Par conféquent $\frac{1}{2}ed + nd + \frac{cdh}{a} = \frac{1}{3}\frac{aed}{x} + \frac{adn}{x} + \frac{c^2dh}{ax}$

$$\frac{1}{2}aex + nax + chx = \frac{1}{3}a^2e + a^2n + c^2h$$

$$x = \frac{\frac{1}{3}a^2e + a^2n + c^2h}{\frac{1}{2}ae + an + ch}.$$

De la même équation on peut auffi tirer c, lorfque x et les autres grandeurs font données. On aura en effet

$$c^2 = cx + \frac{nax - a^2n + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}a^2e}{h}$$

$$c = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{nax - a^2n + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}a^2e}{h}}.$$

On peut également, lorfque toutes les grandeurs excepté h font données, trouver cette dernière. On aura en effet

$$h = \frac{a^2n - nax + \frac{1}{3}a^2e - \frac{1}{2}aex}{cx - c^2},$$

dans le cas où la longueur x eft plus grande que c [2]).

Dans l'équation $c = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{nax - a^2n + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}a^2e}{h}}$

il apparaît que l'expreffion $nax + \frac{1}{2}aex$ doit être plus petite que $a^2n + \frac{1}{3}a^2e$ parce qu'autrement l'équation ne peut avoir deux racines vraies [3]).

$$nax + \frac{1}{2}aex < a^2n + \frac{1}{3}a^2e$$

$$nx + \frac{1}{2}ex < an + \frac{1}{3}ae$$

[1]) Comparez sur la signification du signe ℞ la note 5 de la p. 230 du T. XI.

[2]) L'équation est valable aussi pour $c > x$. Comparez la note 1 de la p. 428. Huygens veut dire sans doute que pour $c > x$ il serait préférable de changer les signes de tous les termes de la fraction.

[3]) Voir la note 2 de la p. 419.

Ergo $\frac{1}{2}ed + nd + \frac{cdh}{a} \propto \frac{1}{3}\frac{aed}{x} + \frac{adn}{x} + \frac{ccdh}{ax}$

$$\frac{1}{2}aex + nax + chx \propto \frac{1}{3}a^2e + aan + cch$$

$$x \propto \frac{\frac{1}{3}a^2e + aan + cch}{\frac{1}{2}ae + an + ch}$$

Ex eadem vero æquatione datis ipfa x et reliquis invenietur c: erit enim

$$cc \propto cx + \frac{nax - aan + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}a^2e}{h}$$

$$c \propto \frac{1}{2}x \text{℞}^{1)} \sqrt{\frac{1}{4}xx + \frac{nax - aan + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}a^2e}{h}}$$

Rurfus datis omnibus præter h invenietur et ipfa.
Erit enim

$$h \propto \frac{aan - nax + \frac{1}{3}a^2e - \frac{1}{2}aex}{cx - cc}$$

fi nempe x major quam c [2]).

In æquatione $c \propto \frac{1}{2}x \text{℞} \sqrt{\frac{1}{4}xx + \frac{nax - aan + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}aae}{h}}$

apparet $nax + \frac{1}{2}aex$ minus effe debere quam $aan + \frac{1}{3}a^2e$, quia alias duas veras radices [3]) æquatio habere nequit.

$$nax + \frac{1}{2}aex \;\|^{4)}\; aan + \frac{1}{3}aae$$

$$nx + \frac{1}{2}ex \;\|\; an + \frac{1}{3}ae$$

[4]) Signe pour indiquer que le premier membre est inférieur au second. Comparez la note 15 de la p. 236 du T. XII.

$$x < \frac{an + \frac{1}{3}ae}{n + \frac{1}{2}e}\ {}^{1}).$$

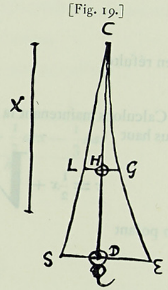
Confidérons un pendule d'horloge dont les demi-ofcillations dénotent les fecondes, lequel eft donc ifochrone avec un pendule fimple de 38 pouces du pied de Rhynlande [2]). Suppofons le poids de la barre égal à $\frac{1}{28}$ de celui du plomb qui y eft fufpendu; et qu'il y ait en outre un petit poids en plomb mobile poffédant une gravité égale à $\frac{1}{3}$ de celle de la barre. On demande où il faut placer ce petit poids fur la barre pour que le pendule faffe avancer l'horloge d'une minute en 24 heures [3]). En multipliant 24 par 60 on obtient 1440; c'eft le nombre des minutes comprifes dans 24 heures. Retranchez-en une puifqu'on défire une marche plus rapide d'une minute, il en refte 1439. Or le carré du rapport $\frac{1440}{1439}$ eft à peu près $\frac{1440}{1438}$ ou $\frac{720}{719}$. Par conféquent fi l'on fuppofe la longueur du pendule fimple qui était de 38 pouces divifée en 720 parties égales et qu'on donne 719 de ces parties à un autre pendule fimple, l'horloge mife en mouvement par ce pendule devancera l'autre d'une minute en 24 heures [4]).

Mais comme nous fuppofons le pendule linéaire, compofé d'un poids et d'une barre d'airain, ifochrone avec le pendule fimple de 720 parties, il faut

1) Huygens ne considère apparemment que les racines positives de l'équation, parce qu'il suppose que le petit poids h en H (Fig. 19) se trouve sur la barre elle-même et non pas sur son prolongement dans le sens QC. La grandeur c est donc nécessairement positive. D'après son calcul il y aura deux racines positives (deux valeurs de c inférieures à x) lorsque le pendule isochrone x, correspondant au cas où le petit poids est attaché à la barre, est plus court que le pendule isochrone $\frac{an + \frac{1}{3}ae}{n + \frac{1}{2}e}$ correspondant au cas où le petit poids est absent; ce qui indique que le petit poids se trouve pour chacune de ces valeurs de c au-dessus du centre d'oscillation tel qu'il était lorsque le petit poids était absent. Il n'est pas nécessaire cependant que c soit inférieure à x, pour que le petit poids se trouve sur la barre (et non pas sur son prolongement dans le sens CQ): théoriquement (puisque le poids Q est considéré comme un point) Huygens aurait pu considérer aussi le cas où $x > \frac{an + \frac{1}{3}ae}{n + \frac{1}{2}e}$, et par conséquent la valeur positive correspondante de $c > x$ (l'autre valeur de c étant négative), et où en même temps $c < a$. Dans ce dernier cas, contrairement au précédent, où les deux racines de l'équation étaient positives, le petit poids retardera évidemment les oscillations.

$$x \,\Big|\!\Big|\, \frac{an + \frac{1}{3}ae}{n + \frac{1}{2}e}\ {}^{1})$$

[Fig. 19.]



Sit perpendiculum horologij quod fingulis vibrationibus fecunda fcrupula denotet, nempe æquipollens perpendiculo fimplici 38 pollicum pedis Rhenolandici [2]). Gravitas virgæ fit $\frac{1}{28}$ gravitatis appenfi plumbi; exiguum vero plumbum mobile fit $\frac{1}{3}$ gravitatis virgæ. quæritur quo loco hoc virgæ imponendum fit ut uno fcrupulo primo citius fpatio 24 horarum perpendiculum incedat [3]). Ductis 24 in 60 fiunt 1440, quot nempe fcrupula prima horis 24 continentur, ex his unum aufer quia uno fcrupulo citius petitur, fuperfunt 1439. Ratio autem 1440 ad 1439 duplicata proxime eft ea quæ 1440 ad 1438, five 720 ad 719. Ergo fi perpendiculi longitudo quæ erat 38 unc. divifa intelligatur in partes æquales 720, earumque 719 alij perpendiculo tribuantur, hoc perpendiculo horologium agitatum præcedet alterum illud in 24 horis uno fcrupulo primo [4]).

Quia autem perpendiculum, compofitum ex pondere et virga aenea ifochronum ponitur perpendiculo fimplici partium 720, inveniendum primum eft virgæ

2) 38 pouces rhénans $= 38 \times \frac{31{,}39}{12}$ c.M. $= 99{,}40$ c.M.

