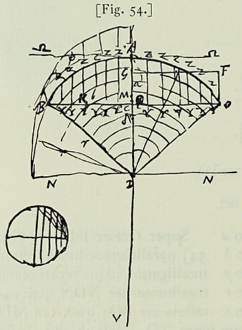
GO æquale ponitur portioni ACO. Itaque omnes gravitates YY ſuſpenſæ ex puncto G æqualiter gravitant ſuper CO, atque cum ſingulæ ex punctis Z ſuſpenduntur. Quare G erit ſub centro gravitatis omnium ex punctis Z ſuſpenſarum. quod erat demonſtrandum.

[Fig. 54.]



Quod ſi jam ſumatur GM $\infty\ \frac{1}{4}$ GD. dico M eſſe ſub centro gravitatis ſolidi propoſiti.

Si enim ſolidum dividi intelligatur ſuperficiebus infinitis cylindricis quarum tamen minima et ubique æqualis craſſitudo concipitur, æqualiter inter ſe diſtantibus ac parallelis ſuperficiei cylindricæ quæ ſuper BAO, harum ſingularum centra gravitatis ſimiliter divident ſuas diametros, hoc eſt partes lineæ AD, æqualiter ſeſe excedentes, ſicut AD diviſa eſt in G. Unde et diſtantiæ iſtorum centrorum gravitatis æqualiter divident lineam GD. Sunt autem ſuperficies iſtæ inter ſe ſicut quadrata ſuarum diametrorum; Itaque ad lineam GD appendi gravitates intelligendum æqualibus intervallis diſtantes quæque creſcunt ut quadrata numerorum ab unitate, ac proinde centra gravitatis ipſarum omnium ita dividere rectam GD, uti axis coni GD divideretur, a centro gravitatis coni cujus vertex D. hoc eſt ut GM ſit $\frac{1}{4}$ GD [1]).

Hinc porro et brachium ungulæ ſuper portione BAO plano inclinato per BO tranſeunte abſciſſæ inveniri poteſt, quia ſolidum illud prius [2]) conſtat ex pyramide, et parallelepipedo ſuper portione ABO, et ungula hac; dantur autem centra gravitatis priorum partium duarum et proportio ad ungulam poſita nempe dimenſione arcuum circuli quoties opus.

Sequitur calculus ad inveniendum DM [1]).

[1]) L'exécution de ce calcul donne donc la longueur DM du pendule isochrone avec le secteur de cercle BAOD, lorsque ce secteur est suspendu au point D et que le mouvement est solide (voir la p. 499).

Connaissant DM, on peut ensuite trouver la longueur du pendule isochrone avec le secteur suspendu en D et oscillant dans son plan. Huygens trouve cette longueur à la p. 173 du Manuscrit B. Nous supprimons ce calcul, identique au fond avec celui de la p. 527 qui suit.

À la p. 172 du Manuscrit Huygens calcule encore le bras de levier de l'onglet construit sur la même base (le secteur) et limité par un plan oblique passant par ΩAΩ.

[2]) Il s'agit du solide décrit dans le premier alinéa de la p. 487.

$$\begin{array}{l} p \\ \frac{1}{2}r \\ \hline \frac{1}{2}pr \text{ ſector DAO} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} r - a & \text{DC} \\ \frac{1}{2}b & \frac{1}{2}\text{CO} \\ \hline \frac{1}{2}br - \frac{1}{2}ba \ \triangle\text{DCO} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{ex } \frac{1}{2}pr \quad \text{ſect. DAO} \\ \hline \frac{1}{2}pr - \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}ba \ \triangle\text{CAO} \\ \text{div. per } b \text{ CO} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\frac{1}{2}pr - \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}ba}{b} & \text{CG} \\ r - a & \text{CD} \end{array}\right\} \text{a}^{3)}$$

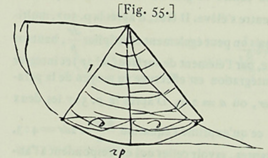
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\frac{1}{2}pr - \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}ba + br - ba}{b} \text{ ſive } \dfrac{\frac{1}{2}pr + \frac{1}{2}br - \frac{1}{2}ba}{b} \text{ GD} \\ \frac{3}{4} \end{array}\right\} \text{m}^{3)}$$

$$\text{bon.} \quad \frac{3}{8}r - \frac{3}{8}a + \frac{3}{8}\frac{pr}{b} \ \text{DM} \ \infty \ x^{4)}$$

Hoc eſt ſi fiat ut ſubtenſa BO ad arcum BAO ita radius AD ad DV. Erunt $\frac{3}{8}$ totius CV æquales quæſitæ DM.

[Deuxième Partie] [5]).

[Fig. 55.]



$$xx \text{ --- } rr \text{ --- } x \,/\, \frac{rr}{x}$$

$$\begin{array}{c} 2p \\ \hline 2prr \\ \hline x \end{array}$$

$$p \text{ --- } d \text{ --- } \frac{2}{3}r \,/\, \frac{2}{3}\frac{dr}{p} \qquad \left[\frac{dr}{p}\right]$$

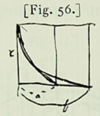
$$\begin{array}{c} 2p \\ \hline 2dr \end{array}$$

[3]) a = addendo, m = multiplicando.

[4]) Voir la note 2 de la p. 526.

[5]) Manuscrit B, p. 169. Ce calcul, beaucoup plus bref que celui de la p. 173 (voir la note 1),

[Fig. 56.]



$$\frac{2prr}{x} \text{———} 2dr \text{———} 4:3$$

$$3pr \infty 4dx$$

$$\frac{3}{4}\frac{pr}{d} \infty x \quad \text{pendulum isochronon sectori [1].}$$

$$\frac{1}{3}ar \infty \frac{1}{4}br$$

$$4a \infty 3b$$

semble être antérieur à celui-ci à cause de la place qu'il occupe dans le Manuscrit. Nous le plaçons néanmoins ici parce que la méthode de la p. 173 est la même que celle suivie dans quelques cas précédents, tandis que ce calcul-ci occupe une place à part.

[1]) Comparez sur la méthode de calcul l'avant-dernier alinéa de la p. 505 qui suit. On considère une oscillation de 180°. Tandis qu'en général la figure est divisée en „quadratula minima", dans ce cas-ci le secteur est divisé en anneaux très minces, comme la Fig. 55 l'indique. La longueur $\frac{rr}{x}$ correspond à la longueur $\frac{bb}{x}$ de la p. 505: c'est la hauteur à laquelle tous les points d'un anneau, situé à la distance r du centre ou point de suspension, pourraient s'élever librement „si peracta semioscillatione sursum suum motum converterent". La surface de cet anneau est $2p$ si l'on appelle $2p$ l'arc correspondant à l'anneau et 1 sa dimension infiniment petite dans le sens du rayon. L'expression $\frac{2prr}{x}$ correspond donc au produit de $\frac{bb}{x}$ par f (surface d'un carré), et il s'agit de trouver la somme de ces expressions pour tous les anneaux (l'expression $\frac{ccf}{x}$ de la p. 507). Huygens effectue cette intégration dans la Fig. 56. Comme l'arc p est proportionnel à r, la courbe qui correspond à $y = \frac{2prr}{x}$ (où les variables sont y et r tandis que x est une constante) est une „paraboloïdes" (voir la note 2 de la p. 475) du troisième degré. L'intégrale cherchée, exprimée par une aire, est donc $\frac{1}{4}br$ [Fig. 56], où $b = \frac{2pr^2}{x}$. Quant à l'expression $\frac{2}{3}\frac{dr}{p}$, elle représente la distance du centre de gravité du secteur au point de suspension, donc aussi la hauteur à laquelle ce centre s'élève. Il faut, d'après la p. 507, multiplier cette expression par la surface du secteur; mais on peut également multiplier $\frac{dr}{p}$, hauteur à laquelle le centre de gravité d'un anneau s'élève, par l'élément de surface (ici $2p$) et intégrer le produit (ici $2dr$) sur tous les anneaux. Cette intégration est effectuée au moyen de la parabole de la Fig. 56; on trouve ainsi l'intégrale $\frac{1}{3}ar$, où $a = 2dr$. D'après la p. 507 les deux intégrales $\frac{1}{3}ar$ et $\frac{1}{4}br$ doivent être égales. C'est ce qu'exprime l'équation $\frac{2prr}{x} : 2dr = 4:3$, où cette fois p, r et d sont des longueurs constantes, savoir celles qui correspondent à l'anneau extérieur ou, si l'on veut, au secteur de cercle donné. La valeur trouvée pour x s'accorde avec celle trouvée par Roberval (voir la note 2 de la p. 352).

