVI.
[3]) Voir la note 1 de la p. 535.

inſcripti quadrati in circulo ſectoris: quod apparet verum eſſe ſi in VO, ante reperta $\infty\ q+\dfrac{\frac{1}{2}rr}{q}-\dfrac{4}{9}\dfrac{rrbb}{ppq}$, ubique loco $q\ \infty$ VF, ſubſtituatur $\sqrt{\frac{1}{2}rr}+$ $+\frac{2}{3}\frac{rb}{p}$, hoc eſt, VA $+$ AF. fiet enim VO $\infty\ \sqrt{2rr}$. Alia tamen via huc devenimus, quam hic explicavimus.

Virga ABG [Fig. 80] ponderis expers ſuſpenſa ſit in A, oporteatque ad datum in ea punctum B affigere triangula duo paria et paribus angulis ab axe AB recedentia BC, BD; quorum anguli ad B tanquam minimi, ſive infinitè parvi conſiderentur; quæque ita ſuſpenſa ab A, oſcillationes iſochronas habeant pendulo ſimplici datæ longitudinis AL. Dico baſes triangulorum D et C, hæ enim ut puncta conſiderantur, eſſe ad circuli circumferentiam [1]).

[Fig. 80.]



Sit enim AB $\infty\ a$. longitudo AL $\infty\ b$. ductaque DG perpendiculari in AG, vocetur BG, x; GD, y. Ut jam figuræ ex triangulis BC, BD compoſitæ pendulum iſochronum inveniatur ſecundum methodum traditam propoſitione... [2]) intelligatur ſuper utroque triangulorum truncus erectus abſciſſus plano per AM ipſi GD parallelam. Horum truncorum centrum gravitatis commune erit in diametro BG, et tantundem diſtabit ab recta AM, atque centrum gravitatis trunci ſuper triangulo BG cujus item in vertice B minimum eſſe angulum putandum eſt. hujus vero trunci centrum gravitatis invenitur, ſumendo BE $\infty\ \frac{2}{3}$BG, ut E ſit centrum gravitatis trianguli BG; deinde BF $\infty\ \frac{3}{4}$BG, ut ſit F centrum gravitatis cunei ſuper triangulo eodem abſciſſi plano per B; ac faciendo demum ut AE, $a+\frac{2}{3}x$, ad EB, $\frac{2}{3}x$, ita FE, $\frac{1}{12}x$, ad EO, $\dfrac{\frac{1}{18}xx}{a+\frac{2}{3}x}$. erit enim O centrum gravitatis [3]) trunci dicti ſuper enfin EO de telle manière que AE, ou $a+\frac{2}{3}x$, ſoit à EB, ou $\frac{2}{3}x$, comme FE, ou $\frac{1}{12}x$, eſt à EO, d'où l'on tire $EO = \dfrac{\frac{1}{18}x^2}{a+\frac{2}{3}x}$. En effet, O ſera alors le centre de gravité [1]) du tronc conſidéré conſtruit ſur le triangle BG et limité par un plan paſſant par AM. $AO = a + \frac{2}{3}x + \frac{1}{18}\dfrac{x^2}{a+\frac{2}{3}x}$ eſt donc la longueur du pendule iſochrone avec les triangles BC et BD oſcillant d'un mouvement ſolide autour de l'axe AM. Il faut chercher enſuite la longueur du pendule iſochrone avec l'un des deux triangles BD oſcillant autour de l'axe BG, laquelle longueur ſera FK, ligne tracée parallèlement à GD et rencontrant le triangle BD au point K; en effet, on aura $BK = \frac{3}{4}BD$, et par conſéquent K ſera le centre de gravité de l'onglet conſtruit ſur le triangle BD et limité par un plan paſſant par BG, attendu que l'onglet a ici la forme d'une pyramide.