3) A la p. 44 du Manuscrit B on trouve une colonne de chiffres indiquant les „divisiones virgæ penduli 38 pollicum secunda scrupula singulis vibrationibus facientis, in quarum divisionum punctis plumbum mobile statuere oportet, prout citius lentiusve horologium incedere cupiamus", à laquelle correspond une autre colonne de „temporis partes quibus anticipabit pendulum simpl. in 24 horis" (voir la p. 67 de notre T. IV). On y lit aussi: „plumbum mobile est $\frac{1}{3}$ ponderis virgæ aeneæ, hæc vero $\frac{1}{28}$ ponderis inferius appensi", ce qui fait bien voir que Huygens dans le calcul du texte considérait un cas réel. Comparez la lettre de Huygens à R. Moray du 30 déc. 1661 (T. III, p. 438), où il écrit: „J'ay trouuè depuis quelque temps le moien d'ajuster fort precisement a son heure mon horloge par un petit plomb mobile que j'applique a la verge de cuivre du pendule, le plomb d'en bas demeurant toujours ferme". Dans la lettre de Huygens à Moray du 17 février 1662 (T. IV, p. 59) il est question du même pendule et d'un petit poids mobile trois fois plus lourd (comparez sa lettre à Estienne du 7 sept. 1669, à la p. 490 du T. VI).

4) Comparez, à la p. 149 de l'édition originale de l'„Horologium oscillatorium" le texte de la Prop. XXIII („Horologiorum motum temperare, addito pondere exiguo secundario, quod super virga penduli, certa ratione divisa, sursum deorsumque moveri possit").

d'abord trouver la longueur de la barre à l'aide de l'équation ſuſmentionnée $\frac{\frac{3}{2}ex + 3nx}{e + 3n} = a$. Or, nous avons ici

$$\begin{aligned} 720 &= x \\ 28 &= n \\ 1 &= e, \end{aligned}$$

il en réſulte

$$a = 724\tfrac{4}{17}.$$ C'eſt la longueur cherchée.

Calculons maintenant la longueur c en nous ſervant de l'équation qu'on trouve plus haut

$$c = \tfrac{1}{2}x + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^2 + \frac{nax - a^2n + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}a^2e}{h}},$$

en poſant

$$\left\{\begin{aligned} x &= 719 \\ n &= 28 \\ e &= 1 \\ h &= \tfrac{1}{3} \\ a &= 724\tfrac{4}{17}, \end{aligned}\right.$$

c. à. d. cherchons la place du poids mobile h par la vertu duquel le pendule conſidéré, compoſé d'une barre d'airain et d'un poids de plomb à ſon extrémité inférieure, puiſſe avancer d'une minute en 24 heures.

L'équation

$$c = \tfrac{1}{2}x + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^2 + \frac{nax - na^2 + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}a^2e}{h}}$$

eſt maintenant équivalente à la ſuivante :

$$c = \tfrac{1}{2}x + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^2 + 3.28ax - 3.28a^2 + \tfrac{3}{2}ax - a^2}$$

ou $\left(\text{pour } a = 724\tfrac{1}{4}\right)$

$$c = \tfrac{1}{2}x + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^2 + 85\tfrac{1}{2}ax - 85a^2}$$

longitudo per æquationem ſuperius poſitam, $\frac{\frac{3}{2}ex + 3nx}{e + 3n} \infty a$. Eſt nempe hic

$$\begin{aligned} 720 &\infty x \\ 28 &\infty n \\ 1 &\infty e \end{aligned}$$

ſitque $a \infty 724\frac{4}{17}$. longitudo quæſita ∞a.

Jam ex æquatione ſuperiori

$$c \infty \tfrac{1}{2}x + \sqrt{\tfrac{1}{4}xx + \frac{nax - aan + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}aae}{h}}$$

inveniamus quantitatem c poſitis

$$\begin{aligned} x &\infty 719 \\ n &\infty 28 \\ e &\infty 1 \\ h &\infty \tfrac{1}{3} \\ a &\infty 724\tfrac{4}{17}, \end{aligned}$$

hoc eſt quæramus locum plumbi mobilis h cujus ope pendulum dictum, compoſitum ex virga aenea et plumbo in ima extremitate uno 1′ citius incedat ſpatio 24 horarum.

Idem autem nunc valet æquatio

$$c \infty \tfrac{1}{2}x + \sqrt{\tfrac{1}{4}xx + \frac{nax - naa + \frac{1}{2}aex - \frac{1}{3}aae}{h}}$$

atque hæc

$$c \infty \tfrac{1}{2}x + \sqrt{\tfrac{1}{4}xx + 3.28ax - 3.28aa + \tfrac{3}{2}ax - aa}$$

ſive $\left(a \infty 724\tfrac{1}{4}\right)$

$$c \infty \tfrac{1}{2}x + \sqrt{\tfrac{1}{4}xx + 85\tfrac{1}{2}ax - 85aa}$$

ou

$$c = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 85\frac{1}{2}a(a-x) + \frac{1}{2}a^2}.$$

On trouve $c = 617{,}20$, comme cela reſſort du calcul ſuivant [1]).

parties		pouces		parties		pouces
720	:	38	=	617,20	:	32,574 [2])

[1]) Nous supprimons ce calcul.
[2]) C. à. d. 720 parties : 38 pouces = 617,20 parties : 32,574 pouces. Le pendule simple qui était divisé en 720 parties, avait une longueur de 38 pouces. La distance du petit poids mobile h au point de suspension, pour laquelle on vient de trouver 617,20 parties, est donc de 32,574 pouces.

ſive

$$c \propto \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}xx - 85\frac{1}{2}a \text{ in } \overline{a-x} + \frac{1}{2}aa}$$

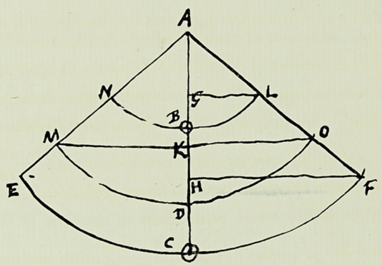
fit $c \propto 617{,}20$ ut in ſubjecto calculo videri eſt [1]).

partes		pollices				
720	———	38	———	617,20	———	32,574 pollices [2]).

V [1]).

[1664] [2]).

[Fig. 20.]



Dato pendulo compoſito ex duabus gravitatibus in lineam inflexibilem conjunctis, invenire in ea punctum quod in tranſitu penduli per cathetum, eadem celeritate feratur qua pondus penduli ſimplicis cujus longitudo æqualis diſtantiæ dicti puncti a puncto ſuſpenſionis. et oſtendere quod pendulum hoc ſimplex compoſito iſochronum eſt.

Sit compoſitum pendulum ABC [Fig. 20] ſuſpenſum in A, pondera habens B et C. idque cadere intelligatur ex AE in AC. Manifeſtum igitur eſt pondus B minorem celeritatem in B acquiſiviſſe quam ſi ſolum pendulo longitudinis AB annexum fuiſſet, quia pondus C ex longitudine AC agitatum, celeritatem brevioris penduli non aſſequitur, ideoque ex parte remoratur. At rurſus pondus C celeritatem majorem in C acquiſivit quam pondus penduli ſimplicis longitudinis AC, quia a pondere B celeriorem motum affectante aliquatenus impellitur, idque tanto magis quanto ipſum B reſpectu C majus erit. Itaque inter B et C punctum aliquod reperiri neceſſe eſt ut D quod perveniente pendulo ABC ex AE in AC, tantam celeritatem

[1]) Manuscrit B, p. 188—190.

acquiſiverit quantam haberet pondus ſimplicis penduli longitudinis AD peracto arcu ſimili MD. Quod itaque punctum D ut inveniatur, ſit AC ∞ d, AB ∞ e; quantitas ponderis C vocetur c; quantitas ponderis B vocetur b. ductisque FH, LG et MK perpendicularibus in AC, vocetur altitudo HC, h. Quæſita vero longitudo AD ſit x.