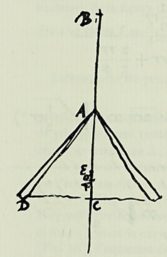
Dans le cas particulier où le secteur est un demi-cercle on trouve $x = \frac{3}{4}p$, conformément au résultat obtenu plus haut (voir la Pièce VI, à la p. 442, Fig. 24).

XIII [1].

[1664] [2].

BA ∞ a, AC ∞ b, CD ∞ c [Fig. 57].

[Fig. 57.]



BE	EA	FE	EO
$a + \frac{2}{3}b$	$\frac{2}{3}b$	$\frac{1}{12}b$	$\frac{\frac{1}{18}bb}{a + \frac{2}{3}b}$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\frac{1}{18}bb}{a+\frac{2}{3}b} \\ a + \frac{2}{3}b \quad \text{BE} \end{array}\right\} \text{ad. [3])}$$

$$\frac{\frac{3}{4}c \quad \frac{2}{3}c}{\frac{1}{2}cc} \qquad \frac{\frac{1}{2}cc}{a + \frac{2}{3}b}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\frac{1}{18}bb}{a+\frac{2}{3}b} + a + \frac{2}{3}b \quad \text{BO} \\ \dfrac{\frac{1}{2}cc}{a+\frac{2}{3}b} \end{array}\right\} \text{a. [3])}$$

$$\frac{\frac{1}{18}bb + \frac{1}{2}cc}{a + \frac{2}{3}b} + a + \frac{2}{3}b \infty 2a$$

$$\frac{1}{18}bb + \frac{1}{2}cc + aa + \frac{4}{3}ab + \frac{4}{9}bb \infty 2aa + \frac{4}{3}ab$$

$$\frac{1}{2}cc \infty aa - \frac{1}{2}bb$$

$$cc \infty 2aa - bb \text{ [4])}$$

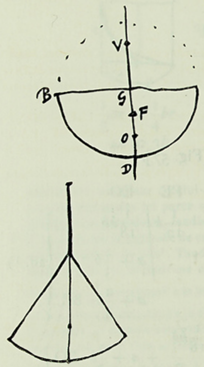
[1]) La Pièce est empruntée au Manuscrit B, p. 213. Comparez le calcul de la p. 448 (Fig. 28), où toutefois les deux triangles considérés étaient suspendus au point A.

[2]) Comparez la note 2 de la p. 435.

[3]) ad. ou a. = addendo.

[4]) Huygens calcule le pendule isochrone avec deux triangles infiniment minces, suspendus en

[Fig. 58.]



$\frown$BD $\infty\, p$[1]) $\mathrm{VO} \infty\, q + \frac{1}{2}\frac{rr}{q} - \frac{4}{9}\frac{r^4}{ppq}$[2]) [Fig. 58]

$$\mathrm{BG} \infty\, r \quad \mathrm{VG} \infty \sqrt{\tfrac{1}{2}rr}$$

$$q = \mathrm{VF} \quad \mathrm{GF} \infty \frac{2}{3}\frac{rr}{p}$$

ergo $\mathrm{VF} \infty\, q \infty \sqrt{\frac{1}{2}rr} + \frac{2}{3}\frac{rr}{p}$. ſubſtitue hunc valorem in VO

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}rr} + \frac{2}{3}\frac{rr}{p} + \frac{\frac{1}{2}rr}{\sqrt{\frac{1}{2}rr} + \frac{2}{3}\frac{rr}{p}} - \frac{\frac{4}{9}r^4}{pp\sqrt{\frac{1}{2}rr} + \frac{2}{3}prr} \infty \sqrt{2rr} \infty 2\sqrt{\tfrac{1}{2}rr}\ ^{2)}$$

$$\frac{2}{3}\frac{rr}{p} + \frac{\frac{1}{2}rr}{\sqrt{\frac{1}{2}rr} + \frac{2}{3}\frac{rr}{p}} - \frac{\frac{4}{9}r^4}{pp\sqrt{\frac{1}{2}rr} + \frac{2}{3}prr} \infty \sqrt{\tfrac{1}{2}rr}$$

$$\frac{1}{2}rr + \frac{2}{3}\frac{rr\sqrt{\frac{1}{2}rr}}{p} + \frac{2}{3}\frac{rr\sqrt{\frac{1}{2}rr}}{p} + \frac{4}{9}\frac{r^4}{pp} + \frac{1}{2}rr - \frac{\frac{4}{9}r^4}{pp} \infty\, rr + \frac{4}{3}\frac{rr}{p}\sqrt{\tfrac{1}{2}rr}$$

$$\frac{4}{3}\frac{rr\sqrt{\frac{1}{2}rr}}{p} \infty \frac{4}{3}\frac{rr}{p}\sqrt{\tfrac{1}{2}rr}\ ^{2)}$$

B, comme la figure l'indique, et oscillant dans leur plan. Comparez le calcul du même pendule isochrone à la p. 535 qui suit.

D'après la méthode dont il était déjà question dans les deux derniers alinéas de la note qui occupe la p. 477, et qu'on trouve exposée à la p. 515 qui suit, on a:

(longueur cherchée) = (longueur du pend. isochr. pour le mouv. solide) + $\frac{l'z'}{b'}$,

---

où le mouvement solide est celui de la même surface suspendue de la même manière, tandis que l' désigne la longueur du pendule isochrone avec la demi-figure oscillant autour de l'axe AC, z' la distance du centre de gravité de la demi-figure à l'axe AC, et b' la distance du centre de gravité de la figure entière au point de suspension B.

Dans la Fig. 57 E est le centre de gravité de la figure entière. La longueur (BE + EO) du pendule isochrone pour le mouvement solide se détermine à l'aide de l'équation BE : EA = FE : EO, où les trois premiers termes sont connus; FE représente une „λ cunei" (voir la p. 472); l'équation est analogue à l'équation $b : a = \frac{1}{5}a : \frac{1}{5}\frac{a^2}{b}$ de la p. 472. Il s'agit de l'onglet obtenu en coupant par un plan oblique passant par une horizontale en A le „cylindre" élevé au-dessus de la figure composée des deux triangles.

On a en outre $l' = \frac{3}{4}c$, $z' = \frac{2}{3}c$, $b' = a + \frac{2}{3}b$.

La longueur du pendule isochrone est donc $\dfrac{\frac{1}{18}b^2 + \frac{1}{2}c^2}{a + \frac{2}{3}b} + a + \frac{2}{3}b$. En égalant cette expression à la constante $2a$, Huygens trouve que le lieu des extrémités inférieures des paires de triangles ayant toutes ce même pendule isochrone, est une circonférence de cercle dont le centre se trouve en A, et dont le rayon est égal à $\sqrt{2\mathrm{AB}^2}$ ou $\mathrm{AB}\sqrt{2}$.

On peut en déduire l'isochronisme des secteurs de cercle suspendus au point B déterminé par l'équation $\mathrm{AD} = \mathrm{AB}\sqrt{2}$ [Fig. 57]. Comparez la p. 537 qui suit.

1) C. à. d. le quart de la circonférence $= p$.

2) Huygens vérifie le résultat du calcul précédent (voir le dernier alinéa de la note qui précède la note 1), pour le cas où le secteur de cercle est un demi-cercle. Comme on a $\mathrm{BG} = \mathrm{VG}\sqrt{2}$ [Fig. 58], l'équation dont il était question dans ce dernier alinéa est satisfaite.

La longueur du pendule isochrone (avant-dernier alinéa de la même note) se réduit ici, puisque $b = 0$, à $\dfrac{\frac{1}{2}c^2}{a} + a$, c. à. d. à $2\sqrt{\frac{1}{2}rr}$ ou $\sqrt{2rr}$.

Or, le calcul direct de cette longueur donne $\mathrm{VO} = q + \frac{1}{2}\frac{rr}{q} - \frac{4}{9}\frac{r^4}{ppq}$. Il faut que les deux expressions soient égales, ce qui est effectivement le cas.

