avait dit à propos des engins mécaniques: „L'inuention de tous ces engins n'eſt fondée que ſur vn ſeul principe, qui eſt que la mesme force qui peut leuer vn poids, par exemple, de cent liures a la hauteur de deux pieds, en peut auſſy leuer vn de 200 liures, a la hauteur d'vn pied, ou vn de 400 a la hauteur d'vn demi-pied, & ainſy des autres, ſi tant eſt qu'elle luy ſoit appliquée" [1]). Il attirait donc l'attention ſur cette „force" ou ce travail [2]) de la peſanteur; mais il ne formulait pas ſon principe, comme le fait P. Duhem à ſa place, en y introduiſant l'expreſſion plus moderne „produit du poids par ſon aſcenſion" [3]).

Dans l'„Horologium oſcillatorium" (Def. XIII à la p. 93 de l'édition originale de 1673) Huygens juge avec raiſon devoir expliquer ce qu'il faut entendre par le produit d'un poids par une diſtance: „Quando pondera in rectas lineas duci dicentur, id ita eſt intelligendum, ac ſi numeri lineæve, quantitates ponderum rationemque inter ſe mutuam exprimentes, ita ducantur" [4]).

Ici auſſi, comme dans les écrits de Wallis, la „ratio mutua" eſt mentionnée, mais d'une façon un peu moins expreſſe, nous ſemble-t-il, que chez ce dernier auteur. Chez Wallis et Huygens on voit ainſi ſe former peu à peu le ſtyle moderne de la mécanique, nous voulons dire le ſtyle de la mécanique claſſique du dix-huitième ſiècle.

---

avec diverses machines tant utiles que plaisantes aus quelles sont adioints plusieurs desseings de grotes et fontaines", A Francfort, en la boutique de Jean Norton. P. Duhem (ouvrage cité à la note 1 de la p. 332; t. I p. 292) cite e. a. ce passage: „quand l'on voudrait tirer 400 livres avec ladite axe E, ils ne donneroyent non plus de travail à tirer que 50 livres seroyent à l'axe C, aussi le pois monte 8 fois autant en l'axe C comme il ferait estant en l'axe E".

1) Œuvres de Descartes, publiées par Ch. Adam et P. Tannery, T. I, 1897, p. 435.

2) Voir la note 6 de la p. 341.

3) P. Duhem (ouvrage cité, t. I, p. 327) rappelle que le traité cité de Descartes avait été écrit à la demande de Constantijn Huygens, père de Christiaan (lettre de C. Huygens à Descartes du 18 septembre 1637, voir les Œuvres de Descartes, édition nommée, T. I, p. 393). Descartes en lui répondant le 5 octobre 1637 „joignait [nous citons Duhem] à sa lettre un petit traité intitulé: *Explication des engins par l'ayde desquels on peut avec une petite force, lever un fardeau fort pesant*. En ce traité, la théorie de la poulie, du plan incliné, du coin, de la roue ou tour, de la vis, du levier est tirée tout entière d'un principe unique. Ce principe est le suivant: Le *travail* (Descartes dit la *force*) nécessaire pour élever des poids différents à des hauteurs différentes garde même valeur lorsque le produit du poids par son ascension ne change pas".

4) La Def. XIII de Huygens s'applique évidemment en premier lieu aux formules relatives aux corps oscillants. Mais déjà dans l'énoncé de la Prop. XI du Traité „De Motu Corporum ex Percussione" (p. 73), il avait observé qu'il faut que „magnitudinum & velocitatum rationes in numeris lineisve ponantur".

Au lieu de dire qu'il faut exprimer par des nombres (ou des lignes droites) les „quantitates ponderum rationemque inter ſe mutuam", nous dirions plutôt que dans une formule l'unité de „pondus" (auſſi bien que l'unité de longueur ou l'unité de temps) doit être la même partout.

On trouvera dans les Pièces conſacrées à la Dynamique quelques Parties où Huygens détermine des centres de gravité; ce ſont la Troiſième et la Cinquième Partie de la Pièce XI (p. 475 et p. 478).

Dynamique.

Trois ſujets différents ſont traités dans les Pièces qui conſtituent les „Travaux divers de Dynamique": 1) la chute de ſphères de différents poids ſpécifiques à travers l'air atmoſphérique (Pièce I, p. 384—385), 2) le tautochroniſme de la chute cycloïdale (Pièce III, p. 392—413), 3) le calcul de la longueur du pendule iſochrone pour différents corps oſcillants, linéaires, plans et ſolides (Pièces II, p. 385 et IV—XIX, p. 393—555).

1) Chute de corps ſphériques dans un milieu résistant.

Comme la note 5 de la p. 384 l'indique, Huygens s'était occupé de ce ſujet déjà en 1646. C'eſt à la ſuite de la lecture d'un paſſage de Galilée ſur cette queſtion (voir les p. 73—75 du T. XI) et contrairement à l'opinion de cet auteur, qu'il obſerve que „pondera cadunt æquali velocitate ſi nullum medium reſiſtat, medium autem reſiſtit ſecundum ſuperficiem; ſimilium vero corporum ſolidum ad ſolidum in triplâ, ſuperficies ad ſuperficiem in duplâ proportione eſt laterum horum", et: „ſequitur... duo ſimilia corpora fieri poſſe ſed inæqualia magnitudine, ex diverſa materia, quæ tamen per medium reſiſtens æquali velocitate deſcendant". La Pièce I de 1659 eſt le développement de cette idée.

Comme nous l'avons dit dans la note 1 de la p. 256, Huygens annonça le réſultat de ſon calcul à R. Moray dans ſa lettre du 16 ſept. 1661, et le ſujet fut diſcuté dans pluſieurs autres lettres de 1662 [5]), mais cette diſcuſſion ne conduiſit à rien de neuf.

