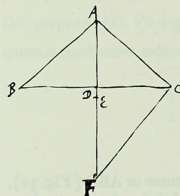
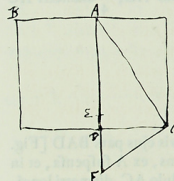


[Fig. 34.]



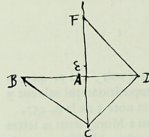
Triangulum quodvis isosceles BAC [Fig. 34], ex vertice suspensum et in plano suo agitatum isochro-num est pendulo AE, æquali $\frac{3}{4}$ perpendicularis AD, atque insuper $\frac{1}{4}$ DF quæ est duabus AD, DC tertia proportionalis ¹⁾.

[Fig. 35.]



Rectangulum BC [Fig. 35] ex puncto medio lateris suspensum et in plano suo agitatum isochro-num est pendulo AE $\frac{2}{3}$ habenti lineæ AF quæ duabus AD, AC tertia proportionalis est ²⁾. Hoc inventu difficillimum fuit.

[Fig. 36.]



Triangulum quodvis isosceles BCD [Fig. 36] ex media basi A suspensum et in plano suo agitatum isochro-num est pendulo EC æquanti dimidium CF quæ duabus AC, CD tertia proportionalis est ³⁾. Ergo triangulum rectangulum sive ex vertice sive ex media basi suspensum æquales oscillationes habet.

¹⁾ Huygens a sans doute calculé la longueur du pendule isochrone avec le triangle BAC par la „méthode des trois quarts” (voir la note 6 de la p. 453, et la p. 362 et suiv. de l'Avvertissement), c. à. d. en

multipliant par $\frac{3}{4}$ la longueur du pendule isochrone avec la ligne droite BC (voir, à la p. 445, le résultat du calcul de la Deuxième Partie de la Pièce VI). En effet, on trouve à la p. 67 du Manuscrit B une multiplication de l'expression $\frac{1}{3} \frac{2a}{b} + b$ par $\frac{3}{4}$. Il est possible aussi que la Deuxième Partie de la Pièce X (voir la p. 462 qui suit) date d'avant le 10 octobre. Plus tard il se sert de la méthode générale pour les surfaces planes dont il était déjà question dans la note 2 de la p. 455 (voir la p. 525 qui suit).

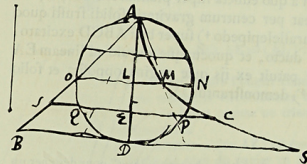
²⁾ C. à. d. la longueur du pendule est $\frac{2}{3} \frac{AC^2}{AD}$. La démonstration primitive nous manque. Le

IX ⁴⁾.

[1664] ⁴⁾.

[PREMIÈRE PARTIE] ⁵⁾.

[Fig. 37.] ⁶⁾



Sit $AE = x$ [Fig. 37] longitudo quæ sita penduli isochroni plano AODN suspensio in A et agitato in latus ⁷⁾.

fit ergo parabola ACS ad quam sunt altitudines DS, EC, LM, cujus latus rectum $\propto AE$. Jam omnes EC, ML &c. ductæ in suas PQ, NO &c. æquari debent omnibus ES, LO &c. ductis in suas

easdem PQ, NO, &c. Intelligentur utrinque singula rectangula ducta insuper in latus rectum parabolæ ACS $\propto AE$. fiunt ergo parallelepipeda omnia ex CE, PQ, EA, ex ML, NO, AE &c. æqualia omnibus parallelepipedis ex SE, PQ, AE, ex LO, NO, AE &c. Sed parallelepipedum CE, PQ, EA æquatur AE, AE, PQ, et parallelepipedum ML, NO, AE ipsi AL, AL, NO, quia $\square ML, AE$

¹³ oct. 1664 Huygens trouva la longueur du pendule isochrone avec un rectangle suspendu en un point extérieur, situé au-dessus du point A (voir, aux p. 463—469 qui suivent, la Troisième Partie de la Pièce X). Lorsqu'il eut trouvé peu de temps après (voir la note 2 de la p. 455) la méthode générale, il put calculer les longueurs des pendules isochrones correspondant au rectangle avec moins de labeur (voir les p. 521—523 qui suivent).

³⁾ C'est le résultat du calcul de la Deuxième Partie de la Pièce VII (p. 453, avant-dernière ligne) qui porte la date du 29 sept. Le même résultat est obtenu plus aisément, d'après la méthode générale, à la p. 525 qui suit.

⁴⁾ La Pièce est empruntée à deux des feuilles collées dans le Manuscrit B (comparez la note 2 de la p. 435), plus précisément aux p. 99 recto, 100 recto et verso, d'après la numération nouvelle.

⁵⁾ Manuscrit B, p. 100 verso.

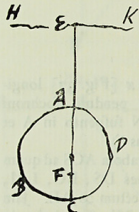
⁶⁾ Il y a deux points S dans la figure, ce qui cependant ne peut donner lieu à aucune confusion.

⁷⁾ Lorsque Huygens exécuta ce calcul, il n'avait apparemment pas encore adopté la termino-

∞ quadratum AL, quia AE est latus rectum. Ergo si ADB semicylindrum ¹⁾ referat basi circulo AD, plano AB absciffum quod facit angulum BAD femirectum: is æquiperabit cylindro super basin circulum AD altitudinem habente AE, unde AE probatur pagina hic adjuncta ²⁾ esse æqualis distantie centri gravitatis dicti semicylindri a perpendiculari super A erecta ³⁾.

[DEUXIÈME PARTIE] ³⁾.

[Fig. 38.]



plana figura quævis [Fig. 38] ABCD, virgâ EA suspensa, quæ mobilis fit in E, si agitetur circa axem HK ipsi EA ad angulos rectos positum atque in eodem plano in quo est BADC, isochronas oscillationes habet pendulo EF. ut fit F id punctum a quoeducta super planum ABCD perpendicularis transeat per centrum gravitatis solidi fructi quod abscinditur à parallelepipedo ⁴⁾ super basi ABCD excitato, plano per HK ducto, et quocumque angulo ad lineam EA inclinato. Hoc patuit ex ijs quæ pagina opposita et folio sequenti verso ⁵⁾ demonstrantur ⁶⁾.

logie de la p. 499 qui suit. Il parle ici d'une surface plane „agitata in latus” pour désigner un mouvement *perpendiculaire* au plan de la surface. Plus loin il écrit „semicylindrus” pour désigner un „cuneus” ou onglet (voir la p. 499). Comparez aussi la note 4 de la p. 459 et la note 4 de la p. 461.

¹⁾ Voir la note précédente.

²⁾ Le début du calcul est analogue au calcul de 1661; voir p. e. la note 4 de la p. 385 et la Pièce III (p. 415 et suiv.). Il est vrai qu'il ne s'agit pas ici d'un pendule linéaire, mais puisque nous avons affaire à un „mouvement solide” (voir la p. 499), peu importe que les points pesants qui constituent p. e. la droite ON soient distribués sur cette droite ou bien concentrés en un globe unique L: la vitesse de chaque point, tant dans le mouvement réel que dans le mouvement libre, sera la même dans les deux cas. La droite AB et la parabole ACS de la Fig. 37 correspondent à la droite AS et la parabole CPE de la Fig. 7 de la p. 421.

D'après les notations de la p. 421 on a dans la Fig. 37: $AD = a$, $BD = d$, $DS = \frac{ad}{x}$. Le

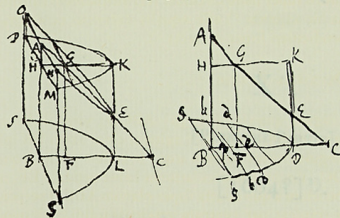
„latus rectum” (double du paramètre) de la parabole étant $\frac{AD^2}{DS}$, on a: „latus rectum” $= \frac{ax}{a}$. Mais Huygens considère ici une oscillation d'une amplitude de 180° ; donc $a = d$. Par conséquent la longueur x du pendule isochrone est égale au „latus rectum” AE.

Nous voyons ici comment Huygens a trouvé la „méthode de l'onglet” (comparez la p. 499) en partant de la „méthode de la parabole”.

Il faut remarquer que dans le produit ou „parallélépipède” CE, PQ, EA, EA désigne le „latus rectum” de la parabole, tandis que CE joue le rôle d'une droite horizontale quelconque, tout aussi bien que ML. On a CE, PQ, EA $= (AE)^2$. PQ; dans le second membre AE ne désigne pas le „latus rectum” mais la distance de A à l'horizontale PQ; exactement comme

[TROISIÈME PARTIE] ⁶⁾.

[Fig. 39.]



F [Fig. 39] perpendicularis per centrum gravitatis solidi SLENNO. $FG \propto FC$.
Omnia SS, BC, BC: bb ,
 ρC , $\rho C \propto$ omnibus SS, BC,
FC: bb , ρC , FC: Ergo et
omnibus SS, BC, FG: bb ,
 ρC , FG.

Ergo solidis super eadem basi positis SLENNO et SSLKMD, quorum illud absciffum plano per AC, existente angulo ACB dimi-

AL dans l'équation $ML \cdot NO \cdot AE = (AL)^2 \cdot NO$ désigne la distance à l'horizontale quelconque NO.

Le „planus AB” qui limite l'onglet considéré est évidemment un plan passant par l'axe d'oscillation qui touche la circonférence au point A. On peut maintenant considérer le triangle ABD de la figure comme un triangle primitivement perpendiculaire au plan du papier et rabattu sur lui.

La longueur cherchée x (ou AE) est égale à la distance du centre de gravité de l'onglet à la perpendiculaire au plan du papier en A, ou, si l'on veut, à la distance du point A à la projection de ce centre sur le plan de la figure; le texte de cette Partie suffit pour établir cette proposition, si l'on suppose connu le théorème du premier alinéa de la p. 501 (voir la Troisième Partie de cette Pièce).

Le plan oblique qui passe par la tangente en A fait ici, comme le texte le dit, un angle de 45° avec le plan du papier. Avant d'énoncer la proposition qui suit (voir la Fig. 38) Huygens a remarqué (s'il ne le savait pas déjà) qu'on trouve la même longueur AE ou x lorsque l'inclinaison du plan est quelconque.

Voir le résultat du calcul pour le cercle considéré à la p. 510.

³⁾ Manuscrit B, p. 100 recto.

⁴⁾ À la p. 499 Huygens appelle ce corps „prismatoïdes”. Nous disons: „cylindre”.