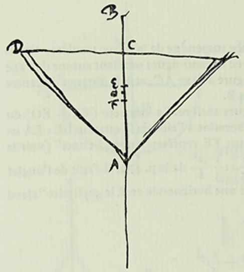
Dans le calcul direct de VO la formule générale (voir la même note) est de nouveau employée. La longueur du pendule isochrone pour le mouvement solide est VF ou q (F étant le centre de gravité du demi-cercle) + „λ trunci" (voir la p. 472); il s'agit du tronc ayant le demi-cercle pour base et limité par un plan parallèle à BG passant par le point V.

On a : λ trunci $= \dfrac{\mathrm{GF}}{\mathrm{VF}}(\lambda \text{ cunei}) = \dfrac{\frac{2}{3}\frac{r^2}{p}}{q}\left(\frac{3}{8}p - \frac{2}{3}\frac{r^2}{p}\right) = \frac{1}{4}\frac{r^2}{q} - \frac{4}{9}\frac{r^4}{p^2q}$.

L'expression $\frac{l'z'}{b'}$ de la formule générale devient ici $\dfrac{\frac{3}{8}p \cdot \frac{2}{3}\frac{r^2}{p}}{q} = \frac{1}{4}\frac{r^2}{q}$.

Donc $\mathrm{VO} = q + \frac{1}{2}\frac{r^2}{q} - \frac{4}{9}\frac{r^4}{p^2q}$.

[Fig. 59.]



$$\text{BA} \infty a,\ \text{AC} \infty b,\ \text{CD} \infty c \ \text{[Fig. 59]}$$

$$\begin{array}{cccc} \text{BE} & \text{EC} & \text{FE} & \text{EO} \\ a - \frac{2}{3}b & \frac{1}{3}b & \frac{1}{6}b & \dfrac{\frac{1}{18}bb}{a - \frac{2}{3}b} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\frac{1}{18}bb}{a - \frac{2}{3}b} \\ a - \frac{2}{3}b \ \text{BE} \end{array}\right\} \text{ad.}$$

$$\frac{3}{4}c$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\frac{2}{3}c}{\dfrac{\frac{1}{2}cc}{a - \frac{2}{3}b}} & \dfrac{\frac{1}{18}bb}{a - \frac{2}{3}b} + a - \frac{2}{3}b \ \text{BO} \\ & \dfrac{\frac{1}{2}cc}{a - \frac{2}{3}b} \end{array}\right\} \text{a.}$$

$$\frac{\frac{1}{18}bb + \frac{1}{2}cc}{a - \frac{2}{3}b} + a - \frac{2}{3}b \infty 2a$$

$$\frac{1}{18}bb + \frac{1}{2}cc - \frac{2}{3}ab + \frac{4}{9}bb \infty aa - \frac{2}{3}ab$$

$$\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}cc \infty aa$$

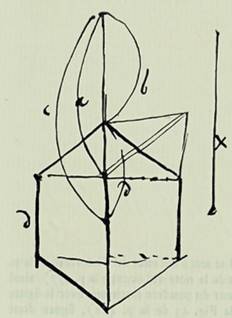
$$cc \infty 2aa - bb \ ^{1)}$$

[1]) Comme la Fig. 59 l'indique, la figure composée des deux triangles infiniment aigus à sommets A oscille dans son plan autour du point B. La méthode de calcul étant absolument la même que dans le cas précédent, nous pouvons nous abstenir de toute explication.

XIV [1]).

[1664] [2]).

[Fig. 60.]



$$\frac{4}{3}c - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}\frac{aa}{c} + \frac{1}{6}\frac{bb}{c} \ ^{3)} \ \text{[Fig. 60].}$$

$$\begin{array}{cc} c - d \infty b & c - \frac{1}{2}d \infty a \\ \hline cc - 2cd + dd \infty bb & cc - cd + \frac{1}{4}dd \infty aa \end{array}$$

$$\frac{\frac{5}{8} \times \frac{4}{9}}{\frac{20}{72}pp} \ \text{Sed } pp\ ^{3)} \infty \frac{3}{4}dd$$

$$\frac{20}{72} \cdot \frac{3}{4} \quad \frac{60}{288} \quad \frac{10}{48} \quad \frac{5}{24}\frac{dd}{c}$$

$$\begin{array}{l} + \frac{4}{3}c \\ - \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d \\ - \frac{1}{3}c + \frac{1}{6}d \\ + \frac{1}{6}c - \frac{1}{6}d + \frac{1}{24}\frac{dd}{c} \\ + \frac{1}{6}c - \frac{1}{3}d + \frac{1}{6}\frac{dd}{c} \\ \hline c + \frac{5}{24}\frac{dd}{c} \end{array}$$

[1]) Manuscrit B, p. 103 recto.
[2]) Voir la note 2 de la p. 435.
[3]) Huygens se propose de calculer la longueur x du pendule isochrone avec la surface d'un hexagone régulier de côté d, suspendu, comme la Fig. 60 l'indique, en un point situé à la

$$\left[c + \frac{5}{24}\frac{dd}{c}\right]$$

$$\frac{\frac{5}{24}\frac{dd}{c}}{c + \frac{5}{12}\frac{dd}{c}} \infty x$$

ſi $c \infty d$ ſit $\frac{17}{12} d \infty x$

---

distance c de son centre et oscillant dans son plan. Il se sert à cet effet du Théorème de la p. 515 qui suit (comparez aussi les deux derniers alinéas de la note qui occupe la p. 477), ainsi que du résultat obtenu le 13 oct. 1664 pour la longueur du pendule isochrone avec la figure F12 C43F oscillant d'un mouvement solide (voir la Fig. 43 de la p. 468), figure dont l'hexagone régulier est un cas particulier. Les lettres a, b, et c dans la Fig. 59 ayant la même signification que dans la Fig. 43, il en résulte que la longueur du pendule isochrone avec l'hexagone, oscillant d'un mouvement solide, est donnée par la formule trouvée à la p. 469 (sixième ligne). Huygens transforme cette expression en $c + \frac{5}{24}\frac{dd}{c}$.

Pour trouver la longueur du pendule cherché, il faut ajouter à cette expression la fraction $\frac{l'z'}{c}$, où l' désigne la longueur du pendule isochrone avec la demi-figure oscillant d'un mouvement solide autour de l'axe vertical de l'hexagone, et z' la distance du centre de gravité de la demi-figure à cet axe. On a $l' = \frac{5}{8}p$ et $z' = \frac{4}{9}p$, où p désigne la moitié de la diagonale horizontale de l'hexagone.

Pour trouver x il faut donc ajouter à $c + \frac{5}{24}\frac{dd}{c}$ l'expression $\frac{5}{8}p \times \frac{4}{9}p$ ou $\frac{5}{24}\frac{dd}{c}$.

Plus tard Huygens a trouvé une formule générale pour la longueur du pendule isochrone avec un polygone régulier oscillant dans son plan (voir le 12[ième] des anagrammes de la p. 489 du T. VI, envoyés en 1669 à la „Royal Society").

XV [1].

[1664] [2].

Nous appellerons axe d'oſcillation une droite parallèle à l'horizon, paſſant par le point de ſuſpenſion, et autour duquel, tandis qu'il reſte immobile lui-même, l'oſcillation du pendule idéal conſidéré a lieu.

Nous appellerons *ſolide* le mouvement oſcillatoire d'une ſurface plane lorſque l'axe d'oſcillation eſt dans le même plan que la ſurface. Au contraire nous nommerons ce mouvement *plan* lorſque l'axe d'oſcillation eſt perpendiculaire à la ſurface, en d'autres termes lorſque la ſurface oſcille dans ſon propre plan.

Si l'on aſtreint une droite, perpendiculaire à une figure plane, à ſe mouvoir de telle manière qu'elle coupe le contour de cette figure ſucceſſivement en chacun de ſes points, la ſurface décrite par cette génératrice ſera appelée *ſurface prismatoïde*. Nous donnerons au contraire le nom de *ſolide prismatoïde* au ſolide compris entre deux plans parallèles, coupant la dite génératrice à angles droits, et la partie de la ſurface prismatoïde qui eſt ſituée entre ces deux plans.

Nous appellerons *onglet* [Fig. 61] un corps ſolide conſtruit au-deſſus d'une figure plane, compris entre deux plans et la partie interjacente de la ſurface prismatoïde: le premier de ces plans coupe la génératrice de la ſurface à angles droits, l'autre plan eſt incliné par rapport au premier et paſſe par une tangente extérieure à la figure.

Au contraire nous parlerons d'un *tronc* conſtruit au-deſſus d'une figure plane [Fig. 62], lorſque le dernier des plans mentionnés paſſe par une droite ſituée à une certaine diſtance de la figure plane [3]).