---

5) Voir les p. 26, 35, 36, 46, 47, 60, 87 et 93 du T. IV.

Dans la lettre au même du 16 ſept. 1661 (T. III, p. 321) Huygens avait déjà dit que ſon réſultat s'accordait „a l'experience auſſi bien qu'au raiſonnement", mais qu'il ne croyait pas qu'on pourrait trouver „quelque regle certaine" pour déterminer généralement l'accélération, d'une boule de liége p.e., en tenant compte de la réſiſtance de l'air [1]). On a peut-être répété à la „Royal Society" l'expérience mentionnée de Huygens dont d'ailleurs nous ne connaiſſons pas les détails [2]).

2) Tautochroniſme de la cycloïde.

La Pièce III (p. 392) eſt compoſée d'un certain nombre de morceaux ſe rapportant à la découverte de la célèbre propoſition d'après laquelle la cycloïde, placée de telle manière dans un plan vertical que ſon ſommet eſt le point le plus bas, poſſède pour la chute d'un point matériel le long d'elle la propriété du tautochroniſme [3]). Cette propoſition affirme que le temps d'une chute du point matériel ſuivant un arc quelconque de la cycloïde eſt conſtant, lorſque le point part du repos et que tous les arcs, quelle que ſoit leur longueur, ſe terminent au ſommet.

Huygens a attaché beaucoup de prix à cette découverte qui lui permit — puiſqu'il réuſſit en même temps à établir que la développée de la cycloïde eſt également une cycloïde; voir les p. 205—207 du T. XIV [4]) — de donner aux lames courbées, entre leſquelles il faiſait oſciller le pendule de ſon horloge, la forme néceſſaire pour rendre la période des oſcillations théoriquement (et pratiquement, eſpérait-il) indépendante de leur amplitude [5]). Dans ſa lettre du 5 décembre 1659 à Fr. v. Schooten (T. II, p. 522), écrite cinq jours après la date de l'invention des arcs

[1]) En 1661 on s'intéressait à Londres à des expériences de ce genre. „Six balls of a like size were produced, one of lignum vitæ [bois de gaïac], one of stone, two of tin, and two of lead, to try their different velocity of sinking in water, or falling down in the air" (Birch „The History of the Royal Society of London, etc." London, 1756, I, p. 49, 16 Oct. 1661).

[2]) „The lord viscount Brouncker was reminded of making the experiment of proportioning bodies of different matter and bulk, to fall in the same time; Mons. Huygens affirming, that a ball of cork may be so big, as to fall with equal swiftness through the air as a ball of iron" (Birch, I, p. 172, 7 Jan. 1663).

[3]) Huygens parle toujours de l'„isochronisme" de la cycloïde.

[4]) Les „recherches sur la théorie des développées" occupent les p. 387—406 du T. XIV. La partie la plus ancienne de ces recherches est celle qu'on trouve à la p. 404 et qui se rapporte à la cycloïde. La feuille détachée dont il est question dans la note 1 de cette page est la p. 75 verso (d'après la numération de 1928) des „Chartæ mechanicæ". On y trouve aussi deux esquisses d'un pendule suspendu entre des arcs cycloïdaux.

cycloïdaux, il appelle cette „inventio... omnium feliciſſima... in quas unquam inciderim", en ajoutant qu'il avait réuſſi à déterminer la vraie forme des arcs „ratione geometrica", et dans une lettre à Iſm. Boulliau du 22 janvier 1660 (T. III, p. 13) il va juſqu'à dire que cette „belle invention... eſt le fruit principal que l'on pouuait eſperer de la ſcience de motu accelerato, que Galilée a l'honneur d'avoir traictée le premier". Dans la Préface de l'„Horologium oſcillatorium" [6]) il appelle la découverte de la remarquable propriété de la cycloïde de poſſéder la „menſurandi temporis facultatem" le „fructus deſideratiſſimus, atque apex veluti ſummus" de la théorie de la chute des corps due à Galilée. Il voue à la démonſtration du tautochroniſme de la chute cycloïdale toute la Pars Secunda de ce livre [7]).

C'est peut-être grâce à l'importance pratique auſſi bien que théorique que la propriété du tautochroniſme poſſédait aux yeux de l'inventeur, que les notes où il a conſigné ſa découverte ſont ſi complètes que nous pouvons nous faire une idée de la genèſe de cette découverte dans ſon eſprit, depuis l'inſtant où il commence à entrevoir la juſteſſe du célèbre théorème juſqu'au moment où après avoir parcouru différentes phaſes ſa démonſtration va prendre la forme très exacte qu'elle poſſède dans l'„Horologium oſcillatorium". Nous pouvons donc voir dans ces notes la naiſſance et le développement de ſon idée avec une netteté rare dans les recherches hiſtoriques de ce genre.

La Première Partie (p. 392) montre que Huygens a fait ſa découverte en tachant de trouver une expreſſion pour le temps d'une très petite oſcillation du pendule ſimple. On conçoit aiſément qu'il ſe ſoit occupé de ce problème que la conſidération du pendule de ſon horloge ſuffiſait à lui ſuggérer. Il ſavait, tout auſſi bien que Merſenne [8]), que les oſcillations d'un pendule ſimple ne ſont pas ſans doute abſo-

[5]) Huygens avait commencé par faire usage de lames de forme empirique. Voir sa lettre à P. Petit du 1 nov. 1658, à la p. 271 du T. II.

[6]) À la p. 2 de l'édition originale.

[7]) Cette Pars est intitulée: „De Descensu Gravium & Motu eorum in Cycloïde". La Pars Tertia intitulée „De linearum curvarum evolutione & dimensione", est consacrée à la théorie des développées.