Quum igitur ſit AC ad CH ut AD ad DK, itemque ut AB ad BG, erit DK $\infty \frac{hx}{d}$, BG $\infty \frac{he}{d}$. Jam quia punctum D eam celeritatem acquirit quam haberet pondus penduli ſimplicis AD poſt deſcenſum per arcum MD, hoc eſt eam, qua id pondus ad eandem unde venerat altitudinem per arcum DO aſcenſurum eſſet, hoc eſt ad altitudinem DK $\infty \frac{hx}{d}$, cumque celeritas puncti D ad celeritatem ponderis C ſit ſicut AD ad AC hoc eſt ſicut x ad d. ſicut autem quadratum celeritatis puncti D ad quadr. celeritatis ponderis C, ita altitudo ad quam aſcenditur celeritate puncti D, hoc eſt altitudo DK $\infty \frac{hx}{d}$ ad altitudinem ad quam aſcenderet pondus C ſi poſt deſcenſum per arcum EC a pendulo compoſito liberum evaderet. Si igitur fiat ut xx ad dd ita $\frac{hx}{d}$ ad aliud, nempe $\frac{dh}{x}$, hoc deſignabit altitudinem ad quam aſcenderet pondus C. Eadem ratione altitudo ad quam aſcenderet pondus b invenitur $\infty \frac{e^2h}{dx}$. ductis autem utriſque altitudinibus hiſce in ſua pondera, ſumma productorum, quæ erit $\frac{chdd + heeb}{dx}$, æqualis ſit oportet ſummæ productorum ex altitudine HC in pondus C, et ex altitudine BG in pondus b, quæ eſt $hc + \frac{heb}{d}$, quia nimirum poſterior ſumma æquatur producto ex deſcenſu centri gravitatis communis ponderum C et B in ipſa pondera, prior vero producto ex aſcenſu centri gravitatis dictorum ponderum in eadem pondera, quæ producta æqualia inter ſe eſſe neceſſe eſt, cum aſcenſus centri communis gravitatis æqualis ſit deſcenſui ſuo. Itaque

$$\frac{chdd + bhee}{dx} \infty hc + \frac{heb}{d}.$$

[2]) La p. 171 est datée: 7 oct. 1664, et la p. 214 porte la date du 28 oct. 1664. Entre la p. 187 et la p. 188 quelques feuillets ont été collés dans le Manuscrit; le premier de ces feuillets (voir la p. 467) porte la date du 13 oct. 1664.

En 1928, les feuillets qui constituent le Manuscrit B ont été numérotés de nouveau. Cette numération nouvelle embrasse aussi les feuillets collés dans le Manuscrit. Nous continuerons cependant à citer le texte d'après la numération ancienne, sauf dans les cas où il s'agit d'un des feuillets collés dans le Manuscrit.

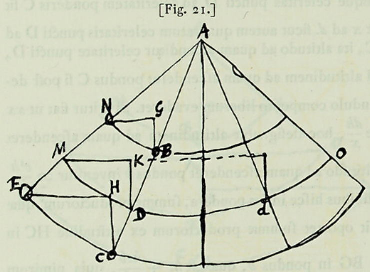
In qua æquatione deleto ubique h et reliquis ut opus eſt tranſpoſitis fit

$$AD\, x \infty \frac{cdd + bee}{cd + be}.$$

Oportet itaque ſingulas gravitates ducere in longitudines à quibus affixæ ſunt; et ut ſumma horum productorum ad producta ſingula, ita facere ſingulas longitudines, reſpective ad alias; hæ enim ſimul additæ conſtituent diſtantiam inter A et punctum D [1]).

Quod ſi vero quæratur in dicto pendulo compoſito punctum D quod deſcenſu penduli ex AE in AC, ita ut EC ſit pars tantum arcus deſcendentis, velocitatem eam acquirat quam pondus penduli ſimplicis longitudinis AD acquireret peracto arcu ſimili: notatis rurſus altitudinibus arcuum EC, MD, NB, quæ ſint CH, DK, BG, quæque eandem et hic inter ſe rationem ſervant quam longitudines CA, DA, BA: Eodem quo prius ratiocinio, literis eadem denotantibus, invenietur longitudo AD eadem quæ et ante reperta fuit, nempe $x \infty \frac{cdd+bee}{cd+be}$.

[Fig. 21.]



Quum igitur punctum D in pendulo ABC ita ut ſupra repertum, quolibet loco arcus per quem tranſit, ea velocitate feratur qua pondus penduli ſimplicis longitudine AD, perſpicuum est pendulum hujus longitudinis eodem tempore cum pendulo compoſito ABC ſemioſcillationem perficere per arcum ſimilem. Unde et per arcum aſcendentem eadem celeritate feretur. ut ex prop... [2]) manifeſtum. Adeoque pendulo compoſito iſochronon erit. Atque hoc de quibuslibet pendulis compoſitis

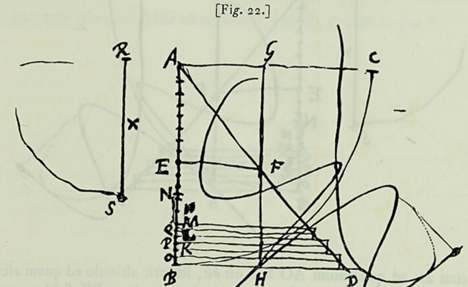
[1]) C. à. d. on a: AD $= \alpha + \beta$, où $cd + be : cd = d : \alpha$ et $cd + be : be = e : \beta$. Comparez la quatrième ligne de la p. 419.

[2]) Huygens n'avait apparemment pas encore mis par écrit la proposition qu'il jugeait à propos de citer.

eadem ratione verum eſt. unde et vice verſa conſtat, pendulum ſimplex quod compoſito iſochronon eſt, ſi æquali angulo cum pendulo compoſito removeatur a perpendiculari, atque inde cadere permittatur, ſemper plumbum penduli ſimplicis peractis ijsdem angulis cum compoſito, eam celeritatem habere quam punctum in compoſito quod longitudine penduli ſimplicis diſtat a ſuſpenſione.

Virgae ponderanti ſive lineae rectae gravitate praeditae, alteroque capite ſuſpenſae, pendulum ſimplex iſochronon reperire [3]).

[Fig. 22.]

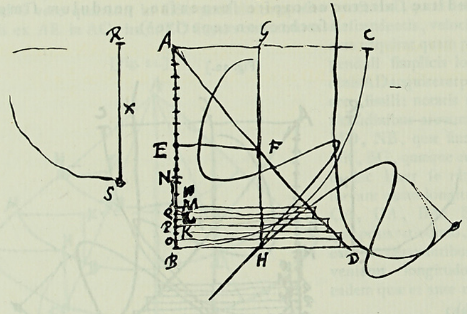


Sit virga ponderans AB [Fig. 22] ſuſpenſa in A, cui iſochronon quæratur pendulum ſimplex RS. Sit AB ∞ a. diviſaque intelligatur virgae longitudo in partes æquales BK, KL, LM &c. quarum ſingulæ vocentur e. ſintque centra gravitatis dictarum partium O, P, Q &c; itaque æqualiter quoque ſeſe excedent

[3]) Toute cette partie jusqu'à la fin de la Pièce IV a été biffée par Huygens, comme on peut le voir dans la Fig. 22. Nous la reproduisons néanmoins parce qu'elle conduit pour le cas considéré de la barre ou ligne pesante d'une façon très simple à l'équation qui donne la longueur x du pendule simple isochrone, savoir $\frac{1}{2}a^2x = \lim. \sum_0^a y^2 \Delta y$.

lineæ AO, AP, AQ &c. quæ dicantur, b, c, d, &c. Penduli vero ſimplicis quæſiti longitudo RS ſit x; quod cum iſochronon debeat eſſe virgæ AB, eodem igitur tempore peragent arcus ſimiles, quos quadranti integro æquales ponamus, ita ut virga AB cadat ex AC in AB, poſito angulo BAC recto. Eritque celeritas puncti O ubi virga venerit in AB ad celeritatem ponderis penduli S ſimiliter per quadrantem moti, ſicut longitudo OA, ſive b, ad x. ſimiliterque celeritas puncti P ad celeritatem ponderis penduli S ut AP, ſive c, ad x, atque ita porro. Sicut autem

[Fig. 22.]



quadratum xx ad quadratum AO hoc eſt bb, ita erit altitudo ad quam aſcendet pondus S ad altitudinem qua aſcendere poterit pars virgæ BK ſi libera atque a virga reliqua ſeparata fieri intelligatur poſtquam cum ipſa venit ex AC in AB.

