(„Horologium oſcillatorium”, Pars Quarta, Prop. XX: „Centrum Oſcillationis & punctum ſuſpenſionis inter ſe convertuntur”).

Les Pièces IV, XV et XVI étaient ſans doute deſtinées à être publiées; c'eſt pourquoi nous y avons ajouté une traduction françaiſe. Il en eſt de même de la Pièce XVIII [1]), à laquelle cependant nous n'avons pas ajouté de traduction, puisqu'on peut tout auſſi bien lire les Propoſitions IX, X et XI de la Pars Quarta de l'„Horologium oſcillatorium” qui ſera publié avec une traduction [2]).

Le 10 octobre 1664 (voir la p. 120 du T. V) Huygens put écrire à Moray, c. à. d. à la „Royal Society”, qu'il avait trouvé les centres d'oſcillation du triangle iſoſcèle ſuſpendu par le ſommet ou au milieu de la baſe et oſcillant dans ſon plan, ainſi que celui du cercle, etc. Il dit avoir „la determination generale pour tous triangles et rectangles, ſuſpendus par un des angles, ou par le milieu des coſtez”. Dans les Pièces qui ſuivent on ne trouvera pas de calcul relatif à un rectangle ſuſpendu par un des angles, ce qui fait bien voir que tous les calculs de Huygens n'ont pas été conſervés [3]). Huygens écrit en outre avoir trouvé la longueur du pendule iſochrone avec une ſphère „ce qui ſert principalement à la meſure univerſelle” [4]).

Le 28 octobre 1664 (voir la p. 127 du T. V) il écrivit à de Sluſe avoir trouvé une règle univerſelle „ad plana et ſolida” (voir le dernier alinéa de la note qui occupe la p. 477 et à la p. 482 la Septième Partie de la Pièce XI), et dans ſa lettre du 31 octobre à Moray il fait également mention de ces „regles generales”. Dans le ſommaire de ſa lettre à P. Petit du 30 octobre 1664 (voir la p. 129 du T. V) il fait mention non ſeulement de la ſphère mais encore du conoïde hyperbolique (ou hyperboloïde de révolution). Le calcul du pendule iſochrone avec ce conoïde

---

[1]) Et peut-être de la Pièce XVII moins importante.
[2]) Il en existe d'ailleurs une traduction allemande: c'est le N°. 192 d'„Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften” (éd. Heckscher et v. Oettingen, Leipzig, Engelmann, 1913).
[3]) Comparez la note 2 de la p. 456 et la note 1 de la p. 512. Huygens a fait beaucoup de calculs sur des feuilles séparées, une partie desquelles ont été collées dans le Manuscrit B (voir la note 2 de la p. 435). Ce sont les „brouillons” mentionnés à la p. 375.
[4]) Comparez les p. 355—356.

ſuſpendu à ſon ſommet que nous poſſédons et dont nous venons de parler (p. 371) date de plus tard (voir, à la p. 550, la Pièce XIX).

En novembre 1664 lord Brouncker (comparez le quatrième alinéa de la p. 349) tâcha d'établir un „principle” ou loi générale du centre d'oſcillation (voir la p. 144 du T. X), mais il ne réuſſit à trouver (ou plutôt à deviner) la place de ce centre que dans le cas de „l'agitation des figures planes ſur un axe qui eſt dans leur meſme plan” (d'après la remarque de Huygens au même endroit).

Le 21 novembre (p. 149 du T. V) Huygens fit connaître à Moray la place du centre d'oſcillation de la ſphère, mais ſans y ajouter de démonſtration; dans cette lettre il parle de nouveau de la meſure univerſelle [4]). Peu de temps après (voir la lettre du 13 décembre de R. Hooke à R. Boyle, à la p. 169 du T. V) on fit à la „Royal Society” des expériences pour vérifier l'aſſertion de Huygens „thereby to ſettle a common ſtandard for length”. On avait d'ailleurs déjà fait le 16 novembre (Birch, I, p. 489) des expériences ſur les triangles mentionnés par Huygens dans ſa lettre du 10 octobre, et le 23 novembre le préſident (Birch, I, p. 495) avait fait connaître à la „Society” le „new way for making an univerſal meaſure, propoſed in a letter [la lettre nommée du 21 nov.] to Sir Robert Moray by Mons. Huygens”, à la ſuite de quoi on décida de faire les expériences mentionnées par Hooke; elles furent faites (Birch, I, p. 500) dans la ſéance du 7 décembre, avec le réſultat que „Monſieur Huygens's rule was found to approach very near to it”. Dans la ſéance du 21 décembre (Birch, I, p. 508) on fit encore des expériences ſur les cercles ſuſpendus en un point de leur contour qui confirmèrent la théorie de Huygens (voir la p. 455). Déjà dans ſa lettre du 7 novembre (T. V, p. 138) Moray avait écrit à Huygens: „On vous prie auec toute ſorte d'inſtance de nous vouloir communiquer toutes vos ſpeculations auec les propoſitions que vous auez dreſſees ſur ce ſuiet”, mais Huygens s'excuſa dans ſa réponſe du 2 janvier 1665 (T. V, p. 187) en diſant: „en veritè je n'ay pas le temps de mettre au net ce que j'ay dans mes brouillons [3]) ſur ce ſujet et beaucoup d'autres”. Ce n'eſt que le 4 ſeptembre 1669 qu'il envoya „ut adſerventur in Actis Societatis Regiæ” quatorze anagrammes, dont la plupart ſe rapportent à la force centrifuge et au centre d'oſcillation [5]). Mais la publication n'eut lieu qu'en 1673 dans l'„Horologium oſcillatorium”.

---

[5]) La dernière se rapporte à la chute cycloïdale (comparez la note 2 de la p. 410). Huygens avait

On ne retrouve pas d'ailleurs dans ce dernier tous les ſujets traités dans les brouillons [1]).

Remarquons encore que la terminologie de Huygens n'eſt pas conſtante (comparez la p. 245). Ainſi l'oſcillation d'une ſurface dans ſon plan eſt appelée en 1664 „[agitatio] in plano ſuo" (p. 455); et l'oſcillation perpendiculaire à ſon plan „[agitatio] in latus" (p. 457; comparez la note 7 à cet endroit); enſuite (p. 461) l'oſcillation dans le plan eſt au contraire déſignée par „[agitatio] in latus"; dans la Pièce XV (p. 499), apparemment deſtinée à la publication, l'oſcillation dans le plan s'appelle „motus oſcillatorius planus" ou „motus planus" et l'oſcillation perpendiculaire au plan „motus oſcillatorius ſolidus" ou „motus ſolidus". Dans l'„Horologium oſcillatorium" ces deux mouvements s'appellent reſpectivement „[agitatio] in latus" et „[agitatio] in planum". (Defin. XI et XII de la Pars Quarta).

Nous avons déjà parlé de la „potentia", ainſi que de la „vis motus" de Huygens ($2^{\text{ième}}$ et $13^{\text{ième}}$ ligne de la p. 417) qui n'eſt pas encore une quantité nettement déterminée (p. 359, premier et troiſième alinéa de la note 6) et nous pourrions répéter ici ce que nous avons dit à la p. 245 au ſujet du mot „gravitas" (comparez la note 2 de la p. 384).

On pourrait ſe demander comment il faut concilier le fait que Huygens attribue à un pendule donné la même période partout [2]) avec le réſultat trouvé auparavant (voir la p. 304 de ce Tome) ſur la diminution (apparente) de la gravité par ſuite de la rotation de la terre. Mais il convient de ſe rappeler que Huygens ne fait pas encore de diſtinction en ce moment entre le poids d'un corps

proposé lui-même (T. VI, p. 486) la méthode des anagrammes „pour eviter les disputes, et rendre a un chacun ce qui luy est deu dans l'invention des choses nouvelles".

Comparez la note 1 de la p. 369, la note 2 de la p. 370, la note 4 de la p. 373 et le dernier alinéa de la note de la p. 496.

[1]) Voir le dernier alinéa de la note qui occupe la p. 472.

[2]) Comparez la $8^{\text{ième}}$ ligne d'en bas de la p. 355. Dans la Prop. XXV de la Pars Quarta de l'„Horologium oscillatorium" de 1673, déjà citée à la p. 356, Huygens dit qu'à l'aide du pendule à secondes on peut trouver le pied horaire „ubique gentium".