Pareillement, ſi l'on tire EH parallèle à GD, on aura $BH = \frac{2}{3}BD$, et par conſéquent H ſera le centre de gravité du triangle BD. Si l'on conſtruit donc une nouvelle longueur de telle manière que AE, ou $a+\frac{2}{3}x$, ſoit à EH ou $\frac{2}{3}GD$ ou $\frac{2}{3}y$, comme KF, qui eſt égale à $\frac{3}{4}DG$ ou $\frac{3}{4}y$, eſt à la dite longueur, celle-ci ſera $\dfrac{\frac{1}{2}y^2}{a+\frac{2}{3}x}$, et en l'ajoutant à AO qui avait la valeur $a+\frac{2}{3}x+\frac{1}{18}\dfrac{x^2}{a+\frac{2}{3}x}$, on obtiendra la longueur du pendule iſochrone avec les triangles BC et BD, oſcillant dans leur plan, ſavoir $a+\frac{2}{3}x+\dfrac{\frac{1}{18}x^2+\frac{1}{2}y^2}{a+\frac{2}{3}x}$, qui doit donc être égale à la ligne donnée AL ou b, d'où l'on tire

$$y = \sqrt{2ab - 2a^2 - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - x^2}.$$

Cette équation fait voir que l'extrémité de la ligne GD ou y, lorſque BG, ou x, eſt conſidérée comme une grandeur variable, ſe trouve ſur une circonférence de cercle, parce que l'on a ſous la racine le terme $-x^2$. Nous donnerons bientôt une deſcrip-

triangulo BG, abſciſſi plano per AM. Eſt igitur $AO \infty a+\frac{2}{3}x+\frac{1}{18}\dfrac{xx}{a+\frac{2}{3}x}$ longitudo penduli iſochroni triangulis BC, BD motu ſolido agitatis circa axem AM. Inſuper vero quærenda eſt penduli longitudo quod ſit iſochronum alteri triangulorum BD agitato circa axem BG, quæ quidem longitudo erit FK, quæ nempe linea ducta eſt parallela GD, triangulo BD occurrens in K; erit enim $BK \infty \frac{3}{4}BD$, ideoque K centrum gravitatis cunei ſuper triangulo BD abſciſſi plano per BG, cum cuneus hic pyramidis formam habeat.

Similiter vero ducta EH parallela GD, erit $BH \infty \frac{2}{3}BD$, ideoque H centrum gravitatis trianguli BD. Itaque ſi fiat ut $AE \infty a+\frac{2}{3}x$ ad $EH \infty \frac{2}{3}GD \infty \frac{2}{3}y$, ita KF quæ eſt $\infty \frac{3}{4}DG \infty \frac{3}{4}y$ ad aliam $\dfrac{\frac{1}{2}yy}{a+\frac{2}{3}x}$, hæc addita ad AO, quæ erat ∞ $a+\frac{2}{3}x+\frac{1}{18}\dfrac{xx}{a+\frac{2}{3}x}$ faciet longitudinem penduli iſochroni triangulis BC, BD, motu plano agitatis, $a+\frac{2}{3}x+\dfrac{\frac{1}{18}xx+\frac{1}{2}yy}{a+\frac{2}{3}x}$; quæ debet itaque æquari ipſi AL ſive b unde fit

$$y \infty \sqrt{2ab - 2aa - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - xx}.$$

Ex hac autem æquatione patet terminum lineæ GD ſive y, quando BG ſive x ut indeterminata conſideratur, eſſe ad circuli circumferentiam quia habetur $-xx$. Cujus circuli deſcriptionem mox dabimus, ſed prius animadvertendum eſt, quod ſi $a \infty o$, hoc eſt, ſi punctum B ubi affiguntur trianguli ponatur idem quod A, fore æquationem

$$y \infty \sqrt{\frac{4}{3}bx - xx}.$$

[1]) Ou plutôt la projection de ce centre de gravité ſur le plan CBD.

tion de ce cercle, mais il faut remarquer d'abord que, si $a = 0$, c. à. d. si le point B où sont attachés les triangles est par hypothèse le même que A, l'équation sera

$$y = \sqrt{\frac{4}{3}bx - x^2}.$$

Cela veut dire que, si l'on prend $AO = \frac{2}{3}b = \frac{2}{3}AL$ [Fig. 81], et qu'on décrit par A une circonférence de cercle ADN avec le centre O, l'extrémité de la perpendiculaire GD se trouvera sur cette circonférence.