[8]) Voir p.e. dans les „Reflectiones physico-mathematicæ" faisant partie du „Novarum observationum physico-mathematicarum Tomus tertius" de 1647 (ouvrage nommé dans la note 9 de la p. 184) le Caput XIX „... Funependuli vibrationes non esse isochronas".

Dans son „Horologium" de 1658 (p. 12 de l'édition originale) Huygens écrit: „... vere asserunt non prorsus æquali tempore latiores ejusdem penduli ac angustiores vibrationes transire, sed his illas paulo plus insumere, quod facili experimento demonstrari potest. Nam si pendula duo, pondere ac longitudine æqualia, alterum procul à perpendiculo alterum parumper dimoveantur, simul dimissa. non diu in partes easdem una ferri cernentur, sed prævertet illud cujus exiliores erunt recursus". Dans une lettre du 28 nov. 1660 à Leopoldo lument tautochrones comme Galilée l'avait cru [1]), mais qu'on peut les confidérer comme approximativement tautochrones lorfqu'elles font petites [2]). La queftion pratique fe pofait donc de calculer la période d'une petite ofcillation. D'autre part ce calcul devait intéreffer Huygens en fa qualité de géomètre. Lecteur affidu des „Difcorfi" de Galilée, il n'avait pu manquer de remarquer que les théories de Galilée permettent le traitement complet de la chute verticale et de la chute fuivant des plans inclinés mais qu'elles font infuffifantes pour déterminer le mouvement d'un point pefant qui fe meut fuivant une circonférence de cercle fituée dans un plan vertical [3]). Il n'avait eu aucune peine pour combler une partie de cette lacune: avant le mois de décembre 1659 il était perfuadé que le poftulat de Galilée d'après lequel les viteffes finales acquifes par des chutes d'une même hauteur le long de plans diverfement inclinés font égales, doit être étendu à des furfaces courbes [4]). La viteffe en chaque point de la circonférence parcourue par un point ofcillant étant donc facile à déterminer, il était naturel de chercher une formule pour la période: Huygens ne pouvait prévoir que fes méthodes de calcul n'y fuffiraient pas [5]).

Il réuffit dans le premier morceau (Première Partie de cette Pièce, p. 392) qui porte la date du 1 décembre 1659, en traitant le problème pour de très petites ofcillations, à démontrer leur tautochronisme approximatif. Sa démonftration

de Medicis (T. III, p. 197) Huygens dit qu'il avait constaté l'inégale durée des oscillations de différentes amplitudes „experientia ac ratione".

1) „Discorsi, Giornata I" (Ed. Naz. VIII, p. 130 et suiv.).

2) À la p. 13 de l'„Horologium" déjà cité dans la note 8 de la p. 345, Huygens dit avoir construit son horloge à pendule, afin de remédier autant que possible à l'inexactitude résultant de l'inégalité des périodes d'oscillation, de telle manière „ut quamlibet angustæ sint penduli vibrationes... Sic igitur oscillationibus universis exilioribus redditis, etiamsi harum aliæ alias latitudine quandoque excedant, singularum tamen tempora, experientia teste, nullo memorabili discrimine differunt".

3) Galilée („Discorsi", Giornata III, Ed. Naz. VIII, p. 205) applique en effet son postulat (voir la phrase suivante du texte) uniquement à des mouvements le long de plans inclinés quoiqu'il vérifie ce postulat par une expérience sur le mouvement circulaire, savoir l'expérience du pendule dont le fil vient se heurter contre un obstacle et dont le poids s'élève alors à la même hauteur qu'auparavant (l. c. p. 206). Les Propositions de la Troisième Journée traitent presque toutes le mouvement le long de plans inclinés; à un endroit seulement, dans le Scholium de la Prop. XXXVI (l. c. p. 263) il dérive, en passant à la limite, une certaine inégalité ayant rapport au mouvement circulaire d'un mobile se mouvant dans un plan vertical.

4) Ceci est regardé dans les différents morceaux comme une chose évidente. Comparez la Prop. VIII de la Pars Secunda de l'„Horologium oscillatorium" servant à rendre cette thèse plausible. Toute cette proposition se trouve presque textuellement dans le Manuscrit A, à la p. 169 écrite en oct. ou nov. 1659.

repofe fur l'identification de la circonférence de cercle décrite par le point matériel avec la parabole ofculatrice correfpondant au point le plus bas de cette circonférence. La découverte effentielle de cette Première Partie confifte dans fon obfervation que le réfultat obtenu ferait exact fi la circonférence de cercle pouvait être remplacée par une autre courbe telle que les relations approchées qui exiftent dans la figure entre la circonférence et la parabole du fait de leur identité fuppofée devinffent des relations exactes, et que cette autre courbe eft apparemment une cycloïde. Que Huygens ait remarqué que la cycloïde eft la courbe qui fatisfait aux exigences mentionnées, cela réfulte fans doute de la connaiffance intime qu'il avait de fes propriétés: en 1658 et 1659 il s'en était beaucoup occupé à l'occafion du concours inftitué par Pascal [6]).

Le raifonnement de Huygens dans fa note du 1 déc. 1659, quoique convaincant pour lui-même, ne poffédait nullement les qualités d'une démonftration en règle. Pour arriver à une démonftration formelle, Huygens énumère fur une autre feuille détachée (Deuxième Partie de cette Pièce, p. 398—400) toutes les propofitions employées, enfuite (Troifième Partie, p. 401—403) il rédige de nouveau la démonftration, en partant cette fois directement de la cycloïde. Le début du troifième morceau fait défaut mais nous avons pu le reconftruire.