[3]) C'est par hypothèse et sous toutes réserves que nous lui prêtons ce raisonnement (comparez la fin de cet alinéa).

[4]) Voir la note 2 de la p. 224.

et ſa maſſe. Il avait trouvé par expérience (voir la note 7 de la p. 355) que le poids ſpécifique du corps oſcillant eſt ſans influence ſur ſa période. La formule générale pour la longueur du pendule iſochrone (voir la note 1 de la p. 369) confirme ce réſultat. Il a donc pu penſer que la diminution de la gravité par ſuite de la rotation de la terre eſt probablement ſans influence ſur la période des oſcillations [3]). À plus forte raiſon pouvait-on admettre à la „Royal Society" cette invariabilité de la période d'un pendule donné, puiſqu'on n'y connaiſſait pas le réſultat du calcul mentionné de Huygens de la p. 304. Cependant l'idée que cette diminution (apparente) de la gravité pourrait avoir une certaine influence ſur la période d'oſcillation a traverſé l'esprit de Huygens déjà en 1666. À la ſuite du morceau que nous avons publié aux p. 323—324 de ce Tome, il écrit après quelques calculs: „2′7″ quibus horologium [sic] pendulum sub 45 gr. latitudinis lentius incederet una die quam idem sub polo... 2′18″ quibus horolog. lentius eſſet ſub æquin. [4]) in una die quam idem ſub latit. 45 gr." [5]). Nous reviendrons ſur cette queſtion lorsque nous publierons le „Discours de la Cauſe de la Peſanteur". Mais il eſt certain que Huygens n'a pas eu confiance dans l'exactitude de ſon raiſonnement à cet endroit, puisqu'il écrit encore en 1687 [6]): „... je vous prie... de me mander au plus toſt, ſi vous en avez d'autres informations qui nous perſuadent qu'il y a effectivement cette variation dans la nature [c. à. d. la variation de la longueur du pendule à ſecondes, obſervée par Richer] ce qui me ſemble fort vraiſemblable, quoyque je puiſſe auſſi rendre raiſon, en cas qu'elle ne s'y trouve pas" [7]).

Nous avons déjà fait voir plus haut (voir les p. 341—342) combien la netteté et la conciſion de quelques formules de Huygens paraiſſent remarquables lorsqu'on les compare avec les énoncés vagues ou ſcolaſtiques de beaucoup de ſes

[5]) Il résulte de la proposition énoncée dans le dernier alinéa de la p. 410 que la période d'une oscillation cycloïdale — et par conséquent aussi la période d'une petite oscillation circulaire — est inversement proportionnelle à la racine carrée de l'accélération de la chute verticale libre. Si l'on admet que cette accélération est proportionnelle au poids apparent d'un même corps en divers points de la surface du globe terrestre — ce qui est évidemment exact — on retrouvera à fort peu près les résultats de Huygens, bien entendu en admettant la justesse des fractions $\frac{1}{165}$ et $\frac{1}{343}$ de la p. 324.

[6]) Dans sa lettre du 1 mai 1687 à Ph. de la Hire (T. IX, p. 130).

[7]) Comparez la lettre de Huygens du 24 avril 1688 aux Directeurs de la Compagnie des Indes (T. IX, p. 275), et la note 5 de la p. 230 (influence de Newton).

prédéceſſeurs. Quant à la conciſion, elle règne ſurtout dans les morceaux non deſtinés à être publiés [1]). Mais la formule générale [2]) du Manuſcrit B ſe trouve auſſi dans l'„Horologium oſcillatorium", ce qui fait bien voir que dans la penſée de Huygens l'exactitude et une certaine conciſion ne s'excluent pas [3]). Cette conciſion „in ſtatu naſcendi" a eu une grande influence ſur le ſtyle de pluſieurs ouvrages de mécanique publiés après 1673. Bornons-nous ici à nommer la Mécanique d'Euler [4]) et à rappeler que c'eſt lui qui a donné le nom de „moment d'inertie" [5]) à la ſomme ou intégrale conſidérée par Huygens de diverſes maſſes multipliées chacune par le carré de ſa diſtance à un axe.

[1]) Il est impossible d'y méconnaître l'influence de Cavalieri. Comparez les notes de la p. 340. Il convient cependant de remarquer que Huygens et ses contemporains avaient compris (longtemps avant la découverte du „Traité de la Méthode" d'Archimède, nommé à la p. 192 du T. XIV) que les anciens se servaient aussi de méthodes analogues à celles de Cavalieri (voir la note 15 de la p. 5 du T. XII et la première ligne de la p. 753 du T. XIII).

[2]) Voir la note 1 de la p. 369, et le troisième alinéa de la note qui occupe la p. 471.

[3]) Comparez les p. 348—349.

[4]) L. Euler „Mechanica sive motus scientia analytice exposita", Petropoli, 1736. Voir la p. VII („Vorwort des Herausgebers") du „Tomus Primus" et la p. 3 („Præfatio" d'Euler) du „Tomus Secundus" de la nouvelle édition de cet ouvrage („Leonhardi Euleri Mechanica sive motus scientia analytice exposita edidit Paul Stäckel, Lipsiæ et Berolini", Teubner, MCMXII).

[5]) „Theoria Motvs Corporvm solidorvm sev rigidorvm", Avctore L. Evlero, Rostochii et Gryphiswaldiæ, A. F. Röse, MDCCLXV, p. 166, § 422: „Momentum inertiæ corporis respectu cujuspiam axis est summa omnium productorum, quæ oriuntur, si singula corporis elementa per quadrata distantiarum suarum ab axe multiplicentur".

[PREMIÈRE PARTIE. STATIQUE.]

I [1]).

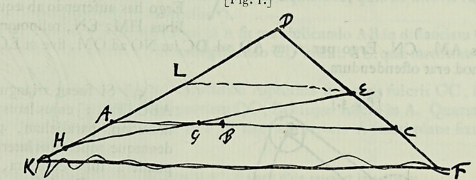
[1659.]

[Deux problèmes de 1659 ſur l'équilibre de différents poids ſuſpendus à des fils. Ce ſont les N°. 611 et 612 (p. 394 et 395) de notre Tome II].

II [2]).

[Oct. 1659] [3]).

[Fig. 1.]



1. AH ∞ EC [4]). HE, AC ſunt lineæ [5]) [Fig. 1].
Oſtendendum quod EG —— GH = AD —— DC [6]).
Sit EL parallela CA.

[1]) Manuscrit A, p. 90 et 92. On peut consulter sur ces mêmes problèmes la lettre de Huygens à D. Rembrandtz. van Nierop du 9 avril 1659 (p. 569—570 de notre T. VI), la réponse de van Nierop du 3 mai 1659 (p. 391—392 du T. II) et la réplique de Huygens du 10 mai 1659 (p. 571—573 du T. VI).

[2]) Manuscrit A, p. 156. Les §§ 1, 2, et 3 sont purement géométriques, mais le § 4 qui fait suite au § 3 traite un cas de statique.

[3]) La p. 155 porte la date du 11 oct. 1659 et la p. 157 est datée: oct. 1659.

[4]) Le signe ∞ indique l'égalité. Comparez la note 3 de la p. 7 du T. XI.

[5]) C. à d. des lignes droites.

[6]) C. à d. EG : GH = AD : DC. Comparez la note 19 de la p. 13 du T. XI.

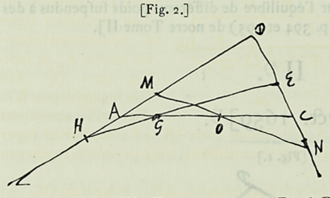
Ergo ut AD ad DC ita LD ad DE, et AL ad EC, ſive AL ad AH, nam AH ∞ EC.

Sed ut LA ad AH ita EG ad GH. Ergo EG ad GH ut AD ad DC. quod erat demonſtrandum.

2. Converſum quoque verum eſt; nempe ſi intra angulum ADE ducantur duæ HE, AC, fueritque ut AD ad DC ita EG ad GH, etiam HA, EC æquales erunt.

Nam quia ut AD ad DC ita AL ad CE, erit ergo AL ad CE ut EG ad GH, hoc eſt ut LA ad AH. ideoque EC æqualis AH.

