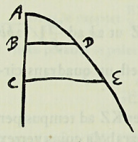
[Deuxième Partie] [1]).

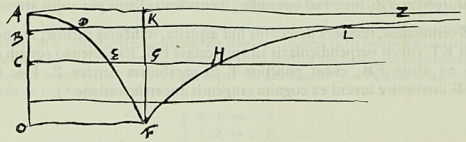
[Fig. 7.]



Sine quibus motus æquabilis in cava cycloide inveniri non poterat.

velocitates gravis cadentis ex A per AC [Fig. 7], esse in punctis singulis B, C, sicut applicatæ in parabola BD, CE [2]).

[Fig. 8.]



Tempora quibus grave ex A cadens [Fig. 8] particulas æquales conficit, puta in B et C, esse inter se sicut applicatæ BL, CH in curva FHL, ejus naturæ ut semper sint continue proportionales BD, BK, linea certa, et BL [3]).

Dictæ curvæ spatium infinitum OFHLZA esse duplum rectanguli AF [4]).

---

[1]) Chartæ Mechanicæ" p. 73 recto.

[2]) Cette Proposition est facile à démontrer: d'autre part dans la parabole les ordonnées sont proportionnelles aux carrés des abscisses, d'autre part les distances parcourues par un mobile tombant à partir du repos sont proportionnelles aux carrés des temps, donc aussi aux carrés des vitesses.

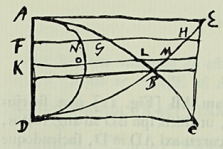
[3]) Comme BK est une constante, tout aussi bien que la „linea certa", la Proposition dit que BL est inversement proportionnelle à BD. Cette Proposition est une conséquence de la précédente. En effet, puisque les temps considérés sont inversement proportionnels aux vitesses, ils le sont aussi aux ordonnées correspondantes de la parabole. C. à. d. on a BL . BD = CH . CE, etc.

[4]) En effet, on a

$$\frac{2}{1} = \frac{\text{temps de la chute suivant AO d'un mobile partant du repos}}{\text{temps de parcours de AO avec la vitesse constante } \frac{1}{2} \text{ [vitesse finale de la chute suivant AO]}} =$$

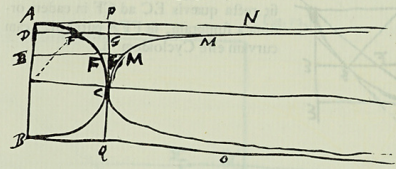
$$\frac{\text{omnes BL}}{\text{omnes OF}} = \frac{\text{surf. OFHLZA}}{\text{surf. } \square \text{AF}}.$$

[Fig. 9.]



Si sint duæ semi-parabolæ [Fig. 9] quæcunque ad eundem axem sed contrario situ, ut ABC, DBE, et ducantur applicatæ communes FGH, KLM, eandem esse rationem rectanguli HFG ad MKL quæ est partium dictarum applicatarum, semicirculo super AD interceptarum, nempe quæ NF ad OK [5]).

[Fig. 10.]



Si semicirculum ACB [Fig. 10] tangat in vertice recta PCQ, ductisque ordinatis DFG, fiat sicut DF ad DG ita hæc ad DM Esse spatium inter curvam CMM et asymptotos ejus NA, OB, rectamque AB interjectum ad rectangulum AQ, ut semiperipheria ACB ad rectam AB [6]).

Si PQ distet a vertice C; tamen spatium curvæ quæ tunc orietur datum esse, posita scilicet quadratura circuli [7]).

---

[5]) On a en effet $\frac{FG \,.\, FH}{KL \,.\, KM} = \frac{\sqrt{AF \,.\, DF}}{\sqrt{AK \,.\, DK}} = \frac{FN}{KO}$.

[6]) Nous émettons l'hypothèse suivante sur la méthode de démonstration de ce théorème par Huygens. Comparons les temps dans lesquels un mobile parcourt d'une part la demi-circonférence, d'autre part le diamètre AB, avec la même vitesse constante; ces temps seront entre eux comme p (la demi-circonférence): q (le diamètre). Or, on trouve une autre expression du même rapport en comparant un élément F de l'arc AB avec sa projection D sur le diamètre AB et en remarquant que

$$\frac{\text{le temps de parcours de F}}{\text{le temps de parcours de D}} = \frac{VF}{DF} = \frac{CV}{DF} = \frac{DM}{VC},$$

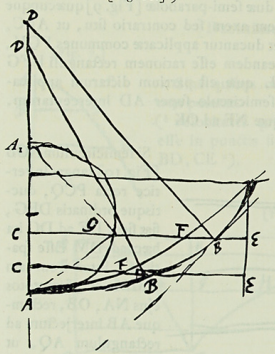
V étant le centre de la circonférence de cercle.

On en conclut, comme dans la note 8 de la p. 393, que

$$\frac{p}{q} = \frac{\text{le temps de parcours de la demi-circonférence AB}}{\text{le temps de parcours du diamètre AB}} = \frac{\text{omnes DM}}{\text{omnes VC}} = \frac{\text{surf. ANMCOQBA}}{\text{surf. } \square \text{AQ}}.$$

[7]) Ce cas se présente dans la Fig. 6. Le „spatium infinitum" AR . . NT . . HZA est un „spatium datum"; c. à. d. une surface de grandeur calculable.

[Fig. 11.][1])



Curvam AB [Fig. 11] quæ ſit ejus naturæ, ut ductâ ipſi BD ad ang. rectos, quæ occurrat axi AD in D, faciendoque ut BD ad applicatam ordinatim BC, ita ſit recta quævis EC ad CF in eadem ordinata ſumptam, ſit FFA parabola; eam curvam eſſe Cycloidem [2]).

[1]) Nous avons ajouté à la Fig. 11 les lettres A_1 et G.

[2]) Considérons cette Proposition conjointement avec la remarque qui clôt la Première Partie de cette Pièce (voir la p. 397); tandis que l'auteur disait à cet endroit que la cycloïde possède la propriété en question, il avance ici qu'une courbe possédant cette propriété est nécessairement une cycloïde. Il peut avoir démontré la vérité du premier théorème de la façon suivante. AA_1 étant le cercle générateur de l'arc de cycloïde ABB [Fig. 11], et B un point quelconque de cet arc correspondant à la normale BD, on a suivant la propriété bien connue des tangentes à la cycloïde (voir à la p. 374 et suiv. du T. XIV la démonstration de Huygens): BD est parallèle à GA_1, lorsque BG est horizontale (parallèle à la tangente au point A_1 à la circonférence AA_1) et que G se trouve sur la circonférence AA_1. Par conséquent $\frac{BD}{BC}=\frac{A_1G}{CG}=\frac{AG}{AC}$. Or, si l'on prend F de telle manière que $\frac{BD}{BC}=\frac{CE}{CF}$, où CE est une longueur constante arbitraire, il s'ensuit que $\frac{AG}{AC}=\frac{CE}{CF}$ ou bien $CF^2=\frac{AC^2.CE^2}{AG^2}=\frac{AC^2.CE^2}{AA_1.AC}=\frac{CE^2}{AA_1}AC$, d'où l'on conclut que le lieu des points F est une parabole.

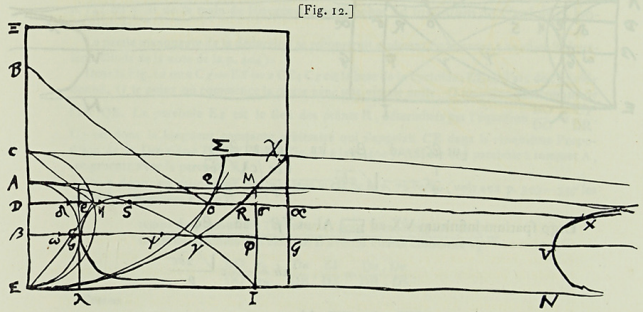
Quant au second théorème, Huygens peut l'avoir établi comme suit, en commençant par admettre que la courbe considérée possède le sommet A et l'axe de symétrie AD.

Le „latus rectum" de la parabole qui doit provenir de la construction étant p, prenons une longueur AA_1 telle que $CE^2=p.AA_1$; puisse le cercle à diamètre AA_1 engendrer une cycloïde en roulant sur une perpendiculaire en A_1 à l'axe AD. La tangente au point d'intersection de cette cycloïde avec le prolongement de CG est parallèle à AG. Mais la tangente en B

[Troisième Partie.] [3])

Sed ſpatium infinitum $\zeta\eta$ eſt ad ▭ $A\lambda$ ut ſemicircumferentia $A\zeta E$ ad AE, hoc eſt (ſi fiat ut ⌒ $A\zeta E$ ad AE ita $\beta\zeta$ ad $\beta\omega$) ut $\beta\zeta$ ad $\beta\omega$. Ergo ex æquo erit ſpatium infinitum VX ad ▭ $A\lambda$ ut $V\beta$ ad $\beta\omega$ hoc eſt ut $2b$ ad $\frac{1}{2}\frac{cc}{p}$. nam $V\beta$ eſt ∞ $2b$ et $\beta\omega$ ∞ $\frac{1}{2}\frac{cc}{p}$. ſit ut ▭ $A\lambda$ ad ▭ AI, hoc eſt ut $\beta\zeta$ ad $\beta\varphi$ ita $\beta\omega$ ad $\beta\psi$

[Fig. 12.]