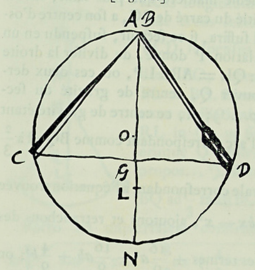
Par conséquent, comme deux triangles quelconques à sommets A, infiniment aigus et symétriques, placés dans la circonférence ADNC, ont le centre d'oscillation L, où $AL = \frac{3}{4}$ diamètre AN; et comme le cercle entier est composé de pareilles paires de triangles, et que la même chose est vraie pour une portion quelconque BCDN du cercle, possédant des côtés égaux BC et BD: il est manifeste que le centre d'oscillation est en L, tant pour le cercle entier que pour une portion quelconque de ce genre [1]).

Autre cas particulier: si l'on substitue, dans l'équation, $\frac{8}{3}a = \frac{4}{3}b$, en d'autres termes $2a = b$, c. à. d. si l'on suppose les triangles attachés en B, point milieu de la longueur AL, on aura $y = \sqrt{2a^2 - x^2}$ [Fig. 82]. Cette équation nous apprend que si l'on décrit du centre B avec un rayon dont le carré est égal au double du carré de BA, une circonférence de cercle CND, deux triangles quelconques infiniment aigus à sommets B, terminés par des bases situées sur la circonférence et symétriques par rapport à AB, auront leur centre d'oscillation au point L, s'ils sont suspendus en A. Il en résulte, puisque le cercle total CND, aussi bien qu'un secteur quelconque de ce cercle symétrique par rapport à la droite AN, sont composés de paires de pareils triangles, que manifestement le point L sera le centre d'oscillation de ce cercle aussi bien que celui de tous ces secteurs. Par conséquent:

Tout secteur de cercle suspendu en un point éloigné du centre de son cercle à une distance égale à la moitié du côté du carré inscrit au cercle, aura un pendule isochrone égal au côté entier du carré nommé. C'est ce que nous avons déjà remarqué plus haut [3]). Et si l'on pouvait trouver encore dans un autre cas le pendule isochrone avec un secteur sans supposer la longueur de l'arc de ce secteur donnée, de même que nous avons trouvé ici ce pendule sans connaître l'arc, on pourrait au contraire en déduire la longueur de l'arc du secteur. En effet, puisqu'un secteur

[1]) Comparez la p. 455.
[2]) Lisez „super".
[3]) Voir la fin de la p. 531.

[Fig. 81.]

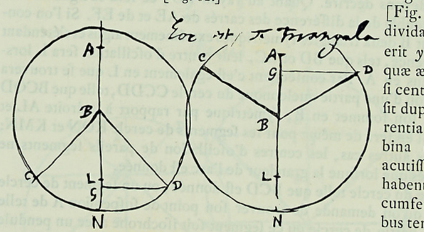


Hoc est, si sumatur $AO \infty \frac{2}{3}b \infty \frac{2}{3}AL$ [Fig. 81], centroque O per A circulus describatur ADN; terminus perpendicularis GD erit ad ejus circumferentiam.

Cum igitur quælibet duo triangula acutissima quæ ex A ad circumferentiam ADNC constituuntur, magnitudine et situ sibi mutuo respondentia, centrum oscillationis habeant punctum L, positâ AL $\infty \frac{3}{4}$ diametri AN: cumque circulus totus ex ejusmodi triangulorum paribus componatur, uti et portio ejus quælibet ut BCND, latera BC, BD æqualia habens: manifestum est, tum circuli totius centrum oscillationis esse in L, tum portionis cujuslibet qualem diximus [1]).