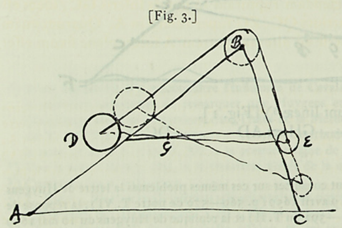
[Fig. 2.]



3. Secent rurſus ſe mutuo AC HE in G [Fig. 2], ſitque ut AD ad DC ita EG ad GH. Et ſumatur HM æqualis EN; et jungatur MN. dico eam ſecari à recta AC in O, ut ſit NO ad OM ſicut EG ad GH ſive ut AD ad DC.

Eſt enim AH ∞ EC per 2. Ergo has auferendo ab æqualibus HM, EN, relinquuntur æquales AM, CN. Ergo per 1. ut AD ad DC ita NO ad OM, ſive ut EG ad GH. quod erat oſtendendum.

[Fig. 3.]



[4.] Si fuerit triangulum ABC [Fig. 3] cujus latus AC horizonti parallelum, pendeantque ſuper ejus lateribus pondera fune colligata, D, E. quorum D ad E gravitas ſit ſicut latus AB ad BC; pondera quemcunque datum ſitum ſervabunt.

Quia centrum ipſorum gravitatis commune G non deſcendit etiamſi pondera moveri incipiant, ſed eadem ſemper manet altitudine, ut ex præcedentibus facile oſtenditur.

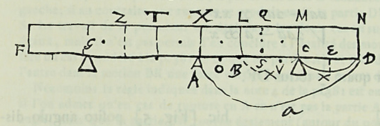
[1]) Manuscrit B, p. 123.
[2]) La p. 107 est datée: août 1662, et la p. 125 porte la date du 15 sept. 1662.
[3]) Il n'y a pas de „fulcrum" en ce point, comme la figure pourrait le faire croire. Lorsque plus

III [1]).

[1662] [2]).

Quæritur ubi ponenda fulcra G C ſub trabe FN [Fig. 4], ut tantundem ſit periculi rupturæ in A [3]) atque in C vel in G.

[Fig. 4.]



Sit DC ∞ *x*. AD vel AF ∞ *a*. Sit CB ∞ ∞ CD. Ergo pars BN cum æquilibret ſuper C, nequaquam incumbit medio A, ac ſimiliter pars TF. Sed ſola incumbit pars BT. Æquipollet autem pars BX ad rupturam faciendam in A non fultum parti QC ad rumpendum ſuper fulcrum in A, poſitis his partibus inter ſe æqualibus, quia ex utravis ruptura in C vel A par gravitatis ſit deſcenſus [4]).

Ergo momentum ad rupturam in A ſit multiplicando AB in diſtantiam OC. At momentum rupturæ in C, ſit multiplicando CD in diſt. CE. quæ momenta æqualia eſſe oportet [5]).

Partis TB momentum ad faciendam rupturam in poſitis fulcris GC, idem eſt ac momentum duarum ſimul partium QC, ZG ſuper fulcro in A. Quarum unam QC tantum conſiderare opus ac ſi ad alteram partem A fulcri plane fixum eſſet libræ brachium [6]).

loin Huygens parle d'un „fulcrum in A", il s'agit d'un support imaginaire.
[4]) C. à d. (comparez la suite de cette Pièce) „posito angulo disjunctionis æquali". Huygens suppose que, lorsqu'une rupture se produit p. e. en MC, la partie MNDC de la poutre tourne autour de C d'un certain „angle de disjonction". Lorsque la rupture se produit en A, on peut considérer, si l'on veut, la rotation de la partie XNDA (ou de la partie XLBA) autour de C comme une rotation virtuelle. Par „gravitatis descensus" il faut entendre le produit du poids du corps considéré par la descente verticale de son centre de gravité. La thèse de Huygens (comparez la note 4 de la p. 383) d'après laquelle dans le cas considéré les deux ruptures en A et en C sont également probables lorsque le „travail" de la pesanteur est le même dans les deux cas, l'angle de disjonction (égal dans ce cas-ci à l'angle de rotation virtuelle; comparez la note 6) étant supposé le même, est correcte: ces „travaux" sont proportionnels aux moments de rupture. Si une rupture se produit en A, la demi-poutre AN aura la tendance de tourner autour du point C avec un moment égal à celui de la partie BX par rapport au point C, puisque le moment de la partie BN par rapport au point C est nul.
[5]) Les équations qui suivent expriment l'égalité de ces deux moments.
[6]) Si une rupture se produit en A et que les deux moitiés de la poutre descendent simultanément

$$\text{ex}\left.\begin{array}{l}\text{AB} \infty a - 2x \\ \text{AO} \infty \frac{1}{2}a - x \\ \text{AC} \infty a - x\end{array}\right\}\text{s.}^{1)}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{OC} \infty \text{AV} \infty \frac{1}{2}a \\ \text{AB} \infty \text{SC} \infty a - 2x\end{array}\right\}\text{m.}^{2)} \qquad \left.\begin{array}{l}x \ \text{CD} \\ \frac{1}{2}x \ \text{EC}\end{array}\right\}\text{m.}$$

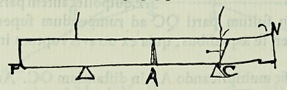
$$\frac{1}{2}aa - ax \qquad\qquad \frac{1}{2}xx$$

$$aa - 2ax \infty xx$$

$$\sqrt{2aa} - a \infty x$$

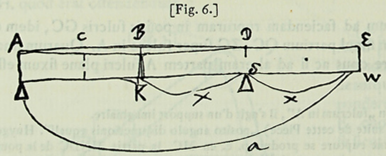
Ergo CD paulo major quam $\frac{1}{5}$ totius DF.

[Fig. 5.]



hic [Fig. 5] posito angulo disjunctionis æquali consideravi descensum duarum medietatum trabis, facta ruptura in A [3]. Et partis CN cum rumpitur in C. convenit priori operationi.

[Fig. 6.]



Si AB ∞ BD ∞ DE [Fig. 6] non habebit AK tantum momenti ad rumpendum in K, ac DW ad rumpendum in S [4]. nam duo AK, KD duntaxat tantum habent momenti ad rumpendum in K [5]).

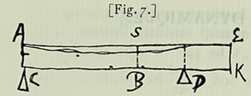
en tournant d'un même angle (infiniment petit) resp. autour des supports G et C, l'angle de disjonction sera le double de cet angle de rotation. Mais si la partie droite descend seule, l'angle de disjonction sera égal à l'angle de rotation, comme nous l'avons déjà dit dans la note 4.

1) s. = subtrahendo.

2) m. = multiplicando.

3) On peut en effet, au lieu de considérer le moment de la partie BX [Fig. 4] par rapport au point C, considérer directement le moment de la demi-poutre AN par rapport au point C: c'est le même moment sous une autre forme (comparez la note 4 de la p. 381).

[Fig. 7.]



pars AB [Fig. 7] solum gravitatem habet, reliqua BE nihil [6]). fulcra in C et D. quæritur ubi rumpi debeat CE. Resp. ibi, ubi sumto æquali angulo rupturæ, plurimum descendat gravitas composita è partibus ipsius AB [7]).

4) On trouve en effet que le moment de rupture en K est la moitié du moment de rupture en S.

Si une rupture se produit en K, la partie AK aura la tendance de tourner autour du support gauche; si au contraire une rupture se produit en S, la partie DW tournera autour du support S. Le travail de la pesanteur est égal dans les deux cas en supposant les angles de rotation égaux, mais il n'est pas permis d'en conclure à l'égalité des moments de rupture : ce cas diffère du cas considéré à la p. 381 en ce que les parties AK et BW de la poutre exercent l'une sur l'autre dans la section BK une force verticale qui faisait défaut dans la section AX de la Fig. 4.

Néanmoins la règle indiquée dans la note 4 de la p. 381 est encore applicable au cas actuel, si l'on admet qu'en cas de rupture en A ce n'est pas la partie AK seule qui tourne d'un petit angle, mais que la partie BW tourne également (autour du point S) de telle manière que les deux parties continuent à cohérer au point B; l'angle de rotation de la partie AK est alors la moitié de l'angle de disjonction. Comparez les p. 335 et 336 de l'Avertissement qui précède.