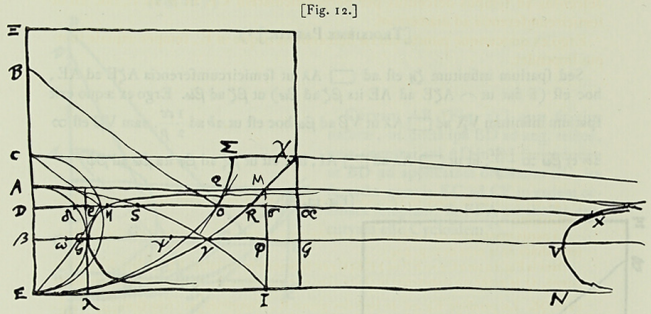


à la courbe primitive (lieu des points B) est également parallèle à AG: en effet, on a $\frac{CF^2}{CE^2}=\frac{AC}{AA_1}$, donc $\frac{AC}{AA_1}=\frac{BC^2}{BD^2}$ ou $\frac{AG}{AA_1}=\frac{BC}{BD}$ ou bien $\frac{CG}{A_1G}=\frac{BC}{BD}$, d'où l'on conclut que A_1G est parallèle à DB, partant AG parallèle à la tangente en B.

Du point A partent donc deux courbes possédant des tangentes parallèles entre elles en leurs points d'intersection avec une ordonnée quelconque perpendiculaire à AD. Huygens peut avoir reconnu intuitivement que ces courbes doivent être identiques, et il aurait pu donner, s'il l'eût fallu, une démonstration exacte de cette identité d'après une méthode analogue à celle par laquelle il prouve dans la Prop. III de la Pars III de l'„Horologium oscillatorium" une proposition du même genre pour deux courbes possédant des normales communes.

[3]) La Troisième Partie est empruntée à la p. 74 recto des „Chartæ Mechanicæ". Elle contient

[Fig. 12.]



[ut $\beta\zeta$ ad $\beta\varphi$ ita $\beta\omega$ ad $\beta\psi$]

$$\frac{1}{2}c \text{ ——— } \sqrt{2bc} \text{ ——— } \frac{1}{2}\frac{cc}{p} \Big/ \frac{c\sqrt{2bc}}{p}$$

Ergo ſpatium infinitum VX ad ▭ AI ut Vβ ad $\beta\psi$

$$2b \text{ ——— } c\frac{\sqrt{2bc}}{p}$$

unde ſpatium infinitum VX ad 2 ▭ AI
hoc eſt tempus per QOE ad tempus per AE ut b ——— $\frac{c}{p}\sqrt{2bc}$.

Sed tempus per AE eſt ad tempus per CE, hoc eſt, per dimidiam EΞ ut AM ad Cχ, hoc eſt, ut $\sqrt{2bc}$ ad b, hoc eſt ut $\frac{c}{p}\sqrt{2bc}$ ad $\frac{bc}{p}$.

Ergo ex æquo erit tempus per QOE ad tempus per CE ut b ad $\frac{bc}{p}$ hoc eſt ut p ad c.

Ergo ex quocunque puncto Q mobile deſcendat per curvam ΣQE erit tempus

un fragment d'un raisonnement analogue à celui de la p. 72 recto (voir la Première Partie de cette Pièce) mais formulé plus correctement. C'est le début qui fait défaut; celui-ci se trouvait sans doute sur une feuille brûlée, dont le dernier reste à bords carbonisés est attaché à la

deſcenſus ad tempus deſcenſus per perpendicularem CE ut p ad c, hoc eſt ut ſemicircumferentia ad diametrum.

Ergo ex quocunque puncto curvæ deſcenderit usque in E, ſemper æquale tempus impendet.

p. 74; on y lit de la main de Huygens: „pertinebat ad inventum de Cycloides Isochronismo".

La partie manquante de la déduction se reconstruit aisément (comparez à ce sujet le deuxième alinéa de la note de la p. 404):

Dans la Fig. 12 on a $C\chi = E\Xi = 2\,CE$; $C\chi$ est la base de la cycloïde; $E\Sigma$ est l'arc de cycloïde donné, Q le point où commence la chute avec une vitesse nulle, O un point quelconque de l'arc QE. La parabole $E\chi$ est le lieu des points R, déterminés par l'équation $\frac{BO}{DO} = \frac{C\chi}{DR}$. $C\chi$ est donc la longueur constante arbitraire qui s'appelait CE dans la cinquième Proposition de la Deuxième Partie (voir la Fig. 11 à la p. 400). ASI est une parabole à sommet A, congruente avec la parabole $E\chi$.

On a donc, en raisonnant comme dans le cas de la p. 72 recto (voir aux p. 393—397 les notes de la Première Partie):

$$\frac{\text{temps de parcours de l'élément O pour le mobile parti de Q}}{\text{temps de parcours de l'élément D avec la vitesse constante } v_E} =$$

$$\frac{BO}{DO} \cdot \frac{v_E}{v_D} = \frac{D\alpha}{DR} \cdot \frac{EI}{DS} = \frac{D\alpha \,.\, D\sigma}{DR \,.\, DS}.$$

Posons

$$\frac{D\alpha \,.\, D\sigma}{DR \,.\, DS} = \frac{DX}{D\sigma};$$

on aura alors, comme dans la Première Partie,

$$\frac{\text{temps de parcours de l'arc QE}}{\text{temps de la chute suivant AE}} = \frac{\text{omnes DX}}{2 \,.\, \text{omnes D}\sigma} = \frac{\text{surface AQ}\,..\,\text{XV}\,..\,\text{NEA}}{2.\ \text{surface ▭ AI}}.$$

Construisant ensuite $D\eta$ de telle manière que $D\delta : D\sigma = D\sigma : D\eta$, on aura

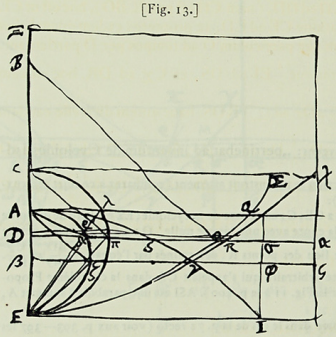
$$\frac{\text{surface AQ}\,..\,\eta\zeta\,..\,\text{NEA}}{\text{surface ▭ A}\lambda} = \frac{\text{demi-circonférence}}{\text{diamètre}}$$

($4^{\text{ième}}$ Proposition de la Deuxième Partie, deuxième alinéa de la p. 399).

C'est par cette dernière proportion que commence le texte imprimé de notre Troisième Partie; la surface AQ..$\eta\zeta$..NEA y est désignée par $\zeta\eta$. Le reste du raisonnement est entièrement comparable à celui de la p. 72 recto (voir la Première Partie de cette Pièce). Pour faciliter la comparaison nous observons que $\beta\omega$ [Fig. 12] correspond à CΠ [Fig. 6], et c à q.

Quatrième Partie [1]).

[Fig. 13.]



Ponimus mobile defcendere per cycloidem ex puncto aliquo Q [Fig. 13] usque in E; et comparandum fit tempus hujus defcenfus cum tempore quo mobile cadit ex A in E motu naturaliter accelerato vel cum tempore huic æquali, quo nempe percurreret lineam AE motu æquabili et celeritate dimidia ejus quam acquirit in fine cafus per AE.

ΞEI angulus rectus. CE ∞ CΞ.

ERχ eft parabola cujus latus rectum ∞ 2EΞ. cui fimilis eft oppofita ASI. CΠE eft circulus genitor cycloidis EOQΣ. AζE femicirculus. Aβ ∞ βE.

Tempus per particulam cycloidis in O, puncto quolibet, ad tempus per particulam perpendicularis in D, ponendo utramque particulam ijsdem parallelis horizontalibus includi, et celeritatem mobilis in O effe eam quam acquirit cadendo ex Q five ex altitudine AD, celeritatem vero mobilis in D effe dimidiam ejus quam acquirit cadendo ex AE; illud ergo tempus ad hoc habebit rationem compofitam ex ratione particulæ O ad particulam D, et ex ratione celeritatis qua peragitur particula D ad celeritatem qua peragitur O. per propof... Galilei de motu

[1]) Les pages examinées contiennent encore différentes rédactions ou projets de rédaction de la preuve de la propriété tautochrone de la cycloïde. En faisant suivre ici le fragment qu'on trouve à la p. 187 du Manuscrit A, nous observons l'ordre chronologique: ce fragment doit être postérieur aux Parties précédentes et antérieur aux deux démonstrations complètes qui suivent. En effet, dans le raisonnement considéré ici la parabole Eχ joue encore un rôle, tandis que dans la démonstration plus correcte elle ne paraîtra plus; mais d'autre part l'auteur cherche déjà à s'affranchir de l'emploi des courbes à sommets V et ζ de la Fig. 12.