Atqui pondus S aſcendit ad eandem unde venit altitudinem quae eſt SR ∞ x. Ergo quia ut xx ad bb ita x ad $\frac{bb}{x}$, erit $\frac{bb}{x}$ altitudo dicta ad quam pars virgæ BK uti diximus aſcenderet. Simili ratione altitudo ad quam aſcenderet pars KL invenitur ∞ $\frac{cc}{x}$, et altitudo ad quam aſcenderet pars LM eodem modo fit $\frac{dd}{x}$. et ſic de cæteris. ductis porro ſingulis hisce altitudinibus in partes virgæ æquales e, quarum centra gravitatis ſunt O, P, Q, fit ſumma productorum $\frac{bbe}{x} + \frac{cce}{x} + \frac{dde}{x}$ &c quæ quidem ſumma æqualis eſſe debet producto ex diſtantia centri gravitatis virgæ à puncto ſuſpenſionis quæ est $\frac{1}{2}a$ in ipſam virgam a, quia ita centrum gravitatis

partium omnium e, ſurſum motarum poſtquam a virga liberae ſunt, tantundem aſcendiſſe reperietur atque centrum gravitatis virgæ, hoc eſt partium earundem omnium, deſcendit, quod neceſſario fieri debere oſtenſum eſt ſupra prop...[1]). Eſt itaque

$$\frac{bbe + cce + dde \,\&\mathrm{c}}{x} \infty \frac{1}{2}aa,$$

ductisque omnibus in x, fit

$$bbe + cce + dde \,\&\mathrm{c} \infty \frac{1}{2}aax \text{ [2])}.$$

Sit jam BD æqualis AB cui inſiſtat ad angulos rectos, et ſit AN æqualis diſtantiæ centri gravitatis trianguli ABD ab recta AC, hoc eſt, ſit AN ∞ $\frac{2}{3}a$ [3]).

[1]) Même remarque que plus haut, note 2 de la p. 436.

[2]) Ce qu'on pourrait écrire (comparez la note 3 de la p. 437) $x = \frac{2}{a^2}\int_0^a y^2 dy$.

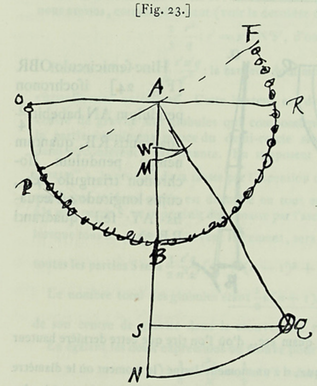
[3]) Huygens n'a pas achevé ce morceau. On peut trouver la limite de la somme considérée $bbe + \ldots$ (ou $\int_0^a y^2 dy$) en multipliant la surface du triangle ABD par le double de la distance de son centre de gravité à la droite AB, c. à. d. par AN, suivant le théorème de Pappus, mieux connu sous le nom de théorème de Gulden ou Guldin, dont Huygens fait mention en 1653 (voir la note 5 de la p. 280 du Tome XIV): il faut considérer le cône engendré par la révolution du triangle ABD autour de AB. On trouve ainsi $x = \frac{2}{3}a$.

VI [1]).

[1664] [2]).

[Première Partie] [3]).

[Fig. 23.]



BR ∞ q [Fig. 23 [4])]
RA ∞ r M centrum gravitatis $\frown$
AM ∞ $\frac{rr}{q}$
MW ∞ c
AN ∞ x [5])

AM	MW	AN	NS
$\frac{rr}{q}$	c	x	$\frac{cxq}{rr}$ [6])

---

[1]) La Pièce est empruntée aux pages 61—64 du Manuscrit B.

[2]) La p. 59 porte la date du 7 oct. 1662, les pp. 62 et 63 celle du 18 sept. 1664. Comme le sujet traité dans les pages précédentes n'a aucun rapport avec la recherche des centres d'oscillation, tandis que les pp. 61, 62, 63 et 64 y sont toutes consacrées, il est probable que la p. 61 fut écrite peu de temps avant les suivantes. Comparez d'ailleurs la lettre du 10 oct. 1664 de Huygens à Moray (T. V, p. 120) où il dit: „Ces jours passez je suis tombé dans une speculation... J'ay cerché des pendules simples isochrones a des triangles et autres figures et corps, diversement suspendus", etc.

[3]) Manuscrit B, p. 61.

[4]) Comme la figure l'indique, Huygens se propose de calculer la longueur du pendule isochrone avec une demi-circonférence de cercle, suspendue au centre de ce cercle; il suppose à cet effet la demi-circonférence composée d'une infinité de globules.

[5]) C'est la longueur du pendule isochrone.

[6]) C. à. d. NS $= \frac{cxq}{r^2}$ d'après l'équation $\frac{r^2}{q} : c = x :$ NS.

ut qu. celer.is ponderis N ad qu. celer.is ponderum in ⌒ alt. NS

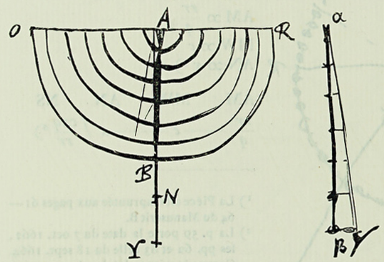
$$xx \text{ ——— } rr \text{ ——— } \frac{cxq}{rr}$$

altitudo ad quam aſcendent ſingula pondera ſemicircumferentiæ FBP [1])

$$\frac{cq}{x} \infty c \text{ }^{1})$$
$$q \infty x$$

Ergo longitudo penduli AN ſemicircumferentiæ OBR ex A centro ſuſpenſæ iſochroni, debet æqualis eſſe ipſi quadranti BR.

[Fig. 24.]



Hinc ſemicirculo OBR [Fig. 24] iſochronon pendulum AN habebit $\frac{3}{4}$ quadrantis RB, quantum nempe pendulum iſochronon triangulo $\alpha\beta\gamma$, cujus longitudo $\alpha\beta$ æqualis AY ſeu quadranti RB [2]).

[1]) L'équation $x^2 : r^2 = \frac{cxq}{r^2}$: altitudo ad quam etc., d'où l'on tire que cette dernière hauteur est $\frac{cq}{x}$, s'obtient par la considération que, si à un moment donné (le moment où le diamètre PF, Fig. 23, est horizontal) les globules sont mis en liberté et s'élèvent chacun à la plus grande hauteur possible, l'ascension est la même pour chacun d'eux puisqu'ils ont tous la même vitesse. Le centre de gravité s'élève donc autant que chaque globule. Mais dans le mouvement réel ce centre s'élève à la hauteur c. Les deux hauteurs doivent être égales d'après le principe fondamental mentionné à la p. 386 dans la note 4 de la p. 385.

[2]) Pour trouver la longueur du pendule isochrone avec un demi-cercle suspendu au centre de ce cercle et oscillant dans son plan, Huygens suppose, comme la figure l'indique, le demi-cercle divisé par une infinité de demi-circonférences concentriques et équidistantes. D'après le résultat obtenu plus haut les longueurs des pendules isochrones avec chaque partie S du plan comprise entre deux demi-circonférences avoisinantes sont connues. Comme dans le cas du triangle isoscèle, où il exprime clairement cette idée (voir la p. 453 qui suit), Huygens

admet que pour obtenir la longueur du pendule isochrone avec le demi-cercle, il suffit de prendre celle du pendule isochrone avec l'ensemble des „masses" oscillantes des pendules isochrones correspondant à toutes les parties S du plan, en donnant à chaque pendule le poids (ou la masse) de la partie correspondante du plan. Cette proposition est correcte dans le cas considéré quoiqu'en général on arriverait à un résultat erroné si l'on découpait à cet effet un plan (ou corps) oscillant en des parties quelconques. Comme Huygens n'indique pas son raisonnement dans le cas du demi-cercle, nous nous contenterons ici de faire voir comment on pourrait obtenir la longueur du pendule isochrone par la considération directe du mouvement des globules dont le demi-cercle se compose par hypothèse.