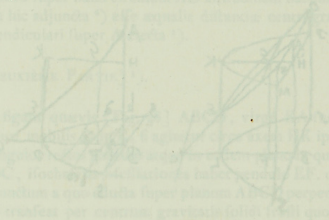
⁵⁾ On aura remarqué que la démonstration précédente, se rapportant à la Fig. 37, reste valable lorsque la surface plane oscillant d'un mouvement solide n'est pas un cercle, mais une surface quelconque.

Le raisonnement restera encore le même lorsque l'axe d'oscillation ne touche pas le contour de la surface mais lui est extérieur. La parabole passe toujours par le point de suspension, mais la partie de la parabole située plus haut que ABCD [Fig. 38] ne joue aucun rôle.

On passe ainsi de la „méthode de l'onglet” à la „méthode du tronc” (voir la p. 499). Le théorème général que Huygens énonce peut donc être regardé comme se dérivant „ex ijs quæ pagina opposita demonstrantur”: c'est en poursuivant le raisonnement de la p. 100 verso (voir la note 5 de la p. 457) qu'il a lui-même trouvé ce théorème („hoc patuit”).

⁶⁾ Plus loin (voir les p. 503—507) il donne de ce théorème une démonstration en extenso.
⁶⁾ Manuscrit B, p. 99 recto.

dio recti, posterius vero altitudinem habens FG æqualem FC, posito F sub centro gravitatis solidi SSLENO, hæc solida super brachium CB in C fixum æquale gravitatis momentum habebunt ¹⁾).



¹⁾ On conclut inversement de cette proposition que lorsque les deux solides nommés, dont le premier est limité par un plan incliné à 45° et dont le dernier (SSLKMD), qui est cylindrique, a une hauteur inconnue, ont des moments égaux par rapport au point C (ou plutôt à une droite R passant par le point C, perpendiculaire à BC et parallèle à SS), cette hauteur inconnue est égale à la distance de la droite R à la projection du centre de gravité du premier solide (SSLENO) sur le plan de la base commune.

C'est donc de la présente proposition que Huygens parle plus haut (voir la fin de la Première Partie).

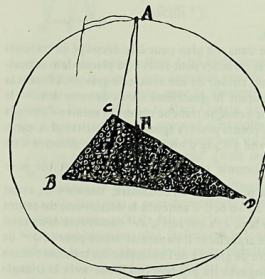
Il est à remarquer que le cas considéré dans la Fig. 39 s'accorde avec la Première Partie de cette Pièce en ce que l'angle d'inclinaison y est un angle demi-droit, mais avec la Deuxième Partie en ce que le point de suspension y est considéré comme extérieur à la surface plane oscillante.

X^o.

[PREMIÈRE PARTIE] ²⁾.

[1664?] ³⁾.

[Fig. 40.]



plana figura quævis BCD [Fig. 40] suspenfa quovis fitu a puncto in eodem cum ipsa plano existente; si a puncto suspensionis ad figuræ centrum gravitatis eadem fuerit distantia, isochronas sibi ipsi oscillationes habebit in latu agitata ⁴⁾.

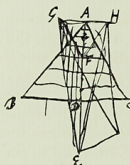
²⁾ La Pièce est empruntée à deux des feuilles mentionnées dans la note 2 de la p. 435.
³⁾ Manuscrit B, p. 96 recto.

³⁾ Vu la généralité de cette proposition et l'absence de toute démonstration il ne paraît pas impossible que Huygens l'ait trouvée après le 13 octobre (voir la note 5 de la p. 463). Le reste de la p. 96 recto est en blanc (on n'y trouve qu'une petite esquisse d'une figure sans importance). Il est probable toutefois qu'il a découvert cette loi déjà en octobre 1664, puisqu'il semble y faire allusion dans la ligne 7 d'en bas de la p. 525. Comparez le quatrième alinéa de la note 3 de la p. 462.

⁴⁾ Voir pour la démonstration les Prop. XII et XIII de la Pars Quarta de l'„Horologium oscillatorium“ (p. 109—113 de l'édition originale). La figure oscille dans son plan (comparez la quatrième ligne de la page suivante).

[DEUXIÈME PARTIE ¹⁾].[1664] ²⁾.

[Fig. 41.]



DF, DE ∞ DB, DC [Fig. 41].

△EFG five duplum ejus spatium EGFHE ex A suspen-
sum et circa axem GH agitatum isochronum est triangulo
ABC ex A suspenso et in latius agitato. quare huic pendulum
isochronum habebitur si isti habeatur ³⁾.

¹⁾ Manuscrit B, p. 99 verso.

²⁾ Voir la note 2 de la p. 435, et la note 5 qui suit.

³⁾ Le triangle isocèle ABC [Fig. 41] qui oscille dans son plan peut être découpé en tranches horizontales infiniment minces; chacune de ces tranches peut alors être placée dans la position verticale par une rotation d'un angle droit autour de son centre de gravité. D'après la proposition précédente (p. 461) — voir cependant le quatrième alinéa de cette note — la longueur x du pendule isochrone correspondant à chaque tranche restera la même; d'après la formule générale (où n désigne le nombre des points pesants égaux qui constituent le corps oscillant, b la distance de son centre de gravité à l'axe d'oscillation, et r la distance d'un point pesant quelconque à cet axe) $x = \frac{\Sigma r^2}{nb}$ (formule que Huygens — qui toutefois ne se sert pas du symbole Σ ; comparez la note 3 de la p. 372 — a dû connaître, semble-t-il, avant le 10 oct. 1664, puisque dans sa lettre à Moray du 10 oct. il annonce la découverte du centre d'oscillation de la sphère; voir les notes 2 et 4 de la p. 472 qui suit), Σr^2 conservera donc aussi après la rotation la même valeur pour chaque tranche et il en sera de même pour le Σr^2 de toutes les tranches. Comme d'autre part le centre de gravité de l'ensemble des tranches restera pendant la rotation à la même hauteur, la longueur du pendule isochrone avec le triangle ABC oscillant dans son plan sera, d'après la formule, égale à la longueur du pendule isochrone avec le pendule linéaire AE de densité inégale obtenu par la rotation des tranches.

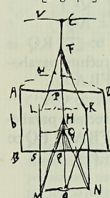
Mais ce pendule linéaire est évidemment équivalent à un pendule de la forme GFE obtenu en écartant les tranches de telle manière que la densité des globules ou points pesants qui les constituent est partout égale dans la figure plane GFE, laquelle oscille autour de l'axe GH. En effet, de cette façon Σr^2 et nb conservent leurs valeurs pendant l'écartement. La largeur GA est quelconque. Au lieu de la figure GFE on peut tout aussi bien prendre la figure double EGFHE dont on conçoit plus aisément l'oscillation autour de l'axe GH.

L'angle BAC est supposé aigu (ou droit), faute de quoi le point F serait situé au-dessus du point A.

Cependant, comme nous l'avons déjà dit dans la note 3 de la p. 461, il paraît peu probable que Huygens ait connu le théorème général de la Première Partie de cette Pièce avant de discuter le cas du triangle considéré. On admettra plutôt, qu'il ait démontré d'abord (ce qui est facile) l'isochronisme d'une tranche ou ligne droite homogène de longueur donnée suspen-

TROISIÈME PARTIE ¹⁾].[1664] ²⁾.

[Fig. 42.]



Rectangulum ABCD [Fig. 42] suspenfum ex E et in latius
agitatum. PF, PG æquales PA, PD. SL, SM æquales QB,
QC. junctisque FL, GM factum ▭ FLMG. cui simile ab
altera parte FGNK. hæc bina ex eodem E puncto suspenfa et
mora circa axem EV, isochronas vibrationes habent rectan-
gulo ABCD uti dictum agitato ³⁾. Ut igitur longitudo penduli
simplicis utrique isochroni inveniatur, quærendum centrum
gravitatis partis parallelepipedî super LFKNGML basi per-
pendiculariter erecti et plano inclinato quod per EV ducitur
abscissi ⁴⁾.

due en son point milieu à un fil de longueur donnée et faisant un angle droit ou nul avec la verticale. Il peut s'être demandé ensuite si une proposition analogue existe pour une droite faisant un autre angle avec la verticale et pour une figure plane (ou même pour un corps, voir la Prop. XVI de la Pars Quarta de l'„Horologium oscillatorium“) quelconque. Mais peut-être s'est il déjà proposé d'examiner dans quelles conditions une figure est isochrone avec elle-même après avoir trouvé qu'un triangle rectangle a la même période „sive ex vertice sive ex media basi suspensum“ (voir les dernières lignes de la p. 456 et le dernier alinéa de la p. 525).

Après avoir réduit de sorte l'oscillation plane du triangle à une oscillation solide (voir la p. 499), Huygens a peut-être calculé la longueur du pendule isochrone avec le triangle de la même manière qu'il l'a fait pour le rectangle (voir la Troisième Partie de cette Pièce).

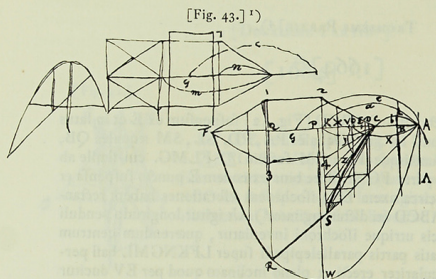
Il a pu calculer plus facilement la longueur du pendule isochrone pour ce cas après avoir trouvé la méthode générale pour réduire l'oscillation plane à l'oscillation solide (voir la p. 515 et les deux derniers alinéas de la note 2 de la p. 478). Mais il est certain qu'il a fait d'une façon ou d'une autre le calcul pour le triangle avant le 10 oct. 1664 (voir la note 1 de la p. 456), alors qu'il n'avait pas encore trouvé cette méthode générale.

⁴⁾ Manuscrit B, p. 100 recto, p. 96 verso et p. 97 recto.

⁵⁾ On trouvera à la fin de cette Partie la date du 13 octobre 1664.

⁶⁾ Le parallélogramme FLMG (de largeur MO quelconque) et la figure double LFKNGML [Fig. 42] sont obtenus par rotation des tranches horizontales, de la même manière que les figures EFG et EGFHE dans le cas du triangle, considéré dans la Deuxième Partie qui précède (voir la note 3). Le pendule isochrone avec le rectangle donné ABCD oscillant dans son plan a donc la même longueur que le pendule isochrone avec la figure LFKNGML oscillant perpendiculairement à son plan.

⁷⁾ Voir sur la méthode du tronç de la Deuxième Partie de la Pièce IX, à la p. 458. On trouve en effet à la p. 100 recto une figure du genre indiqué et un calcul relatif à cette figure. Mais ce calcul a été biffé par Huygens qui observe: „hic nimis prolixus ferret calculus. aliter melius idem quesivimus invenimusque in folio adjuncto“. C'est le calcul qui suit.