Rursus si in æquatione inventa sit $\frac{8}{3}a \infty \frac{4}{3}b$, hoc est $2a \infty b$, hoc est, si triangula

[Fig. 82.]



affigi intelligantur in B [Fig. 82] quod bifariam dividat longitudinem AL, erit $y \infty \sqrt{2aa - xx}$. quæ æquatio docet, quod si centro B, radio qui possit duplum BA, circumferentia describatur CND, bina quælibet triangula acutissima vertices in B habentia, atque ad circumferentiam eam basibus terminata, angulisque æqualibus suber [2]) AB inclinata, quod inquam suspensa ex A, centrum oscillationis habebunt punctum L. Unde cum et circulus integer CND, et sector ejus quilibet, axem habens rectam AN, ex triangulorum talium paribus componatur, manifestum est circuli et sectorum istorum centrum oscillationis fore punctum L. Itaque

Quilibet circuli sector suspensus à puncto quod distet a centro circuli sui semisse lateris quadrati circulo inscripti, pendulum isochronum habebit æquale integro dicti quadrati lateri. quod etiam supra animadvertimus [3]). quod si vero aliquo præterea casu, pendulum sectori alicui inveniri posset isochronon, non supposita quelconque BCD ſuſpendu en A, de la même manière que plus haut, ſavoir en ſorte que le carré de BA eſt égal à la moitié du carré de BC, a ſon centre d'oſcillation en L [Fig. 83], où BL = BA, il ſuffira, ſi ce ſecteur, ſuſpendu en un autre point donné R, a un centre d'oſcillation P donné, de diviſer la droite RL en Q de telle manière qu'on ait RQ : QL = AR : LP, où ces deux dernières longueurs ſont données, pour trouver Q, centre de gravité du ſecteur BCD, comme cela reſſort de la Prop... [1]); et, ce centre de gravité étant donné, nous ſavons que la corde CD eſt à l'arc correſpondant comme BQ eſt à $\frac{2}{3}$ du rayon BC.

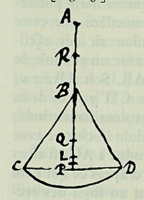
Enfin, pour exécuter la conſtruction générale correſpondant à l'équation trouvée plus haut $y = \sqrt{2ab - 2a^2 - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - x^2}$, ajoutons et retranchons des quantités qui ſe trouvent ſous le radical les termes $+\frac{16}{9}a^2 + \frac{16}{9}ab + \frac{4}{9}b^2$; on obtiendra alors $y = \sqrt{\frac{2}{9}ab - \frac{2}{9}a^2 + \frac{4}{9}b^2 - \left(\frac{4}{3}a - \frac{2}{3}b + x\right)^2}$.

Par conſéquent il faut diviſer la longueur AL en deux parties égales en E [Fig. 84] et ajouter à BE ſa tierce partie EF; F ſera alors le centre de la circonférence que nous devons décrire. Quant au rayon FO, ce ſera la ligne dont le carré eſt égal au double de la différence des carrés de AE et de EF. Si l'on conſtruit donc du point B deux triangles ſymétriques extrêmement aigus et s'étendant juſqu'à la circonférence, tels que BD et BC, leur centre d'oſcillation ſera L lorſqu'ils ſont ſuſpendus en A. Par conſéquent c'eſt également en L que ſe trouvera le centre d'oſcillation d'une partie quelconque du cercle CCDD, telle que BCOD ou BCMD, ayant ſon ſommet en B, ſymétrique par rapport à la droite AL et ſuſpendue en A. Il en ſera de même pour les ſegments de cercle KON et KMN; mais dans tous les autres cas, les centres d'oſcillation de pareils ſegments ne peuvent être trouvés que lorſque la grandeur de l'arc eſt donnée.