Cependant cette démonftration lui femblait encore infuffifante. La caufe en eft évidente: le raifonnement fe bafe fur la divifion de la ligne parcourue en un très grand nombre d'éléments à chacun defquels correfpond un certain temps de chute qu'on peut déterminer en fuppofant le mouvement uniforme pour chaque élément. Tous ces temps étant repréfentés par des ordonnées, le temps total de la chute eft cenfé être repréfenté géométriquement par la furface du diagramme des temps, considérée comme la fomme de toutes fes ordonnées.

Dans un quatrième morceau (Quatrième Partie de cette Pièce, p. 404) nous voyons Huygens faire un effort pour abandonner cette méthode fertile, mais théoriquement infuffifante. Il ne parle plus d'une furface confidérée comme une fomme d'ordonnées. Mais fon effort n'aboutit pas, et le morceau eft refté à l'état fragmentaire.

Enfin la Cinquième Partie (p. 405) contient un nouveau raifonnement, où non

5) Comme nous le remarquons aussi dans la note 4 de la p. 393, Huygens trouva plus tard une solution approchée de ce problème.

6) Consultez, à la p. 200 du T. XIV, l'Avertissement des „Travaux divers de Mathématiques de 1655 à 1659."

ſeulement la ſurface du diagramme des temps ne joue plus de rôle, mais d'où la parabole elle-même, dont la conſidération avait conduit à la découverte (voir la Première Partie) a diſparu. Cependant cette démonſtration s'appuie encore ſur une conception infiniteſimale du même genre que celle qui conſiſte à égaler une ſurface à la ſomme de ſes ordonnées (voir la Troiſième Partie): l'arc de cycloïde y eſt conſidéré comme la ſomme d'un nombre infini de ſegments de tangentes. Néanmoins Huygens ſemble d'abord avoir voulu laiſſer la démonſtration dans cet état: le morceau fait l'impreſſion d'être deſtiné à la publication [1], et il y entreprend de juſtifier ces procédés infiniteſimaux [2]. Son raiſonnement ſe termine par les remarquables paroles: „Quod... requirerentur" (p. 412). Il y ſemble demander au lecteur compétent d'avoir confiance dans ſa technique de mathématicien et d'admettre qu'il pourrait donner une démonſtration plus rigoureuſe ſatisfaiſant aux exigences de la ſcience hellénique en matière de paſſage à la limite, mais de bien vouloir le diſpenſer du travail néceſſaire pour fournir la preuve de ſon art.

Ces conſidérations finales peuvent amener le lecteur de ce Tome à s'intéreſſer aux divers morceaux voués à la chute tautochrone pour une autre raiſon encore que le plaiſir d'aſſiſter à la genèſe de cette célèbre découverte: elles nous rappellent les réflexions antérieures [3] de Huygens ſur la méthode des indiviſibles de Cavalieri comparée avec les méthodes rigoureuſes des anciens, notamment avec celles d'Archimède, ainſi que ſes conſidérations de 1684 [?] ſur le même ſujet, déjà publiées dans le T. XIII (p. 752—753). Ces paſſages font voir que, bien que la prolixité des méthodes rigoureuſes lui ſemble pratiquement une gêne difficilement ſupportable à une époque où ce que nous appelons les ſciences exactes, ne poſſédant plus la nouveauté qu'elles avaient au temps hellénique, ſe développent rapidement, il ne s'eſt pourtant jamais départi de ſa conviction que tant en géométrie qu'en mécanique les démonſtrations doivent poſſéder, même pour les „periti geometriæ" mentionnés dans les conſidérations finales qui nous occupent, un haut degré d'évidence, c. à. d. d'exactitude potentielle, ſinon

[1]) Dans sa lettre du 28 nov. 1660 à Leopoldo de Medicis (T. III, p. 198) Huygens écrit: „Demonstrationem quod attinet in ea a principijs Galileanis non recessi et quam primum in patriam rediero typis committere ipsam est animus".

[2]) C'est sans doute à cette démonstration qu'il fait allusion dans la Préface de l'„Horologium oscillatorium" (p. 2 de l'édition originale) en disant: „Hanc [c. à. d. la „mensurandi temporis facultatem" de la cycloïde] cum jam pridem amicis horum intelligentibus notam fecerimus (nam non multo post primam horologij editionem animadversa fuit), nunc eandem, demonstratione quàm potuimus accuratissima firmatam, omnibus legendam proponimus".

[3]) Voir la p. 158 du T. XI (datant de 1650) et la p. 337 du T. XIV (datant de 1659).

actuelle [4]), conformément à ce qu'il écrivait en 1650 à Fr. v. Schooten [5]), et à ce qu'il remarque en 1684 [?]: „Inventa vero claris et evidentibus demonſtrationibus comprobanda ſunt, quatenus id fieri poteſt... Omnino... curandum ut planum fiat ea quæ bréviter dicuntur reduci poſſe ad cognitas abſolutasque ſeu veterum ſeu recentiorum demonſtrationes" [6]).

Lorſque Huygens publia „omnibus legendam" [7]) ſa théorie du tautochroniſme de la chute cycloïdale [8]), il eſt à remarquer qu'il donna de ſon célèbre théorème une „demonſtratio... accuratiſſima", auſſi rigoureuſe qu'Archimède eût pu la déſirer.

En ſomme, la conſidération du développement de la théorie du tautochroniſme depuis le moment du premier ſoupçon de l'exiſtence de cette propriété de la cycloïde jusqu'à la compoſition de la démonſtration magiſtrale qu'on trouve dans l'„Horologium oſcillatorium" nous amène à admirer également l'intuition géniale de Huygens et ſon grand talent de géomètre.

En 1662, lord Brouncker [9]) tacha lui auſſi de trouver „a demonſtration of the equality of vibrations in a cicloid-pendulum", mais cette prétendue démonſtration ne fut pas approuvée par Huygens [10]). Vers le même temps on fit à la „Royal Society" des expériences ſur ce ſujet qui d'après la lettre du 3 février 1662 de Moray à Huygens „ont reuſſi a merveilles" [11]). Comparez la note 3 de la p. 354.