[Fig. 43.]
 $FC \propto 2c - 2b$
 $AF \propto 2c - b$
 $2c - b \text{ AF}$
 $a - b \text{ QF} \{s.\}^2$
 $2c - a \text{ AQ} \{s.\}^2$
 $\square \text{AQF} \propto \square \text{RQ}$ in
 latus rectum parab.
 lae FRA $\{s.\}^2$.
 sed QR \propto QA $\{s.\}^2$
 latus rectum parab.
 lae FRA \propto FQ \propto
 $a - b \{s.\}^2$

¹⁾ L'axe d'oscillation AA représenté dans la Fig. 43 par une droite verticale correspond à l'axe horizontal EV de la Fig. 42. La surface LFKNGML de la Fig. 42 a été transformée en F12 C43 de la Fig. 43; en effet, puisqu'il s'agit d'une oscillation „solide” (c. à d. perpendiculaire à la figure plane) on peut donner à la figure toutes les formes qu'on veut, pourvu que chaque élément de surface (ou chaque point pesant) reste à la même distance de l'axe d'oscillation: la longueur du pendule isochrone restera la même. La partie de la figure LFKNGML [Fig. 42] située au-dessus de la ligne horizontale passant par le point G a conservé la même forme; c'est la partie C134C de la figure F12 C43 [Fig. 43]. Mais la partie de LFKNGML située en dessous de cette droite a été changée en un triangle unique; c'est le triangle F13 [Fig. 43]. La figure totale F12 C43 a maintenant une forme symétrique. Elle oscille perpendiculairement à son plan autour de l'axe AA, et cette oscillation est isochrone avec celle du rectangle ABCD de la Fig. 42 qui oscille dans son plan.

Huygens considère le tronç (voir les p. 458, 499 et 503—507) ayant la figure F12 C43 pour base et limité par le plan oblique incliné à 45° passant par l'axe d'oscillation AA. La longueur du pendule isochrone avec le pendule F12 C43 est égale à la distance du point A au pied de la perpendiculaire, abaissée sur la base, du centre de gravité de ce tronç. Pour trouver cette distance Huygens transforme le tronç en une surface plane CFRSC, toutes les ordonnées, telles que QR et KS, étant prises proportionnelles aux sections droites correspondantes du tronç (sections faites par des plans perpendiculaires au plan du papier, et passant par QR et KS respectivement). En supposant tous les points pesants qui constituent le tronç, distribués (ou rabattus) sur la surface plane CFRSC ainsi construite, en conservant leurs distances à l'axe AA, on voit que la densité superficielle de ces points peut être uniforme. Il s'agit donc de trouver la distance de l'axe AA au centre de gravité de la surface CFRSC; les lignes FR et SC sont des paraboles (voir le deuxième alinéa de la note 4); RS est une droite; puisqu'on a pris (arbitrairement) QR = QA, le trapèze QRSK peut être considéré comme la section (rabattue) faite dans ce tronç par un plan passant par AF perpendiculairement au plan du papier.

²⁾ s. = subtrahendo; m. = multiplicando.
³⁾ La figure fait voir que a, b et c sont respectivement égales à AK, AC et AG. Le rectangle donné a pour côtés m (ou CQ) = 2c - a - b et n (ou CK) = a - b (voir la pag. 471).
⁴⁾ Les sections faites dans la partie F13 du tronç par des plans perpendiculaires à AF sont des

$$\left. \begin{aligned} & cc - cb + \frac{1}{4}bb \text{ quadratum FP } \{s.\}^2 \\ & \frac{a-b}{4} \text{ parabolæ latus rectum} \end{aligned} \right\} \text{PW } \{s.\}^2 \left. \begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{bb}{a-b} \\ & \frac{b^2}{4a-b} \end{aligned} \right\} \text{m. } \{s.\}^2$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{4}{3}c - \frac{2}{3}b \text{ AF} \\ & \frac{4}{3}c^2 - 2ccb + cbb - \frac{1}{6}b^2 \text{ parabolæ FWA } \{s.\}^2 \end{aligned} \right\} \text{m. } \{s.\}^2 \left. \begin{aligned} & \frac{1}{3} \frac{b^2}{4a-b} \\ & \frac{1}{6} \frac{b^3}{a-b} \text{ par. CLA } \{s.\}^2 \end{aligned} \right\} \text{m. } \{s.\}^2$$

$$\left. \begin{aligned} & c - \frac{1}{2}b \text{ AP} \end{aligned} \right\} \text{m. } \{s.\}^2 \left. \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{b^3}{a-b} \\ & \frac{1}{2} \text{ AB} \end{aligned} \right\} \text{m. } \{s.\}^2$$

rectangles dont le côté perpendiculaire au plan du papier est égal pour chaque rectangle à la distance du point A au plan sécant correspondant, tandis que les côtés horizontaux sont proportionnels aux distances du point F aux plans sécants. On peut prendre, comme Huygens le fait ici, le facteur constant par lequel on multiplie le produit des distances du plan sécant aux points A et F pour obtenir l'ordonnée (telle que QR) de la partie QFR du „tronç rabattu” CFRSC, de telle manière que la parabole FR passe par le point R de la droite RS qui limite le trapèze QRSK (note 1). De la même manière, on doit prendre pour la partie 2C4 du tronç des ordonnées proportionnelles au produit des distances des points C et A au plan sécant: on obtient ainsi la parabole SC ou SCLA.

Le lieu des points R' correspondant à la partie F13 du tronç pour lesquels Q'A x Q'F = Q'R' x (longueur constante) est bien une parabole et cette longueur constante est le „latus rectum” (note 1 de la p. 282). Q' représente ici la projection sur AF du point R' qui dans la figure devrait être situé sur la ligne FR.

⁵⁾ Le „latus rectum” de la parabole FR (ou FRWA) est égal à FQ d'après l'équation précédente qui donne, pour R' = R, $\square \text{AQF} = \square \text{RQ}$ in latus rectum.

⁶⁾ P étant le point milieu de AF, on a $\text{FP} = c - \frac{1}{2}b$ et $\text{PW} = \frac{\text{FP}^2}{\text{lat. rect.}}$. PW est l'axe de symétrie

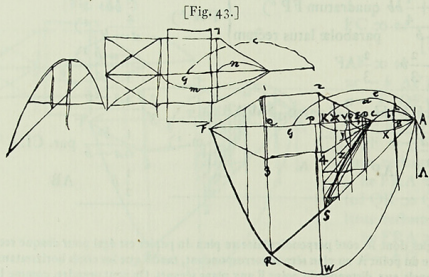
de la parabole FWA, et le produit de cet axe par $\frac{2}{3}$ AF donne l'aire de la surface AFRWA.

Pour calculer la distance de l'axe AA au centre de gravité de la surface CFRSC (distance égale à la longueur du pendule isochrone avec le rectangle considéré, d'après la note 1), Huygens doit calculer le moment de cette surface par rapport à AA, ainsi que l'aire CFRSC (et diviser ensuite ce moment par cette aire). À cet effet il calcule la somme des aires AFWA et CLAC, diminuée de la somme des aires ALCSA et ARWA, ainsi que la somme des moments des aires AFWA et CLAC, diminuée de celle des aires ALCSA et ARWA.

⁷⁾ Cette fraction donne la longueur de BL, axe de symétrie du segment de parabole CLA (partie de la parabole SCLA). L'équation de cette parabole étant: ordonnée x latus rectum = produit des distances du plan sécant (note 4) ou de l'ordonnée aux points C et A, on a (vu que l'ordonnée KS doit être égale à AK ou a): latus rectum = KC = a - b (comme

pour la parabole FWA), donc $\text{BL} = \frac{\text{BC} \cdot \text{BA}}{a-b} = \frac{1}{4} \frac{b^2}{a-b}$.

⁸⁾ Aire de la surface CLAC ($\frac{2}{3}$ BL.AC).



$$\left. \begin{aligned} & \frac{\frac{4}{3}c^4 - \frac{8}{3}c^3b + 2ccb - \frac{2}{3}cb^3 + \frac{1}{12}b^4}{a-b} \quad 1) \\ & \frac{\frac{1}{12}b^4}{a-b} \quad 2) \end{aligned} \right\} \frac{1}{12} \frac{b^4}{a-b} \quad 3)$$

$$\frac{\frac{4}{3}c^4 - \frac{8}{3}c^3b + 2ccb - \frac{2}{3}cb^3 + \frac{1}{6}b^4}{a-b} \quad 3)$$

$$\frac{2c-a}{a-b} \quad \text{AQ}$$

- 1) C'est le moment de l'aire AFWA par rapport à AA.
- 2) Moment de la surface CLAC par rapport à l'axe AA.
- 3) Somme des moments des surfaces AFWA et CLAC.
- 4) Pour trouver l'aire du segment de parabole ARWA, il faut prendre les $\frac{2}{3}$ du produit de AQ par le diamètre de ce segment (Archimède, „De Conoidibus et Spharoidibus” cap. III. La partie gauche de la Fig. 43 est une reproduction de la figure d'Archimède à cet endroit). Ce diamètre (c. a. d. la droite, parallèle à PW, allant du milieu de la corde RA jusqu'à la parabole RWA) est égal au carré de AX (où AX est le point milieu de AQ) divisé par le „latus rectum”.
- 5) C'est le moment par rapport à AA du segment de parabole ARWA.
- 6) Diamètre du segment de parabole SLAS (voir la note 4).
- 7) Aire du segment de parabole SLAS. AD est la moitié de AK.
- 8) Moment du segment de parabole SLAS par rapport à la droite AA.
- 9) Somme des moments par rapport à AA des segments de parabole ARWA et SLAS.
- 10) a = addendo.

$$c - \frac{1}{2}a \quad \text{AX} \quad 4)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{cc - ac + \frac{1}{4}aa}{a-b} \quad \text{quadratum AX} \\ & \frac{\frac{4}{3}c - \frac{2}{3}a}{a-b} \quad \text{parabolæ latus rectum} \end{aligned} \right\} m. \quad \frac{\frac{1}{4}aa}{a-b} \quad 6)$$

$$\frac{\frac{4}{3}c^3 - \frac{2}{3}acc + \frac{2}{3}caa - \frac{1}{6}a^3}{a-b} \quad \text{par. RWA} \quad 4)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{c - \frac{1}{2}a}{a-b} \quad \text{AX} \\ & \frac{1}{2}a \quad \text{AD} \end{aligned} \right\} m. \quad \frac{\frac{1}{4}a^3}{a-b} \quad 4)$$

$$\frac{\frac{4}{3}c^4 - \frac{8}{3}ac^3 + 2aacc - \frac{2}{3}ca^3 + \frac{1}{12}a^4}{a-b} \quad 5)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\frac{1}{12}a^4}{a-b} \quad 3) \\ & \frac{1}{12} \frac{a^4}{a-b} \quad 8) \end{aligned} \right\}$$