Que ſi une partie du cercle telle que BCD eſt donnée, ou un ſegment de cercle tel que KON, et qu'on demande de trouver ſon point de ſuſpenſion A de telle manière que cette partie de cercle ou ce ſegment ſoit iſochrone avec un pendule de longueur donnée AL, il faut, après avoir déterminé le centre F du cercle correſpondant, diminuer la diſtance FB d'un quart (FE) et prendre les longueurs EA et EL l'une et l'autre égale à une droite dont le carré eſt égal à la moitié du carré du rayon, augmenté du carré de EF.

[1]) Voir le deuxième alinéa de la p. 529.

[Fig 83.]

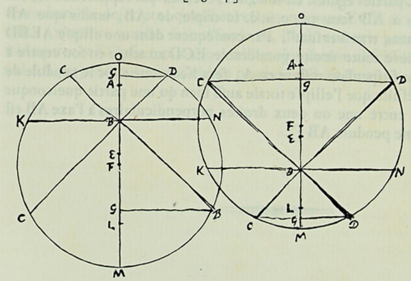


arcus longitudine data, ſicut hic abſque ea invenitur, daretur inde arcus ſectoris ejus longitudo. Cum enim ſector quivis BCD ſuſpenſus ex A, ut modo, ut nempe BA poſſit $\frac{1}{2}$ quadrati BC, habeat centrum oſcillationis L [Fig. 83], ut ſit BL ∞ BA. ſi jam ex alio dato puncto R ſuſpenſus habeat centrum oſcillationis datum P, oportebit tantum dividere rectam RL in Q, ut ſit RQ ad QL ut AR ad LP quæ datæ ſunt, eritque Q centrum gravitatis ſectoris BCD, ut conſtat ex propos.. [1]). dato autem hoc gravitatis centro ſcimus eſſe ut BQ ad $\frac{2}{3}$ radij BC, ita ſubtenſam CD ad ſuum arcum.

Porro ad univerſalem conſtructionem æquationis ſupra inventæ $y \infty \sqrt{2ab - 2aa - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - xx}$; addatur et auferatur, quantitatibus in radice contentis, $+\frac{16}{9}aa + \frac{16}{9}ab + \frac{4}{9}bb$, fietque

$$y \infty \sqrt{\frac{2}{9}ab - \frac{2}{9}aa + \frac{4}{9}bb - \square\, \overline{\frac{4}{3}a - \frac{2}{3}b + x}}.$$

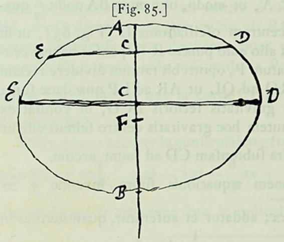
[Fig. 84.]



Itaque dividatur longitudo AL bifariam in E [Fig. 84], et apponatur ad BE pars tertia ſua EF, eritque F centrum deſcribendi circuli. Radius autem FO, erit linea quæ poteſt duplum differentiæ quadratorum AE et EF. Si itaque ex puncto B ad deſcriptam circumferentiam triangula duo paria acutiſſima conſtituantur ut BD, BC, illorum ex A ſuſpenſorum centrum oſcillationis erit L. Quare et portionis cujuſlibet circuli CCDD, cujus vertex ſit in B axemque habeat in recta AL, quales ſunt portiones