3) Calcul de la longueur du pendule iſochrone pour différents corps oſcillants.

Le Père Merſenne fut le premier qui attira l'attention de Huygens ſur le mouvement oſcillant. En ſeptembre 1646 il écrivit à Conſtantijn Huygens père:

[4]) On trouve chez Huygens le mot „evidentia" dans le sens d'exactitude tant dans la lettre à v. Schooten (note 5) que dans le morceau de 1684 [?], T. XIII, p. 752. Mais on n'y trouve pas les adjectifs aristotéliques dont nous nous servons ici; comparez à ce sujet la note 4 de la p. 341.

[5]) Lettre de sept. 1650; voir la p. 561 du T. I.

[6]) Pendant l'impression de ce Tome nous ajoutons aux précédentes encore une Sixième Partie (p. 412—413), ou Huygens indique brièvement la marche de la démonstration publiée dans la Cinquième Partie.

[7]) Voir la note 2.

[8]) Prop. XII—XXVI de la Pars Secunda de l'„Horologium oscillatorium", p. 37—58 de l'édition originale.

[9]) Voir sur lui la note 2 de la p. 476 du T. I.

[10]) Voir les p. 28, 50 et 88 du T. IV, et les p. 70—74 du premier tome de l'ouvrage de Birch mentionné dans la note 1 de la p. 344.

[11]) T. IV, p. 27. Voir les remarques de Huygens à ce sujet dans sa lettre à Moray du 30 déc. 1661 (T. IV, p. 438).

„... si vostre fils le desire, ie luy enuoyerai le moyen de trouuer le centre de vertu, ou de percussion de toutes sortes d'epées, et d'autres armes" (T. I, p. 21) et le 12 oct. suivant: „... ie veux enuoyer la regle generale pour trouuer le centre de percussion de tous les secteurs de cercle [1]) à Mr. vostre fils". Il dit donc que pour un secteur de cercle le centre nommé se trouve à une distance du centre égale à $\frac{3}{4}\,\frac{\text{rayon. arc}}{\text{corde}}$, mais il ajoute que pour un triangle la chose „est bien plus difficile, il y pourra penser et consulter son Maistre la dessus" (T. I, p. 23). Le 28 oct. Chr. Huygens répond qu'il attend „avecq grand desir quelques particularitez des centres de percussion" (T. I, p. 28). Le P. Mersenne lui écrit alors, le 8 déc., une lettre consacrée presque exclusivement à ce sujet (T. I, p. 45); il parle maintenant du „centre de percussion, ou d'agitation des corps suspendus qui ont leurs vibrations libres comme le plomb pendu à vn filet suspendu lequel i' appelle *funependule*".

C'était le traité de Baldi, intitulé „in Mechanica Aristotelis Problemata Exercitationes" [2]), qui avait amené Mersenne à s'occuper des „centres de percussion". En discutant (Quæstio XIX, p. 128) la question posée par le philosophe grec pourquoi un coup de hache fend si aisément un morceau de bois, tandis que la hache immobile, même chargée d'un grand poids, n'arrive pas à produire cet effet, Baldi ajoute (p. 131): „Ad hæc succurrit nobis pulcherrima quæstio. Dubitari enim potest, vtrum ictus ex ense efficacior sit a parte quæ est circa aciem, aut circa

[1]) C'est là la leçon véritable. Dans la l. 15 de la p. 23 du T. I il faut également lire „secteur" au lieu de „sisteme".
Comparez sur le „centre de percussion" du secteur les lignes 9—13 de la p. 352.

[2]) „Bernardini Baldi Vrbinatis Gvastallae Abbatis in Mechanica Aristotelis Problemata Exercitationes, Mogvntiæ, Typis & Sumptibus Viduæ Ioannis Albini, MDCXXI". Ce livre se trouvait dans la bibliothèque de Constantijn Huygens. En effet, l'exemplaire de la bibliothèque de l'Université de Leyde porte sur la première page l'inscription: „Constanter. donum I. Golij viri amiciss[imi]". Nous possédons encore une lettre du 7 avril 1632 dans laquelle Const. Huygens qui s'intéressait à toutes les sciences, demande à Golius de lui renvoyer ce livre („De briefwisseling van Const. Huygens, uitg. door Dr. J. A. Worp, 's Gravenhage, Nijhoff", I, 1911, p. 348); il résulte de cette lettre et de la réponse de Golius (p. 349) que celui-ci lui en avait fait cadeau depuis longtemps.

[3]) „Ioannis de Gvevara cler. reg. min. in Aristotelis Mechanicas Commentarij, Romæ, Apud Iacobum Mascardum, MDCXXVII". Gueuara cite Baldi, mais ne se range pas à son avis. Selon lui c'est principalement dans l'extrémité, qui a la plus grande vitesse, que réside la force de l'épée: „... colligitur, quod & experientia comprobatur, prædicta omnia instrumenta maximam, ac præcipuam virtutem sortiri in extremo, quod magis distat à centro sui motus" (p. 182).

[4]) Ouvrage déjà nommé dans la note 9 de la p. 184 et dans la note 8 de la p. 345.

medium ensem, vel prope manubrium capulumve". Il émet l'opinion que l'épée, qui est censée tourner autour du poignet, frappe un objet de petites dimensions le plus fortement lorsque son centre de gravité, qu'il place au milieu de la lame, vient s'appliquer sur cet objet. Mersenne dans son „Tractatvs mechanicvs theoricvs et practicvs" qui fait partie du volume nommé dans la note 1 de la p. 332, reproduit, à la p. 84, la figure de Baldi et discute la question, en citant aussi Gueuara, autre commentateur d'Aristote [3]). Il dit que l'endroit où se produit la „percussio maxima" doit dépendre de la forme de l'épée (ou de la forme du corps employé en guise de marteau, lorsqu'il s'agit p. e. d'enfoncer un clou): „Cùm autem variæ sint ensium figuræ, non potest esse vna solutio"; c'est sa seule conclusion.