Enfin l'onglet et le tronc ſeront dits à angle demi-droit lorſque le plan conſidéré a par rapport à la figure plane une inclinaiſon égale à la moitié d'un angle droit.

Un onglet ou tronc quelconque conſtruit au-deſſus d'une figure plane eſt égal au prismatoïde ſur la même baſe dont la hauteur eſt égale à la perpendiculaire à la baſe élevée au centre de gravité de la figure plane et terminée par le point où elle rencontre le plan oppoſé du tronc.

[1]) Manuscrit B, p. 192—199.
[2]) Comparez la note 2 de la p. 435.

XV [1].

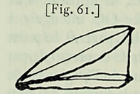
[1664] [2].

Axis oſcillationis dicatur recta horizonti parallela, quæ per punctum ſuſpenſionis ducitur, ac circa quem immotum penduli agitatio fieri concipitur.

Superficiei planæ motus oſcillatorius ſolidus dicatur, cum axis oſcillationis eſt in eodem cum ſuperficie plano. Planus vero dicatur, cum axis oſcillationis ſuperficiei eſt ad angulos rectos, ſive quando ſuperficies ita agitatur ut à plano in quo eſt non exeat.

Si per ambitum figuræ planæ linea recta ipſi perpendicularis circumducitur, ſuperficies a linea circumducta deſcripta ſuperficies prismatoides vocetur. Solidum vero prismatoides quod planis duobus parallelis, dictam lineam ad angulos rectos ſecantibus, et ſuperficie prismatoide inter utrumque planum interjecta continetur.

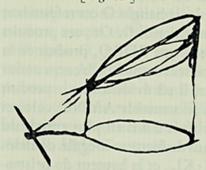
[Fig. 61.]



Cuneus [Fig. 61] ſuper figura plana vocetur, ſolidum duobus planis et portione ſuperficiei prismatoidis inter ea interjectæ contentum, quorum planorum alterum ſecat latus ſuperficiei ad angulos rectos, alterum ad hoc planum inclinatum eſt duciturque per rectam quæ figuram exterius contingit.

Truncus vero [Fig. 62] ſuper figura plana, cum dictorum planorum poſterius per rectam à figura plana diſtantem ducitur [3]).

[Fig. 62.]



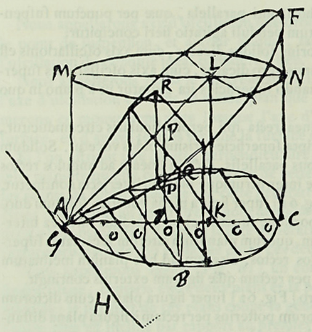
Cuneus denique et truncus anguli ſemirecti dicantur, quando idem planum angulo ſemirecto ad figuram planam inclinatur.

Cuneus vel truncus quilibet ſuper figura plana æqualis eſt prismatoidi ſuper eadem, cujus altitudo æqualis rectæ quæ a centro gravitatis figuræ planæ ſuper ipſam perpendicularis educta pertingit usque ad planum trunci oppoſitum.

[3]) Huygens avait déjà considéré en 1650 le „cuneus cylindricus" dans son Traité „De iis quæ liquido supernatant"; voir les p. 159—160 et 204—210 du T. XI. Le „truncus" correspondant y porte le nom de „portio cylindri" (p. 160). En 1651, dans son „'Εξέτασις Cyclometriæ clarissimi viri Gregorii à S. Vincentio S. J." (voir la p. 329 du T. XI) il donne, avec ce dernier auteur, au „cuneus parabolicus" le nom de „ungula parabolica". On peut donc traduire „cuneus" par „onglet".

Confidérons l'onglet AFC [Fig. 63] ou le tronc AEFC [Fig. 64] conftruit au-deffus de la furface plane ABCD [Fig. 63 et 64] et terminé par le plan oblique FE paffant par la droite GH fituée dans le même plan que la figure ABCD. Soit K le centre de gravité de la figure ABCD et puiffe une perpendiculaire à cette figure élevée en fon centre de gravité rencontrer le plan oblique en L. Soit AMNC le prismatoïde à hauteur KL conftruit au-deffus de la même figure ABCD. Je dis que ce prismatoïde eft égal au tronc ou à l'onglet mentionné.

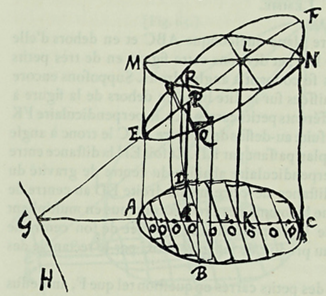
[Fig. 63.]



En effet, fi l'on divife le plan ABCD en de très petits rectangles OOO par des lignes parallèles à la droite GH[1]), il eft établi que fi l'on multiplie chacun de ces rectangles par la diftance de fon centre de gravité à la droite GH (diftances repréfentées par les droites OG) la fomme des produits fera égale à celui de la droite GK par l'enfemble des dits rectangles O. Or, fi GK = KL, il apparaît que chaque diftance OG eft égale à la parallèle à KL partant du point O correfpondant et terminée par le plan oblique de l'onglet ou du tronc. Partant la fomme des produits de chacune de ces hauteurs par le rectangle O correfpondant fera égale au produit de KL par l'enfemble des rectangles O. Or, ces produits font des parallélépipèdes à bafes rectangulaires O, tels que BDRQ, produit de la hauteur OP par le rectangle DB; et ces parallélépipèdes compofent le corps entier de l'onglet AFC ou du tronc AEFC. D'autre part il eft évident que le produit de KL par l'enfemble des rectangles O eft égal au prismatoïde AMNC; celui-ci fera donc égal à l'onglet AFC ou au tronc AEFC. Mais fi KL eft plus grande ou plus petite que KG, la hauteur de chacun des prismes de hauteur inégale confidérés fera augmentée ou diminuée dans le rapport GK : KL, et la hauteur du prismatoïde pareillement. Par conféquent la fomme de tous ces prismes, c. à. d. l'onglet, ou le tronc, AFC fera égale au prismatoïde AMNC, ce qu'il fallait démontrer[2]).

[1]) En marge: „melius in minima quadratula dividetur" (il vaudra mieux diviser la surface en très petits carrés).

[Fig. 64.]



Sit fuper figura plana ABCD [Fig. 63 et 64] cuneus AFC [Fig. 63] vel truncus AEFC [Fig. 64], abfciffus plano obliquo FE tranfeunte per rectam GH quæ in eodem plano cum figura ABCD fita fit. Sitque figuræ ABCD centrum gravitatis K, unde fuper ipfam perpendicularis educta occurrat plano obliquo in L. et intelligatur prismatoides AMNC fuper eadem figura ABCD altitudinem habens KL. dico hoc trunco vel cuneo prædicto æquale effe.

Divifo enim plano ABCD in minima rectangula OOO, lineis rectæ GH parallelis [1]), conftat fingula horum rectangulorum ducta in diftantias centrorum fuorum gravitatis à recta GH, (quæ diftantiæ denotentur rectis OG) fummam productorum facere æqualem ei quod fit ex recta GK in omnia dicta rectangula O. Quod fi jam GK æqualis fit KL, apparet etiam fingulas diftantias OG æquari fingulis rectis ex punctis ijsdem O parallelis ipfi KL eductis usque ad planum cunei vel trunci obliquum. Quare et fumma productorum ex fingulis his altitudinibus in fua rectangula O ductis æquabitur producto ex KL in omnia rectangula O. Atqui ifta producta funt parallelepipeda fuper bafibus rectangulis O, quale unum eft BDRQ productum ex altitudine OP in rectangulum DB: quæ parallelepipeda componunt cuneum totum AFC vel truncum AEFC; productum vero ex KL in omnia rectangula O, æquari manifeftum eft prismatoidi AMNC; ergo hoc cuneo AFC vel trunco AEFC æquale erit. Quod fi vero KL major vel minor fuerit quam KG, priorum prismatum inæqualis altitudinis fingulorum altitudo aucta erit vel diminuta fecundum rationem GK ad KL, quemadmodum et prismatoidis altitudo. Ideoque rurfus fumma illorum omnium, hoc eft, cuneus vel truncus AFC prismatoidi AMNC æqualis erit, quod erat demonftrandum [2]).

[2]) Comparez, à la p. 459, le sixième alinéa de la note 2 de la p. 458.
On lit ici (p. 194 du Mànuscrit): hic interponendum lemma quod in sequentibus notatur signo ℵ. Ce signe se retrouve à la p. 199 où on lit: non hic sed superiori loco indicato poni debet. Nous faisons donc suivre ici le lemme en question.