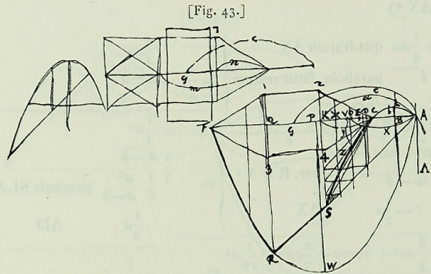
$$\frac{\frac{4}{3}c^4 - \frac{8}{3}ac^3 + 2aacc - \frac{2}{3}ca^3 + \frac{1}{6}a^4}{a-b} \quad 9)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\frac{4}{3}c^3 - 2ccb + cbb - \frac{1}{6}b^3}{a-b} \quad \text{par. FWA} \\ & \frac{\frac{1}{6}b^3}{a-b} \quad \text{par. CLA} \end{aligned} \right\} a^{10)}$$

$$s. \left\{ \begin{aligned} & \frac{\frac{4}{3}c^3 - 2ccb + cbb}{a-b} \quad \text{fumma parabolæ FWA, CLA} \\ & \frac{\frac{4}{3}c^3 - 2acc + caa}{a-b} \quad \text{fumma parabolæ RWA, SLA} \\ & \frac{-2bcc + 2acc + cbb - caa}{a-b} \quad \text{(spatium FRSC}^{11}) \end{aligned} \right.$$

11) Voir la note 6 de la p. 465.

[Fig. 43.]



$$\frac{\frac{4}{3}c^4 - \frac{8}{3}c^3b + 2ccbb - \frac{2}{3}cb^3 + \frac{1}{6}b^4}{a-b} \quad 1)$$

$$\frac{\frac{4}{3}c^4 - \frac{8}{3}ac^3 + 2aacc - \frac{2}{3}ca^3 + \frac{1}{6}a^4}{a-b} \quad 2)$$

$$\frac{-\frac{8}{3}c^3b + \frac{8}{3}c^3a + 2ccbb - 2ccaa - \frac{2}{3}cb^3 + \frac{2}{3}ca^3 + \frac{1}{6}b^4 - \frac{1}{6}a^4}{a-b} \quad 3)$$

dividendum per

$$\frac{-2bcc + 2acc + cbb - caa}{a-b} \quad 4)$$

1) Voir la note 3 de la p. 466.

2) Voir la note 9 de la p. 466.

3) C'est la différence des deux expressions précédentes. En d'autres termes: c'est le moment de l'aire CFRSC par rapport à l'axe d'oscillation AA (voir la note 6 de la p. 465).

4) C'est l'aire CFRSC, d'après la p. 467. En divisant le moment de l'aire CFRSC par rapport à AA par cette aire, on trouve la distance du centre de gravité de cette aire à AA. Comme nous l'avons dit dans la note 1 de la p. 464, cette distance est la longueur du pendule isochrone avec le rectangle considéré, oscillant dans son plan.

5) n est donc le côté vertical, m le côté horizontal du rectangle suspendu au point A.

6) Le „solidum” égal au tronc élevé sur la surface plane F12C43 est apparemment la surface plane CFRSC. On peut en effet considérer cette surface plane comme un corps ou „solidum” composé des mêmes points pesants que le tronc (comparez le deuxième alinéa de la note 1 de la p. 464).

c distantia puncti suspensionis à centro rectanguli

 $a - b \propto n$ latus descendens 5) $2c - a - b \propto m$ latus transverse jacens 5)

solidum 6) æquale abscisso a parallelepipedo super FCSR plano ducto per AA et inclinato ad angulum semirectum. facta divisione fit distantia inter A et centrum gravitatis spatij FRSC $\propto \frac{4}{3}c - \frac{1}{3}b - \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}\frac{aa}{c} + \frac{1}{6}\frac{bb}{c}$ 7) quæ est longitudo penduli ifochroni figuræ F12C43 motæ circa axem AA ideoque et penduli ifochroni rectangulo centrum G habenti, latus majus transverse jacens $\propto CQ$, minus vero $\propto CK$, in latus agitato, quod itaque pendulum erit

$$c + \frac{\frac{1}{12}nm + \frac{1}{12}nm}{c} \quad 7)$$

bonum. 13 Octobr. 1664 8).

7) Nous supprimons les calculs de Huygens qui conduisent à ces expressions. Elles sont le résultat de la division l'une par l'autre des fractions précédentes sur lesquelles on peut consulter les notes 3 et 4, et de l'introduction dans le quotient des côtés n et m du rectangle.

Lorsque $c = \frac{1}{2}n$, c. à d. lorsque le rectangle est suspendu „ex puncto medio lateris”, laformule se réduit à $\frac{2}{3} \left(\frac{n^2 + \frac{1}{4}m^2}{n} \right)$ ou $\frac{2}{3}n + \frac{1}{6}\frac{m^2}{n}$, conformément au résultat de la p. 456 (note 2).

8) Avant le 10 oct. 1664 Huygens connaissait déjà la longueur du pendule isochrone avec le rectangle suspendu au point milieu d'un de ses côtés; ce calcul que nous ne possédons plus, était également laborieux (voir la p. 456). Le 13 oct. il n'avait apparemment pas encore trouvé le théorème général qui permet de trouver la longueur du pendule isochrone „in suspensione remota” lorsqu'on connaît celle du pendule isochrone „in suspensione contigua” (voir la note 1 de la p. 528).

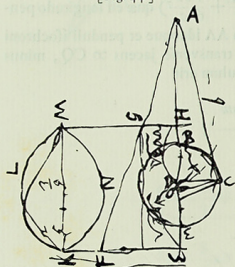
Lorsqu'il eut trouvé la méthode générale pour calculer le centre d'oscillation des surfaces planes symétriques oscillant dans leur plan, il put trouver e. a. celui du rectangle avec beaucoup moins de peine (voir les p. 521—523 qui suivent).

XI^o.

[1664]²⁾.

[PREMIÈRE PARTIE]³⁾.

[Fig. 44.]



Sphæra BCE [Fig. 44] ex A suspensa est. centrum ejus D. AD vero major quam latus quadrati in circulo BCE, dico pendulum isochronon sphære ita suspensæ esse æquale AD una cum DO quæ sit $\frac{2}{5}$ tertiæ proportionalis ipsi AD, DC.
 DC, DB ∞ a.
 DH, DE ⁴⁾ $\infty \sqrt{2aa}$
 O est centrum gravitatis fructi EFGH ⁴⁾ cujus basis duæ semiparabolæ ut KLMN.

b⁵⁾ $\longrightarrow \sqrt{2aa} \longrightarrow \frac{1}{5} \sqrt{2aa} \left| \frac{2aa}{b} \right.$ ⁶⁾

¹⁾ Cette Pièce est empruntée aux p. 165-168 et 174 du Manuscrit B, à une des feuilles collées dans ce Manuscrit mentionnées dans la note 2 de la p. 435, et à une autre feuille collée dans le même Manuscrit (voir la note 1 de la p. 475).
²⁾ Voir la note 2 de la p. 435, et la note 3 de la p. 462, où nous avons fait mention de la découverte du centre d'oscillation de la sphère.
³⁾ La Première Partie est empruntée à une des feuilles collées dans le Manuscrit, plus précisément à la p. 99 recto.
⁴⁾ Il y a deux points E dans la figure. Ici il s'agit du point inférieur E. Plus haut, à gauche, on voit une troisième lettre qui ressemble à un E, mais qui est en réalité un M tourné de 90°.
⁵⁾ b = AD.
⁶⁾ Le présent calcul doit être antérieur à celui de la Deuxième Partie qui suit; en effet, ce dernier fait voir que la restriction „AD vero major quam latus quadrati in circulo BCE” est superflue. Pour pouvoir expliquer les raisonnements de Huygens de la Première et de la Deuxième Partie, nous devons admettre qu'il avait trouvé en ce moment la formule générale pour la longueur du pendule isochrone avec un corps oscillant quelconque.
 On peut en effet déduire cette formule générale de considérations qui se rattachent aux calculs précédents (Pièces VI et VII; voir pour ceci qui suit la Fig. 23 à la p. 441). Le centre de gravité M du corps oscillant, situé à une distance MA = b de l'axe de suspension, s'élève à la hauteur MW = c. Posons AN (longueur du pendule isochrone) = x. Ce pendule s'élève donc à la hauteur SN = $\frac{xc}{b}$. Si v_N est la vitesse du point N et v celle d'un point P quelconque du corps, situé à une distance r de l'axe d'oscillation, au moment où les points M et N se trouvent sur la verticale passant par A, on aura, pour déterminer la hauteur h à laquelle le point

P pourra s'élever librement, l'équation h:SN = v²:v_N² = r²:x², donc h = r² $\frac{c}{xb}$. En supposant le corps divisé en un nombre n de points ou globules égaux de „masse” m, la somme des produits des masses par les hauteurs h correspondantes sera $\frac{cm}{xb} \sum r^2$ et le produit de la masse

totale M par l'ascension du centre de gravité sera mnc. On a donc $\frac{c}{xb} \sum r^2 = nc$, ou x = $\frac{\sum r^2}{nb}$.

Il faut remarquer en outre que pour une surface plane oscillant perpendiculairement à son plan cette même formule peut être déduite des considérations de la Pièce IX. Dans ce cas toutes les distances r sont parallèles et la formule n'est autre chose que la mise en équation de la règle de l'onglet ou du tronc (voir à la p. 458 la Deuxième Partie de la Pièce IX).

Si l'on donnait aux points des masses quelconques, égales ou inégales, la formule prendrait la forme x = $\frac{\sum mr^2}{Mb}$.

Lorsque toutes les masses sont égales, on peut écrire ($\sum r^2$)m = bMx. Sous cette forme l'équation correspond à l'équation (cc + dd) f = pgx qu'on trouve à la p. 519 de ce Tome: c'est là l'équation générale trouvée par Huygens et publiée plus tard sous une autre forme et pour un corps oscillant quelconque (à la p. 519 il n'est question que d'une surface oscillant dans son plan) à la p. 100 de l'édition originale de l'„Horologium oscillatorium” (Pars Quarta, Prop. V). Comparez aussi la Huitième Partie de cette Pièce (note 7 de la p. 485), où l'on voit clairement que dans la pensée de Huygens l'équation générale s'applique à des corps.