Mais bientôt l'idée lui vint que le point cherché pourrait bien être le „centre d'agitation" c. à. d. le point qui — lorsqu'au lieu de se servir du corps comme d'un marteau, on le suspend au point du corps qui reste par hypothèse immobile (point qui correspond au poignet dans le cas de l'épée), de sorte qu'il peut osciller parallèlement à un plan vertical donné — est situé sur la droite qui joint ce point de suspension au centre de gravité du corps, à une distance telle du point de suspension que l'oscillation parallèle au même plan du pendule simple ou „funependule" de cette longueur est isochrone avec l'oscillation considérée du corps lui-même. C'est ce qu'il écrit p. e. au Cap. X (p. 114) des „Reflectiones physico-mathematicæ" dans le recueil „Novarum observationum physico-mathematicarum Tomus III", publié à Paris en 1647 [4]); ce chapitre est intitulé „De nouo usu funependuli ad centra percussionum in quibusuis corporibus invenienda". Il est vrai qu'on n'y trouve guère d'arguments en faveur de l'identité des deux centres. En revanche Mersenne a fait de nombreuses expériences tant sur la longueur du pendule isochrone que sur le point „in quo digitus validiùs percutiatur". Il paraît donc que sa conviction repose uniquement sur l'expérience. Le fait que cette conviction n'a pas de fondement théorique est prouvé en outre par ce bout de phrase (p. 116): „quanquam fortè puncta isochrona tantisper à centris percussionis, paulo altioribus vel inferioribus, differant". Dans le Cap. XI „in quo variæ referuntur obseruationes ad centra percussionum attinentes", Mersenne distingue l'oscillation, d'un triangle p. e., dans son plan („motum lævum & dextrum") de l'oscillation perpendiculaire à ce plan („motum posticum & anticum") [5]). Les premières expériences de Mersenne doivent dater

[5]) Voir sur les termes employés par Huygens pour distinguer ces deux mouvements, la p. 375 qui suit.

du commencement de 1646 au plus tard puisqu'il paraît déjà convaincu en ce temps de l'identité des deux centres. En effet, il réſulte de la réponſe de Descartes du 2 mars 1646 à une lettre de Merſenne que nous ne poſſédons plus, que celui-ci avait demandé quelle eſt à ſon avis la règle pour trouver le centre d'agitation; d'autre part nous avons vu que dans ſa lettre à Conſt. Huygens de ſept. 1646 Merſenne ne parle que du centre de percuſſion; c'eſt ce centre qui l'intéreſſe et c'eſt apparemment pour apprendre à connaître la place de ce centre-là dans un corps de forme quelconque qu'il demande à Descartes de déterminer celle du centre d'agitation. Quant à la règle mentionnée pour trouver le centre „de percuſſion ou d'agitation" dans le cas d'un ſecteur de cercle (Merſenne veut dire: d'un ſecteur de cercle oſcillant dans ſon plan) — voir la lettre à Conſt. Huygens du 12 oct. 1646 citée à la p. 350 — elle eſt bonne, comme on peut s'en convaincre en conſultant, à la p. 490 qui ſuit, la Pièce XII. Merſenne tenait cette formule, non pas de Descartes qui lui avait fait part en mars 1646 d'une „regle [générale]... pour trouuer [le] centre d'agitation" [1]), mais de Roberval [2]) qui prenait auſſi part à la discuſſion. La règle générale de Descartes ne s'accorde pas avec la formule de Roberval pour le cas ſpécial du ſecteur de cercle; toutefois Merſenne, ce „vir... omnigenæ, ſed indigeſtæ eruditionis" [3]), écrit à Chr. Huygens dans ſa lettre du 8 déc. 1646, qu'il ne voit pas, puisque les corps ont diverſes

---

[1]) „Œuvres de Descartes", éd. Adam et Tannery, T. IV, p. 366. Voir pour la discussion de la théorie proposée par Descartes les observations de Tannery dans ce T. IV à la p. 370.

[2]) „Obseruation de Mr. de Roberual sur le suiet de la precedente lettre de M. Descartes à M. Cavendische où il marque ses fautes" („Œuvres de Descartes", éd. nommée, T. IV, p. 420). On y lit, p. 422—423: „... si ... on entend que, comme la corde ... est à son arc ... ainsy soit IP (trois quarts de IN [c. à. d. du rayon]) à IQ, portion de IN, nous auons ... demonstré que le poinct Q sera le centre de percussion ou d'agitation ... du secteur de cercle". „... nostre demonstration est trop longue pour ce lieu".

La lettre mentionnée de Descartes à Cavendish est celle du 30 mars 1646 („Œuvres", éd. nommée, T. IV, p. 379).

Il faut remarquer cependant que Roberval ne comprenait guère le sens de ce qu'il avait trouvé, puisqu'il ajoute: „... quoy que le centre de percussion ou d'agitation fust assigné comme dessus, il ne paroist pas qu'il fust la regle ou distance requise pour les Vibrations ou balancement des corps, auquel balancement le centre de grauité contribuë quelque chose, aussy bien que le centre d'agitation ... Toutesfois, iusques icy les experiences se sont accordées d'assez pres auec mes conclusions du centre d'agitation; d'où i'ay conclu que le centre d'agitation y contribuë plus que le centre de grauité".