Le raisonnement initial de cette p. 187 est conforme au début reconstruit du raisonnement qui se poursuit dans le morceau de la p. 74 recto des „Chartæ Mechanicæ" (voir la Troisième Partie qui précède et, à la p. 403, le deuxième alinéa de la note 3 de la p. 401); il confirme donc

æquabili. hoc eft, et ex ratione celeritatis dimidiæ acquifitæ cafu per AE ad celeritatem acquifitam cafu per QO five AD. hoc eft, et ex ratione dimidiæ EI ad DS, quia ASI eft parabola. Eft autem particula O ad D, ut OB (quæ cycloïdi occurrit ὀρθογώνως) ad OD. hoc eft ut CΠ ad ΠD, (nam CΠ eft parall. BO). hoc eft ut CE ad ΞΠ, hoc eft in fubduplicata ratione CE ad ED, ac propterea eadem quam habet Cχ ad DR. Ergo tempus dictum per particulam O ad tempus per D particulam, habet rationem compofitam ex ratione $\frac{1}{2}$ EI ad DS, et Cχ ad DR. hoc eft eam quam $\frac{1}{2}$ ▭ Cχ, EI, five $\frac{1}{2}$ ▭ αDσ ad ▭ RDS. hanc autem dico effe eandem quæ $\frac{1}{4}$ EI ad Dδ. nam quia ▭ αD, $\frac{1}{2}$ Dσ ad qu. $\beta\gamma$, five ad ▭ fub Aβ et 2αD (nempe latus rectum parabolæ) five ad ▭ AE, αD, eft ut $\frac{1}{2}$ Dσ five $\frac{1}{2}$ EI ad AE five ut $\frac{1}{4}$ EI ad $\zeta\beta$. quadratum vero $\beta\gamma$ ad ▭ RDS ut $\zeta\beta$ ad δD: erit ex æquo $\frac{1}{2}$ ▭ αDσ ad ▭ RDS ut $\frac{1}{4}$EI ad Dδ.

[Cinquième Partie] [2]).

15 Dec. 1659.

Demonftratio melior huc tandem redacta.

Sit dimidia cycloides ABC vertice A deorfum fpectante et axe AD ad perpendic. [Fig. 14].

Et ex quocunque ejus puncto B defcendat per ipfam mobile usque in A. Dico

cette reconstruction. La déviation commence là où le rapport $\frac{OB}{OD}$ est égalé à $\frac{C\Pi}{D\Pi}$, c.à.d. au rapport de deux longueurs se rapportant au cercle CE qui engendre la cycloïde. On passe de là à la parabole ERχ en posant $\sqrt{\frac{EC}{ED}} = \frac{C\chi}{DR}$.

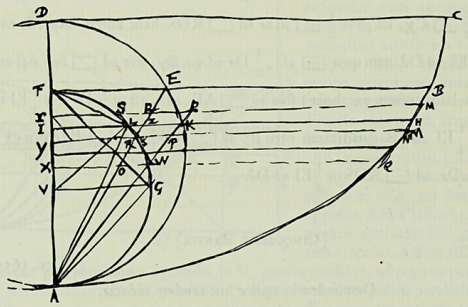
L'auteur trouve ensuite que l'expression $\frac{\frac{1}{2} D\alpha . D\sigma}{DR . DS}$ est égale au rapport $\frac{\frac{1}{4} EI}{D\delta}$, de sorte que la courbe à ordonnées DX [Fig. 12] n'est plus introduite; mais il ne va pas plus loin: le morceau est resté à l'état fragmentaire.

[2]) Cette Partie est empruntée aux p. 188—191 du Manuscrit A. Elle contient une preuve complète de la propriété tautochrone de la cycloïde, preuve qui, il est vrai, ne satisfait pas

tempus hujus deſcenſus ad tempus caſus perpendicularis ex D in A, fore ut ſemiperipheria circuli ad diametrum. Ideoque ex quovis cycloidis puncto tempora deſcenſus æqualia eſſe [1]). Sit enim BF parallela CD, quam ſecet ſemicirculus genitor DEA in E et ducatur AE [2]).

Magna nec ingenijs inveſtigata priorum [3]).

[Fig. 14.]



Quia igitur tempori caſus per DA æquale eſt tempus deſcenſus per planum inclinatum EA *, ſive tempus quo tranſitur eadem EA motu æquabili et celeri-

* 6 pr. de motu accel. Galilei[1]).

encore aux conditions rigoureuses que l'auteur s'est imposées en rédigeant la démonstration définitive de l'„Horologium oscillatorium".

On trouve une deuxième rédaction de cette preuve aux p. 76—77 des „Chartæ Mechanicæ"; mais elle diffère trop peu de celle publiée ici pour qu'il soit nécessaire de la reproduire in extenso. Nous nous contenterons de la citer dans quelques notes et d'en emprunter les trois derniers alinéas (voir la note 1 de la p. 410).

[1]) On lit à la p. 76 recto des „Chartæ Mechanicæ" deux énoncés de cette proposition; ils ont été biffés tous les deux. Les voici:

„Tempora reciprocationum quibus mobile per cavam cycloidem naturali impetu descendit ascenditque, a quocunque cycloidis puncto dimissum illud fuerit sunt æqualia; Habentque singula eam rationem ad tempus casus perpendicularis per axem cycloidis quam circumferentia circuli ad diametrum".

„Tempora lationum reciprocarum mobilis per quoslibet cycloidis arcus inter

tate dimidia ejus quam acquirit mobile cadendo per EA *, vel per FA * perpendiculariter; Oſtendendum nobis eſt, tempus per partem cycloidis BA eſſe ad dictum tempus motus æquabilis per EA, ut ſemicircumferentia circuli ad diametrum.

* 1 pr. [1]).
* ... G. [2]).

Deſcribatur ſuper FA ſemicirculus FGA, et intelligatur ei circumſcriptum polygonum ex tangentibus cujus unum latus ſit SLS. Poteſt autem tot laterum fieri ut à peripheria ipſa FLA quamlibet parum differat. Per contactum L ducatur ILKH recta parall. DC, cui item parallelæ ducantur TM, intercipientes polygoni latus SS, ut et rectam MHM, tangentem cycloidem in H, rectæ vero AE partem RR. Quod ſi ſingulis porro lateribus polygoni circa FLA deſcripti, eodem modo tangentes cycloidis reſpondentes conſtituantur, hæ tandem ſi infinitus numerus earum fuerit ipſam curvam conficient, et tempus deſcensus mobilis per omnes ejusmodi tangentes idem erit cum tempore deſcenſus per curvam BHA ſecundum ante expoſita [6]). Tempus deſcenſus per ſingulas earum ponimus non differre a tempore motus æquabilis per easdem celeritate ea quæ acquiritur caſu ex puncto B usque ad punctum contactus cujusque tangentis. Veluti pro tempore deſcenſus per MM uſurpabimus tempus quo tranſiretur MM motu æquabili, celeritate vero quanta acquiritur caſu per BH ſive per perpend. FI; nam hæ celeritates eædem ſunt ut oſtenſum eſt. atque ita in ſingulis tangentibus fieri intelligendum.

se sunt æqualia, habentque singula ad tempus casus perpendicularis per axem cycloidis eam rationem quam circumferentia circuli ad diametrum".

On lit encore en marge: „Theorema hoc proponatur ijs verbis quibus positum est in fine pag. præcedentis". Il s'agit apparemment de la p. 74 recto (voir, à la p. 401, la Troisième Partie de cette Pièce).

[2]) Ici il y a un signe de renvoi qu'on retrouve à la p. 189 du Manuscrit A.

[3]) Ovide, Métamorphoses, XV, 146.

[4]) Voir „Discorsi", Giorn. III, Ed. Naz. VIII, p. 221 (Prop. VI) et p. 208 (Prop. I).

[5]) Chez Galilée ceci n'est pas une proposition, mais un postulat; voir „Discorsi", Giorn. III, Ed. Naz. VIII, p. 205.

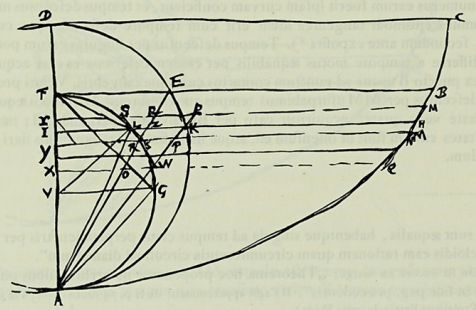
[6]) Voir la p. 411. Après cette phrase les mots „secundum quæ etiam" ont été intercalés. Ce sont les premiers mots de la remarque qu'on trouve in margine: „secundum quæ etiam tempus motus accelerati per singulas adæquabimus tempori cuidam motus æquabilis, videlicet ut pro tempore motus accelerati per MM sumatur".

À la p. 76 verso des „Chartæ Mechanicæ" une phrase qui exprime à peu près la même chose fait partie du texte lui-même. On y lit: „... per curvam BHA, secundum ante exposita. Secundum quæ etiam pro tempore descensus per MN usurpabimus tempus quo transiretur eadem MN motu æquabili, celeritate vero quanta acquiritur casu per BH".