Confidérons encore une barre impondérable AB fufpendue en A [Fig. 85] à laquelle on demande d'attacher en fon point milieu C une autre barre pondérable ED de telle manière que cette barre ainfi fufpendue ait des ofcillations ifochrones avec un pendule de longueur donnée AB. Soit AB $= a$; appelons AC x et CD y, ces deux longueurs étant regardées comme indéterminées. Le pendule ifochrone avec la barre ED fufpendue à AC eft alors facilement trouvé d'après ce qui a été démontré plus haut au fujet des rectangles [2]); en effet, on peut confidérer la barre ED comme un rectangle de très petite largeur, auquel fera ifochrone un pendule de longueur AC augmentée d'un tiers de la troifième proportionnelle à AC et CD. Cette longueur totale fera donc ici $x + \frac{1}{3}\frac{y^2}{x}$; par hypothèfe elle doit être égale à la longueur donnée AB ou a. On en tire $y^2 = 3ax - 3x^2$, ou $y = \sqrt{3ax - 3x^2}$. Cette équation nous apprend que le lieu des points D et E eft une ellipfe, parce nous avons fous le radical le terme $-3x^2$. Le centre de cette ellipfe fera le point F qui divife la longueur AB en deux parties égales. Et fon „latus rectum" par rapport aux ordonnées perpendiculaires à AB fera $3a$, c. à. d. le triple de AB, tandis que AB elle-même fera le „latus tranfverfum". Par conféquent dans une ellipfe AEBD décrite de cette manière toute droite pondérable ECD attachée en fon centre à l'axe AB, le point de fufpenfion reftant en A, fera ifochrone avec le pendule de longueur AB. Il en réfulte que l'ellipfe totale auffi bien qu'une partie quelconque de l'ellipfe comprife entre une ou deux droites perpendiculaires à l'axe AB eft ifochrone avec le même pendule AB [3]).

[Fig. 85.]



[1]) Lisez „suspensæ".
[2]) Voir la p. 523.
[3]) Voir sur cette ellipse la p. 446 qui précède. Dans la note 3 de cette p. 446 nous donnons le sens précis de l'expression „latus rectum... secundum quod possunt ordinatim applicatæ".

BCOD, BCMD, ex A fufpenfi [1]), centrum ofcillationis erit in L. atque adeo etiam fegmentorum circuli KON et KMN; quorum alijs quibufcunque cafibus, centrum ofcillationis non nifi fuppofita arcus dimenfione inveniri poteft.

Quod fi data fit circuli portio ut BCD vel fegmentum circuli ut KON oporteatque invenire illius punctum A, unde fufpenfum ifochronum fit pendulo notæ longitudinis AL; invento circuli cujus datum eft fegmentum centro F; minuenda eft diftantia FB parte fui quarta FE; fumendæque EA, EL fingulæ æquales ei quæ poteft dimidium quadratum radij una cum quadrato EF.

Sit rurfus virga fine pondere AB fufpenfa in A [Fig. 85], cui alia virga ponderans, ED, affigenda fit puncto fui medio C. quæ fic fufpenfa ofcillationes ifochronas habeat pendulo datæ longitudinis AB. Sit AB $\infty\, a$. AC vero vocetur x. CD, y: quæ ambæ tanquam indeterminatæ confiderantur: Pendulum itaque ifochronum virgæ ED ex AC fufpenfæ, facile invenitur ex ijs quæ fupra de rectangulis oftenfa funt [2]), poteft enim ED virga ut rectangulum minimæ latitudinis confiderari, cui ifochronum pendulum æquale erit AC una cum triente tertiæ proportionalis duabus AC, CD: quæ igitur tota longitudo hic erit $x + \frac{1}{3}\frac{yy}{x}$, quæ ex hypothefi æquari debet datæ AB $\infty\, a$. Unde fit $yy \infty 3ax - 3xx$; five $y \infty \infty \sqrt{3ax - 3xx}$. Quæ æquatio docet locum puncti D vel E effe ad ellipfin, quia habetur $-3xx$. cujus ellipfis centrum erit F punctum quo longitudo AB bifariam dividitur. Latus rectum vero fecundum quod poffunt ordinatim applicatæ ad AB erit $3a$ five triplum AB, atque ipfa AB latus tranfverfum. Itaque in Ellipfi AEBD fecundum ifta defcripta, quælibet recta ponderans ECD axi AB medio fui puncto affixa, manente puncto fufpenfionis A, ifochrona erit pendulo longitudinis AB. unde patet et Ellipfin totam et quamlibet ejus partem abfciffam recta una vel duabus axi AB perpendicularibus, eidem pendulo AB ifochronum effe [3]).