5) C. à. d. le moment de DW par rapport à S est égal au moment de rupture qui existerait en K si la partie DW de la poutre était supprimée et que seule la partie AK, KD subsistait. En effet, dans ce dernier cas le moment de rupture en K serait égal au moment de la partie AK par rapport au support gauche, d'après les considérations de la p. 381. Mais, comme la partie DW existe, le moment en K doit avoir une valeur différente, que Huygens ne détermine pas.

6) C. à. d. la partie AB seule a un moment par rapport au point D, le moment de BE par rapport à D est nul.

7) Cette solution peut ne pas paraître évidente, mais le calcul la confirme. Si nous admettons, comme la figure l'indique, que CB = BK et BD = DK, nous pouvons poser $\text{CK} = 2l$, $\text{CB} = l$, $\text{BD} = \text{DK} = \frac{1}{2}l$. Le moment de rupture à une distance x du point C est alors $\frac{\text{P}}{12l}(4lx - 3x^2)$, où P est le poids de la poutre. Ce moment a une valeur maxima pour $x = \frac{2}{3}l$. Or, on trouve cette même valeur en appliquant la règle que Huygens énonce dans ce paragraphe. En effet, si une rupture se produit entre C et B de sorte qu'à une distance x du point C un angle de disjonction (infiniment petit) γ apparaît, les parties gauche et droite de la poutre, qui cohèrent encore en haut, auront tourné resp. autour de C et de D d'angles α et β, où $\alpha + \beta = \gamma$ et $\alpha x = \beta(1\frac{1}{2}l - x)$; il en résulte $\alpha = \frac{3l - 2x}{3l}\gamma$ et $\beta = \frac{2x}{3l}\gamma$. Les centres de gravité des parties gauche et droite de la partie AB de la poutre sont descendus resp. de $\frac{1}{2}\alpha x$ et de $\beta(l - \frac{1}{2}x)$, et le travail correspondant de la pesanteur est le produit de $\frac{\text{P}}{2l}$ par $\frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta(l - x)(l - \frac{1}{2}x)$, ce qui se réduit à $\frac{\text{P}\gamma}{12l}(4lx - 3x^2)$. Ce travail est maximum pour $x = \frac{2}{3}l$. Comparez la démonstration plus générale donnée dans l'Avertissement (note 2 de la p. 335).

[DEUXIÈME PARTIE. DYNAMIQUE.]

I [1]).

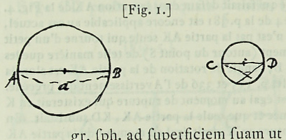
24 Febr. 1659.

24 Febr. 1659.

Ex diverſis materijs, quarum inter ſe cognita ſit gravitas [2]) ſphæras conficere quæ per aerem aquamve æque cito decidant.

Sit data ſphæra AB [Fig. 1] v. gr. ex ligno cujus ad plumbum gravitas in aere ſe habeat ut c ad d. Oporteatque ex plumbo facere globum CD qui per aerem æque cito deſcendat atque ſphæra lignea AB.

[Fig. 1.]



ſit b gravitas ſphæræ AB.

a^3 — x^3 — $b \mid \frac{bx^3}{a^3}$ [3]) gravitas ſphæræ CD ſi eſſet è ligno.

c — d — $\frac{bx^3}{a^3}$ [3]) $\mid \frac{dbx^3}{ca^3}$ gravitas ſphæræ CD ex plumbo.

gr. ſph. ad ſuperficiem ſuam ut grav. ſph. CD ad ſuperf. ſuam

b —— aa —— $\frac{dbx^3}{ca^3}$ —— xx [4])

$$bxx \infty \frac{dbx^3}{ca}$$

$$ca \infty dx$$

$$\frac{ca}{d} \infty x$$

Ergo ſicut gravitas plumbi ad gravitatem ligni ita ſit diameter ſphæræ ligneæ ad diametrum ſphæræ plumbeæ. hæc æque velociter atque illa decidet [5]).

1) Manuscrit A, p. 85. 2) Dans cette Pièce, ce mot désigne tantôt le poids spécifique, tantôt le poids lui-même.

3) C. à. d. $a^3 : x^3 = b$: poids de la sphère CD en bois, donc ce dernier poids $= \frac{bx^3}{a^3}$.

4) C. à. d. $b : a^2 = \frac{dbx^3}{ca^3} : x^2$.

5) Comparez la note 1 de la p. 256 de ce Tome, où nous avons fait mention de la lettre de Huygens à Moray de 1661. Le même sujet fut discuté en 1662 dans la Correspondance avec Moray (voir les pp. 26, 35, 36, 46, 47, 60, 87 et 93 du T. IV).

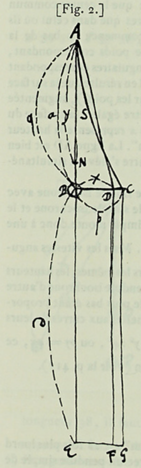
D'ailleurs déjà en 1646 Huygens s'était occupé de ce sujet (voir les p. 73—75 du T. XI) et les considérations qu'il expose contiennent implicitement le même résultat.

Sic, quoniam gravitas plumbi ad gravitatem ceræ eſt ut 828 ad 69, hoc eſt duodecupla; debebit diameter ſphæræ cereæ ad diametrum plumbeæ ſe habere ut 12 ad 1. gravitas ergo ut 144 ad 1, quoniam gravitas ſphæræ AB ad gravitatem ſphæræ CD eſt ut b ad $\frac{bdx^3}{ca^3}$, hoc eſt, (reſtituto valore x) ut ca^3 ad $\frac{dc^3a^3}{d^3}$ ſive ut dd ad cc.

Diameter cereæ ad diametrum marmoreæ eſſe debet ut $2\frac{2}{7}$ ad 1 ſive ut 16 ad 7, quia hæc ratio gravitatum. Ergo gravitas ſphæræ illius ad hujus gravitatem ut $5\frac{11}{49}$ ad 1.

Item quia ratio gravitatis ferri ſub aqua ad gravitatem marmoris ſub aqua ſe habet ut $2\frac{4}{5}$ ad 1, talis quoque ratio erit diametrorum in ſphæris æque cito per aquam deſcendentibus. ut nimirum major ſit marmorea.

[Fig. 2.]



II [1]).

[1659] [2]).

Virga ponderans AB cum appenſo in B pondere [Fig. 2] qua velocitate oſcillationes peragat? a repræſentat pondus virgæ AB [3]), d refert pondus appenſum in B. p arbitraria longitudo. ASC parabola vertice A, q longitudo AB.

$$\frac{1}{2}ax + dx \infty \frac{1}{3}ap + dp \text{ }^{4})$$

$$x \infty \frac{\frac{1}{3}ap + dp}{\frac{1}{2}a + d} \text{ vel } \frac{2ap + 6dp}{3a + 6d}$$

1) Manuscrit A, p. 177 et 178.

2) La p. 176 porte la date du 15 nov. 1659, et la p. 188 celle du 15 déc. 1659.

3) En choisissant convenablement la longueur qui représente l'unité de poids.

4) Il est possible que le feuillet précédent du Manuscrit A, que nous ne possédons plus (comparez la note 1 de la p. 318 de ce Tome),

$$p \text{———} \frac{\frac{1}{3}ap + dp}{\frac{1}{2}a + d} \text{———} q \;\Big|\; \frac{\frac{1}{3}aq + qd}{\frac{1}{2}a + d} \infty\, y \text{ [1])}$$

Ergo ut dimidia gravitas virgæ una cum appenſo pondere in B ad $\frac{1}{3}$ gravitatis virgæ una cum pondere in B, ita longitudo virgæ AB ad AN longitudinem penduli ſimplicis iſochroni virgæ cum appenſo pondere [2]).

contenait l'explication de ce calcul. D'ailleurs la p. 178 du Manuscrit (voir la suite de cette Pièce) donne également une partie de cette explication. Huygens suppose le pendule considéré en mouvement de telle manière que le point corporel B possède en son point le plus bas une vitesse qui lui permettrait d'atteindre une hauteur BC ou p s'il était libre. Cette hauteur est donc proportionnelle au carré de cette vitesse. Si l'on représente également par des lignes horizontales les hauteurs auxquelles pourraient s'élever les différents points pesants qui composent la barre AB, il est évident que les extrémités de ces lignes horizontales se trouveront sur la parabole considérée. Huygens part du principe que le centre commun de gravité doit monter autant dans le cas où tous les points sont libres que dans celui où ils composent un corps unique (comparez à ce propos l'alinéa qui commence en bas de la p. 415). De là il s'ensuit que, si l'on multiplie chaque hauteur par le poids correspondant, la somme sera la même dans les deux cas, bien entendu si les vitesses angulaires correspondant à la position verticale de la barre sont les mêmes dans les deux cas. Il en résulte que la surface ABC de la parabole (limite de la somme des produits des hauteurs par les poids), augmentée de la surface BCGE qui correspond au „pondus appensum", doit être égale à la surface du triangle ABD augmentée de celle du rectangle BDFE, où $BD = x$ représente la hauteur qu'atteignent en réalité le point B de la barre et le „pondus appensum". La ligne AD est bien une droite parce que les hauteurs auxquelles deux points de la barre s'élèvent simultanément sont proportionnelles à leurs distances du point A.