[3]) C'est Const. Huygens père qui s'exprime ainsi au sujet de Mersenne dans une lettre du 26 août 1639 à J. A. Bannier (Ed. Worp, T. II, p. 487; voir la note 2 de la p. 350).

figures, „qu'une ſeule regle y puiſſe ſatisfaire, ſi ce n'eſt celle que Mr. des Cartes, le plus excellent eſprit du monde à mon aduis, a donné". Il exhorte cependant Chr. Huygens à trouver lui-même une règle ſatisfaiſante: „... ſi quelque regle ſe peut trouuer auſſi vniverſelle pour... deſterminer [ce centre] geometriquement comme eſt mon filet pour le trouuer par experiment vous m'en ferez part". Voir auſſi les lettres de Merſenne du 8 et du 12 janvier 1647 (T. I, p. 50 et p. 59). Le 23 déc. 1646 (T. I, p. 557) Chr. Huygens écrit à Merſenne n'avoir trouvé „rien encor de ce qui concerne les centres de percuſſion" [4]).

Il réſulte d'une lettre de Huygens à M. Thevenot du 29 janvier 1665 (T. V, p. 209) qu'il n'a pas pris la peine de s'enquérir des conſidérations de Descartes et de Roberval à ce ſujet, avant d'avoir trouvé lui-même la règle générale demandée par Merſenne. Comparez la fin de la lettre du 10 oct. 1664 à Moray (T. V, p. 121). Ces conſidérations n'ont donc eu aucune influence directe ſur ſa découverte [5]).

Dans l'„Horologium oſcillatorium" de 1673 Huygens donne au début de la „Pars Quarta" un aperçu de l'influence exercée ſur lui et ſur d'autres ſavants par les lettres du Père Merſenne et raconte que ſon déſir de régler ſes horloges à l'aide d'un poids auxiliaire mobile (voir, aux p. 425—431 qui ſuivent, la Pièce IV) et celui de trouver le moyen de définir une longueur invariable à l'aide du pendule („certæ... menſuræ definitionem abſolutiſſimam") furent pour lui, à côté du plaiſir d'inventer une théorie nouvelle, les motifs qui l'amenèrent à reprendre la queſtion. Obſervons en paſſant que, tant dans les Pièces qui ſuivent que dans l'„Horologium oſcillatorium", Huygens ne parle que d'un centre d'oſcillation ou d'agitation, nulle part, comme dans ſa lettre du 23 déc. 1646 que nous venons de citer, d'un centre de percuſſion [6]).

Il eſt vrai que le poids mobile ſervant à régler les horloges (voir, aux p. 425—431,

---

[4]) C'est probablement en ce temps qu'il ajouta dans son „boeckje" les mots „de motu pendulorum" à la liste des sujets qu'il se proposait de traiter (voir la note 19 de la p. 75 du T. XI). Plusieurs années après Huygens put annoter sur la lettre de Mersenne du 8 déc. 1646: „J'ay trouué cette regle en 1664" (voir la p. 47 du T. I).

[5]) Voir le sommaire de sa lettre à Thevenot du 14 mai 1665 (T. V, p. 355).

[6]) Nous avons déjà vu que Roberval, comme Mersenne, admet l'identité des deux centres (voir la note 2); à bon droit, comme on l'a démontré plus tard.

En 1690 Huygens parle lui aussi de l'identité des deux centres. Voir à ce sujet les premières lignes de la p. 462 du T. IX, ainsi que la note 2 de la p. 461 et la note 3 de la p. 462 du même Tome.

la Pièce IV) ne fut inventé par Huygens qu'en 1661 [1]), tandis qu'il s'occupa déjà en 1659 du centre d'oscillation des pendules linéaires (voir, à la p. 385 qui ſuit, la Pièce II). Mais puisque dans cette Pièce II il conſidère un pendule linéaire qui porte deux poids, il eſt fort poſſible qu'avant d'exécuter ce calcul il avait déjà enviſagé un inſtant la poſſibilité de régler ſes horloges de cette manière.

Quant à la meſure univerſelle (voir le troiſième alinéa de la page précédente), il en eſt queſtion dans la Correſpondance en décembre 1661 pour la première fois [2]). Moray écrit à Huygens le 23 décembre que „ſur la propoſition qui a eſté faite dans noſtre Aſſemblee il y a 15. iours, touchant une Meſure Vniverſelle, c'eſt à dire, telle que l'on la puiſſe faire exactement egalle en tous lieux ſans ſe la communiquer au preallable... l'on eſt apres pour voir ſi cela ſe peut faire par le pendule, adiuſté ſelon voſtre inuention, par des ſegments de Cycloeides... pour ſcauoir donc ſi cela ſe fait, nous auons fait faire des pendules a voſtre mode..." (T. III, p. 427—428) [3]). Comme Moray explique longuement ce qu'il faut entendre par une meſure univerſelle, il paraît bien que l'idée ne lui venait pas de Huygens [4]). Cela reſſort auſſi plus ou moins de la

[1]) Voir, à la p. 438 du T. III sa lettre à Moray du 30 déc. 1661. Il écrit: „J'ay trouuè depuis quelque temps le moien d'ajuster fort precisement à son heure mon horologe par un petit plomb mobile, etc." Dans les Manuscrits ce poids mobile („schuyflootie") est mentionné pour la première fois en 1661 (p. 23 du Mauuscrit B).

[2]) Beaucoup d'astronomes s'étaient déjà occupé de la question de savoir quelle doit être la longueur d'un pendule à secondes. Voir le Cap. XX du Lib. II de la Pars Prior du Tome I de l'„Almagestum Novum" de 1651 de J. B. Riccioli (ouvrage nommé dans la note 7 de la p. 402 du T. I): „De Perpendiculi Oscillationibus ad motus alios et tempora mensuranda idoneis, etc.", en particulier à la p. 87 la Prop. XII, Probl. IV: „Inuenire Perpendiculum, cuius una simplex vibratio æquiualeat uni Secundo Temporis Primi Mobilis".