Le centre de gravité du demi-cercle est situé à une distance $\frac{2}{3}\frac{r^2}{q}$ du point A. Si nous appelons c' l'ascension de ce centre de gravité dans le mouvement réel, x' la longueur du pendule isochrone avec le demi-cercle et N'S' l'ascension de la masse oscillante du pendule isochrone, nous aurons, comme plus haut (voir la dernière équation de la p. 441),

$$\frac{2}{3}\frac{r^2}{q} : c' = x' : N'S', \text{ d'où } N'S' = \frac{3}{2}\frac{c'x'q}{r^2}.$$

Ensuite $x'^2 : r^2 = \frac{3}{2}\frac{c'x'q}{r^2}$: la hauteur dont monte chacun des globules libérés de la demi-circonférence extérieure. Cette hauteur est donc $\frac{3}{2}\frac{c'q}{x'}$. Elle est égale à l'ascension du centre de gravité des globules qui composaient la demi-circonférence ou, si l'on veut, la partie infiniment mince du demi-cercle située entre cette demi-circonférence et la demi-circonférence avoisinante. En supposant que cette partie contient n globules de „masse" 1, le produit de sa masse par l'ascension nommée sera $\frac{3}{2}n\frac{c'q}{x'}$. Si nous supposons en outre que le demi-cercle est découpé en tout en n parties S, il faudra accorder p globules à la $p^{\text{ième}}$ partie S, et le produit de sa masse par l'ascension du centre de gravité correspondant, lorsque tous les globules s'élèvent librement, sera $\frac{3}{2}n\frac{c'q}{x'}\left(\frac{p}{n}\right)^3$. La somme des produits pour toutes les parties S sera $\frac{3}{2}\frac{c'q}{n^2x'}[n^3 + (n-1)^3 + (n-2)^3 + \ldots 1]$.

Le nombre total des globules étant $\frac{1}{2}n(n+1)$, le produit de la masse totale par l'ascension de son centre de gravité dans le mouvement réel sera $\frac{1}{2}n(n+1)c'$.

En égalant les deux expressions on trouve pour $n \rightarrow \infty$

$$\frac{3}{8}n^2\frac{c'q}{x'} = \frac{1}{2}n^2c' \quad \text{donc} \quad x' = \frac{3}{4}q.$$

Mais ce raisonnement paraît trop algébrique pour pouvoir être considéré comme un raisonnement de Huygens. Comparez les notes 2 et 3 des p. 448 et 449. Voir aussi pour un raisonnement plus géométrique dans un cas analogue la Deuxième Partie de la Pièce XII qui suit (p. 489).

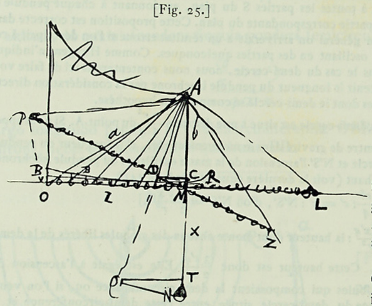
On peut démontrer (voir l'Avertissement qui précède) que la méthode de Huygens est bonne dans tous les cas où le point de suspension est le centre de similitude d'une infinité de courbes qui découpent la surface plane considérée en des parties infiniment minces de largeur constante. Cette démonstration mathématique ne suffit cependant pas pour faire voir pourquoi Huygens lui-même admet ici l'exactitude de ce procédé comme une chose évidente.

Le triangle $\alpha\beta\gamma$ [Fig. 24], qui représente l'ensemble des masses oscillantes des pendules isochrones avec les parties S du demi-cercle, est évidemment infiniment mince et peut donc

[DEUXIÈME PARTIE] [1]).

18 Sept. 1664.

[Fig. 25.]



AO ∞ a
AM ∞ b
AN ∞ x
MC ∞ c
OM ∞ z
TN ∞ $\frac{cx}{b}$

AM [Fig. 25] eſt virga ſine pondere, OML linea gravitate prædita virgæ AM affixa immobiliter ad angulos rectos.

Suſpenſio eſt in A. Quæritur pendulum AN iſochronon lineæ OL ex A ſuſpenſæ.

Pendulum AN receſſiſſe ponatur a perpendiculo in AQ. virgaque OL in PZ, ita ut medium ejus punctum D incidat in AQ rectam. Si ergo iſochrona ſunt, fiet revertente Q ad N ut ſimul P redeat in O. ſicut autem AN, x, ad AO, a, ita erit celeritas plumbi N reverſi ex Q ad celeritatem globuli O (nam virgam OL ex minimis globulis compoſitam fingo) reverſi ex P. Plumbum N autem celeritatem habet qua aſcendat ad eandem ex qua venit altitudinem hoc eſt ad altitudinem NT ∞ $\frac{cx}{b}$. Et ſicut quadratum celeritatis plumbi N ad quadratum celeritatis globuli O, ita eſt altitudo ad quam aſcendere poteſt plumbum N ad altitudinem ad quam aſcendere poterit globulus O. Ergo faciendo ut xx ad aa ita $\frac{cx}{b}$ ad $\frac{aac}{bx}$, erit hæc altitudo ad quam aſcendet globulus O. Eſt autem $aa \infty bb + zz$. unde

$$\frac{aac}{bx} \infty \frac{bbc + zzc}{bx} \text{ quæ ſit OB.}$$

être considéré comme un pendule linéaire. Huygens n'indique pas la méthode d'„intégration" suivie pour trouver le centre d'oscillation de ce pendule linéaire (voir sur les pendules linéaires les Pièces II et IV qui précèdent).

[1]) Manuscrit B, p. 62—64.

[2]) Voir la note 1 de la p. 282 de ce Tome.

[3]) Voir les p. 421—423.

Quod ſi MO ſeu z indeterminata ſumatur, ad inveniendam altitudinem ad quam aſcendent ſinguli globuli lineæ OM; eaque altitudo vocetur y, patebit ex æquatione inventa $\frac{bbc + zzc}{bx} \infty y$, terminos linearum y cadere in parabolam. ſit enim

$$zz \infty \frac{bxy - bbc}{c}$$

$$\text{et } z \infty \sqrt{\frac{bxy - bbc}{c}}.$$

Ergo latus rectum [2]) parabolæ eſt $\frac{bx}{c}$, axis MA, vertex vero R diſtat ab M intervallo $\frac{cb}{x}$ ∞ MR. parabola ergo eſt RB. Jam vero omnes altitudines BO vel y ductæ ſingulæ in globulos ſuos ſimul æquari debent producto omnium eorundem globulorum in altitudinem MC, ut intelligitur ex ſuperius demonſtratis ubi agebatur de pendulo virgæ iſochrono [3]). Itaque ſi globulorum quantitates exprimi putemus particulis æqualibus rectæ OL quibus centra globulorum inter ſe diſtant, debebit ſpatium comprehenſum rectis BO, OM, MR et parabola RB æquale eſſe rectangulo OM, MC. Illud vero ſpatium compoſitum eſt ex rectangulo OM, MR et ex trilineo BVR, ergo hæc quæruntur. MR erat $\frac{cb}{x}$. Ergo $\square$ OM, MR, $\frac{cbz}{x}$. OB erat $\frac{bbc+zzc}{bx}$ ſive $\frac{bc}{x} + \frac{zzc}{bx}$ unde ablata MR ſive OV ∞ $\frac{cb}{x}$, relinquitur VB ∞ $\frac{zzc}{bx}$, unde $\square$ BV, VR ∞ $\frac{cz^3}{bx}$; et triens ejus trilineum BVR ∞ $\frac{\frac{1}{3}cz^3}{bx}$ quo addito ad $\square$ OM, MR, fit

$$\frac{\frac{1}{3}cz^3}{bx} + \frac{cbz}{x} \infty cz \qquad \text{rectangulo nimirum OM, MC.}$$

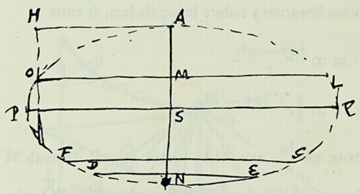
$$\frac{1}{3}cz^3 + cbbz \infty bcxz$$

$$\frac{1}{3}zz + bb \infty bx$$

$$\frac{\frac{1}{3}zz}{b} + b \infty x$$

18 Sept. 1664.

[Fig. 26.]



AN [Fig. 26] eſt linea ſine pondere rigida ſuſpenſa ex A. Volo in puncto M affigere ei ad rectos angulos virgam ponderantem OL, cujus oſcillationes iſochronæ ſint pendulo datæ longitudinis AN.