Lemme.

Conſidérons [Fig. 65] une figure plane quelconque ABC et en dehors d'elle dans le même plan une ligne droite ED, et diviſons cette figure en de très petits carrés égaux par des lignes droites ſe coupant à angles droits. Suppoſons encore que des perpendiculaires ſoient abaiſſées ſur la dite ligne en dehors de la figure à partir des centres de gravité des différents petits carrés, p. e. la perpendiculaire FK partant du petit carré F. Élevons enſuite au-deſſus de la figure ABC le tronc à angle demi-droit ALMC, limité par un plan paſſant par ED. Et ſoit EH la diſtance entre cette droite ED et le pied de la perpendiculaire abaiſſée du centre de gravité du tronc ſur le plan ABC; EG la diſtance de cette même droite ED au centre de gravité de la figure ABC. Je dis que la ſomme des produits obtenus en multipliant chacun des carrés par le carré de la perpendiculaire abaiſſée de ſon centre de gravité ſur la droite ED eſt égale au produit de la figure ABC par le rectangle des droites HE et EG.

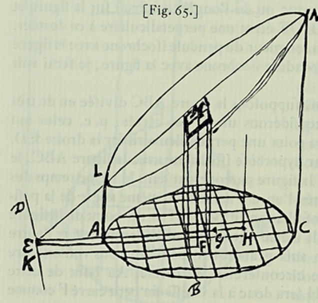
En effet, ſi nous conſidérons un des petits carrés en queſtion tel que F, au-deſſus duquel nous ſuppoſons conſtruit le parallélépipède FN limité par le même plan que le tronc ALNC, il appert que la hauteur de ce parallélépipède eſt égale à la perpendiculaire FK, et que la même choſe eſt vraie pour chacun des parallélépipèdes élevés ſur les autres petits carrés; et il eſt évident que l'enſemble de ces parallélépipèdes n'eſt autre que le tronc ALMC. Or, ſi nous multiplions le parallélépipède NF par la perpendiculaire FK, tirée de la baſe du parallélépipède à la droite ED, c. à. d. ſi nous formons le produit du petit carré F par le carré de FK, et que nous multiplions de même chacun des parallélépipèdes par la perpendiculaire à ED correſpondante, c. à. d. ſi nous formons le produit de chacun des petits carrés par le carré de la perpendiculaire à ED partant de ce petit carré: la ſomme des produits ſera égale au produit de l'enſemble des parallélépipèdes, c. à. d. du tronc ALMC, par la diſtance EH, lorſque le tronc a ſon centre de gravité au-deſſus du point H. Or, le tronc ALMC eſt égal au produit du plan ABC par la diſtance EG. Il apparaît donc que la ſomme des produits conſidérés des différents petits carrés par les carrés des perpendiculaires à ED correſpondantes eſt égale au produit du plan ABC par le rectangle des diſtances HE et EG. Ce qu'il fallait démontrer.

Le pendule ſimple iſochrone avec une figure plane quelconque, oſcillant d'un mouvement ſolide, a une longueur égale à la diſtance entre l'axe d'oſcillation et la perpendiculaire, abaiſſée ſur la figure, du centre de gravité d'un onglet ou tronc conſtruit ſur cette figure et limité par un plan paſſant par l'axe d'oſcillation [1]).

[1]) Comparez la p. 458.

Lemma.

[Fig. 65.]



Sit figura quævis plana ABC [Fig. 65], et extra eam in eodem plano linea recta ED, ſeceturque figura in quadrata minima æqualia lineis rectis ſeſe ad rectos angulos ſecantibus. Et in dictam lineam extra figuram ſitam ex centris gravitatis ſingulorum quadratulorum perpendiculares ductæ intelligantur ſicut ex quadratulo F ducta eſt perpendicularis FK. Porro ſuper figura ABC, erigatur truncus anguli ſemirecti ALMC, abſciſſus plano per ED tranſeunte. Sitque EH diſtantia inter ipſam ED et terminum perpendicularis a centro gravitatis trunci in planum ABC dimiſſæ. EG vero diſtantia ejuſdem ED a centro gravitatis figuræ ABC. Dico ſummam productorum quæ fiunt ductis quadratulis ſingulis in quadrata perpendicularium ex ſuis centris gravitatis in rectam ED dimiſſarum, æquari producto ex figura ABC in rectangulum linearum HE, EG.

Conſiderando enim unum dictorum quadratulorum ut F, ſuper quod intelligatur parallelepipedum erigi FN, eodem plano quo truncus ALNC abſciſſum, apparet altitudinem ejus æqualem eſſe perpendiculari FK. idemque accidere ſingulis parallelepipedis ſuper reliquis quadratulorum erectis; quæ etiam ſimul ſumpta æqualia liquet eſſe trunco ALMC. Ducto autem parallelepipedo NF in perpendicularem FK, à baſi ſua ad rectam ED ductam, hoc eſt ducto quadratulo F in quadratum ipſius FK: ſimiliterque ductis parallelepipedis ſingulis in ſuas perpendiculares ſuper ED, hoc eſt, quadratulis ſingulis in quadrata ſuarum perpendicularium ſuper ED: ſumma productorum æqualis erit producto ex parallelepipedis omnibus, hoc eſt ex trunco ALMC in diſtantiam EH, quum truncus gravitet ſuper H. Eſt autem truncus ALMC æqualis producto ex plano ABC in diſtantiam EG. Patet igitur ſummam dictorum productorum ex quadratulis ſingulis in quadrata ſuarum perpendicularium ſuper ED æquari producto ex plano ABC in rectangulum diſtantiarum HE, EG. quod erat demonſtrandum.

Planæ cuivis figuræ, motu ſolido agitatæ, iſochronum eſt pendulum ſimplex cujus longitudo æqualis diſtantiæ inter axem oſcillationis et perpendicularem quæ in figuram demittitur ex centro gravitatis cunei vel trunci ſuper eadem figura erecti abſciſſique plano per axem oſcillationis ducto [1]).

Confidérons une figure plane quelconque ABC [Fig. 66], mife en mouvement autour de l'axe d'ofcillation ED fitué dans le même plan qu'elle. Et foit Q le point fous le centre de gravité du tronc ou de l'onglet conftruit fur la figure et limité par le plan paffant par l'axe ED; QE étant une perpendiculaire à ce dernier. Je dis que cette perpendiculaire eft la longueur du pendule ifochrone avec la figure ABC. En effet, fi GH repréfente le pendule ifochrone avec la figure, je ferai voir que ce pendule eft égal à EQ.

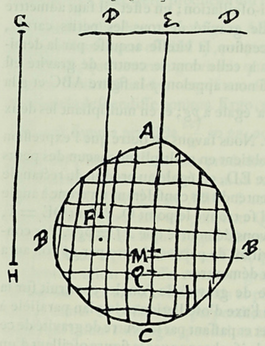
Pour démontrer cette propofition, fuppofons la figure ABC divifée en de très petits carrés égaux entre eux [1]); confidérons un de ces carrés, p. e. celui qui a fon centre en F, et abaiffons de ce point une perpendiculaire fur la droite ED. Or, puifque le pendule GH eft par hypothèfe ifochrone avec la figure ABC, le poids H et un point quelconque de la figure parcourront dans le même temps des arcs femblables, s'ils ont été écartés l'un et l'autre d'un même angle de la pofition verticale; et après une demi-ofcillation le point H et un point de la figure à diftance HG de l'axe ED auront la même viteffe. Admettons que l'un et l'autre accompliffent une demi-ofcillation auffi grande que poffible, nous voulons dire une demi-ofcillation d'un quart de circonférence de cercle. Au bout de cette demi-ofcillation la viteffe du poids H fera donc à la viteffe du petit carré F comme la longueur GH eft à DF. Appelons GH, x; et DF, b.