Lorsque le corps considéré possède un centre et est symétrique par rapport à un plan passant par ce centre perpendiculairement à la verticale AD [Fig. 43] on peut écrire (voir cependant, à la p. 474, le dernier alinéa de la note 2 de la p. 473) $\sum r^2 = nb^2 + \sum y^2 + \sum z^2$ (Prop. XIV de la Pars Quarta de l'„Horologium oscillatorium”), y étant la distance d'un point quelconque du corps au plan horizontal passant par son centre et z la distance du point à un plan vertical passant par l'axe d'oscillation et le centre du corps, perpendiculaire par conséquent au plan du papier.

Dans le cas de la sphère on peut écrire $\sum r^2 = nb^2 + 2y^2$ ou $\sum r^2 = nb^2 + \sum (\sqrt{2y})^2$. Et si l'on considère, au lieu de la sphère donnée de rayon a, une sphère concentrique de rayon $\sqrt{2a^2}$, on peut écrire $\sum r^2 = nb^2 + \sum y^2$, le dernier signe \sum s'appliquant à la sphère agrandie, dont EH représente le diamètre. On a donc x = $b + \frac{\sum y^2}{nb}$. Si l'on désigne ensuite par y₁ la distance d'un point de la sphère agrandie au plan horizontal passant non pas par le centre D mais par le point A, on aura x = $\frac{\sum y_1^2}{nb}$, c. à d. x, la longueur cherchée du pendule isochrone avec la sphère de rayon a, sera égale à la longueur du pendule isochrone avec une surface plane, oscillant perpendiculairement à son plan et contenant tous les points pesants de la sphère agrandie, chacun à sa vraie distance du plan horizontal passant par A. Tous ces points doivent donc être transportés horizontalement de la sphère agrandie à une surface plane, et si l'on veut que cette dernière (KLMN) ait une forme symétrique par rapport à un axe vertical MK (coincidant en réalité avec EH) et que la densité des points y soit partout la même, il faut nécessairement composer son contour de deux paraboles comme le texte et la Fig. 44 l'indiquent. En effet, si l'on découpe la sphère agrandie et la surface plane KLMN ainsi construite en tranches par des plans horizontaux, les tranches ou éléments de surface de KLMN seront proportionnels aux tranches correspondantes de la sphère agrandie. Comparez sur cet artifice de calcul, la réduction d'un corps à une surface plane, la note 2 de la p. 282 du T. XIV. Voir aussi la réduction d'un tronc à une surface plane, expliquée dans la note 1 de la p. 464, dans la Troisième Partie de la Pièce X qui précède. Cette Troisième Partie est d'ail-

leurs probablement postérieure au présent calcul, puisqu'elle date du 13 oct. et que Huygens connaissait le centre d'oscillation de la sphère le 10 octobre, d'après la note 3 de la p. 462.

On trouve la longueur cherchée AO ou x (voir la Pièce IX qui précède) en calculant la distance de A à O, pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan du papier du centre de gravité du tronc EFGH, situé en réalité au-dessus de la surface KLMN, c. à. d. obtenu en érigeant un cylindre sur cette surface (placée de telle manière que le point M coïncide avec le point H et le point K avec le point inférieur E) et en coupant ce cylindre obliquement par un plan passant par la droite horizontale située dans le plan du papier et passant par le point A.

Or, pour déterminer cette distance AO, Huygens considère d'abord l'onglet (voir la Pièce IX, et la p. 499) découpé dans le même cylindre par un plan oblique parallèle au plan oblique mentionné et passant par une tangente en H à la sphère agrandie.

On a généralement, lorsque la figure plane a un contour quelconque symétrique par rapport à son axe vertical (HE, c. à. d. MK) et qu'on construit sur cette base un „truncus” et un „cunei” limités respectivement à la distance b et à la distance b' du centre de gravité de la base:

(Vol. cunei) $(b + \lambda \text{ cunei}) + (\text{vol. trunci} - \text{vol. cunei}) \cdot b = (\text{vol. trunci}) (b + \lambda \text{ trunci})$ ou „ $\lambda \text{ cunei}$ ” et „ $\lambda \text{ trunci}$ ” désignent les distances du centre de gravité de la base, respectivement aux pieds des perpendiculaires abaissées sur cette base des centres de gravité de l'onglet et du tronc (on a donc $AO = b + \lambda \text{ trunci}$): c'est l'équation des moments autour de la droite du plan de la base correspondant au tronc. Elle peut s'écrire

$$b + \lambda \text{ trunci} = \frac{(\text{vol. cunei}) (b + \lambda \text{ cunei}) + (\text{vol. trunci} - \text{vol. cunei}) \cdot b}{\text{vol. trunci}}$$

$$= \frac{b'(b + \lambda \text{ cunei}) + (b - b') \cdot b}{b}$$

$$= \frac{b'}{b} (\lambda \text{ cunei}) + b.$$

Connaissant la „ $\lambda \text{ cunei}$ ” on peut donc trouver la „ $\lambda \text{ trunci}$ ” (et ensuite la longueur cherchée AO) d'après l'équation $b : b' = (\lambda \text{ cunei}) : (\lambda \text{ trunci})$.

Cette dernière équation correspond à la proportion EM : MA = SM : MQ de la p. 509 (première ligne).

Dans le cas considéré la $\lambda \text{ cunei}$ a la valeur $\frac{1}{5} \sqrt{2aa}$, comme on peut s'en convaincre par le calcul; Huygens n'indique pas comment il a calculé cette longueur. Quant à b' , elle est ici égale à $\sqrt{2aa}$.

La longueur cherchée s'obtient donc à l'aide de l'équation $b : \sqrt{2aa} = \frac{1}{5} \sqrt{2aa} : \lambda \text{ trunci}$, qui donne: $\lambda \text{ trunci} = \frac{2}{5} \frac{aa}{b}$ et $x (\text{ou } AO) = b + \frac{2}{5} \frac{aa}{b}$.

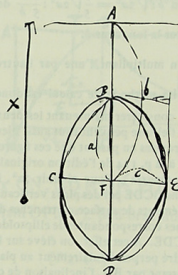
Remarquons encore que la distance AD doit d'après le texte être plus grande que $\sqrt{2aa}$, parce que sinon le point de suspension A ne serait plus extérieur à la sphère agrandie.

Huygens annonce la découverte du centre d'oscillation de la sphère dans sa lettre à Moray du 10 oct. 1664 (voir la p. 120 du T. V), et il lui communique le résultat du calcul dans sa lettre du 21 nov. 1664 (p. 149 du T. V).

Dans l'„Horologium oscillatorium” on ne trouve pas le calcul du centre d'oscillation de l'ellipsoïde de révolution (voir la Deuxième Partie de cette Pièce), mais seulement celui du centre d'oscillation de la sphère (Prop. XXII de la Pars Quarta); la méthode de calcul de ce centre, basée sur la formule $x^2 = nb^2 + zy^2 + z^2$, n'y est pas cependant identique à la méthode de la Première Partie, ni aux méthodes de la Deuxième Partie de cette Pièce.

[DEUXIÈME PARTIE] 1).

[Fig. 45-]



$$b - a - \frac{1}{5} a / \frac{1}{5} \frac{aa}{b} \text{ [Fig. 45]}$$

$$\left[\frac{1}{5} \frac{aa}{b} \right] + b$$

$$\frac{3}{8} \frac{8}{15} \frac{3}{15} \frac{1}{5} \frac{cc}{b}$$

$$b + \frac{1}{5} \frac{aa}{b} + \frac{1}{5} \frac{cc}{b} \propto x^2$$

x pendulum isochronon sphaeroidi BCDE cujus axis BD, suspenso ex A.

si BCDE sit sphaera, h. e. si $c \propto a$, fit $b + \frac{2}{5} \frac{aa}{b} \propto x$.

si $c \propto a$ et $b \propto a$ fit $\frac{7}{5} \propto x$.

si $b \propto a$ $\frac{4}{5} b + \frac{2}{5} \frac{cc}{b} \propto x$.

1) Cette Partie est empruntée à la p. 165 du Manuscrit B.

2) Pour expliquer le calcul du centre d'oscillation de l'ellipsoïde de révolution suspendu en un point quelconque de son axe, calcul d'une brièveté importante, il faut, comme dans la Première Partie de cette Pièce, partir de la formule $x = \frac{2y^2}{nb}$. On peut décomposer r^2 en $y^2 + z^2$, y étant la distance d'un point du corps à un plan horizontal passant par l'axe d'oscillation A perpendiculaire au plan du papier, et z la distance de ce point au plan vertical passant par l'axe AD perpendiculairement au papier.

Pour calculer $2y^2$ il faut, comme dans le cas précédent (voir la note 6 de la p. 470), réduire le corps à une surface plane: c'est la surface limitée par les paraboles BED et BCD tracées par Huygens à l'intérieur de l'ellipse. Comme la formule $J = \frac{2y^2}{nb}$ à elle seule représenterait la longueur d'un pendule isochrone avec la surface BCDE oscillant perpendiculairement à son plan, on sait, d'après le théorème de la Deuxième Partie de la Pièce IX (p. 458), que $2y^2$ est le produit de nb par une longueur égale à la distance entre l'axe d'oscillation et le pied de la perpendiculaire, abaissée sur la figure BCDE, du centre de gravité d'un tronc construit sur cette figure et limité par un plan passant par le nouvel axe d'oscillation qui est la droite horizontale située dans le plan du papier et passant par le point A. Pour trouver cette distance Huygens se sert de la méthode décrite dans la note à la p. 472: l'équation du texte

$$b : a = \frac{1}{5} a^2 : \frac{1}{5} b^2,$$

qui sert à calculer la longueur $\frac{1}{5} \frac{a^2}{b}$, est analogue à l'équation $b : \sqrt{2a^2} = \frac{1}{5} \sqrt{2a^2} : \frac{2}{5} \frac{a^2}{b}$ de la Première Partie de cette Pièce. À $\frac{1}{5} \frac{a^2}{b}$ il faut ensuite ajouter la longueur b .