Sit AN ∞ a
AM ∞ x
MO ∞ y
MO vel AH

Ergo per præcedentem debet eſſe $\frac{1}{3}\frac{yy}{x} + x \infty a$

$$\frac{1}{3}yy + xx \infty ax$$

$$xx \infty ax - \frac{1}{3}yy$$

$$x \infty \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{1}{3}yy}$$

Patet ex hac æquatione punctum O eſſe ad Ellipſin cujus axis AN. centrum S punctum. quod AN bifariam dividit. Latus rectum vero axis AN triplum [1]). Sive axis major PQ triplus lateris recti minoris [2]) id eſt ſecundum quod poſſunt applicatæ ad axem eundem PQ [3]).

Hinc facile colligitur planum ellipſis hujusmodi APNQ ſuſpenſum ex A termino axis minoris, oſcillationes æquediuturnas habere ac pendulum cujus longitudo AN ipſe axis minor.

Sed et pars quælibet hujus ellipſis abſciſſa linea ad axem PQ parallela uti pars DNE vel AOL, pendulo AN iſochrona erit. Vel item duabus parallelis abſciſſa ut FGED vel OLGF [4]).

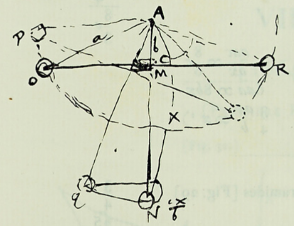
[1]) C. à. d. $3\text{AN} = \frac{\text{PQ}^2}{\text{AN}}$.

[2]) C. à. d. $\text{PQ} = 3\frac{\text{AN}^2}{\text{PQ}}$.

[3]) C. à. d. si l'on prenait PQ pour axe des y et la perpendiculaire en P à cet axe pour axe des x, l'équation de l'ellipse serait $x^2 = py - \frac{p}{\text{PQ}}y^2$, en désignant par p le „latus rectum minus" $\frac{\text{AN}^2}{\text{PQ}}$.

[Troisième Partie] [5]).

[Fig. 27.]



AC et OMR [Fig. 27] ſunt lineæ rigidæ [6]), O et R pondera æqualia, A punctum ſuſpenſionis. Quæritur perpendiculum ſimplex AN cujus oſcillationes iſochronæ ſint oſcillationibus ponderum O, R ex A ſuſpenſorum. ut AM ad AO ita ſit hæc ad AN. erit AN longitudo perpendiculi quæſita [7]).

b —— c —— x [8])

ut x —— a [9]) ita celer. N ponderis ad celer. ponderis O.

xx —— aa —— $\frac{cx}{b}$ / $\frac{aacx}{bxx} \infty c$, altitudo ad quam aſcendet O converſo motu ſurſum poſt deſcenſum PO [10]).

$$aa \infty bx$$

$$\frac{aa}{b} \infty x$$

[4]) Cette proposition fut annoncée par Huygens à Moray dans sa lettre du 10 oct. 1664 (voir la p. 120 du T. V).

[5]) Manuscrit B, p. 64 et p. 61.

[6]) AC et OMR sont impondérables.

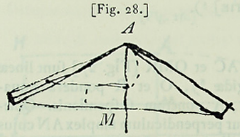
[7]) C'est le résultat du calcul suivant.

[8]) Lisez b —— c —— x / $\frac{cx}{b}$, c. à. d. $b : c = x : \frac{cx}{b}$. Comme la figure l'indique, b désigne la longueur AM, et x celle du pendule isochrone AN. c désigne la hauteur à laquelle s'élève le point M, centre de gravité des poids O et R, à partir du moment où la barre impondérable qui porte les deux poids est horizontale. $\frac{cx}{b}$ sera donc la hauteur qu'atteint le point pesant N.

[9]) C. à. d. $x : a$, où a désigne la distance OA.

[10]) $\frac{a^2c}{bx}$, quatrième terme de l'équation $x^2 : a^2 = \frac{cx}{b} : \frac{a^2c}{bx}$, est la hauteur à laquelle peut s'élever le poids O (ou le poids égal R), lorsque les deux poids O et R sont mis en liberté au moment où la droite OR est horizontale. Comme les deux poids ont la même vitesse, leur centre de gravité, lorsqu'ils exécutent ce mouvement libre, monte autant qu'eux-mêmes. D'après le principe fondamental (voir toujours à la p. 386 la note 4 de la p. 385) cette ascension du centre de gravité est égale à l'ascension du centre de gravité dans le mouvement réel, c. à. d. à c.

[Fig. 28.]



triangula [Fig. 28] [1])

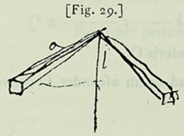
$$\frac{2}{3}c \qquad \frac{4}{\frac{8}{3}c}$$

$$\frac{aac}{bx} \infty \frac{8}{6}c$$

$$6aa \infty 8bx$$

$$\frac{3}{4}\frac{aa}{b} \infty x \;{}^{2})$$

[Fig. 29.]



pyramides [Fig. 29]

$$\frac{3}{4} \qquad \frac{5}{\frac{15}{4}}$$

$$\frac{15}{12}c \infty \frac{aac}{bx}$$

$$15bx \infty 12aa$$

$$x \infty \frac{4}{5}\frac{aa}{b} \;{}^{3})$$

---

[1]) Huygens cherche la longueur x du pendule simple isochrone avec un pendule composé de deux triangles infiniment aigus, symétriques par rapport à AM (les lettres A et M ont été ajoutées par nous).

[2]) Dans ce calcul la fraction $\frac{aac}{bx}$ a la même signification que dans le calcul précédent (voir la note 10 de la p. 447): c'est la hauteur à laquelle la base (ou un globule de la base) de chaque triangle peut s'élever si cet élément est mis en liberté au moment où la droite AM est verticale. Les lettres a et b désignent les mêmes longueurs que précédemment (comparez la Fig. 29). La hauteur à laquelle s'élève le point M dans le mouvement réel est désignée par c; le centre de gravité des deux triangles s'élève donc à la hauteur $\frac{2}{3}c$. Par un calcul analogue à celui de la note 2 de la p. 442 on obtient, lorsque l'unité de longueur est infiniment petite,

$$\frac{c}{bx}[a^3+(a-1)^3+\ldots+1]=\frac{2}{3}c[a+(a-1)+\ldots+1],$$

ce qui se réduit à $\frac{aac}{bx}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{3}c\cdot\frac{1}{2}$, ou à $\frac{aac}{bx}=\frac{8}{6}c$, conformément à l'équation de Huygens (qui intègre géométriquement, comparez à la p. 443 le sixième alinéa de la note 2).

Plus tard Huygens calcule la valeur de x d'après la méthode générale pour les surfaces planes, mentionnée dans la note 2 de la p. 455 (voir la p. 533 qui suit).

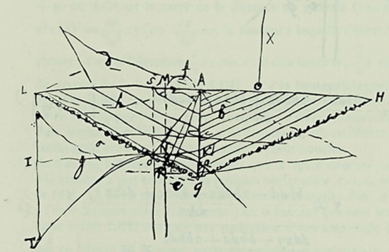
On pourrait obtenir immédiatement la valeur de x en appliquant au résultat du calcul précédent la „méthode des trois quarts" (voir la note 6 de la p. 453).

VII [4]).

[1664] [5]).

[Première Partie] [6]).

[Fig. 30.]



AL ∞ d
AG ∞ b
LG ∞ a

Virga LH [Fig. 30] ſine pondere. LG, GH virgæ ponderantes. A medium LH eſt punctum ſuſpenſionis. Quæritur pendulum ſimplex x iſochronon LGH virgæ ex A ſuſpenſæ.

LS SO

$$d \;\text{———}\; b \;\text{———}\; d-z \;/\; \frac{bd-bz}{d} \;{}^{7})$$

---

[3]) Les lettres a, b, c et x désignent les mêmes grandeurs que dans le cas précédent. Le centre de gravité des deux pyramides infiniment aigues s'élève à la hauteur $\frac{3}{4}c$. Au lieu de la formule de la note 2 on trouve ici $\frac{c}{bx}[a^4+(a-1)^4+\ldots+1]=\frac{3}{4}c[a^2+(a-1)^2+\ldots+1]$, ou $\frac{aac}{bx}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{4}c\cdot\frac{1}{3}$, ou $\frac{15}{12}c=\frac{aac}{bx}$, conformément à la formule de Huygens.