Porro jungatur AK, et fecet in PP parallelas ϒM. Jungantur item FL, LA, ut et FG, GA, fecto prius femicirculo FGA bifariam lineâ VG ex centro eductâ. Quoniam itaque lineam MM tranfiri ponimus celeritate æquabili quanta acquiritur cafu per FI, lineam vero RR, celeritate æquabili dimidia ejus quæ acquiritur cafu per FA, habebit tempus per MM ad tempus per RR rationem eam quæ componitur ex ratione MM ad RR et ex ratione dimidiæ celeritatis acquifitæ cafu per FA ad celeritatem acquifitam cafu per FI *. Atqui celeritas tota ex cafu per FA eft ad celeritatem ex cafu per FI in fubduplicata [ratione] fpatiorum FA ad FI [1]) ac proinde eadem quæ FA ad FL, ergo dimidia celeritas ex cafu per FA

* Galilei theor. de motu Æquab.

[Fig. 14.]



ad celeritatem ex cafu per FL ut VF ad FL. Itaque tempus dictum per MM ad tempus per RR habebit rationem compofitam ex ratione MM ad RR et ex ratione VF ad FL. Eft autem MM tangens [2]) cycloidem in puncto H parallela rectæ AK*, ideoque PP æqualis MM. Ergo tempus dictum per MM ad tempus per RR habebit rationem compofitam ex ratione PP ad RR, hoc eft, KA ad ZA, hoc eft EA ad KA *, et ex ratione VF ad FL. Eft autem ut EA ad KA, ita FA ad AL;

* theorema de tangente in hoc libro [3]) fupra demons.

* nam tres hasce EA, KA, ZA proportionales effe facile oftendi poteft.

[1]) À la p. 76 verso des „Chartæ Mechanicæ" on trouve ici un renvoi à la Prop. 2 Galilei de motu accelerato. Voir „Discorsi", Giorn. III, Ed. Naz. VIII, p. 209.

[2]) On trouve ici les mots: „vide pag. præced. ad signum...". On trouve en effet le même signe au début du passage qui suit, à la p. 188 du Manuscrit A.

nam quia EA quadr. eft æquale □° DAF, et KA qu. □° DAI, eftque □ DAF ad □ DAI ut FA ad AI, hoc eft ut qu. FA ad qu. AL; ergo et qu. EA ad qu. KA ut qu. FA ad qu. AL, ideoque EA ad AK ut FA ad AL, ficut dicebamus. Ratio itaque temporis per MM ad tempus per RR, eadem eft compofitæ ex ratione FA ad AL et ex ratione VF ad FL, ac proinde eadem erit quæ □ AFV five $\frac{1}{2}$ qu. AF ad □ AL, LF. five, fumtis horum dimidijs, eadem quæ trianguli FGA ad triangulum FLA. Sunt autem triangula hæc fuper eadem bafi AF, ac proinde inter fe ut altitudines GV ad LI. Ergo tandem tempus per MM ad tempus per RR erit ficut GV five VL ad LI, hoc eft ut tangens SS ad ϒϒ [4]). hoc enim facile apparet [5]).

Eodem modo oftendetur tempus defcenfus motus accelerati per fequentem cycloidis tangentem NQ effe ad tempus æquabile per RO, particulam rectæ AE inter easdem parallelas horizontales cum dicta tangente interceptam, ficut tangens circuli SW ad rectam ϒX, quarum utraque inter easdem quoque iftas parallelas interjicitur, atque ita de cæteris omnibus. Quia autem lineam totam EA, ac proinde fingulas quoque partes ejus ponimus motu æquabili percurri, fcilicet velocitate dimidia ejus quæ acquiritur cafu per FA, Idcirco neceffario erit tempus per RR ad tempus per RO, ut ipfa longitudo RR ad RO, hoc eft ut ϒϒ [4]) ad ϒX. atque ita fimiliter cætera tempora per particulas rectæ EA inter fe, ficut particulæ ipfis refpondentes in recta FA.

Sunt itaque magnitudines quædam rectæ ϒY, YX &c. et totidem aliæ tempora fcilicet quibus percurruntur rectæ RR, RO &c., quarum unaquæque in prioribus ad fuam fequentem eadem proportione refertur qua unaquæque pofteriorum ad fuam fequentem. Quibus autem proportionibus priores ad alias totidem nempe ad tangentes circuli, SS, SW referuntur ijsdem proportionibus et eodem ordine pofteriores ad alias totidem referuntur, nempe ad tempora motus qualem diximus, per tangentes cycloidis MM, MQ. Ergo * quam rationem habent omnes fimul priores ad omnes eas ad quas referuntur, hoc eft quam tota FA recta ad totam femicircumferentiam FLA, eam habebunt omnes pofteriores ad omnes ad quas ipfæ fimiliter referuntur, hoc eft tempus quo tota EA percurritur motu æquabili, velocitate autem dimidia ejus quæ acquiritur cafu per FA, five, quod idem eft, tempus motus accelerati per EA vel per DA; ad tempora omnia motus qualem diximus per tangentes cycloidis, hoc eft ad tempus defcensus per totam cycloidis portionem BHA. quod erat demonftrandum.

* p. 2 de Conoid. et Sphær. Archim. [6]).

[3]) C. à. d. dans le Manuscrit A. Voir la p. 374 du T. XIV, déjà nommée dans la note 2 de la p. 400.

[4]) La figure [Fig. 14] a une fois la lettre ϒ et une fois la lettre Y.

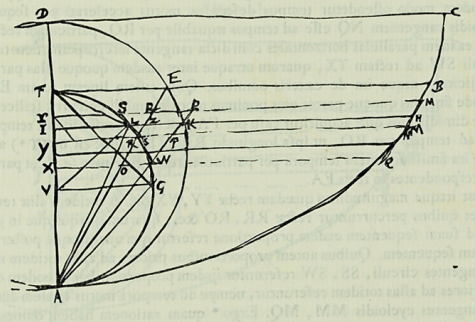
[5]) On lit ici: „Vide fol. sequens versum, ad signum ...". Le texte indiqué, qui suit, se trouve en effet à la p. 190 du Manuscrit A.

[6]) C'est la Prop. I dans l'édition moderne de J. L. Heiberg (Archim. Opera Omnia, Lipsiæ, in æd. B. G. Teubneri).

Coroll. tempus caſus per BH eſt ad tempus casus reliqui per HA ut arcus FL ad arcum LA [1]).

Ex his facile etiam colligitur deſcendente mobili ex B ad A, (ſumtum autem eſt punctum B ad lubitum) tempora deſcenſus per partes quaſlibet curvæ BA eam inter ſe rationem habere quam habent arcus circumferentiæ FGA ijsdem parallelis horizontalibus intercepti quibus ſingulæ earum partium continentur. Ita nimirum tempus per arcum BH erit ad tempus reliquum per arcum HA ſicut arcus circumferentiæ FL ad arcum LA.

[Fig. 14.]



Conſtat porro ubi grave per arcum cycloidis BA deſcenderit, continuato motu per æqualem huic arcum ex altera parte axis aſcenſurum temporaque utriusque motus æqualia futura. adeo ut in cavo cycloidis per quoſlibet arcus reciprocationum ſingularum tempora futura ſint ad tempus lapſus perpendicularis per axem cycloidis ſicut circumferentia circuli ad diametrum [2]).

[1]) Les trois alinéas qui suivent sont empruntés à la p. 77 verso des „Chartæ Mechanicæ". Comparez, à la p. 406, le deuxième alinéa de la note 2 de la p. 405.

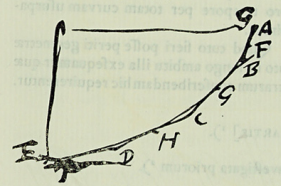
[2]) Cette Proposition s'exprime en notations modernes par la formule de la période d'une demi-oscillation cycloïdale $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, où l est le double du diamètre de la circonférence qui engendre la cycloïde.

Eadem vero omnia etiam in cycloide quæ in plano inclinato ſita ſit contingere manifeſtum eſt, ita nempe ut axem ad plani lineam horizontalem perpendicularem habeat. Eadem enim utrobique eſt demonſtratio.

hæc ante præcedens theorema legenda [3]).

De motu per cycloidem acturus curvam hanc quaſi ex infinita multitudine tangentium conſtare conſiderabo. Et rurſus pro tempore deſcenſus accelerati per omnes hasce tangentes, conſidero ſummam temporum quibus ſingulæ tangentes percurrerentur motu æquabili et velocitate quanta acquiritur ex caſu a principio deſcenſus ad usque punctum earum contactus. Ut hoc clarius fiat utque appareat ſummam iſtorum temporum non differre à tempore deſcenſus naturalis per tangentes infinitas ſint tangentes infinitæ ex quibus conſtat curva AB, BC, CD &c. [Fig. 15].

[Fig. 15.]