Comme le texte l'indique, Huygens trouve $\Sigma z^2 = \frac{1}{5} n c^2$ en multipliant l'une par l'autre (abstraction faite du nombre n) les expressions $\frac{3}{8} c$ et $\frac{8}{15} c$. La méthode de calcul est donc la suivante. Au lieu des paraboles BED et BCD, on peut considérer maintenant les deux paraboles CBE et CDE : les courbes tracées à l'intérieur de l'ellipse peuvent tout aussi bien être censées représenter ces deux dernières paraboles. Remarquons en passant que ces figures BCDE sont analogues aux figures auxiliaires qu'on trouve à la p. 114 de l'édition originale de l'„Horologium oscillatorium” (Prop. XIV de la Pars Quarta). Pour obtenir Σz^2 , il faut maintenant diviser l'ellipsoïde et la nouvelle figure plane BCDE par des plans verticaux parallèles à BD et perpendiculaires au plan du papier : les éléments de surface ou tranches de la figure plane seront proportionnels aux volumes des tranches correspondantes de ellipsoïde. Reste donc à calculer Σz^2 pour la nouvelle figure plane BCDE. À cet effet, on élève sur la demi-figure BED, ayant un point saillant en E, un cylindre perpendiculairement au plan du papier et on coupe ce cylindre par un plan oblique passant par BD, l'inclinaison de ce plan pouvant être quelconque. Si l'on appelle F le centre de la figure BCDE, G le centre de gravité de la demi-figure considérée BED et H le pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan de la figure du centre de gravité de l'onglet limité par le plan oblique nommé on aura pour la demi-figure $\Sigma z^2 = \frac{n}{2} FG \cdot FH$ d'après le théorème de la p. 546 qui suit, donc $\Sigma z^2 = n FG \cdot FH$ pour la figure CBED entière. Or, on a ici $FG = \frac{3}{8} c$ et $FH = \frac{8}{15} c$.

Pour la première longueur ($FG = \frac{3}{8} c$), on peut consulter la lettre de Huygens à Fr. van Schooten du 10 déc. 1653 (T. I, p. 254). Pour la deuxième ($FH = \frac{8}{15} c$) voir la Troisième Partie de cette Pièce.

Après avoir formé le produit $n \times \frac{3}{8} c \times \frac{8}{15} c$, il faut le diviser par nb , ce qui donne $\frac{1}{5} \frac{c^2}{b}$.

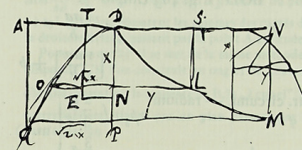
On a alors x (longueur du pendule isochrone) $= b + \frac{1}{5} \frac{a^2}{b} + \frac{1}{5} \frac{c^2}{b}$.

Huygens ne se sert donc pas de l'équation $\Sigma r^2 = nb^2 + \Sigma y^2 + \Sigma z^2$, déjà mentionnée dans la note 6 de la p. 470, valable pour le corps considéré dont CE est un plan de symétrie et où Σz^2 a la même signification que plus haut (somme des carrés des distances à un plan passant par AD perpendiculairement au plan du papier), tandis que Σy^2 représente la somme des carrés des distances au plan horizontal passant par CE. Remarquons en passant que, si l'on voulait se servir de cette équation, on pourrait aussi trouver la nouvelle somme Σy^2 (outre d'après la méthode qui a servi à calculer Σz^2), à l'aide du théorème de la p. 548 qui suit; d'après ce théorème on aurait $\Sigma y^2 = n \cdot BF \cdot FK$, FK étant la „l cunei” (voir la p. 472) $\frac{1}{5} a$. On aurait donc $\Sigma y^2 = \frac{1}{5} n a^2$, et on trouverait de nouveau $x = b + \frac{1}{5} \frac{a^2}{b} + \frac{1}{5} \frac{c^2}{b}$.

Le fait que Huygens se sert de deux méthodes différentes pour calculer les deux sommes Σy^2 et Σz^2 pourrait faire croire qu'il ne connaissait pas encore l'équation $\Sigma r^2 = nb^2 + \Sigma y^2 + \Sigma z^2$ de l'alinéa précédent (bien facile d'ailleurs à dériver de l'équation primitive pour

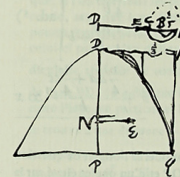
[TROISIÈME PARTIE] ¹⁾.

[Fig. 46.]



DQP [Fig. 46] femiparabola, ad inveniendum brachium TE cunei per DA super femiparabolam abscissi, sit DLM paraboloides ²⁾ in qua cubi applicatarum ad axem DV, nempe cubi ex LS, MV sunt ut quadrata abscissarum SD, VD. Erunt jam LN ad MP ut sectiones cunei dicti per NO, PQ, quippe quæ sunt □ ex ON, ND et QP, PD. Brachia ergo ADV æqualia, cunei super DQP et plani DPM ³⁾. Sed brachium plani ex nostris regulis ⁴⁾ est $\frac{5}{7}$ DP. Ergo et cunei.

[Fig. 47.]



$$CB \frac{2}{15}$$

$$CE \frac{2}{15}$$

$$AC \frac{5}{15}$$

$$AE \frac{7}{15}$$

$$\text{ex AD} \frac{15}{15}$$

$$NE \frac{8}{15}$$

$$\text{brachium cunei super PDQ abscissi per DP} ⁵⁾$$

DQP femiparabola [Fig. 47]

Σr^2). Dans la note 6 de la p. 470 nous supposons que cette équation lui était connue, mais il est possible que son raisonnement différerait quelque peu du nôtre.

¹⁾ Cette Partie, où Huygens détermine le centre de gravité de deux onglets, est empruntée à une feuille séparée collée dans le Manuscrit B entre les p. 117 et 118 (numérotation ancienne). Le texte se trouve sur la p. 60 recto, d'après la numérotation nouvelle (voir la note 2 de la p. 435).

Dans la Deuxième Partie de cette Pièce (voir, à la p. 474, le troisième alinéa de la note 2 de la p. 473) Huygens fait usage de la valeur trouvée ici [Fig. 47] pour le „brachium cunei super PDQ abscissi per DP”.

²⁾ Les „paraboloides” de Huygens sont les courbes $y^2 = kx^2$; comparez les p. 197—198 du T. XIV. Dans le cas considéré ici l'équation de la „paraboloides” DLM est $y^2 = kx^3$.

³⁾ C. à. d. le plan DPM et l'onglet élevé sur DQP ont le même bras de levier par rapport à la droite ADV.

⁴⁾ Voir les p. 280—282 du T. XIV. On trouve que le „brachium” TE a la valeur $\frac{a+b}{2a+b}$ DP, c. à. d. dans le cas considéré ici $\frac{5}{7}$ DP.

⁵⁾ Pour trouver le „brachium” en question d'après la méthode de Huygens il faut faire usage,

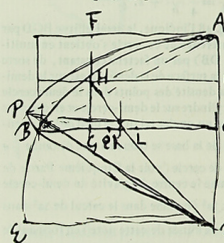
$$\text{si } b \propto a \quad \frac{5}{4}a + \frac{1}{4}\frac{cc}{a} \propto x$$

$$\text{si } c \propto a \quad b + \frac{1}{2}\frac{aa}{b} \propto x$$

$$\frac{5a + \frac{1}{4}\frac{cc}{a} \propto 2a^2}{\frac{5aa + \frac{1}{4}cc \propto 2aa}{5aa + cc \propto 8aa}}$$

$$\frac{cc \propto 3aa}{}$$

[CINQUIÈME PARTIE] ²⁾.



AE ∝ q CL ∝ 1/2 CB.
 AB ∝ 2/3 q L est brachium pyramidis
 AD ∝ r CPBD super AD [Fig. 49].

AC ∝ 1/2 r
 □ AFGC ∝ Δ ABC. dico AF vel OH esse
 brachium superficiæ angularis APB super
 AC. et OC ∝ 1/2 AC ejusdem superficiæ
 brachium super CB, quæcunq; circuli portio
 fuerit ABC.

$$\sqrt{\frac{3}{4}rr} \quad BC \quad \frac{1}{3}q \quad \frac{1}{2}AB \quad \left. \vphantom{\sqrt{\frac{3}{4}rr}} \right\} m$$

$$\frac{1}{4}r \quad \frac{1}{2}DC \quad \frac{1}{3}qr \quad \triangle DBA$$

$$\sqrt{\frac{3r^4}{64}} \triangle DBC \propto \frac{1}{8}r \sqrt{3rr} \triangle DBC$$

¹⁾ Huygens cherche quel doit être le rapport des axes pour que le centre d'oscillation se trouve au point D, lorsque la surface elliptique est suspendue en B. Le résultat ($c^2 = 3a^2$) confirme celui obtenu précédemment (voir le calcul de la p. 446).

²⁾ Manuscrit B, p. 167-168.
 Huygens calcule d'abord le bras de levier de l'onglet APBC, où AB est un arc de 60°, par rapport à AD. Ensuite il fait le même calcul pour un arc AB quelconque. Voir aussi la note 4 de la p. 480.
 L'onglet APBC „suspendu” en Q, et la pyramide CPBD „suspendue” en L, doivent être

$$\frac{1}{3}qr - \frac{1}{8}r \sqrt{3rr} \triangle ABC$$

div. per 1/2 r ∝ AC

$$\frac{\frac{2}{3}q - \frac{1}{4}\sqrt{3rr}}{\frac{3}{4}} \text{ AF vel CG vel OH}$$

$$\frac{\frac{1}{2}q - \frac{3}{16}\sqrt{3rr}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}rr} \propto \frac{1}{4}\sqrt{3rr}} \left. \vphantom{\frac{1}{2}q} \right\} s.$$

$$\frac{1}{2}q - \frac{7}{16}\sqrt{3rr} \quad \text{LK}$$

$$\text{vel } \frac{1}{2}q - \frac{7}{8}\sqrt{\frac{3}{4}rr} \quad \text{LK}$$

ex Archimede ³⁾ unguia APBC ad pyramidem PBCD ut 5 ad 3

$$5 - 3 - \frac{1}{2}q - \frac{7}{8}\sqrt{\frac{3}{4}rr} \left/ \frac{3}{10}q - \frac{21}{40}\sqrt{\frac{3}{4}rr} \right. \quad \text{KQ} \quad \left. \vphantom{5} \right\} a.$$

$$\frac{1}{2}q - \frac{3}{8}\sqrt{\frac{3}{4}rr} \quad \text{KC}$$

$$\frac{4}{5}q - \frac{9}{10}\sqrt{\frac{3}{4}rr} \quad \text{CQ} \quad \text{brachium unguia APBC super AC.}$$

Calculus generalis. Sit AB ∝ p, AD ∝ r, AC ∝ a, CB ∝ b [Fig. 49]

$$\frac{1}{2}p \quad \frac{1}{2}AB$$

$$\frac{r}{r} \quad AD$$

$$\frac{1}{2}pr \quad \triangle DBA$$

$$\frac{1}{2}br - \frac{1}{2}ab$$

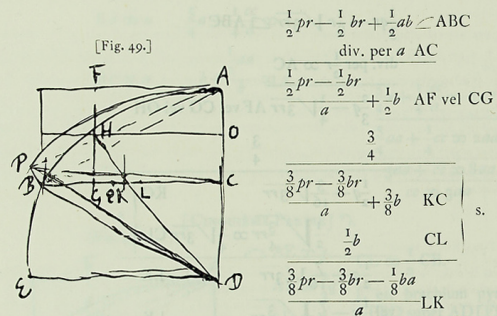
$$r - a \quad DC$$

$$\frac{1}{2}b \quad \frac{1}{2}BC$$

$$\frac{1}{2}br - \frac{1}{2}ab \quad \triangle DCB$$

équivalents à la somme APBD de ces deux corps „suspendus” en K (Le bras de levier KC du corps APBD est égal aux trois quarts de celui de la „surface onguilaire” APB). Connaissant K et L, on trouve Q.