Nous favons que la hauteur à laquelle peut monter le poids H après avoir accompli une demi-ofcillation eft à la hauteur à laquelle pourrait s'élever le petit carré F fi, après avoir accompli avec la figure une demi-ofcillation, il était libre de monter féparément auffi haut que poffible, comme le carré de GH, ou x^2, eft au carré de DF, ou b^2. Mais la dite hauteur à laquelle peut s'élever le poids H n'eft autre que GH ou x, puifqu'il eft évident qu'il montera à une hauteur égale à celle dont il eft defcendu. Par conféquent, comme on a $x^2 : b^2 = x : \frac{b^2}{x}$, $\frac{b^2}{x}$ fera la hauteur à laquelle pourrait s'élever le petit carré F, comme nous venons de le dire. On obtient donc cette hauteur en divifant le carré de FD par la longueur GH. Le même raifonnement fera voir que la hauteur à laquelle pourrait s'élever l'un quelconque des autres petits carrés fi, après avoir accompli une demi-ofcillation, il pouvait employer fon mouvement à monter auffi haut que poffible, fe calcule en divifant le carré de la diftance du petit carré à la droite ED par la longueur GH ou x. Par conféquent, fi l'on appelle c^2 la fomme de tous les carrés des diftances des différents petits carrés à la droite ED, la fomme de toutes ces hauteurs fera $\frac{c^2}{x}$.

Or, fi l'on multiplie chacune des hauteurs par le petit carré correfpondant, la fomme de tous les produits fera $\frac{c^2 f}{x}$. Et cette fomme de produits doit être égale au produit de l'enfemble des petits carrés, c. à. d. de la figure ABC, par la hauteur

[1]) La somme de ces carrés est donc considérée comme la surface *entière*.

[Fig. 66.]



Sit plana figura quævis ABC [Fig. 66], agitata circa axem ofcillationis ED in eodem cum ipfa plano exiftentem. Sit autem punctum Q fub centro gravitatis trunci vel cunei fuper figura erecti abfciffique plano per ED ducto; in quam perpendicularis fit QE. Dico hanc ipfam effe longitudinem penduli ifochroni figuræ ABC. Pofito enim pendulo GH quod fit figuræ ifochronon oftendam hoc ipfi EQ æquale effe.

Intelligatur enim figura ABC fecta in quadrata minima æqualia [1]) quorum unum confideretur puta cujus centrum F, à quo in rectam ED perpendicularis ducatur FD. Jam quia pendulum GH ifochronon ponitur figuræ ABC, fi æqualibus angulis a fitu perpendiculari extrahantur, æquali tempore fimiles arcus pondus H et quodlibet figuræ punctum percurrent, peractaque femiofcillatione eadem erit celeritas ponderis H atque puncti figuræ quod longitudine HG ab axe ED diftabit. Ponamus autem utrumque facere femiofcillationem maximam five quadrantulæ. Itaque in fine ejus erit celeritas ponderis H ad celeritatem quadratuli F ficut longitudo GH ad DF. Vocetur GH, x; DF, b.

Eft autem ut quadr. GH, hoc eft, xx, ad quadratum DF, hoc eft bb, ita altitudo quo afcenderet peracta femiofcillatione pondus H, ad altitudinem quo afcenderet quadratulum F fi peracta cum figura femiofcillatione, feparatim deinde motum fuum furfum converteret. Dicta autem altitudo quo afcenderet pondus H eft ipfa GH five x, quum conftet ad æqualem ei unde defcendit altitudinem afcenfurum. Ergo quia xx ad bb ut x ad $\frac{bb}{x}$, erit $\frac{bb}{x}$ altitudo ad quam, uti dictum eft, afcenderet quadratulum F. quam altitudinem itaque haberi conftat applicando quadratum ex FD ad longitudinem GH. Eodem modo autem invenietur altitudo ad quam afcenderet unumquodque quadratulorum reliquorum fi peractâ femiofcillatione furfum fuum motum converteret, oriri ex applicatione quadrati diftantiæ fingulorum ab recta ED ad longitudinem GH five x. Quare fi fumma omnium quadratorum, quæ fiunt à diftantijs fingulorum quadratulorum ab recta ED, dicatur cc, erit fumma omnium altitudinum illarum $\frac{cc}{x}$.

Si vero fingulæ altitudines in quadratula fua ducantur, fumma omnium producto-dont le centre de gravité de cette figure eſt deſcendu, laquelle hauteur eſt EM [1]) à cauſe de l'amplitude maximale de la demi-oſcillation; en effet, il faut admettre cette égalité qui exprime que le centre de gravité de tous les petits carrés, après que chacun d'eux a converti en aſcenſion la viteſſe acquiſe par la demi-oſcillation, eſt ſitué à une hauteur égale à celle dont le centre de gravité eſt deſcendu par hypothèſe. Par conſéquent, ſi nous appelons p la figure ABC et g la diſtance ME, la ſomme en queſtion $\frac{c^2f}{x}$ ſera égale à pg; et en multipliant les deux membres par x, on obtiendra: $c^2f = pgx$. Nous ſavons en outre que l'expreſſion c^2f, c. à. d. la ſomme des produits qu'on obtient en multipliant chacun des petits carrés par le carré de ſa diſtance à la droite ED, eſt égale au produit du rectangle de ME et de QE par la figure ABC, bien entendu en conſidérant un tronc à angle demi-droit ſous le centre de gravité duquel ſe trouve le point Q. Poſant QE $= k$, nous aurons donc $gkp = c^2f$. Mais nous avons démontré que $c^2f = pgx$. Par conſéquent on a auſſi $gkp = pgx$. Et, en diviſant de part et d'autre par gp, on aura $k = x$, c. à. d. EQ = GH, ce qu'il fallait démontrer.

Il importe donc de connaître le centre de gravité de l'onglet conſtruit ſur la figure plane ou du moins la diſtance entre l'axe d'oſcillation et le plan parallèle à cet axe perpendiculaire à la baſe de l'onglet et paſſant par le centre de gravité de ce dernier, pour qu'on puiſſe trouver le pendule iſochrone avec la figure oſcillant d'un mouvement ſolide autour d'un axe qui la touche. Et pour trouver le pendule iſochrone correſpondant au cas où l'oſcillation a lieu autour d'un axe extérieur à la figure et ne la touchant pas, il faut trouver d'abord le centre de gravité du tronc ou du moins la dite diſtance au plan paſſant par ce centre. Lorſque cette dernière diſtance eſt connue pour l'onglet, et qu'on connaît auſſi le centre de gravité de la figure donnée, baſe de l'onglet, la diſtance correſpondante pour le tronc ſera toujours, elle auſſi, connue: on la déterminera de la manière ſuivante.

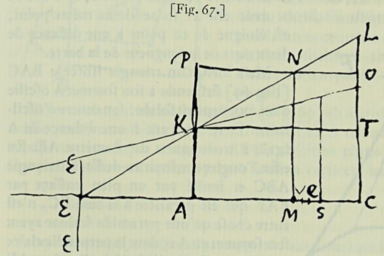
Conſidérons le tronc AKLC [Fig. 67] conſtruit au-deſſus d'une figure plane quelconque, repréſentée, lorſqu'on la regarde de côté, par la ligne AC. Le tronc eſt limité par un plan paſſant par la droite EE ſituée dans le même plan que la figure; la droite CAE paſſant par M, centre de gravité de la figure, eſt par hypothèſe perpendiculaire à EE. Quant à la longueur AC il faut ſavoir qu'elle eſt égale à la diſtance de deux droites parallèles à EE et comprenant entre elles la baſe du tronc AKLC. Or, ſi nous diviſons le tronc conſidéré par un plan KT paſſant par K et parallèle à AC en un onglet KLT et un priſmatoïde AKTC, et qu'un plan paſſant par le centre de gravité de l'onglet KLT coupe la droite AC en S perpendiculairement; et qu'on conſtruiſe MQ de telle manière que EM : MA = SM : MQ [2]); je dis que Q ſe trouve dans un plan perpendiculaire à AC et paſſant par le centre de gravité du tronc AKLC.

[1]) M [Fig. 66] est donc le centre de gravité de la surface. [2]) Voir la note 1 de la p. 508.

rum erit $\frac{ccf}{x}$. Hæc vero productorum ſumma æqualis eſſe debet producto ex omnibus quadratulis, hoc eſt, ex figura ABC in altitudinem unde deſcendit ipſius centrum gravitatis; quæ eſt EM [1]), propter ſemioſcillationem maximam; ita enim fieri neceſſe eſt, quo centrum gravitatis quadratulorum omnium, poſtquam ſingula celeritatem ſemioſcillatione acquiſitam ſurſum converterunt, æque altum inveniatur atque unde deſcendiſſe ponitur. Ergo, ponendo p pro figura ABC, et g pro diſtantia ME, erit ſumma prædicta $\frac{ccf}{x} \infty pg$; ac ducendo utraque in x, fiet $ccf \infty pgx$. Jam porro ccf, hoc eſt, ſummam productorum, quæ fiunt ducendo ſingula quadratula in quadrata ſuarum diſtantiarum ab recta ED, ſcimus æquari producto ex rectangulo ME, QE in figuram ABC, ſi nempe truncum anguli ſemirecti ponamus ſub cujus centro gravitatis eſt punctum Q; ergo ponendo QE ∞k, erit $gkp \infty ccf$. Sed ccf oſtendimus æquari pgx. Ergo et $gkp \infty pgx$. Et, dividendo utrinque per gp, erit $k \infty x$, hoc eſt EQ ∞ GH, quod erat oſtendendum.