[1]) C. à. d. $p : x = q : y$, où y représente la longueur cherchée du pendule simple isochrone avec le pendule composé considéré. En effet, le point pesant du pendule simple isochrone et le point B décrivent des arcs semblables et le point pesant du pendule simple monte donc à une hauteur h déterminée par l'équation $h : x = y : q$; on en tire $h = \frac{xy}{q}$. Mais les vitesses angulaires du point B et du point pesant du pendule isochrone sont toujours les mêmes; les hauteurs auxquelles le point B supposé libre d'une part et le point pesant du pendule isochrone d'autre part peuvent monter en vertu des vitesses qu'ils possèdent au point le plus bas étant proportionnelles aux carrés de ces vitesses, seront donc aussi proportionnelles aux carrés de leurs distances à leurs points de suspension respectifs. On a donc $\frac{xy}{q} : p = y^2 : q^2$, ou $py = qx$, ce qu'il fallait démontrer. Huygens donne cette démonstration plus loin (voir la p. 417).

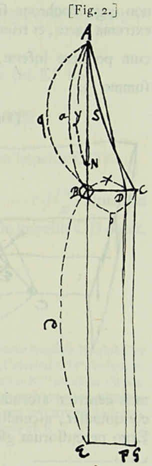
[2]) Pour $d = 0$, on trouve $y = \frac{2}{3}q$. Comparez la note 1 de la p. 388.

[3]) Lisez: $\frac{8}{9}q$.

[4]) Nous supprimons le calcul numérique. Lorsque le „pondus appensum" est 28 fois plus lourd que la barre et qu'on veut que le pendule composé soit isochrone avec un pendule simple de

Si $a \infty d$, fit $y \infty \frac{8}{9}a$ [3]).

[Fig. 2.]



$$\frac{\frac{1}{3}aq + qd}{\frac{1}{2}a + d} \infty\, y$$

$$\frac{1}{3}aq + qd \infty \frac{1}{2}ay + dy$$

$$q \infty \frac{1}{2}ay + dy \text{ per } \frac{1}{3}a + d$$

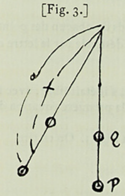
$$q \infty \frac{\frac{1}{2}ay + dy}{\frac{1}{3}a + d}$$

$$q \infty \frac{3ay + 6dy}{2a + 6d}$$

$a \infty 1$, $d \infty 28$, $y \infty 38$.

$$38\tfrac{19}{85} \infty\, q \text{ [4])}$$

[Fig. 3.]



$$\frac{acz}{x} + \frac{4}{9}\frac{acz}{x} \infty cz + \frac{2}{3}cz \text{ [Fig. 3] [5])}$$

$$\frac{13}{9}\frac{ac}{x} \infty \frac{5}{3}c$$

$$\frac{13}{3}a \infty 5x$$

$$13a \infty 15x$$

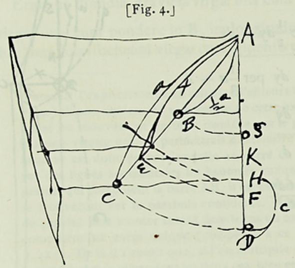
$$\frac{13}{15}a \infty x$$

longueur 38, il faut donc donner au pendule composé une longueur $38\frac{19}{85}$. Le „pondus appensum" est considéré, tant ici que plus haut, comme un point matériel.

[5]) Huygens considère ici un pendule idéal dont le fil ou la barre est impondérable et porte deux

non ergo iſochrona ſunt pendula quorum alterum habet bina pondera æqualia in extrema parte, et triente ab extremo ut hic P, Q, alterum virgam æqualis ponderis cum pondere inferæ appenſo; licet virgæ centrum oſcillationis ſit $\frac{2}{3}$ à puncto ſummo [1]).

[Fig. 4.]



ABC [Fig. 4] eſt virga ſine pondere. AB ∞ BC. in B et C affixi ſunt globi æquales. quæritur cujus longitudinis pendulum oſcillationes æque veloces habiturum ſit cum pendulo ABC, bina pondera habente. ſit pendulum AE quod ſit ∞ ∞ $\frac{5}{6}$ penduli AC [2]). ad reſolvendum hoc problema imaginor globos C et B occurrere globis ſibi æqualibus D et S [3]). quo fiet ut pendulum poſt hunc occurſum omni motu privetur [4]). unde oportet D et S tanta vi percuti ut compoſitæ ex ijs gravitatis centrum aſcendat æque alte ac fuerat aſcenſurum ſi pendulum ABC motum continuaſſet; aſcendiſſet autem ad altitudinem ubi erat poſitis globis in B et C. Ergo percuſſorum globorum centrum gravitatis eo usque aſcendere debet. Duxi

points matériels de même poids, l'un en bas, l'autre un tiers de la longueur de la barre plus haut.

La longueur du pendule simple isochrone est appelée x. Le poids de chacun des points matériels s'appelle z. La hauteur que le poids P atteint réellement est désignée par la lettre c; la hauteur correspondante pour le poids Q est donc $\frac{2}{3}c$.

Si nous appelons p la hauteur que le poids P pourrait atteindre, s'il était libre, avec la vitesse qu'il possède au point le plus bas de sa course, on a d'après la première équation de la note 1 de la p. 386 $p : c = a : x$, a étant la longueur de la barre impondérable comme on le voit dans la Fig. 3. On en tire

$$p = \frac{ac}{x}.$$

Pour le poids Q la hauteur correspondante est $\frac{4}{9}p$.

L'équation de Huygens exprime donc ici aussi que si l'on multiplie chaque hauteur par le poids correspondant, la somme sera la même dans le cas où tous les points sont libres que dans celui où ils composent un corps unique.

[1]) La dernière partie de cette phrase exprime le résultat trouvé dans le cas précédent lorsque le „pondus appensum" est supprimé (comparez la note 2 de la p. 386 et les p. 423 et 439).

igitur utrobique magnitudines in altitudines ad quas aſcendunt, unde ſummæ productorum utrobique æquales fieri debent [5]).

$$a \text{ —— } \sqrt{ax} \text{ —— } \text{cel}^{\text{as}}\ \text{CD}\ ^{3)}\ \text{liberi} \propto b \Big/ \frac{b}{a}\sqrt{ax}\ \text{cel. EF lib.}$$

$$x \text{ —— } a \text{ —— } \frac{b}{a}\sqrt{ax} \Big/ \frac{b}{x}\sqrt{ax}\ \text{cel. CD coacti}$$

qu. cel. CD lib. qu. cel. CD coacti alt. DH ad quam impellit C D lib.

$$bb \text{ ———— } \frac{bba}{x} \text{ ———— } c \Big/ \frac{ca}{x}\ \text{altitudo ad quam impellit C D coact.}$$

celeritas BO [3]) coacti eſt dimidia celeritatis CD coacti [5]).

[2]) C'est le résultat du calcul qui suit.

[3]) Dans la fig. 4 D et S désignent, comme l'on voit, deux globules contre lesquels les globules C et B vont choquer, tous les globules étant égaux entre eux. „Celeritas CD" désigne la vitesse que le globule C communique au globule D. De même „celeritas BS" serait la vitesse que le globule B communique au globule S. Mais Huygens écrit par inadvertance „celeritas BO" au lieu de „celeritas BS" et désigne encore une fois le globule S par la lettre O. La lettre S de la Fig. 4 a d'ailleurs plus ou moins la forme d'une lettre O corrigée en S.