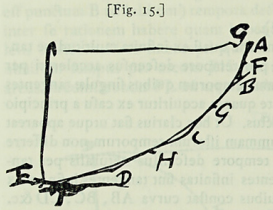
Primò igitur tempus deſcenſus accelerati per curvam AGE non differre ſumo à tempore deſcenſus cum per omnes rectas AB, BC, CD &c. mobile decurrit. nusquam videlicet offendendo, hoc eſt, ut velocitatem quam acquiſivit in fine cujusque lineæ, eam habeat moveri incipiens in linea ſequenti, ac deinceps eandem ſecundum leges motus acceleret. Quum autem tali deſcenſu unaquæque tangens velut CD percurratur motu paulatim accelerato, (nam cum ad finem ejus D pervenit mobile celerius utique movetur quam in principio C) ſi ponamus totam CD percurri motu æquabili celeritate illa majori quam habet mobile cum pervenit deſcendendo ad finem dictæ tangentis D, veniens ſcilicet ex A, hoc enim et in ſequentibus ſemper intelligi debet; conſtat tempus hujus motus brevius fore quam tempus quo mobile percurrit CD velocitate creſcenti ſeu deſcenſu naturali.

At contra, ſi totam CD percurri ponam motu æquabili et celeritate ea tantum quam habet in C, tempus hujus motus erit longius tempore motus accelerati per CD, quo fertur ſcilicet ex A veniens. Sed quoniam tangentem infinitè parvam pono ratione totius AE, ideo et discrimen celeritatis quam acquirit mobile, ſive deſcendat ex A usque in C, ſive ex A usque in D, ſive denique etiam ex A usque in H punctum, ubi CD curvam tangit, tanquam nullum eſt reputandum. Quare et tempus quod longius eſſe dictum eſt tempore deſcenſus natu-

[3]) Manuscrit A, p. 191.

ralis per CD ab illo tempore quod brevius eſſe dictum eſt, non differre exiſtimandum: Ideoque nec utrumvis eorum à tempore deſcenſus naturalis per CD. Unde itaque nec tempus motus æquabilis per CD, celeritate quæ acquiritur ex caſu per AH, quod ſcilicet tempus inter illud longius breviusque medium quodammodo eſt, differre quicquam cenſendum eſt à tempore deſcenſus naturalis per CD. Tale ergo medium tempus in ſingulis tangentibus pro tempore deſcenſus naturalis per easdem tangentes ponimus; omniumque iſtorum temporum ſummam pro tempore per totam curvam uſurpabimus.

[Fig. 15.]

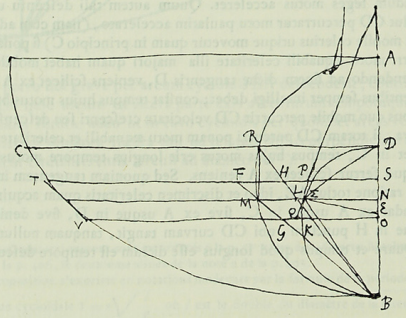


Quod tuto fieri poſſe periti geometræ facile perſpicient neque deſiderabunt puto ut longo ambitu illa exſequamur quæ ad demonſtrationem more veterum geometrarum conſcribendam hic requirerentur.

[Sixième Partie] [1]).

Magna nec ingenijs inveſtigata priorum [2]).

[Fig. 15bis.]



Caſus per AB [Fig. 15bis] ∞ per RB ∞ æquabilis per RB cum dimidia celeritate ex RB vel DB. Oſtende tempus per TV ſeu FG cum celeritate ex DN eſſe ad tempus per HK cum celeritate dimidia ex DB ut PQ ad SO.

illud tempus eſt ad hoc in ratione compoſita ex ratione FG ad HK, hoc eſt, MB ad BL hoc eſt RB ad BM hoc eſt DB ad BΣ, hoc eſt, DΣ ad ΣN et ex ratione ED ad DΣ. Ergo eadem quæ ED ſive EΣ ad ΣN hoc eſt PQ ad SO.

[1]) Cette Partie est empruntée à une feuille détachée datant probablement de la même époque (Chartæ Astronomicæ, p. 224 recto). La démonstration indiquée brièvement dans le texte correspond à celle de la Cinquième Partie qui précède.

[2]) Comparez la note 3 de la p. 407.

IV [1]).

[1661] [2]).

Du centre d'oſcillation

ou

Méthode pour trouver des pendules ſimples iſochrones avec des pendules compoſés linéaires donnés.

Conſidérons une barre AD [Fig. 16] inflexible et impondérable, à laquelle ſoient attachés les poids D à l'extrémité inférieure et E quelquepart entre A et D. On cherche le pendule ſimple HK qui exécute des oſcillations iſochrones avec le pendule linéaire compoſé AED, les gravités E et D ainſi que les longueurs AD et AE étant données.

Pour trouver une baſe de ce calcul, ſuppoſons que les globes B et C, après avoir exécuté les demi-oſcillations BE et CD rencontrent les globes égaux G et F [3]). Or nous prenons ceux-ci, de même que B et C, parfaitement durs; B et C tranſmettront donc tout leur mouvement aux globes G et F, et le pendule linéaire AED demeurera immobile. Par conſéquent lorſque les globes G et F retournent avec des viteſſes égales à celles qu'ils avaient reçues et frappent E et D [4]), ceux-ci recouvreront de leur part tout leur mouvement et remonteront d'après nos lois du mouvement les arcs EB et CD de la même manière qu'ils les avaient parcourus en ſens inverſe, ramenant évidemment en même temps la barre AD en AC. Il en réſulte que le centre de gravité compoſée des globes G et F, après qu'ils ont reçu de la part de E et de D leur mouvement et qu'ils ſe ſont élevés par ce mouvement auſſi haut que poſſible, atteint une hauteur égale à celle du centre de gravité des

[1]) Manuscrit B, p. 33—39.

[2]) La page 18 est datée: août 1661, et la p. 48 porte la date du 29 nov. 1661. On trouve à la p. 31 quelques notes sur le réglage d'une horloge en oct. 1661 qui sont reproduites sur la p. 46.

[3]) En marge: „vel poni posset sphaeras B, C peracta semivibratione a virga AD excuti". (On pourrait aussi supposer que les globes B et C fussent lancés dehors par la barre AD, après avoir exécuté une demi-oscillation).

IV [1]).

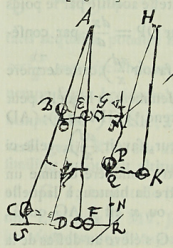
[1661] [2]).

De centro oſcillationis

ſive

Ad invenienda perpendicula ſimplicia iſochrona propoſitis perpendiculis compoſitis.

[Fig. 16.]



Virga inflexibilis AD [Fig. 16] nihil ponderans ſumatur, in qua pondera affixa ſint, D in ima extremitate, et E alicubi inter A et D. quæritur pendulum ſimplex HK perpendiculo AED compoſito iſochronas vibrationes habens. datis nempe gravitatibus E, D, et longitudinibus AD, AE.

Ad inveniendum calculi hujus fundamentum imaginemur ſphæras B et C poſtquam peregerunt ſemivibrationes BE, CD occurrere ſphæris æqualibus G et F [3]); ponimus autem tum has tum B et C perfecte duras; ergo omnem motum ſuum transferent in ſphaeras G et F, manebitque perpendiculum AED immobile [4]). Quare ſi viciſſim ſphæræ G et F revertantur ijſdem quas acceperunt celeritatibus ac percutiant E et D [5]), hæ ab ipſis omnem rurſus motum accipient, aſcendentque per noſtras leges motus per arcus EB, CD, uti prius deſcenderunt, nimirum ut virgam AD una auferant in AC. Hinc ſequitur ſphærarum G, F, centrum gravitatis compoſitæ, poſtquam ab E et D motum accepere eumque ſurſum quouſque poſſunt converterunt, centrum inquam hoc ad eandem altitudinem aſcendere in qua eſt centrum gravitatis ſphærarum B et C. Non poteſt enim altius eſſe; ſed neque humi-

[4]) D'après la „Prop. prima" de la p. 33.

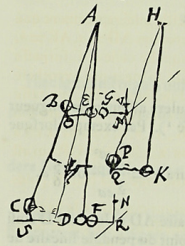
[5]) Les mêmes globules sont désignés tantôt par les lettres B et C, tantôt par les lettres E et D.

globes B et C. En effet, il ne peut être plus élevé. Mais il ne peut pas non plus être moins élevé parce que les globes G et F en retombant des hauteurs acquises mettent les globes E et D en mouvement avec une force qui les fait monter jusqu'en B et C, comme nous l'avons dit. Ceci est évident d'après la mécanique [1]).