Oportet igitur noviſſe centrum gravitatis cunei ſuper figura plana aut ſaltem diſtantiam inter axem oſcillationis et planum ipſi parallelum quod per centrum gravitatis cunei in baſin ejus perpendiculare eſt ut figuræ agitatæ motu ſolido circa axem qui ipſam contingat, pendulum iſochronon reperiri poſſit. Ut autem habeatur agitatæ circa axem remotum, oportet trunci centrum gravitatis aut dictam diſtantiam plani per ipſum ducti prius invenire. Semper autem data illa diſtantia in cuneo, itemque centro gravitatis figuræ propoſitæ quæ baſis ejus eſt, etiam diſtantia in trunco ea dabitur, reperieturque hoc modo.

[Fig. 67.]

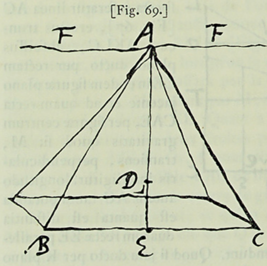


Sit ſuper plana figura qualibet, quæ a latere inſpecta referatur linea AC [Fig. 67], erectus truncus AKLC, abſciſſus plano ducto per rectam EE in eodem figuræ plano jacente et ad quam recta CAE, per figuræ centrum gravitatis quod ſit M, tranſiens, perpendicularis intelligitur. longitudo autem AC tanta putanda eſt quanta eſt diſtantia duarum rectæ EE parallelarum quæ baſin trunci AKLC comprehendunt. Quod ſi jam ducto per K plano KT ipſi AC parallelo dividatur truncus propoſitus in cuneum KLT et priſmatoides AKTC; perque centrum gravitatis cunei KLT tranſiens planum ſecet rectam AC

En effet, prolongeons le prismatoïde AKTC [Fig. 67] juſqu'en PO de telle manière que le corps entier APOC ſoit égal au tronc AKLC, ſavoir en faiſant paſſer un plan parallèle à AC [2]) par le point N où la perpendiculaire élevée au centre de gravité M rencontre le plan KL. Il en réſultera auſſi que le prismatoïde KPOT eſt égal à l'onglet KLT [3]). Or, le prismatoïde APOC eſt à KPOT comme CO eſt à OT, c. à. d. comme EN eſt à NK, c. à. d. comme EM eſt à MA, c. à. d. comme SM eſt à MQ. C'eſt pourquoi le même prismatoïde APOC ſera auſſi à l'onglet KLT comme SM eſt à MQ; d'où l'on tire par partage que le rapport du prismatoïde AKTC à l'onglet KLT eſt égal à SQ : QM. Or, l'onglet KLT a ſon centre de gravité au-deſſus du point S et le prismatoide AKTC a ſon centre de gravité au-deſſus du point M, puiſque M eſt le centre de gravité de ſa baſe. Par conſéquent comme SM eſt diviſée de telle manière en Q que les diſtances QS et QM ſont inverſement proportionnelles aux poids qui ſe trouvent au-deſſus de S et de M, Q ſera le point d'équilibre du poids compoſé de ces deux poids, l'équilibre étant conſidéré par rapport à la ligne EE [4]). Par conſéquent EQ ſera la diſtance cherchée et en même temps la longueur du pendule iſochrone avec la figure AC oſcillant autour de l'axe EE.

Lorſqu'un rectangle tel que ABCD [Fig. 68] oſcille d'un mouvement ſolide autour d'un de ſes côtés AB, la longueur du pendule iſochrone EF ſera donc égale à deux tiers du côté AD perpendiculaire à l'axe; en effet, un onglet étant conſtruit ſur le rectangle ABCD, onglet limité par un plan paſſant par AB, l'extrémité d'une perpendiculaire abaiſſée ſur le plan AC et paſſant par le centre de gravité de l'onglet eſt ſituée à une diſtance de AB égale à deux tiers du côté AD. On en conclut aiſément que le centre d'oſcillation d'une barre ou ligne peſante, en d'autres termes l'extrémité du pendule iſochrone avec elle et ſuſpendu au même point, eſt éloigné de ce point à une diſtance de deux tiers de la longueur de la barre.

[Fig. 69.]



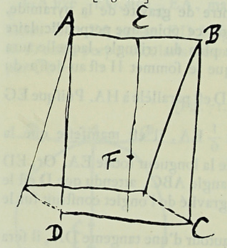
Mais lorſqu'un triangle iſoſcèle BAC [Fig. 69] ſuſpendu à ſon ſommet A oſcille d'un mouvement ſolide, ſon centre d'oſcillation D ſe trouvera à une diſtance de A égale à trois quarts du diamètre AE. En effet, l'onglet conſtruit au-deſſus du triangle ABC et limité par un plan paſſant par FAF qui eſt parallèle à la baſe BC, n'eſt autre choſe qu'une pyramide ſcalène ayant ſon ſommet en A et dont la perpendiculaire du ſommet ſur la baſe eſt le diamètre AE du triangle donné. Or, le plan paſſant par

[1]) Puisque M est le centre de gravité de la figure plane, S son centre d'oscillation par rapport à

ad angulos rectos in S. Et fiat ſicut EM ad MA, ita SM ad MQ [1]). Dico Q eſſe in plano per centrum gravitatis trunci AKLC tranſeunte ad AC recto.

Extendatur enim prismatoides AKTC (Fig. 67) usque in PO, ut totum APOC ſit trunco AKLC æquale, ducto nempe plano oppoſito OC [2]) per N punctum, ubi perpendicularis a centro gravitatis M occurrit plano KL. Erit igitur et prismatoides KPOT æquale cuneo KLT [3]). Eſt autem prismatoides APOC ad KPOT ut CO ad OT, hoc eſt, ut EN ad NK, hoc eſt ut EM ad MA, hoc eſt, ut SM ad MQ. Quare idem prismatoides APOC erit quoque ad cuneum KLT ut SM ad MQ, et dividendo proinde, ſicut prismatoides AKTC ad cuneum KLT ita SQ ad QM. Incumbit autem gravitas cunei KLT ſuper S, et gravitas prismatoidis AKTC ſuper M, quia M eſt centrum gravitatis baſeos ipſius. Ergo cum SM ita diviſa ſit in Q ut diſtantiæ QS, QM gravitatibus ſuper S et M contraria ratione reſpondeant, erit Q punctum æquilibrij gravitatis ex utrisque compoſitæ, ſaltem reſpectu lineæ EE [4]). ideoque EQ erit quæſita diſtantia, eademque longitudo penduli quod figuræ AC circa axem EE agitatæ iſochronum ſit.

[Fig. 68.]



Si igitur rectangulum ut ABCD [Fig. 68] circa unum laterum AB agitetur motu ſolido, erit longitudo penduli iſochroni EF æqualis $\frac{2}{3}$ lateris pendentis AD, quia nempe cuneo exiſtente ſuper rectangulum ABCD, abſciſſo plano ducto per AB, terminus perpendicularis per centrum gravitatis cunei in planum AC ductæ abeſt ab AB duabus tertijs lateris AB [5]). Unde facile intelligitur etiam virgæ ſeu lineæ ponderantis centrum oſcillationis ſeu terminum penduli iſochroni ab eodem puncto ſuſpenſi, diſtare ab hoc puncto duabus tertijs longitudinis virgæ.

Si vero triangulum iſoſceles BAC [Fig. 69] ab angulo verticis A agitetur motu ſolido, centrum oſcillationis ejus D diſtabit ab A tribus quartis diametri AE. quia nempe cuneus ſuper triangulo ABC, abſciſſus plano per FAF baſi BC parallelam, nihil aliud eſt quam pyramis ſcalena verticem habens A, perpendicularem

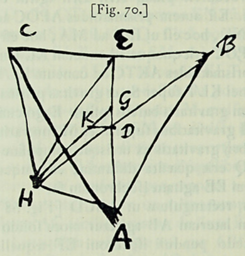
l'axe passant par A et Q celui par rapport à l'axe passant par E, cette proportion correspond pour le cas spécial d'une figure plane en mouvement solide au Théorème XIX de la Pars Quarta de l'„Horologium oscillatorium". Comparez le deuxième alinéa de la p. 373.