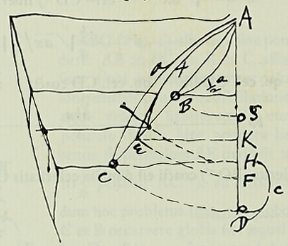
[4]) Comparez la „Prop. prima" de la p. 33.

[5]) C'est ce qu'exprime l'équation $\frac{caz}{x} + \frac{\frac{1}{4}caz}{x} = cz + \frac{1}{2}cz$ qui suit. Cette équation correspond à celle du cas précédent représenté par la Fig. 3; seulement comme le poids supérieur se trouve cette fois, non pas à un tiers de la longueur du pendule mais au milieu du fil ou de la barre impondérable, le facteur $\frac{4}{9}$ du premier membre est remplacé ici par $\frac{1}{4}$ et le facteur $\frac{2}{3}$ du second membre par $\frac{1}{2}$. Supposer, comme Huygens le fait ici, que les globules B et C viennent choquer contre d'autres globules égaux et libres en leur communiquant toute leur vitesse, cela revient évidemment au même que de supposer que les globules B et C eux-mêmes sont mis en liberté au point le plus bas de leur parcours. Mais Huygens dérive ici l'expression $\frac{ca}{x}$ que l'on rencontre dans cette formule par un raisonnement différent de celui que nous avons suivi dans la note 5 de la p. 387 et qui correspondait à celui de Huygens dans le cas de la Fig. 2.

Voici le nouveau raisonnement. Comme AE ou AF représente la longueur x du pendule simple isochrone avec le pendule considéré, le temps d'une oscillation est le même pour le point E qu'il soit „liberum" ou „coactum", c. à.d. libre ou attaché au pendule composé. L'expression „celeritas EF lib.", égale à ce qu'on peut appeler la „celeritas EF coacti", désigne la vitesse que le point E possède en atteignant l'endroit F. „Celeritas CD liberi" altitudo ad quam impellit B O [1]) coactum [2]) erit $\frac{1}{4}\frac{ca}{x}$.

z pondus utriusvis globi.

[Fig. 4.]



$$\frac{caz}{x} + \frac{\frac{1}{4}caz}{x} \infty cz + \frac{1}{2}cz \text{ }^{3})$$

$$\frac{5}{4}\frac{ca}{x} \infty \frac{3}{2}c$$

$$10a \infty 12x$$

$$5a \infty 6x$$

$$\frac{5}{6}a \infty x$$

la vitesse que posséderait à l'endroit D le globule C, si AC était lui aussi un pendule simple. On aura:

$$\sqrt{a} : \sqrt{x} = \text{cel}^{\text{as}}\text{ CD liberi} : \text{cel}^{\text{as}}\text{ EF liberi},$$

ce qu'on peut écrire si l'on veut (comparez la note 1 de la p. 300)

$$a : \sqrt{ax} = b : \text{cel}^{\text{as}}\text{ EF liberi},$$

en désignant par b la „cel$^{\text{as}}$ CD liberi". On en tire

$$\text{cel}^{\text{as}}\text{ EF liberi} = \frac{b}{a}\sqrt{ax},$$

donc aussi

$$\text{cel}^{\text{as}}\text{ EF coacti} = \frac{b}{a}\sqrt{ax}.$$

Mais la figure fait voir que

$$\text{cel}^{\text{as}}\text{ EF coacti} : \text{cel}^{\text{as}}\text{ CD coacti} = x : a.$$

On en tire

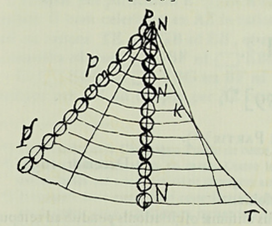
$$\text{cel}^{\text{as}}\text{ CD coacti} = \frac{b}{x}\sqrt{ax}.$$

„Altitudo ad quam impellit C D lib." veut dire: la hauteur à laquelle D parvient après avoir reçu de C la „cel$^{\text{as}}$ CD liberi"; „altitudo ad quam impellit C D coact." veut dire: la hauteur à laquelle D (qui est toujours libre) parvient après avoir reçu de C la „cel$^{\text{as}}$ CD coacti". On a donc

$$(\text{cel. CD lib.})^2 : (\text{cel. CD coacti})^2 = \text{la première hauteur} : \text{la deuxième}.$$

Or la première hauteur n'est autre que celle dont le globule C, parvenu en D, est descendu; c'est la hauteur DH ou c. On a donc:

[Fig. 5.]



altitudines ad quas ascendent globi NNN [Fig. 5] impulsi a globis PPP, erunt ad parabolam aliquam PKT cujus vertex in P. Ex eo quod $\frac{ca}{x}$ inventa est altitudo [Fig. 4] ad quam impellit C D coactum [4]). nempe coactum incedere celeritate [5]) penduli AE ∞ x [6]).

$$b^2 : \frac{b^2 a}{x} = c : \text{la hauteur à laquelle D parvient avec la „cel. CD coacti"}.$$

Cette dernière hauteur est donc $\frac{ca}{x}$, ce qu'il fallait trouver.

[1]) Voir la p. 389, note 3.

[2]) „Altitudo ad quam impellit B O coactum" (comparez la note 4 de la p. 389) désigne la hauteur à laquelle le globule B „coactum" fait monter par son choc le globule O (ou plutôt S, voir la note 3 de la p. 389) qui est toujours libre.

[3]) Voir la p. 389, note 5.

[4]) Comparez la note 2 qui précède. C'est le globule C qui est „coactum" et qui donne sa vitesse au globule D qui est libre.

[5]) Vitesse angulaire.

[6]) Voir pour la signification de x, de c et de a la Fig. 4. L'expression $\frac{ca}{x}$ déduite plus haut est indépendante, comme le montre cette déduction, de la distribution des poids du pendule composé linéaire. Dans la figure qui accompagnait cette déduction, le globule C était placé tout en bas du pendule composé, mais le raisonnement reste entièrement le même si l'on considère un globule placé plus haut. Or, dans la formule $\frac{ca}{x}$ la longueur x est une constante, pour un pendule composé donné, mais lorsque la distance a du globule considéré au point de suspension varie, la longueur c variera dans le même rapport, de sorte que le produit ca, et la hauteur $\frac{ca}{x}$, seront proportionnels au carré de la distance du globule considéré au point de suspension. Si l'on suppose tracées dans la figure dans le sens horizontal les hauteurs $\frac{ca}{x}$, chacune à partir du globule N correspondant, les extrémités se trouveront donc sur une parabole. C'est la parabole déjà tracée dans la Fig. 2 de la p. 385 au début de cette Pièce.

III [1]).

[1659] [2]).

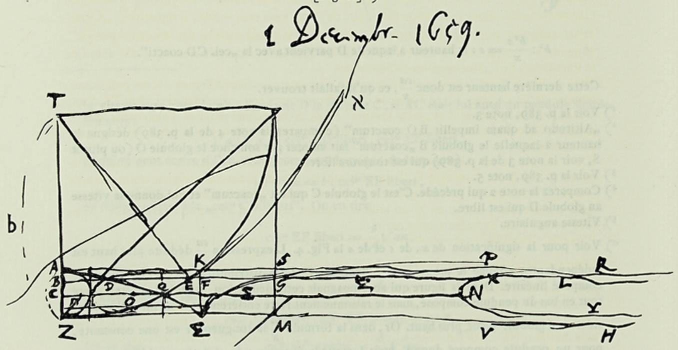
[Première Partie] [3]).

1 Decembr. 1659.

Hinc data fuit occasio inventi de Cycloide.

Quæritur quam rationem habeat tempus minimæ oscillationis penduli ad tempus casus perpendicularis ex penduli altitudine [4]).

[Fig. 6.] [5])



[1]) La Pièce, qui traite du tautochronisme de la cycloïde, est empruntée aux p. 72—74 du Recueil „Chartæ Mechanicæ" (la numération des feuilles de ce Recueil date de 1928) et aux p. 187—188 du Manuscrit A.