Supposons maintenant que le pendule linéaire AED oscille aussi rapidement que le pendule simple HK. Appelons cette longueur HK x, et prenons AD $= a$, AE $= b$, le poids D $= e$, le poids E $= c$, et la hauteur CS (de laquelle celle de C surpasse celle de D) $= d$. Or, comme le pendule linéaire AED se meut par hypothèse avec la même vitesse avec laquelle se mouvrait le pendule simple HK, la vitesse du poids D sera à celle du poids K après que celui-ci aura parcouru, dans son pendule HK, un arc semblable, comme AD est à HK, c. à. d. comme a est à x. Mais le poids K s'élève par la force de son mouvement à la hauteur QP qui est $\frac{dx}{a}$. Par conséquent le poids D avec sa vitesse déjà mentionnée, ou bien le poids F qui reçoit toute la vitesse de D, peut monter à une hauteur qui sera à la hauteur QP comme le carré de cette vitesse est au carré de la vitesse acquise par le poids K. Or, ces carrés sont dans le rapport $a^2 : x^2$ et la hauteur QP $= \frac{dx}{a}$; par conséquent, en prenant $x^2 : a^2 = \left(\frac{dx}{a}\right) : \left(\text{une autre quantité, savoir } \frac{ad}{x}\right)$, cette dernière sera la hauteur, au-dessus de la ligne horizontale DS évidemment, à laquelle peut monter le globe frappé F. En d'autres termes, si l'on prend [2]) (HK ou x) : (AD ou a) $=$ (la hauteur CS ou d) : $\left(\text{une quatrième longueur, savoir } \frac{ad}{x}\right)$, celle-ci (appelons-la RN) sera la dite hauteur; et ceci doit être considéré comme un théorème. Par ce théorème on apprend aussi à connaître la hauteur à laquelle montera le globe frappé G. En effet, comme HK ou x est à AG ou b, ainsi sera la hauteur BO ou $\frac{bd}{a}$ à $\frac{b^2d}{ax}$, hauteur à laquelle G s'élève au-dessus de la ligne horizontale EO; appelons cette hauteur MV. Pour que le centre de la gravité composée de G et de F, après qu'ils ont atteint les dites hauteurs, se trouve aussi haut que le centre de la gravité composée de B et de C, il faut maintenant que le produit de la hauteur NR par le poids F ou D, augmenté du produit de la hauteur MV par le poids G ou E, c. à. d. l'expression $\frac{ead}{x} + \frac{b^2dc}{ax}$, il faut, dis-je, que cette somme de deux produits soit égale à celle des deux produits qu'on obtient en multipliant la hauteur CS par le poids D et la hauteur BO par le poids E, ce qui fait $ed + \frac{bdc}{a}$.

lius quoniam recidentes sphæræ G, F ab acquisitis altitudinibus dant motum sphæris E, D, cujus vi ascendant in B et C, uti dictum fuit: hæc enim ex mechanicis clara sunt [1]).

[Fig. 16.]



Ponamus jam perpendiculum AED æquè celeres vibrationes habere ac perpendiculum HK, quæ longitudo vocetur x, et AD sit a; AE $\infty\, b$, gravitas D $\infty\, e$; gravitas E $\infty\, c$, altitudo CS nempe qua altius est C quam D $\infty\, d$. Quia ergo perpendiculum AED movetur celeritate eadem qua moveretur perpendiculum simplex HK, erit velocitas ponderis D ad velocitatem ponderis K in perpendiculo HK per similem arcum vibrati, ut AD ad HK, hoc est ut a ad x. Sed pondus K vi motus sui ascendit ad altitudinem QP quæ est $\frac{dx}{a}$. Ergo pondus D dicta velocitate sua, vel pondus F omnem ejus velocitatem accipiens, potest ascendere ad altitudinem quæ sit ad altitudinem QP sicut quadratum hujus velocitatis ad quadratum velocitatis acquisitæ ponderi K. sunt autem hæc quadrata ut aa ad xx et altitudo QP $\infty\, \frac{dx}{a}$, ergo faciendo ut xx ad aa ita $\frac{dx}{a}$ ad aliud nempe $\frac{ad}{x}$, erit hæc altitudo, nempe supra horizontalem DS, ad quam poterit ascendere percussa sphæra F. nempe si fiat [2]) ut HK, x ad AD, a, ita altitudo CS, d, ad aliam, $\frac{ad}{x}$, ea quæ sit verbi gratia RN, erit altitudo dicta, atque hoc theorematis loco habendum, quo similiter innotescit altitudo ad quam ascendet percussa sphæra G. ut enim HK, x, ad AG, b, ita altitudo BO, $\frac{bd}{a}$ ad $\frac{bbd}{ax}$ altitudinem quo ascendet G supra horizontem EO, quæ sit MV. Jam ut centrum gravitatis compositæ ex G et F, postquam ita ascenderunt, sit æque altum ac centrum gravitatis compositæ ex B et C, oportet, ut NR altitudo ducta in gravitatem F seu D, una cum producto altitudinis MV in gravitatem G sive E, hoc est, $\frac{ead}{x} + \frac{bbdc}{ax}$, ut inquam hæc duo producta æquentur productis duobus ex altitudine CS in gravitatem D, et ex altitudine BO in gravitatem E, quæ sunt $ed + \frac{bdc}{a}$.

[1]) Comparez les p. 21—22 qui précèdent.

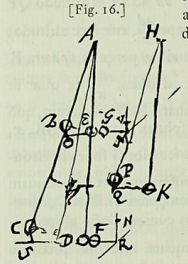
[2]) En marge: „Theorema". L'équation $x^2 : a^2 = \frac{dx}{a} : \frac{ad}{x}$ correspond à l'équation $y^2 : q^2 = \frac{xy}{q} : p$ de la note 1 de la p. 386 et l'équation $x : a = d : \frac{ad}{x}$ à l'équation $y : q = x : p$ (ou $py = qx$) de la même note.

On aura donc
$$\frac{ead}{x} + \frac{b^2dc}{ax} = ed + \frac{bdc}{a}$$
$$ea^2d + b^2dc = eadx + bdcx$$
$$ea^2 + b^2c = eax + bcx$$
$$\frac{ea^2 + b^2c}{ea + bc} = x.$$

C'eſt donc là la règle univerſelle par laquelle on calculera aiſément la longueur d'un pendule ſimple iſochrone avec un pendule compoſé [1]). Par exemple lorſque AE $= \frac{1}{2}$ AD et que les poids D et E ſont égaux, on aura $x = \frac{\frac{5}{4}ea^2}{\frac{3}{2}ea}$ ou $\frac{5}{6}a$.

Mais ſi, étant donnée la longueur du pendule linéaire AD et le poids D ainſi que le poids E, il faut fixer ce dernier à un certain point du pendule linéaire de ſorte que le pendule linéaire compoſé ſoit iſochrone avec un pendule ſimple de longueur donnée HK, on aura d'après l'équation précédente

[Fig. 16.]



$$\frac{ea^2 + b^2c}{ea + bc} = x$$

ou $\quad b^2c = bcx + eax - ea^2$

l'équation ſuivante : $b^2 = bx + \frac{ea}{c}x - \frac{ea^2}{c}$

$$b = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{ea}{c}x - \frac{ea^2}{c}},$$

équation dans laquelle le terme $\frac{ea^2}{c}$ eſt plus grand que $\frac{eax}{c}$, parce que a eſt plus grand que x. Par conſéquent l'équation a deux racines vraies [2]) dont chacune repréſente une longueur AE $= b$. Cependant ſi la longueur donnée HK ou x eſt plus grande que a, l'équation aura une autre forme et ne poſſédera qu'une ſeule racine vraie [2]), ſavoir $b = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{eax}{c} - \frac{ea^2}{c}}$, ce qui fait voir que la longueur b eſt plus grande que x et par conſéquent auſſi plus grande que a.

Eſt ergo
$$\frac{ead}{x} + \frac{bbdc}{ax} \infty ed + \frac{bdc}{a}$$
$$ea^2d + bbdc \infty eadx + bdcx$$
$$ea^2 + bbc \infty eax + bcx$$
$$\frac{ea^2 + bbc}{ea + bc} \infty x.$$

Hæc igitur eſt regula univerſalis, per quam longitudo penduli ſimplicis quod compoſito [1]) iſochronum ſit facile ſupputabitur. Ex. gratia ſi AE ſit $\infty \frac{1}{2}$AD et pondera D et E æqualia, erit $x \infty \frac{\frac{5}{4}eaa}{\frac{3}{2}ea}$, hoc eſt $\frac{5}{6}a$.

Quod ſi vero data longitudine perpendiculi AD et pondere D, itemque pondere E oporteat hoc affigere ad certum perpendiculi punctum, ita ut perpendiculum compoſitum ſit iſochronum perpendiculo datæ longitudinis HK, dabitur ex æquatione præcedenti

$$\frac{eaa + bbc}{ea + bc} \infty x$$
$$bbc \infty bcx + eax - eaa$$

hæc alia $\quad bb \infty bx + \frac{ea}{c}x - \frac{eaa}{c}$

$$b \infty \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}xx + \frac{ea}{c}x - \frac{eaa}{c}}$$

in qua æquatione $\frac{eaa}{c}$ major eſt quam $\frac{eax}{c}$ quia a major quam x; habet igitur duas radices veras [2]) quarum utraque dat longitudinem AE ∞b. Quod ſi vero HK, x, major data ſit quam a, erit æquatio alterius formae, tantumque unam veram radicem [2]) habebit, nempe $b \infty \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}xx + \frac{eax}{c} - \frac{eaa}{c}}$, ubi b majorem fieri apparet quam x, ac proinde majorem quoque quam a.