On pourrait obtenir immédiatement la valeur de x en appliquant au résultat du calcul correspondant à la Fig. 27 une „méthode des quatre cinquièmes" analogue à la „méthode des trois quarts" (voir la note 6 de la p. 453 et les p. 367—368 de l'Avertissement).

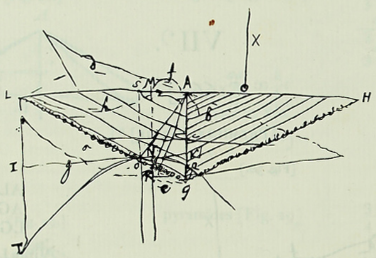
[4]) Manuscrit B, p. 164 et p. 163.

[5]) Comme le texte le fait voir, une partie de cette Pièce fut écrite le 29 sept. 1664.

[6]) Manuscrit B, p. 164.

[7]) C. à. d. LA : AG = LS : SO. Comme la figure l'indique, SA est désignée par z.

[Fig. 30.]



$$xx \text{ —,— } \frac{bbdd - 2bbdz + bbzz + zzdd}{dd} \text{ —,— } \frac{cx}{\frac{1}{2}b}\left[\text{ —,— } y\right]$$ [1]

sit $\frac{1}{2}b \infty c$ [2] $\qquad$ —,— x [2]

$$y \infty \frac{bbdd - 2bbdz + bbzz + ddzz}{ddx}$$ [3]

$$\frac{ddxy - bbdd + 2bbdz}{bb + dd} \infty zz$$

$bb + dd \infty aa$ $\qquad$ $\frac{bbd}{aa}$ ♀ [4] $\sqrt{\frac{b^4dd}{a^4} - \frac{bbdd}{aa} + \frac{ddxy}{aa}} \infty z$

AR [5] perpend. LG $\qquad$ $\frac{ed}{a}$ ♀ $\sqrt{\frac{eedd}{aa} - \frac{edd}{a} + \frac{ddxy}{aa}} \infty z$

sit $\frac{bb}{a} \infty e$ RG

RM perpend. LA $\qquad$ f ♀ $\sqrt{ff - fd + \frac{ddxy}{aa}} \infty z$

$\frac{ed}{a} \infty f$ MA $\qquad$ f ♀ $\sqrt{ff - fd + \frac{gxy}{a}} \infty z$

$\frac{dd}{a} \infty g$ LR $\qquad$ f ♀ $\sqrt{-hf + \frac{hxy}{d}} \infty z$

$\frac{gx}{a} \infty \frac{d - fx}{d}$ $\qquad$ $\frac{hx}{d} \infty$ lat. rect. parabolæ TNQ [6]

sit $d - f \infty h \infty$ LM

N vertex $\qquad$ qu. IN $\frac{hh}{\frac{hx}{d}} \infty \frac{dh}{x}$ IT $\qquad$ $\frac{df}{x}$ MN

diameter MN

$\frac{1}{3}h \quad \frac{1}{3}$ IN $\qquad$ d LA

TIN◸ $\infty \frac{1}{3}\frac{hhd}{x}$ $\qquad$ $\frac{ddf}{x}$ ▭ AI

---

[1]) Comme x désigne la longueur du pendule isochrone et que le deuxième terme $\left(\frac{bd - bz}{d}\right)^2 + z^2$ ou AO^2 est le carré de la distance du globule O au point de suspension, l'équation $x^2 : AO^2 = \frac{cx}{{}^1/_2 b} : y$ (où $\frac{cx}{{}^1/_2 b}$ est la hauteur à laquelle s'élève le point pesant du pendule isochrone, d'après l'équation $\frac{1}{2}b : c = x$: la dite hauteur, $\frac{1}{2}b$ étant la distance de A au centre de gravité de la ligne brisée LGH, et c la hauteur à laquelle ce centre de gravité s'élève) exprime que les carrés des vitesses du point pesant du pendule isochrone et du globule O sont entre eux comme les hauteurs auxquelles s'élèvent respectivement le point pesant du pendule isochrone et le globule O, si ce dernier est mis en liberté au moment où la ligne LH est horizontale et s'élève à la plus grande hauteur possible.

[2]) En d'autres termes: nous supposons que la figure exécute une oscillation telle que la ligne AG atteint de part et d'autre la position horizontale, c. à. d. une oscillation d'une amplitude de 180°. Le point pesant du pendule isochrone atteint donc la hauteur x.

[3]) y (voir les deux notes précédentes) est la hauteur que peut atteindre le globule O lorsque la ligne brisée LGH exécute une oscillation d'une amplitude de 180° et que le globule O est mis en liberté au moment où la ligne LH est horizontale. On a $y = \frac{AO^2}{x}$: c'est ce que l'équation de Huygens exprime. Cette équation (dans laquelle b, d et x ont une valeur constante) donne une relation entre les variables y et z (SA). Dans les équations qui suivent Huygens calcule la variable z en prenant y comme variable indépendante.

[4]) Comparez la note 1 de la p. 426: le signe ♀ équivaut à notre signe $\pm$.

[5]) R est le pied de la perpendiculaire abaissée du point A sur la droite LG.

[6]) L'équation en y, z est celle d'une parabole en coördonnées rectangulaires: les hauteurs y (voir la note 3) sont représentées dans la figure par des lignes parallèles à AG. L'origine des coördonnées est au point A, l'axe des y a la direction AG et l'axe des z la direction AL. Pour $z = 0$, on a y ou $AQ = \frac{b^2}{x}$. Pour $z = d$, on a y ou $LT = \frac{d^2}{x}$. Le sommet de la parabole se trouve sur l'axe de symétrie MN au point N ($y = \frac{b^2h^2 + f^2d^2}{d^2x}$ ou $\frac{fd}{x}$, $z = f$), le paramètre de la parabole est $\frac{1}{2}\frac{hx}{d}$. Comparez la note 1 de la p. 282.

Pour calculer la somme de tous les y correspondant aux globules (égaux entre eux) de la ligne pesante LG (il suffit évidemment de considérer la moitié de la ligne oscillante LGH, multipliée par le poids (ou la masse) d'un globule), il faut calculer la surface LAQNT, si l'on consent à représenter le poids (ou la masse) d'un globule par la projection de la distance des centres de deux globules avoisinants sur AL.

$$\frac{\frac{ff}{hx}}{d} \infty \frac{dff}{hx}\mathrm{KQ} \qquad \left[\frac{1}{3}\frac{df^3}{hx}\right] + \frac{\frac{1}{3}dhh}{x} + \frac{ddf}{x} \infty \frac{1}{2}bd \text{ }^{1)} \text{ —— } d \text{ —— } a \text{ }^{2)}$$

$$\frac{\frac{1}{3}f \ \frac{1}{3}\mathrm{NK}}{\urcorner \mathrm{NKQ}\ \frac{1}{3}\frac{df^3}{hx}} \qquad \frac{2}{3}\frac{df^3}{hdb} + \frac{2}{3}\frac{dhh}{db} + \frac{2ddf}{db} \infty x$$

$$\frac{2}{3}\frac{f^3}{hb} + \frac{2}{3}\frac{hh}{b} + \frac{2df}{b} \infty x$$

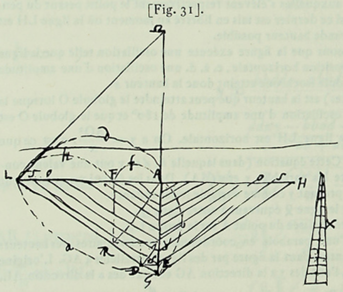
Ex dictis pag. præcedenti[3]) constat esse $\frac{2}{3}\frac{aa}{b} \infty \left[\frac{2}{3}\frac{f^3}{hb} + \frac{2}{3}\frac{hh}{b} + \frac{2df}{b} \infty x\right]$. vide pag. præced.

[DEUXIÈME PARTIE] [4]).

29 Sept. 1664.

Prius scripta quæ pag. sequenti habentur.

[Fig. 31].



Invenire pendulum simplex isochronas oscillationes habens triangulo isosceli suspenso ex puncto quod basin bifariam dividit.

Sit AL ∞ d [Fig. 31]. AG ∞ b. LG ∞ a.