Elle a été publiée par l'un de nous avec une traduction néerlandaise („De Ontdekking van het Tautochronisme der Cycloidale Valbeweging, eene bijdrage tot de 300e herdenking van den geboortedag van Christiaan Huygens op 14 April 1929", door E. J. Dijksterhuis, Euclides, Afl. 5, jaargang 1928/29, P. Noordhoff, Groningen); dans cette publication on retrouvera les figures de Huygens, mais plus correctement dessinées.

Tempus per particulam E [6]), ex K cadentis [Fig. 6], est ad tempus per particulam B cum celeritate ex AZ in ratione composita ex longitudine E ad B, hoc est ex ratione TE seu GB ad EB, et ex ratione ZΣ seu BF ad BΔ [7]), quæ ratio composita est quæ $\square$ GBF ad $\square$ EBD.

Ut $\square$ EBD ad $\square$ FBG ita BF ad BX, unde ut omnes BX ad omnes BF ita tempus per KZ ad tempus per AZ cum celeritate ex AZ [8]). Et tempus per KZ

[2]) La Première et la Cinquième Partie de cette Pièce ont été datées par Huygens.

[3]) „Chartæ Mechanicæ", p. 72 recto. Outre le texte imprimé ici la feuille contient différents calculs biffés qui nous paraissent étrangers au problème de la cycloïde.

[4]) Il apparaît donc que c'est la considération de la période d'une oscillation suivant un très petit arc de cercle qui a conduit aux recherches dont est sorti la découverte du tautochronisme de la chute suivant des arcs cycloïdaux.

Galilée s'était déjà sérieusement occupé du mouvement d'un corps grave suivant une circonférence de cercle verticale; voir la Giorn. III des „Discorsi", surtout la Prop. XXXVI (Ed. Naz. VIII, p. 261 et suiv.). À la p. 73 verso des „Chartæ mechanicæ" Huygens se propose de calculer le temps d'une oscillation circulaire de 180°, mais sans succès; il remarque: „Quæritur tempus per quadrantem circumferentiæ quod dubito an inveniri possit". Il ne réussit que plus tard à trouver une solution approchée de ce problème (voir le début de la Pars Prima de l'„Horologium oscillatorium").

[5]) Dans la Fig. 6 T est le centre et TZ le rayon d'un quart de circonférence, K un point quelconque de ce dernier. L'arc ZK de la circonférence est censé coïncider avec l'arc ZK d'une parabole ZKℵ à sommet Z et „latus rectum" 2TZ. AQΣ est une parabole congruente avec la parabole ZKℵ ayant son sommet en A. La genèse des autres courbes de la figure est expliquée dans le texte.

[6]) E est une partie infiniment petite de l'arc KZ, B sa projection sur AZ. L'auteur compare le temps t_1 d'une chute suivant E, lorsque le mobile part de K avec une vitesse nulle, avec le temps t_2 correspondant à un mouvement uniforme suivant B d'un point possédant une vitesse égale à celle que possède en Z un mobile tombant parti de A avec une vitesse nulle. Nous désignerons cette dernière vitesse par v_z.

[7]) Il faut lire: BD. Voir le premier Théorème de la Deuxième Partie qui suit (note 2 de la p. 398).

[8]) L'auteur introduit donc une ordonnée BX telle que $\frac{t_1}{t_2} = \frac{\mathrm{BX}}{\mathrm{BF}}$ (voir sur les temps t_1 et t_2 la note 6). Par conséquent, si l'on considère les éléments successifs B comme égaux entre eux, de sorte que t_2 est une constante, les ordonnées BX mesureront les temps t_1. Le temps de la chute suivant KZ, considéré comme la somme des temps t_1, sera donc représenté par la surface ASPR..NΥ..HVZA [Fig. 6] considérée comme la somme de toutes les ordonnées BX. On a par conséquent

$$\frac{\text{temps de la chute suivant KZ}}{t_2\,(\text{c. à. d. temps de parcours d'un élément déterminé B avec la vitesse } v_z)} = \frac{\text{omnes BX}}{\text{BF}}.$$

Mais on a aussi

$$\frac{\text{temps de parcours de AZ avec la vitesse } v_z}{t_2} = \frac{\text{omnes BF}}{\text{BF}};$$

donc

$$\frac{\text{temps de la chute suivant KZ}}{\text{temps de parcours de AZ avec la vitesse } v_z} = \frac{\text{omnes BX}}{\text{omnes BF}} = \frac{\text{surf. AR..N..HZA}}{\square\,\text{KZ}}.$$

ad tempus per AZ [1]) ut ſpatium infinitum [2]) ASPRLNYHVMZA ad 2 $\square$ KZ [3]).

$$\mathrm{CO} \text{ --- } \mathrm{CG} \text{ --- } \mathrm{CF} \text{ --- } \mathrm{CN}\ ^{4)} \qquad \mathrm{CO} \infty \tfrac{1}{2}\,\mathrm{CF}$$

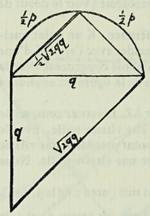
$$\text{ergo } \mathrm{CN} \infty 2\mathrm{BG}.$$

ſit AZ $\infty\ c$ CF   CN ∞ 2BG   CI

ZM, TZ $\infty\ b$. $\sqrt{2bc} \text{ --- } 2b \text{ --- } \tfrac{1}{2}c \,\Big|\, \dfrac{bc}{\sqrt{2bc}}$ [5])

$$\text{ſive } \sqrt{\tfrac{1}{2}bc} \text{ hæc eſt ipſa } \mathrm{CO} \infty \tfrac{1}{2}\,\mathrm{CF}.$$

conſideratur AK applicata in circumferentia tanquam æqualis applicatæ in parabola ZKℵ, cujus $\frac{1}{2}$ lat. rectum TZ, cui eadem eſt parabola AQΣ. hoc eſt ſupponitur AK ∞ ZΣ [6]).



$$\mathrm{C\Pi}$$

$$p \text{ --- } q \text{ --- } \tfrac{1}{2}c \,\Big|\, \frac{\tfrac{1}{2}cq}{p}$$

CI   CF   CΠ [7])

$$\tfrac{1}{2}c \text{ --- } \sqrt{2bc} \text{ --- } \frac{\tfrac{1}{2}cq}{p} \,\Big|\, \text{aliud } \left.\frac{\square\, q\sqrt{2bc}}{\frac{p}{2}}\right\}\text{m.}$$

$$\frac{2q\sqrt{2bc}}{p}$$

$$\mathrm{CN}$$

$$2b \text{ --- } \frac{2q}{p}\sqrt{2bc}$$

---

[1]) In margine: „tempus per AZ est æquale tempori motus æquabilis per AZ cum $^1/_2$ celeritate ex AZ”.

[2]) C. à. d. un espace qui s'étend jusqu'à l'infini.

[3]) En effet, on a

$$\frac{\text{temps de parcours de AZ avec la vitesse } v_z \text{ (note 6 de la p. 393)}}{\text{temps de parcours de AZ lorsque le mobile tombant part du repos en A}} = \frac{1}{2}$$

(Galilée, De Motu Accelerato, Prop. I. „Discorsi”, Giorn. III. Ed. Naz. VIII, p. 208).

[4]) F et G doivent être considérées ici comme des lettres courantes: lorsque B vient en C, F et

---

G seront les intersections de CN avec KΣ et SM respectivement.

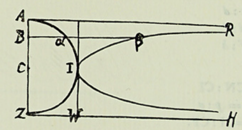
La définition de BX (note 8 de la p. 393), appliquée au point C au lieu de B, donne $\frac{\mathrm{CQ}^2}{\mathrm{CF}\,.\,\mathrm{CG}} = \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{CN}}$, où $\mathrm{CQ}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Z\Sigma}^2 = \frac{1}{2}\mathrm{CF}^2$. Il s'ensuit que CN = 2CG.

Quant au raisonnement du texte, il faut l'entendre comme suit. Une droite CO est construite comme troisième proportionnelle à CF et à CQ. De $\frac{\mathrm{CQ}^2}{\mathrm{CF}^2} = \frac{1}{2}$, on tire donc $\mathrm{CO} = \frac{1}{2}\mathrm{CF}$. Dans la suite aussi l'auteur construit souvent des lignes ne servant qu'à représenter des expressions composées ayant la dimension d'une longueur (telles que l'expression $\frac{\mathrm{CQ}^2}{\mathrm{CF}}$ dans le cas considéré).