³⁾ Voir sur le théorème d'Archimède le deuxième livre „De sphaera et cylindro”, cap. II, où



ratio ungule APBC ad pyramidem PBCD [Fig. 49]

$$\left\{ \begin{array}{l} 3r - a \\ a \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} 2r - a \\ r - a \end{array} \right\}$$

hoc est $\frac{3ar - aa}{ar + bb} : \frac{2rr - 3ar + aa}{2rr - ar - bb}$

hoc est $\frac{\frac{1}{2}aa + \frac{3}{2}bb}{aa + 3bb} : \frac{\frac{1}{2}b^4 - \frac{1}{2}bb}{\frac{1}{2}aa - bb}$

five ut $\frac{aa + 3bb}{aa + 3bb} : \frac{b^4 - bb}{aa - bb}$

on lit dans la traduction de J. L. Heiberg (Arch. Op. omn. 1910, Lipsie in ad. Teubneri, I, p. 175): „Cuius segmento sphaerae aequalis est conus basin habens eandem, quam segmentum, altitudinem autem rectam, quae ad altitudinem segmenti eam rationem habet, quam radius sphaerae una cum altitudine reliqui segmenti ad altitudinem reliqui segmenti.”

¹⁾ C. à d. „ungula APBC: pyramis PBCD = (3r - a) a : (2r - a) (r - a).”

²⁾ La distance KQ est obtenue, comme précédemment, en multipliant la longueur LK trouvée plus haut par le rapport du volume de la pyramide PBCD à celui de l'onglet APBC; rapport qui a ici la valeur $\left(\frac{b^4}{a^2} - b^2\right) : (a^2 + 3b^2)$.

³⁾ Nous supprimons le calcul (substitution de la valeur de r) qui conduit à cette dernière expression pour KC.

⁴⁾ CQ = KQ + KC. Nous supprimons le calcul. Lorsque l'arc AB ou p devient égal à un quart de circonférence (AE), on trouve AC = a = r; et CB = b = r, donc CQ = $\frac{3}{8}p$. C'est donc là la longueur du bras de levier par rapport à AD de l'onglet obtenu en coupant un cylindre, élevé sur le quart de cercle AED, par un plan oblique passant par la droite

$$\frac{1}{2}pr - \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}ab \triangleq ABC$$

div. per a AC

$$\frac{\frac{1}{2}pr - \frac{1}{2}br}{a} + \frac{1}{2}b \text{ AF vel CG}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$\frac{\frac{3}{8}pr - \frac{3}{8}br}{a} + \frac{3}{8}b \text{ KC}$$

$$\frac{1}{2}b \text{ CL}$$

$$\frac{\frac{3}{8}pr - \frac{3}{8}br - \frac{1}{8}ba}{a} \text{ LK}$$

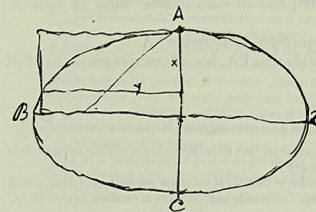
$$\left. \begin{array}{l} \frac{\frac{3}{8}b^4pr - \frac{3}{8}b^2r - \frac{1}{8}b^2a - \frac{3}{8}bbpra^2 + \frac{3}{8}b^2ra^2 + \frac{1}{8}b^3a^3}{a^2 + 3a^2bb} \text{ KQ } ^2) \\ \frac{\frac{3}{8}pr - \frac{3}{8}br + \frac{3}{8}ba}{a} \text{ KC} \end{array} \right\} \text{ ad.}$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\frac{bb}{a} \infty r \quad \frac{3}{8}b + \frac{3pr - 3br}{8a} \text{ KC brachium solidi APBD super AC } ^3)$$

$$\frac{3}{16}p^2 + \frac{3a^2b + 11a^4b^3 - 11aab^5 + 9aab^4p + 3b^6p - 3b^7}{16a^2 + 48a^4bb} \text{ CQ } ^4) \text{ bon. brachium ungule cujusvis APBC super AC.}$$

[SIXIÈME PARTIE] ⁵⁾.

[Fig. 50.]



$$\frac{\frac{1}{4}yy}{x} + x \infty a \text{ [Fig. 50]}$$

$$\frac{1}{4}yy + xx \infty ax$$

$$xx \infty ax - \frac{1}{4}yy$$

$$x \infty \frac{1}{2}a \text{ (ou } \frac{1}{4}a) \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}yy}$$

Sphaeroides ex conversione ellipsis ABCD circa axem AC subduplum diametri BD, si suspendatur ex puncto A, ifochronas vibrationes habet pendulo longitudinis AC. Item quaevis sphaeroidis portio, plano uno vel duobus axi AC perpendicularibus abscissa eidem pendulo ifochrona est ⁷⁾.

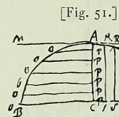
AD. On trouve évidemment le même bras de levier lorsque la base du cylindre est la moitié du cercle: ce qui est confirmé par la substitution $b = 0, p = 2p$ dans la formule pour CQ. Dans la Quatrième Partie de cette Pièce il est fait usage de la valeur CQ = $\frac{3}{8}p$ (ou $\frac{3}{8}q$); voir, à la p. 477, le troisième alinéa de la note 2 de la p. 476.

⁵⁾ Manuscrit B, p. 99 verso.

⁶⁾ C. à d. ±. Comparez la note 1 de la p. 426.

⁷⁾ Ce calcul est analogue à celui de la p. 446 qui précède. Huygens considère d'abord un cercle horizontal suspendu au point A de la verticale qui passe par son centre; le fil a la longueur x, et le rayon du cercle est y. La longueur a du pendule isochrone avec ce cercle est donnée par l'équation

[SEPTIÈME PARTIE] 4).



Plano BAL [Fig. 51] suspenso ex A pendulum ifochronon habebitur si sciatur summa cuborum OP five centrum gravitatis ungułæ ²⁾ super ACB, plano per AC abscissæ.

Item summa linearum OP in quadrata distantiarum PA, vel summa cuborum RS, hoc est centrum gravitatis ungułæ super CLA, abscissæ plano per CL ducto (nam, hoc centro gravitatis dato, dabitur et centrum gravitatis cunei super BAL abscissi plano per MA ducto). Item summa linearum OP in distantias PA hoc est centrum gravitatis spatij BAL ³⁾.

Solido autem ex conversione trilinei ABC circa axem AC, suspenso ex A, pendulum ifochronon habebitur si cognoscatur

Summa quadratorum OP, hoc est ratio summe hujus ad totidem maximo æqualia.

Item summa quadratorum OP in quadrata distantiarum PA.

Item summa quadratorum OP in distantias PA, hoc est centrum gravitatis solidi ipsius propofiti ⁴⁾.

$a = \frac{1}{4} \frac{y^2}{x} + x$, qui découle de l'équation générale: longueur du pendule isochrone = $\frac{2y^2}{nb}$, comme on peut s'en convaincre, p. e. en se servant de la méthode des onglets exposée dans les notes précédentes (voir les p. 474 et 477).

Le lieu de tous les cercles ainsi suspendus et possédant un même pendule isochrone, c. à. d. une même période d'oscillation, est donc l'ellipsoïde engendré par la rotation autour de AC de l'ellipse ABCD ou $x^2 = ax - \frac{1}{4}y^2$, dont l'axe horizontal BD est le double de l'axe vertical AC.

On peut vérifier ce résultat à l'aide de la formule générale trouvée pour l'ellipsoïde de révolution à la p. 473 qui précède.

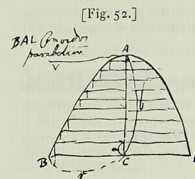
¹⁾ Manuscrit B, p. 174. C'est sans doute à ce morceau que Huygens fait allusion dans sa lettre du 30 oct. 1664 à P. Petit (T. V, p. 129), où il dit avoir trouvé la „Methode generale”. Comparez la fin de sa lettre du 31 oct. à Moray (T. V, p. 131).

²⁾ „Ungula” = „cuneus” (comparez la note 3 de la p. 498).

³⁾ D'après la p. 515 (comparez à la p. 477 l'avant-dernier alinéa de la note 2 de la p. 476) on a: longueur du pend. isochr. avec la figure BAL oscillant dans son plan = $\frac{l}{b}$, où l du pend. isochr. avec la figure BAL oscillant perpendiculairement à son plan) + $\frac{l^2}{b^2}$, où l désigne la longueur du pendule isochrone avec la demi-figure ACB oscillant autour de l'axe AC, a' la distance du centre de gravité de la demi-figure à l'axe AC, et b' la distance du centre de gravité de la figure entière au point de suspension A.

Pour déterminer l' , il faut connaître le centre de gravité de l'onglet „super ACB, plano per AC abscisse” (voir la p. 458), ce qui conduit à évaluer $\Sigma(OP)^3$; pour déterminer l , il

[HUITIÈME PARTIE] 5).



BAL Conoides parabolicum [Fig. 52].
 $\Sigma \infty$ planum semicirculi CB [Fig. 52 et Fig. 53].

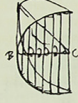
faut connaître le centre de gravité de l'onglet „super BAL abscissi plano per MA ducto”. Huygens fait mention en outre de b' , mais il ne parle pas de z' .

Connaissant le centre de gravité de l'onglet „super CLA (ou „super BLA”) abscisse plano per CL ducto”, — ou plutôt la distance à BL de la projection de ce centre sur la base BLA — on connaîtra en effet également la distance à BL ou à MM de la projection sur cette même base du centre de gravité de l'onglet „super BAL abscissi plano per MA ducto”; ces deux onglets, qu'on peut supposer, pour fixer les idées, limités par des plans inclinés à 45° , peuvent former ensemble un cylindre à base BAL, et en prenant alors l'équation des moments autour de la droite BL p. e., on trouve que, la somme des moments des deux onglets étant égale au moment du cylindre, on a $(AC - a')(AC - b') = ab'$, où a désigne la distance à BL de la projection du centre de gravité de l'onglet, dont le plan oblique passe par MM, et a' la distance à BL de la projection du centre de gravité de l'onglet, dont le plan oblique passe par BL.