[1]) C. à. d. avec un pendule composé linéaire.
[2]) Par le terme „radix vera" ou „racine vraie" Huygens désigne ici une racine positive.

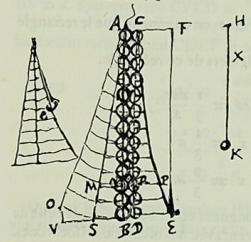
Pour trouver le pendule ſimple iſochrone avec une barre ou un cylindre (que je conſidère toutefois comme une ligne droite ſeulement ſans avoir aucun égard à ſon épaiſſeur) j'imagine au lieu de ce cylindre un nombre infini de petits globes formant une ligne droite rigide telle que AB [Fig. 17]. Si celle-ci ſe trouve d'abord en AO et parvient par une demi-oſcillation en AB, et que là chaque globule frappe un des globules de la ſérie CD leſquels ne sont pas attachés les uns aux autres, chacun de ces derniers prendra tout le mouvement du globule de la ſérie AB par lequel il a été frappé, et la barre AB demeurera immobile. Pour la même raiſon que plus haut il eſt donc néceſſaire que le centre commun de gravité de tous les globules CD, après qu'ils ont reçu le mouvement de la part des globules AB et qu'ils ſe ſont élevés par ce mouvement auſſi haut que poſſible, ſoit à la même hauteur que le centre de gravité des globules AB lorſque ceux-ci ſe trouvaient ſur la droite AO. Suppoſons maintenant que la barre AB ait ſes oſcillations iſochrones avec le pendule ſimple HK, dont la longueur ſoit appelée x. Poſons auſſi $AB = a$, et appelons d la hauteur OV à laquelle la droite BS eſt égale par conſtruction. Par conſéquent, d'après le théorème ſusmentionné [1]) la hauteur à laquelle s'élèvera par le choc le globe inférieur D ſera $\frac{da}{x}$. Soit DE cette hauteur et ſuppoſons tracée la parabole EC dont l'axe CF ſoit parallèle à DE et dont le point C ſoit le ſommet. Je dis que ſi du centre de chaque globule de la ſérie CD on tire une droite parallèle à DE juſqu'à la parabole EC, ces droites repréſenteront les hauteurs auxquelles monteront les globules correſpondants. En effet, joignons les points S et A par une droite. Comme OV, égale à SB, repréſente la hauteur de laquelle le globule le plus bas D eſt deſcendu, NM parallèle à SB et tracée à partir du centre d'un autre globule N ſera, dis-je, la hauteur dont le globule N eſt deſcendu. Mais pour trouver, en partant de ces données, la hauteur RP à laquelle montera le globule R frappé par N, il faut d'après le théorème nommé conſtruire RP d'après l'équation $HK : AN = NM : RP$. Par conſéquent $HK \times RP = AN \times NM$. Mais $HK \times DE = AB \times BS$, puiſque d'après le même théorème $HK : AB = BS : DE$. On a donc $AN \times NM : AB \times BS = HK \times RP : HK \times DE$, c. à. d. $= RP : DE$. Mais $AN \times NM : AB \times BS = AN^2 : AB^2$. Par conſéquent RP eſt à DE comme AN^2 eſt à AB^2 ou comme CR^2 eſt à CD^2, d'où il apparaît que le point P ſe trouve ſur la dite parabole EC.

Or, pour que le centre commun de gravité des globules CD, après que ceux-ci ſe ſont élevés chacun à ſa propre hauteur, ſoit auſſi haut que le centre commun des globules AB lorſqu'ils ſe trouvaient ſur la droite AO, il eſt néceſſaire que lorſqu'on multiplie chaque hauteur par le poids du globule correſpondant la ſomme de ces produits ſoit la même dans les deux cas. Mais comme le poids de tous les globules

[1]) Voir la note 2 de la p. 417.

Ad inveniendum perpendiculum iſochronon baculo ſeu cylindro, (quem tamen ut rectam lineam tantum conſidero nulla habita ratione craſſitudinis) imaginor ejus loco infinitum numerum ſphærularum in rectam lineam rigidam conjunctarum velut AB [Fig. 17]. Hæc ſi primum ſit in AO, ac ſemivibratione perveniat in AB, ibique ſinguli globuli occurrant ſingulis ſeriei CD, qui non connexi ſint, accipiet horum quiſque motum omnem a globulo ſeriei AB à quo impulſus erit, manebitque virga AB immota. Hinc eadem ratione qua ſuprà, neceſſe eſt centrum gravitatis commune globulorum omnium CD, poſtquam a globulis AB motum accepere, eumque ſurſum quouſque poſſunt converterunt, æque altum eſſe ac centrum gravitatis globulorum AB cum eſſent in recta AO. Ponamus jam virgam AB iſochronas vibrationes habere perpendiculo ſimplici HK, cujus longitudo vocetur x. Et AB ſit a. altitudo OV cui æqualis ponatur BS linea, vocetur d. Itaque per theorema ſuperius [1]), erit altitudo ad quam aſcendet percuſſa ſphæra infima D, $\frac{da}{x}$, quæ ſit DE,

[Fig. 17.]



deſcripta autem intelligatur parabola EC, cujus axis CF æquidiſtans DE, vertex vero C punctum. Dico ſi à centro cujuſque globuli ſeriei CD ducantur rectæ ipſi DE parallelæ uſque ad parabolam EC, eas ſingulas exhibere altitudines ad quas aſcendent globuli unde eductae fuere. Jungatur enim recta SA. Cum igitur SB æqualis OV ſit altitudo unde deſcendit globulus imus D, erit NM, quæ parallela eſt SB atque educta ex centro globuli alterius N, erit inquam illa altitudo unde deſcendit globulus N. Hinc vero ut inveniatur altitudo RP ad quam aſcendet globulus R percuſſus ab N, oportet per theorema dictum facere ut HK ad AN ita NM ad RP. Itaque ▭ HK, RP æquale ▭° AN, NM. ſed ▭ HK, DE æquale eſt ▭° AB, BS, quia per idem theorema HK ad AB ut BS ad DE. Ergo ▭ AN, NM ad ▭ AB, BS ut ▭ HK, RP ad ▭ HK, DE, hoc eſt ut RP ad DE. Sed ▭ AN, NM eſt ad ▭ AB, BS ut quadratum AN ad quadratum AB. Ergo ut quadr. AN ad quadr. AB ſive ut quadr. CR ad quadr. CD ita eſt RP ad DE, unde liquet punctum P eſſe ad parabolam dictam EC.

Jam vero ut centrum gravitatis commune globulorum CD poſtquam ſingulæ ad ſuas altitudines aſcenderunt ſit æque altum ac centrum gravitatis commune globulorum AB cum eſſent in recta AO, neceſſe eſt ut ductis ſingulis altitudinibus in ſuorum globulorum gravitatem aggregatum productorum utrobique æquale efficiatur. Quia autem æqualis omnium globulorum eſt gravitas, concipiamus ſingu-

eſt le même, nous pouvons ſuppoſer que le poids de chacun d'eux eſt exprimé par la ligne de grandeur conſtante qui ſépare les centres de deux globules adjacents [1]).

Toutes ces petites lignes étant donc de part et d'autre multipliées par les hauteurs adjacentes, il apparaît qu'on obtient d'un côté pour ſomme des produits le triangle ABS, et de l'autre l'espace CPED compris entre la parabole CPE et les droites ED et DC. Ces eſpaces doivent donc être égaux entre eux. Or, le triangle ABS eſt égal à $\frac{1}{2}ad$ ou $\frac{1}{2}ed$ [2]), parce que $AB = a$ et $BS = d$. Et l'eſpace CPED eſt égal à $\frac{1}{3}\frac{da^2}{x}$ ou $\frac{1}{3}\frac{dae}{x}$, parce que $ED = \frac{da}{x}$ et $CD = a$; on en conclut que le rectangle CDEF eſt égal à $\frac{da^2}{x}$, et la ſurface CPED eſt le tiers de ce rectangle.

Donc
$$\frac{1}{2}ad = \frac{1}{3}\frac{da^2}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}ed = \frac{1}{3}\frac{dae}{x}\ ^{2})$$
$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}a \qquad \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}a$$
$$x = \frac{2}{3}a \qquad x = \frac{2}{3}a.$$

Le pendule ſimple HK doit donc avoir une longueur égale à deux tiers de celle de la barre AB pour que les deux pendules ſe meuvent avec des oſcillations iſochrones.

Le centre d'oſcillation de la barre ſe trouve donc à $^2/_3$ du point de ſuſpenſion, et lorſqu'on attache à la barre en ce point un poids quelconque, ſes va-et-vient n'en deviendront ni plus rapides ni plus lents.

Mais ſi l'on ſuſpend un poids à l'extrémité inférieure de la barre, ou du moins en deſſous dudit centre d'oſcillation, ſon mouvement en ſera ralenti; et le contraire ſe produira ſi l'on attache un poids à un endroit plus élevé.