[5]) Dans la suite, aucun usage n'est fait de cette relation.

[6]) On vérifiera aisément que cette supposition revient à celle-ci: la circonférence (T; TZ) oscule en Z la parabole ZKℵ.

[7]) Dans ce qui suit l'auteur fait usage de la courbe à sommet I (voir la Fig. 6 et la Fig. ci-jointe).



La genèse de cette courbe est expliquée dans la quatrième Proposition de la Deuxième Partie de cette Pièce, à laquelle nous empruntons dès maintenant ce qui suit: Bα étant une ordonnée quelconque de la demi-circonférence AZ, on détermine Bβ de telle manière que

$$\frac{\mathrm{B}\alpha}{\mathrm{CI}} = \frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{B}\beta}.$$

La Proposition citée dit en outre que la surface comprise entre la courbe ainsi construite, les asymptotes AR, ZH et la droite AZ est à celle du rectangle AW dans un rapport égal à celui de la demi-circonférence p au diamètre q.

Appelant cette surface O_2 et le „spatium infinitum” AR..N..HZA, considéré plus haut [Fig. 6], O_1, nous savons (voir la note 3, et la note 8 de la p. 393):

$$\frac{\text{temps de la chute suivant KZ}}{\text{temps de parcours de AZ, lorsque le mobile tombant part du repos en A}} = \frac{O_1}{2\square \mathrm{KZ}}$$

et, d'après ce qui vient d'être dit, $\frac{O_2}{\square \mathrm{AW}} = \frac{p}{q}$.

Remplaçons $\frac{O_1}{2\square \mathrm{KZ}}$ par $\frac{O_1}{O_2} \cdot \frac{O_2}{\square \mathrm{AW}} \cdot \frac{\square \mathrm{AW}}{2\square \mathrm{KZ}}$ (1).

On peut remarquer que les ordonnées correspondantes BX et Bβ sont dans un rapport constant, égal à celui des surfaces O_1 et O_2. En effet, suivant la troisième Proposition de la Deuxième Partie, on a la relation $\frac{\mathrm{BE}\,.\,\mathrm{BD}}{\mathrm{CQ}^2} = \frac{\mathrm{B}\alpha}{\mathrm{CI}}$,

de sorte que $$\mathrm{BX} = \frac{\mathrm{BF}^2.\,\mathrm{BG}}{\mathrm{BE}\,.\,\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{BF}^2.\,\mathrm{BG}\,.\,\mathrm{CI}}{\mathrm{CQ}^2.\,\mathrm{B}\alpha},$$

tandis que $$B\beta = \frac{CI^2}{B\alpha}.$$

Dans le rapport $\frac{BX}{B\beta}$ la seule grandeur variable, $B\alpha$, disparaît. Pour déterminer ce rapport nous prenons le point B en C; il s'ensuit que $\frac{O_1}{O_2} = \frac{CN}{CI}$. L'équation (1) nous donne alors

$$\frac{O_1}{2\square KZ} = \frac{CN}{CI} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{CI}{2AK} = \frac{CN \cdot p}{q \cdot 2AK} = \frac{2b}{\frac{2q}{p} \cdot AK},$$

où $AK = \sqrt{AZ \cdot 2TZ}$, si l'on considère AK comme ordonnée de la parabole ZKℵ. Puisque $TZ = b$ et $AZ = c$, on trouve en effet pour le rapport cherché la valeur $2b : \frac{2q}{p}\sqrt{2bc}$.

Chez Huygens le raisonnement n'est pas absolument le même: il se conforme évidemment aux règles de la théorie des rapports suivant Euclide, telles qu'on les trouve dans le Cinquième Livre des Éléments. Suivant cette théorie la transformation des équations doit s'accomplir en appliquant la conclusion δι᾽ἴσου („ex aequo" ou „ex aequali") — Euclide V, 23 — d'après laquelle on dérive des équations

$$\left\{\begin{array}{l} a:b = c:d \\ b:e = d:f \\ e:g = f:h \end{array}\right.$$

l'équation $a:g = c:h$.

Or, on sait $$\left\{\begin{array}{r} O_1 : O_2 = CN : CI \\ O_2 : \square AW = p : q \\ \square AW : \square KZ = CI : CF. \end{array}\right.$$

Pour tirer de ces équations une nouvelle équation „ex aequo", il faut d'abord transformer la deuxième équation de telle manière que son troisième terme devienne CI ou $\frac{1}{2}c$. C'est ce qu'on obtient en posant $p : q = \frac{1}{2}c : C\Pi$ d'où l'on tire $C\Pi = \frac{\frac{1}{2}cq}{p}$.

Il faut ensuite transformer la troisième équation de telle manière que son troisième terme devienne $C\Pi$. On pose donc

$$CI : CF = C\Pi : \text{une quatrième longueur.}$$

Cette dernière est multipliée par 2, puisqu'il s'agit de comparer O_1 avec $2\square KZ$ (non pas avec $\square KZ$); on obtient ainsi $\frac{2q\sqrt{2bc}}{p}$. Le rapport cherché devient maintenant „ex aequo"

$$CN : \frac{2q\sqrt{2bc}}{p}.$$

Nous avons donc expliqué la signification de toutes les proportions qu'on trouve dans le texte.

ita erit ſpatium infinitum vertice N ad duplum $\square$ KZ, hoc eſt ita tempus per KZ ad tempus per AZ.

ſed tempus per AZ eſt ad tempus per TZ ut $\sqrt{2bc}$ ad $\sqrt{2bb}$ [1]) hoc eſt ut $\frac{2q}{p}\sqrt{2bc}$ ad $\frac{2q}{p}\sqrt{2bb}$

Ergo ex æquo tempus per KZ arcum ad tempus per TZ ut $2b$ ad $\frac{2q}{p}\sqrt{2bb}$ ſive ut b —— $\frac{q}{p}\sqrt{2bb}$ hoc eſt ut p —— $\sqrt{2qq}$. hoc eſt ut quadrans circumferentiæ ad ſuam ſubtenſam.

Quum AZ pro arbitrio ſumta ſit, fiatque ſemper tempus per KZ ad tempus per TZ ut p ad $\sqrt{2qq}$. ponendo nempe puncta K et E eſſe in parabola cujus vertex Z, $\frac{1}{2}$ lat. rectum TZ, hinc vidi opus eſſe, ſi curvam velimus per cujus arcus quosvis in Z terminatos, tempora deſcenſus ſint æqualia, ut ſit ejus naturæ, ut quemadmodum ET curvæ perpendicularis ad applicatam EB, ita faciendo rectam datam ut GB ad aliam EB, cadat punctum E in parabolam vertice Z. Hoc autem Cycloidi convenire inveni ex cognita tangentis ducendæ ratione [2]).

[1]) D'après la Prop. I du traité „De Motu Accelerato" de Galilée („Discorsi", Giorn. III, Ed. Naz. VIII, p. 208).

[2]) Ce dernier alinéa contient la découverte du tautochronisme de la chute cycloïdale. L'auteur observe que le résultat obtenu serait exact, si le point E se trouvait réellement sur la parabole ZKℵ et non pas sur la circonférence de cercle. Or, dans le cours du raisonnement E n'a été considéré qu'une seule fois comme un point de cette circonférence, savoir là où le rapport des éléments E et B (voir la note 6 de la p. 393) a été remplacé par $\frac{TE}{BE}$ ou $\frac{GB}{BE}$. Lorsqu'on substitue une autre courbe à la circonférence de cercle, de sorte que TE représente la normale en E, limitée par la verticale passant par Z, on n'aura plus TE = la longueur constante GB.

Mais si l'on pose $\frac{TE}{BE} = \frac{GB}{BE'}$ (GB étant une longueur constante donnée), où BE' correspond à la „alia BE" du texte, et que E' est situé exactement sur la parabole ZKℵ, le raisonnement du texte reste valable en entier et le tautochronisme trouvé devient un tautochronisme exact.

Huygens remarque qu'il en sera ainsi, lorsque le point E se trouve sur une cycloïde (voir la cinquième Proposition de la Deuxième Partie qui suit).