⁴⁾ Il faut déterminer $\frac{\Sigma y^2 + \Sigma z^2}{b}$, où b désigne la distance à A du centre de gravité du corps, y la distance d'un point quelconque du corps à un plan horizontal passant par MM, et z la distance de ce point à un plan passant par le point C et l'axe d'oscillation A perpendiculaire au plan du papier. Pour trouver Σy^2 on peut transformer le corps, découpé en tranches horizontales, en une surface plane située dans le plan du papier (voir, à la p. 471, l'avant-dernier alinéa de la note 4 de la p. 470), élever ensuite sur cette surface plane un onglet dont le plan oblique passe par MM, et calculer le moment de cet onglet par rapport à MM, donc la „summa quadratorum OP in quadrata distantiarum PA”. Pour trouver Σz^2 , on peut également diviser le corps en tranches circulaires horizontales et prendre les moments par rapport aux axes P (perpendiculaires au plan du papier) des onglets élevés sur les demi-cercles et limités par des plans obliques passant par les axes P, ce qui conduit en effet à évaluer $\Sigma(OP)^4$; ce qu'on peut démontrer en se servant de la méthode d'„intégration” dans laquelle on remplace les sections droites de l'onglet considéré par des ordonnées (voir le deuxième alinéa de la note 1 de la p. 464).

⁵⁾ Manuscrit B, P. 174. Pour trouver la longueur du pendule isochrone avec un segment d'un paraboloides de révolution, suspendu au point A, Huygens se sert de la formule générale. Voir la note précédente et la note 7 de la p. 485; comparez aussi la note 1 de la p. 369.

[Fig. 53.]



$$\frac{3q}{8r}$$

$$\frac{2rr}{3q}$$

$$\frac{1}{4}rr$$

n numerus particularum in segmento BC [Fig. 53]

$$\frac{1}{4}rrn$$

b numerus segmentorum [Fig. 52] ¹⁾.

$$3 - 1 - \frac{1}{4}rrnb - \frac{1}{12}rrnb^2$$

$p \propto AC$ [Fig. 52]. Ergo npp } m. ³⁾ ∞ summa quadratorum à perpendicularibus numerus segmentorum b } partium segmenti BC cadentibus in planum AV ⁴⁾.

$$4 - 1 - \frac{nppb}{4} | \frac{nppb^2}{4}$$

$$\frac{2}{3}p \quad \frac{1}{2}pp \quad \frac{1}{2}nb \quad \text{numerus particularum in conoide}$$

$$\frac{3}{4}p \quad \frac{1}{2}bn \quad \frac{2}{3}p$$

$$\frac{1}{2}pp \quad \frac{1}{4}ppbn^2 \quad \frac{1}{3}nbp^2$$

$$3 - 1 - \frac{npp}{3} | \frac{1}{3}nbp^2$$

$$\frac{1}{12}rrnb + \frac{1}{4}ppnb \quad \infty \frac{1}{3}pnb^2$$

$$\frac{1}{12}rr + \frac{1}{4}pp \quad \infty \frac{1}{3}px$$

$$\frac{1}{4}p + \frac{3}{4}p \quad \infty x$$

¹⁾ Le calcul de $\frac{1}{4}r^2n$, où $r = BC$, est identique au calcul de $\frac{1}{4}nc^2$ dans le cas considéré dans la Quatrième Partie de cette Pièce et q a la même signification (voir, à la p. 477, le troisième alinéa de la note 2 de la p. 476). La Fig. 53 représente un onglet élevé sur le demi-cercle. On a $\Sigma z^2 = \frac{1}{4}r^2n$, où z a la même signification que dans la note nommée, et où le signe Σ s'appli-

que au demi-cercle considéré (il est évident qu'on peut faire le calcul en considérant les demi-cercles et le demi-paraboloïde tout aussi bien qu'en considérant le paraboloïde entier) de hauteur déterminée a [Fig. 52] ayant le demi-cercle pour base. Si l'on étend l'intégration à un cylindre de hauteur AC élevé sur la même base, on trouve $\Sigma z^2 = \frac{1}{4}r^2nb$, nb étant le nombre des particules dans le demi-cylindre entier.

²⁾ Pour le demi-paraboloïde de révolution Σz^2 est le tiers de la somme Σz^2 pour le demi-cylindre. En effet, pour chaque tranche horizontale le Σz^2 (comparez les six dernières lignes de la note 4 de la p. 483) est proportionnel à la 4^{ème} puissance du rayon de cette tranche, donc au carré de sa distance au plan AV. Cette relation est représentée par une parabole, et la considération de l'aire de cette parabole conduit au résultat cherché.

³⁾ m. = multiplicando.

⁴⁾ Cette somme est donc égale à np^2 .

⁵⁾ C. à. d. le xy^2 (où y désigne la distance d'un point quelconque au plan horizontal passant par A) du demi-paraboloïde par rapport à ce plan AV est égal au quart du xy^2 pour le demi-cylindre.

On peut aussi trouver le xy^2 cherché, en formant le produit du nombre de particules contenues dans le demi-paraboloïde par la distance du point A au centre de gravité du paraboloïde et par la distance du point A au pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan BAL du centre de gravité d'un onglet construit sur une figure plane S (comparez la p. 282 du T. XIV) contenant dans chaque tranche horizontale autant de particules que la tranche correspondante du paraboloïde et limité par un plan oblique passant par la droite AV. C'est la formule n.FG.FH de la note qui occupe la p. 474.

Le nombre de particules dans le demi-paraboloïde est $\frac{1}{2}nb$, si l'on désigne toujours par n le „numerus particularum in segmento BC”. Mais le nombre de particules pour le paraboloïde entier sera $\frac{1}{2}nb$, si l'on désigne par n le nombre de particules dans le segment BL entier. C'est ce qui résulte du théorème d'Archimède („de Conoidibus et Sphaeroidibus”, XXI) d'après lequel le volume du paraboloïde de révolution est égal à $\frac{1}{2}$ fois celui du cône BAL; car le volume de ce dernier corps est $\frac{1}{3}nb$, n étant le „numerus particularum” dans le segment BL.

La distance du centre de gravité du paraboloïde au point A est $\frac{2}{3}p$ (voir la dernière ligne de la p. 282 du T. XIV).

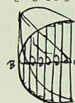
Reste à savoir si $\frac{3}{4}p$ est la distance de A au pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan BAL du centre de gravité de l'onglet nommé, élevé sur la figure plane S. Or, la figure S est un triangle isocèle, tel que BAL, et l'onglet par conséquent une pyramide scalène à base perpendiculaire au plan du papier. On trouve donc en effet $\frac{3}{4}p$.

⁶⁾ C'est le „moment” du paraboloïde (produit de sa „masse” par la distance de son centre de gravité à A [Fig. 52]).

⁷⁾ C'est l'équation générale de la longueur du pendule isochrone (voir, à la p. 471, le premier alinéa de la note 6 de la p. 470) $x = \frac{2r^2}{(n)(b)}$, où $(n) = \frac{1}{2}nb$ et $(b) = \frac{2}{3}p$, tandis que $\Sigma z^2 =$

$$\Sigma z^2 + \Sigma y^2 = \frac{1}{12}r^2nb + \frac{1}{4}p^2nb.$$

[Fig. 53.]



$$\begin{array}{l} \frac{3}{8} q \\ \frac{2}{3} rr \\ \frac{1}{4} rr \\ sa \\ \frac{1}{4} rrsa \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \text{ — } 1 \text{ — } \frac{1}{4} rrsab \mid \frac{1}{12} rrsab \\ 4 \text{ — } 1 \text{ — } sab^3 \mid \frac{1}{4} sab^3 \\ 3 \text{ — } 1 \text{ — } sabb \mid \frac{1}{3} sabb \end{array}$$

$$\frac{\frac{1}{4} sab^3 + \frac{1}{12} sabrr}{x} \infty \frac{1}{3} sabb$$

$$\frac{1}{4} bb + \frac{1}{12} rr \infty \frac{1}{3} bx$$

$$\frac{3}{4} b + \frac{1}{4} \frac{rr}{b} \infty x^1)$$

¹⁾ Même calcul qu'à la p. 484, où le nombre de particules n est remplacé par l'élément de volume sa renfermant ce nombre de particules. Voir sur s le texte de la p. 483, et sur a la note 1 qui commence à la p. 484.

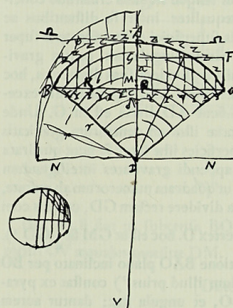
XII^o.

[1664].

[PREMIÈRE PARTIE]¹⁾.

1664. oct.

[Fig. 54.]



AC ∞ a Super fectore DBAO [Fig. 54] parallelepipedum erectum AB ∞ p intelligatur, idque secari plano DB ∞ r transeunte per NDN quæ parallela est BO; quæritur MD brachium super ND, folidi abscissi, basin habentis fectorem DBAO³⁾.

Sit \square CGFO ∞ portioni CAO. erit G punctum sub centro gravitatis superficiæ curvæ propositi folidi. quia enim ductis YZ æqualiter inter se distantibus et normalibus ad CO, partes dictæ superficiæ curvæ æquales inter binas quasque YZ, YZ intercipiuntur; ut facile ostenditur ex eo quod sphaeræ superficies planis æqualiter distantibus in partes æquales dividitur⁴⁾; idem itaque est ac si in punctis Z æquales gravitates suspensæ essent quæ singulæ si designentur lineis YY, erit jam momentum omnium simul istarum gravitatum super CO æquale omnibus YZ in YY. cui æquatur quod fit ex GC in omnes YY, quia \square

¹⁾ La Pièce est empruntée aux p. 169, 171 et 172 du Manuscrit B.

²⁾ Manuscrit B, p. 171 et 172.

³⁾ En d'autres termes (voir le théorème de la p. 458) on cherche la longueur DM ou x du pendule isochrone avec le secteur de cercle DBAO, lorsque D est le point de suspension, et que le mouvement est solide (voir la p. 499).

⁴⁾ Il paraît plus facile de démontrer directement l'égalité des éléments de la surface cylindrique considérée.