Suppoſons d'abord qu'un poids Q ſoit ſuſpendu à l'extrémité inférieure D [Fig. 18] d'une barre peſante CD, le rapport de la gravité de ce poids à celle de la barre étant donné. Si l'on déſigne comme plus haut la longueur de la barre par a et que la gravité de chacun des globules dont elle eſt compoſée par hypothèſe eſt repréſentée par les petites parties de la droite CD ou e [2]), parties que les globules conſidérés occupent ſur cette droite, le poids total de la barre ſera évidemment repréſenté par ſa longueur entière, c.-à.-d. par a [3]). C'eſt pourquoi ſi l'on prend une certaine droite telle que n qui ſoit à la longueur CD comme le poids Q eſt au

[1]) En marge: „harum æqualium linearum loco possunt quaevis aliae æquales sumi, puta partes rectæ e in totidem divisæ quot sunt globuli in CD". (Au lieu de ces lignes égales on peut prendre n'importe quelles autres lignes égales, p. e. les parties d'une droite e divisée en autant de parts qu'il y a de globules en CD).

[2]) Voir la note précédente.

[3]) En marge: „aut alias per e, quod rectius" (ou encore par e, ce qui conviendra mieux).

lorum gravitatem exprimi lineis æqualibus quæ inter binorum contiguorum centra interjacent [1]).

Quibus itaque utrinque in adjacentes altitudines ductis, apparet ex una parte pro ſumma productorum haberi triangulum ABS, ex altera vero ſpatium CPED parabola CPE et rectis ED, DC comprehenſum. quæ itaque ſpatia inter ſe æqualia eſſe oportet. Eſt autem triangulum ABS $\infty \frac{1}{2}ad$ vel $\frac{1}{2}ed$ [2]), quia $AB \infty a$, et $BS \infty d$. Spatium vero CPED $\infty \frac{1}{3}\frac{daa}{x}$ vel $\frac{1}{3}\frac{dae}{x}$, quia $ED \infty \frac{da}{x}$ et $CD \infty a$; hinc enim rectangulum CDEF fit $\infty \frac{daa}{x}$, cujus tertia pars eſt ſpatium CPED.

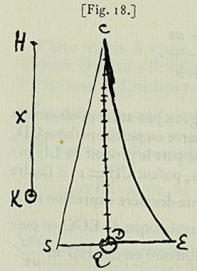
Ergo
$$\frac{1}{2}ad \infty \frac{1}{3}\frac{daa}{x} \quad \text{vel} \quad \frac{1}{2}ed \infty \frac{1}{3}\frac{dae}{x}\ ^{2})$$
$$\frac{1}{2}x \infty \frac{1}{3}a \qquad \frac{1}{2}x \infty \frac{1}{3}a$$
$$x \infty \frac{2}{3}a \qquad x \infty \frac{2}{3}a$$

Oportet igitur perpendiculum HK duas tertias habere longitudinis baculi AB ut vibrationibus iſochronis moveantur.

Igitur centrum oſcillationis baculi est $\frac{2}{3}$ à puncto ſuſpenſionis, quo loco quodcunque pondus baculo affigatur, nihilo velociores reditus aut tardiores acquiret.

Quod ſi autem in ima baculi extremitate pondus aliquod appendatur, vel tantum infra dictum oſcillationis centrum, eo lentior motus evadet, et contra ſi loco ſuperiore quid ponderis addatur.

[Fig. 18.]



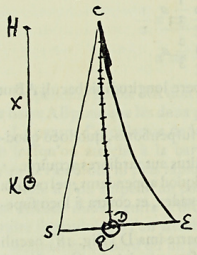
Ponamus primum in parte ima D [Fig. 18] baculi ponderantis CD, appenſam gravitatem Q, cujus ad gravitatem baculi data ſit ratio. cum autem baculi longitudo ponatur ut modo ∞a, et ſingulorum quibus conſtare ponitur globulorum gravitas exprimatur particulis rectæ $\frac{e}{CD}$ [2]) quas in ea ſinguli globulorum occupant, totius proinde baculi gravitas per totam ſui ipſius longitudinem, nempe a, exprimetur [3]). quare ſi quæ recta ſumatur, ut n, quæ ſit ad longitudinem CD ſicut gravitas Q ad gravitatem baculi, ea recta n referet gravitatem Q, haud aliter ac ſingulæ particulæ quas in recta CD unuſquiſque globulorum baculum componentium occupat, ſui globuli gravitatem refert.

Eadem itaque qua prius repetita ratiocinatione

poids de la barre, cette droite n repréſentera le poids Q de la même manière que chacune des petites parties qu'occupe ſur la droite CD chacun des globules qui compoſent la barre, repréſente le poids du globule correſpondant.

On trouve donc en répétant le raiſonnement précédent que d'une part à la ſomme des produits conſidérée, qui était repréſentée par le triangle CQS, il faut ajouter le produit de n par QS, c. à. d. nd, et que de l'autre il faut, là où il y avait la ſurface CDE, y ajouter le produit de n par DE, ſavoir $\frac{nda}{x}$.

[Fig. 18.]



$$\text{Donc } \frac{1}{2}ad + nd = \frac{1}{3}\frac{da^2}{x} + \frac{nda}{x}$$

$$\frac{1}{2}ax + nx = \frac{1}{3}a^2 + na$$

$$x = \frac{\frac{1}{3}a^2 + na}{\frac{1}{2}a + n} \text{ ou } \frac{2a^2 + 6an}{3a + 6n}$$

$$\text{ou } a - \frac{a^2}{3a + 6n} = x$$

$$\text{ou } \frac{1}{2}ed + nd = \frac{1}{3}\frac{dae}{x} + \frac{nda}{x}\ ^{1)}$$

$$\frac{3}{2}ex + 3nx = ae + 3an$$

$$\frac{\frac{3}{2}ex + 3nx}{e + 3n} = a, \text{ longueur de la barre}$$

$$x = \frac{\frac{1}{3}ae + an}{\frac{1}{2}e + n}.$$

Autre application : ſi outre le poids inférieur Q [Fig. 19] un autre poids dont la gravité eſt repréſentée par la droite h eſt attaché à la barre ou perche peſante CD, il faudra ajouter de plus à la ſomme des produits d'une part le produit de LH par h, de l'autre celui de HG par h. En d'autres termes, poſant $CH = c$, il faudra ajouter d'une part $\frac{cdh}{a}$ et de l'autre $\frac{c^2dh}{ax}$. En effet, cette dernière expreſſion eſt le produit de HG par h, parce qu'à cauſe de la forme parabolique de EGC on peut poſer $(DC \text{ ou } a^2) : (HC \text{ ou } c^2) = \left(ED \text{ ou } \frac{da}{x}\right) : HG$, d'où l'on tire $HG = \frac{c^2d}{ax}$.

invenitur ad ſummam productorum ex una parte, quæ erat triangulum CQS, addendum productum ex n in QS, hoc eſt, nd; ex altera vero ubi erat ſpatium CDE, addendum productum ex n in DE, nempe $\frac{nda}{x}$.

Ergo

$$\frac{1}{2}ad + nd \infty \frac{1}{3}\frac{daa}{x} + \frac{nda}{x}$$

$$\frac{1}{2}ax + nx \infty \frac{1}{3}aa + na$$

$$x \infty \frac{\frac{1}{3}aa + na}{\frac{1}{2}a + n} \text{ sive } \frac{2aa + 6an}{3a + 6n}$$

$$\text{sive } a - \frac{aa}{3a + 6n} \infty x$$

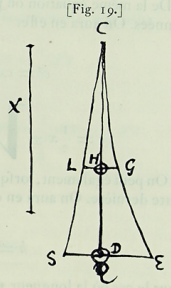
$$\frac{1}{2}ed + nd \infty \frac{1}{3}\frac{dae}{x} + \frac{nda}{x}\ ^{1)}$$

$$\frac{3}{2}ex + 3nx \infty ae + 3an$$

$$\frac{\frac{3}{2}ex + 3nx}{e + 3n} \infty a \text{ longitudo virgæ}$$

$$x \infty \frac{\frac{1}{3}ae + an}{\frac{1}{2}e + n}$$

[Fig. 19.]



Porro autem ſi virgæ vel baculo ponderanti CD [Fig. 19], praeter pondus infimum Q affixum ſit aliud pondus H cujus gravitas exprimatur recta h, addendum erit inſuper ad ſummam productorum ex una parte productum ex LH in h; ex altera vero productum ex HG in h. hoc eſt, poſita $CH \infty c$, inde addendum erit $\frac{cdh}{a}$; hinc $\frac{ccdh}{ax}$; hoc enim eſt productum ex HG in h, quia propter parabolam EGC, ſi fiat ut quadratum $DC \infty aa$, ad quadr. $HC \infty cc$, ita $ED \infty \frac{da}{x}$ ad HG, fit hinc $\frac{ccd}{ax}$.

---

[1]) L'auteur répète le calcul en désignant cette fois le poids Q par la ligne e au lieu de la ligne a, conformément à la note 3 de la p. 422.