Cum pendulum x isochronon virgis LG, GH inventum sit

$$\frac{2}{3}\frac{f^3}{hb} + \frac{2}{3}\frac{hh}{b} + \frac{2df}{b}$$

Cogitemus virgis LGH parallelas virgas SSS, OOO &c. æqualibus intervallis distantes, atque ita compo-

[1]) Cette équation exprime que le produit du poids (ou de la masse) d'un globule par la somme de toutes les hauteurs atteintes par les différents globules qui composent la ligne LG, lorsque ces globules sont mis en liberté au moment où la droite LH est horizontale, est égal au produit de la masse totale de la ligne LG par la hauteur à laquelle s'élève le centre de gravité de la ligne brisée LGH dans le mouvement réel. En effet, cette dernière hauteur est $\frac{1}{2}b$ et la masse de la ligne LG est représentée par la ligne LA ou d, conformément à ce qui a été observé dans le deuxième alinéa de la note précédente.

nentes totum triangulum LGH. Quibus singulis si inveniantur pendula isochrona, certum est ex æqualibus differentijs decrescere debere [5]). Quare si longitudo penduli x in totidem æquales partes dividatur atque ad singulas divisiones affigi intelligantur pondera ab imo æqualiter decrescentia quemadmodum et virgæ LGH, SSS, OOO &c. quæ triangulum LGH componunt. pendulum ita oneratum necessario isochronon erit dicto triangulo [6]). Tale autem pendulum isochronon esse scimus triangulo eandem cum ipso longitudinem habenti, atque ex vertice suspenso, hoc est pendulo simplici quod habeat $\frac{3}{4}$ ejus longitudinis. Ergo Δ^{lo} LGH isochronon erit pendulum habens $\frac{3}{4}$ inventæ quantitatis $\frac{2}{3}\frac{f^3}{hb} + \frac{2}{3}\frac{hh}{b} + \frac{2df}{b}$, hoc est $\frac{1}{2}\frac{f^3}{hb} + \frac{1}{2}\frac{hh}{b} + \frac{3}{2}\frac{df}{b}$. Has quantitates aliter exprimemus. Est enim h ad f ut LR ad RG, hoc est, ut qu.LA ad qu.AG. Ergo $\frac{f}{h} \infty \frac{bb}{dd}$. Ergo $\frac{1}{2}\frac{f^3}{hb} \infty \frac{1}{2}\frac{ffbb}{ddb} \infty \frac{1}{2}\frac{ffb}{dd}$. Sed d ad f ut LG ad GR, hoc est ut qu.LG ad qu. GA, hoc est ut aa ad bb, ergo $\frac{\frac{1}{2}ffb}{dd} \infty \frac{\frac{1}{2}b^5}{a^4}$. Ergo quantitas prima $\frac{\frac{1}{2}f^3}{hb} \infty \frac{\frac{1}{2}b^5}{a^4}$. Porro $hh \infty dd - 2df + ff$. Ergo $\frac{1}{2}\frac{hh}{b} \infty \frac{\frac{1}{2}dd - df + \frac{1}{2}ff}{b}$. huic adde tertiam quantitatem $\frac{\frac{3}{2}df}{b}$; fit $\frac{\frac{1}{2}dd + \frac{1}{2}df + \frac{1}{2}ff}{b}$.

Ergo tres propositæ quantitates æquantur $\frac{1}{2}\frac{b^5}{a^4} + \frac{\frac{1}{2}dd + \frac{1}{2}df + \frac{1}{2}ff}{b}$, quas dico æquari simul $\frac{1}{2}\frac{aa}{b}$. adeoque inventâ duabus AG, GL tertia proportionali GΩ, hujus semissem esse longitudinem penduli isochroni triangulo LGH ex A suspenso

[2]) Ces deux lettres indiquent qu'il ne faut pas représenter la masse totale de la ligne LG par a, mais par d (comparez la fin de la note 6 de la p. 451).

[3]) Voir le début de la Deuxième Partie de cette Pièce, ainsi que la huitième et neuvième ligne et les dernières lignes de la p. 453.

[4]) Manuscrit B, p. 163.

[5]) Chaque terme de l'expression $\frac{2}{3}\frac{f^3}{hb} + \frac{2}{3}\frac{hh}{b} + \frac{2df}{b}$ représente une longueur proportionnelle à AG ou b. Par conséquent la longueur du pendule isochrone est proportionnelle à AG, et, si l'on considère successivement les pendules isochrones correspondant aux lignes équidistantes LGH, SSS, OOO, etc. (ou plutôt aux éléments de surface infiniment minces compris entre LGH et SSS, SSS et OOO, etc.) ces longueurs formeront une progression arithmétique.

[6]) Comparez la note 2 de la p. 442, où nous avons déjà remarqué que l'explication donnée

et in plano ſuo agitato. ducantur enim RV perpend. AG. VD perpend. LG. DE perpend. AG. Fit ergo GE $\infty \frac{b^5}{a^4}$. EV $\infty \frac{ff}{b}$. VA $\infty \frac{df}{b}$. AΩ $\infty \frac{dd}{b}$. Iſtæ vero quatuor conſtituunt rectam GΩ. Ergo

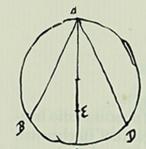
$$\frac{1}{2}\frac{b^5}{a^4} + \frac{\frac{1}{2}dd + \frac{1}{2}df + \frac{1}{2}ff}{b} \infty \frac{1}{2}\text{G}\Omega$$

par Huygens ne suffit pas, à notre avis, pour faire voir pourquoi il considère cette proposition comme évidente. Les paroles du texte (voir la phrase suivante) montrent qu'il admet (ce qui est exact) que le pendule isochrone avec une surface plane oscillant dans son plan a une longueur égale aux trois quarts de celle du pendule isochrone avec la ligne pesante homogène qui termine cette surface (le point de suspension étant le même), chaque fois que la surface peut être découpée par des lignes semblables en une infinité de bandes ayant toutes la même largeur constante et que les longueurs des pendules isochrones des bandes successives forment une progression arithmétique (voir la note précédente). Comparez les p. 362—368 de l'Avertissement qui précède.

VIII [1])

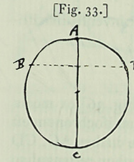
[1664] [1])

[Fig. 32.]



Circulus vel quodlibet ejus ſegmentum ut ABD [Fig. 32], latera AB, AD æqualia habens, ex A ſuſpenſum, et in plano ſuo agitatum iſochronum eſt pendulo AE, $\frac{3}{4}$ diametri AC habenti [2]).

[Fig. 33.]



Circumferentia circuli vel quævis ejus pars BAD [Fig. 33], arcus AB, AD æquales habens, ex A ſuſpenſa, et in plano ſuo agitata iſochrona eſt pendulo AC, diametri longitudinem habenti [3]).

[1]) Manuscrit, B, p. 63. Cette page porte la date du 18 sept. 1664 (voir, à la p. 444, la Deuxième Partie de la Pièce VI qui précède). Cependant les propositions qui suivent y ont été, probablement toutes, inscrites après le 29 sept. Comparez la note 3 de la p. 457.

[2]) Cette proposition, ainsi que les suivantes, fut annoncée par Huygens à Moray dans sa lettre du 10 oct. 1664 (voir la p. 120 du T. V). On peut supposer la surface ABCD composée de triangles infiniment aigus tels que ceux de la Fig. 28 à la p. 448. La proposition est alors une conséquence du résultat obtenu à cette page. Dans le cours du mois d'octobre (avant le 28 oct. mais après le 13 oct., voir à ce sujet la note 2 de la p. 456) Huygens trouva une méthode générale valable pour les surfaces planes (voir la p. 515 qui suit) et pour les corps solides (voir, à la p. 127 du T. V, le sommaire de sa lettre du 28 oct. à de Sluse). On trouve, aux p. 533—535 qui suivent, la démonstration qu'il donna alors de la proposition énoncée ici.

[3]) On peut supposer la circonférence de cercle composée de globules. La proposition est alors une conséquence du résultat obtenu à la p. 64 du Manuscrit B (voir, à la p. 447, la Troisième Partie de la Pièce VI). On peut remarquer qu'elle reste vraie de quelque manière que la densité linéaire varie le long de la circonférence, pourvu que AC soit un axe de symétrie.