[2]) Les mots: „opposito OC" n'expriment évidemment pas la pensée de l'auteur. Nous traduisons „parallèle à AC". [3]) Comparez le premier alinéa de la p. 501. [4]) L'auteur considère les moments par rapport à EE. [5]) Au lieu de AB, il faut évidemment lire AD.

le centre de gravité de cette pyramide et parallèle à ſa baſe, perpendiculaire par conſéquent au plan du triangle ABC, coupera la droite AE en D, de ſorte que les trois quarts de AE conſtitueront la longueur AD, comme on ſait.

Lorſqu'au contraire le triangle iſoſcèle BAC oſcille autour de ſa baſe CB [Fig. 70], je dis que ſon centre d'oſcillation diviſe le diamètre EA en deux parties égales. En effet, l'onglet conſtruit au-deſſus du triangle ABC et limité par un plan paſſant par CB eſt alors une pyramide ayant le triangle donné ABC pour baſe et un côté AH perpendiculaire à ce triangle, et ſi du ſommet H de cette pyramide on tire une droite juſqu'au point G, centre de gravité du triangle ABC, et qu'on prend ſur cette droite $GK = \frac{1}{4}GH$, K ſera le centre de gravité de la pyramide. Abaiſſons de ce point une perpendiculaire KD ſur le plan du triangle, laquelle aura ſon pied ſur le diamètre du triangle attendu que le ſommet H eſt au-deſſus du point A, alors on aura $GD = \frac{1}{4}GA$, vu que KD eſt parallèle à HA. Puiſque EG eſt égale à $\frac{1}{3}$ EA et GD à $\frac{1}{4}$ GA ou $\frac{1}{2}$EG, ou $\frac{1}{6}$ EA, il eſt manifeſte que la ſomme de EG et de GD eſt égale à la moitié de la longueur totale EA. Or, ED eſt la longueur du pendule iſochrone avec le triangle ABC, attendu que D eſt le pied de la perpendiculaire partant du centre de gravité de l'onglet conſtruit ſur le triangle et limité par un plan paſſant par CB.

[Fig. 70.]



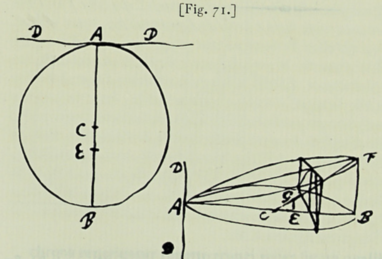
Quant à un cercle AB [Fig. 71] oſcillant autour d'une tangente DA, il ſera iſochrone avec un pendule AE égal à $\frac{5}{8}$ du diamètre AB. En effet, conſidérons l'onglet AFB conſtruit ſur ce cercle et limité par un plan paſſant par AD, et en même temps le cône ſcalène AFB conſtruit ſur la même baſe et ayant ſon ſommet en F. Puiſqu'alors, ſi l'on découpe ce cône et en même temps l'onglet en des tranches très minces par des plans perpendiculaires à la baſe AB et parallèles à la droite AD, les ſections ſont des rectangles dans l'onglet, mais dans le cône des paraboles inſcrites à ces rectangles dont la ſurface eſt égale aux deux tiers de celle du rectangle correſpondant, il eſt évident que le cône et l'onglet ont leurs

[1]) Liſez D, au lieu de E.

vero a vertice in baſin, ipſam AE trianguli diametrum. planum autem per centrum gravitatis pyramidis actum baſi ſuæ parallelum hoc eſt erectum ad planum trianguli ABC, ſecabit rectam AE in E [1]) ut AE ſint $\frac{3}{4}$ AE [2]) ut ſatis notum eſt.

Rurſus ſi circa baſin CB [Fig. 70] agitetur triangulum iſoſceles BAC, centrum oſcillationis ejus bifariam ſecare aio diametrum EA. Eſt enim cuneus, ſuper triangulo ABC, plano per CB abſciſſus, pyramis baſin habens ipſum triangulum ABC, latus vero AH triangulo ad angulos rectos à cujus pyramidis vertice H, ſi ducatur recta ad punctum G quod pono eſſe centrum gravitatis trianguli ABC, ſumaturque in ea GK æqualis $\frac{1}{4}$ GH, erit K centrum gravitatis pyramidis; cadat autem ab ipſo KD perpendicularis in planum trianguli, quæ quidem incidet in diametrum ejus cum vertex H ſit ſupra A, eritque GD ∞ $\frac{1}{4}$GA, cum KD ipſi HA ſit parallela. Quia igitur EG eſt $\frac{1}{3}$ EA, et GD $\frac{1}{4}$ GA ſive $\frac{1}{2}$EG, ſive $\frac{1}{6}$ EA, manifeſtum eſt EG una cum GD efficere dimidium totius EA. Eſt autem ED longitudo penduli triangulo ABC iſochroni, cum in D cadat perpendicularis a centro gravitatis cunei ſuper triangulo abſciſſi plano per CB.

[Fig. 71.]



Circulus autem AB [Fig. 71] agitatus circa tangentem DA iſochronus erit pendulo AE æquali $\frac{5}{8}$diam. AB.

Sit enim ſuper ipſum cuneus AFB abſciſſus plano per AD. ſimul autem et conus ſcalenus AFB ſuper eadem baſi intelligatur conſtitutus verticem habens F. Quia igitur ſecando conum hunc ſimulque cuneum in ſolida minima planis ſuper AB baſi erectis paralleliſque rectæ AD, in cuneo quidem ſectiones ſunt rectangula in cono vero parabolæ ſingulis rectangulis iſtis inſcriptæ,

[2]) Au lieu de AE, il faut lire AD.

centres de gravité au-dessus d'un même point de la droite AB. Mais si l'on réunit F, sommet du cône, par une droite FC au centre de la base, et qu'on prend $CG = \frac{1}{4}$ CF, G sera le centre de gravité du cône; et si de là on abaisse une perpendiculaire GE sur AB, E sera le point au-dessus duquel se trouve le centre de gravité du cône, partant aussi celui de l'onglet AFB. Et comme GE est parallèle à FB, on aura $CE = \frac{1}{4}$CB, et par conséquent $AE = \frac{5}{8}$ AB. Telle sera donc aussi la longueur du pendule isochrone avec le cercle [1]).

---

[1]) Le texte qui suit cette Pièce a été biffé par Huygens (p. 198—199 du Manuscrit B). En marge du texte biffé on lit: hic sequi debent quæ scripta folio quod incipit, Porro ex inventa &c. Nous ne trouvons aucun feuillet ou feuille séparée qui contienne un passage commençant par les mots cités.

Le texte biffé est le suivant: Quod si circulus aut triangulum isosceles aut rectangulum agitetur circa axem qui non tangat figuram sed ab illa distet ut in fig. sequenti [nous supprimons cette figure] facile quoque et his casibus pendula isochrona reperientur reperto trunci super figura qualibet, plano per axem oscillationis transeunte abscissi, centro gravitatis. Quoniam distantia hujus a plano per axem oscillationis ducto quod sit plano figuræ ad angulos rectos, est longitudo quæsita ex prop.... (Comparez la p. 458 et les deux derniers alinéas de la p. 507).

Nunc alium oscillationis motum figurarum planarum consideremus quem planum vocavimus nempe super axem qui sit plano figuræ ad angulos rectos.

Le texte biffé est suivi par un lemme (voir la p. 503 qui précède et la note 2 de la p. 501).

quæ ubique eorum sunt subsesquialteræ, manifestum est conum cuneumque centro gravitatis suæ incumbere eodem puncto rectæ AB. Ducta autem FC a vertice coni F ad centrum baseos, sumtaque CG ∞ $\frac{1}{4}$ CF, erit G centrum gravitatis coni; unde si cadat in AB perpendiculum GE, erit punctum E super quo incumbit centrum gravitatis coni ac proinde et cunei AFB. Et quia GE est parallela FB erit CE ∞ $\frac{1}{4}$ CB. ideoque AE ∞ $\frac{5}{8}$ AB. Ergo tanta quoque erit longitudo penduli circulo isochroni [1]).