[3]) On n'en trouve rien chez Birch (ouvrage cité dans la note 1 de la p. 344), du moins dans le résumé des séances de la „Royal Society" de décembre. Mais dans celui de la séance du 30 octobre 1661 Birch (I, p. 53) écrit: „Mr. Rooke was desired to procure two pendulums, one with cheeks, and the other without", et à la p. 54 (séance du 20 novembre) on trouve les mots: „Dr. Wilkins read his paper concerning a natural standard" qui peuvent se rapporter à ce sujet, d'autant plus qu'on rencontre le même nom a la p. 70 (séance du 22 janvier 1662, style nouveau), où Birch écrit: „The pendulum experiment was discoursed of by the lord viscount Brouncker, who brought in the account and schemes of it; and a committee was appointed for making trials of it, consisting of his lordship himself, Mr. Boyle, Sir William Petty, Dr. Wilkins, and Dr. Wren".

[4]) Comparez la note 5 de la p. 260 du T. VI. Il est vrai que la „History of the Royal Society by Th. Sprat" mentionnée dans cette note ne parut qu'en 1667 (London, Printed by T. R. for J. Martyn at the Bell without Temple-bar, etc.). On y trouve à la p. 314 l'assertion que l'idée „that there may be produc'd a Natural Standard for Measure from the Pendulum for vulgar use" est due au dr. Christopher Wren (comparez la note 18 de la p. 427 du T. III). Mais il est

réponſe de ce dernier (T. III, p. 438) qui écrit: „J'ay entre les mains celuy [le traité] de l'horologe, du quel une grande partie eſt dediée aux mouvements et particulierement j'y ay parlè de cet uſage du pendule pour la meſure univerſelle, dont vous dites qu'on a traitè dans votre aſſemblee..." Nous poſſédons de la main de Huygens [5]) le ſommaire du contenu du Traité de l'horloge, tel qu'il l'avait conçu en 1660 [6]); on y trouve les paroles: „menſura univerſalis ope penduli", ce qui prouve qu'il ſongeait à employer le pendule pour ce but, et qu'il ſe ſervait de l'expreſſion „meſure univerſelle", déjà avant d'avoir reçu la lettre citée de Moray; ce qui d'ailleurs reſſort auſſi de ſa réponſe citée. On peut en effet prendre un pendule de forme déterminée (p. e. une ſphère de grandeur et de poids déterminés ſuſpendue à une tige homogène de longueur et de poids déterminés, ou à un fil de longueur déterminée et de poids négligeable) qui marque les demi-ſecondes ou les ſecondes, et dire que la longueur de la tige ou du fil (ou cette longueur augmentée du rayon, ou du diamètre, de la ſphère) conſtitue l'unité de longueur; en admettant bien entendu, comme Huygens le faiſait alors, qu'un pendule déterminé a pour une amplitude donnée une même période partout [7]). En 1661 (T. III, p. 438 et 440) Huygens meſure la „longueur... pour marquer une demi-ſeconde"... „depuis le point de ſuſpenſion juſqu'au centre de la boule", le poids du fil étant apparemment négligeable. Mais le fait qu'il prend des boules de différents rayons et que ſuivant lui, la diſtance nommée reſtant invariable, la période reſte également la même, fait bien voir qu'il ne ſavait pas encore que le centre d'oſcillation de la ſphère ſe trouve en deſſous du centre de figure, et que la diſtance des deux centres dépend du rayon [8]). Il n'eſt pas étonnant que dans le ſommaire

impossible d'avoir une confiance absolue dans l'exactitude de cette affirmation, puisque nous lisons à la p. 315: „He [c. à. d. Wren] has made constant Observations on Saturn; and a Theory of that Planet, truly answering all Observations, before the printed Discourse of Hugonius [sic] on that subject appear'd"; ce qui prouve que Sprat n'était pas toujours bien renseigné (voir les p. 368, 384, 416 et 417 du T. III).

C'est à la p. 247 que Sprat mentionne le „universal Standard, or measure of Magnitudes, by the help of a Pendulum, never before attempted" (comparez la note nommée du T. VI).

[5]) Manuscrit A, p. 226.

[6]) La p. 202 du Manuscrit porte la date du 25 décembre 1659 et la p. 233 celle du 7 avril 1660. Nous publierons ce sommaire dans le Tome suivant.

[7]) Voir le quatrième alinéa de la p. 376, en partculier la note 2.

[8]) En 1662 Huygens fit de nouveau des expériences de ce genre; le 10 février il écrit à Moray (T. IV, p. 52): „... Je scay par experience que pour avoir un pendule dont chaque vibration soit de demie seconde, il suffit de faire en sorte que le diametre de la boule soit moindre seulement que la 6e partie de la hauteur du pendule, et qu'il est tout un si la boule est de plomb, d'yvoire ou de cristal, quand on ne prend que les petites vibrations, etc." Dans sa réponse du

mentionné les mots „menſura univerſalis ope penduli” ſoient précédés par les mots „regula ad inveniendam penduli longitudinem”: il ſe rendait très bien compte du fait que pour donner une définition exacte et vraiment pratique de la meſure univerſelle il faut connaître le centre d'oſcillation; de cette façon le pendule qui bat les ſecondes ou les demi-ſecondes peut avoir une forme quelconque pourvu que la diſtance du point de ſuſpenſion au centre d'oſcillation ait une longueur donnée. Quoique dans le traité tel qu'il l'avait „entre les mains” en 1661 il pût parler déjà „de cet uſage du pendule pour la meſure univerſelle” avant de connaître la règle pour déterminer le centre d'oſcillation, il peut donc parfaitement dire dans l'„Horologium oſcillatorium” que le déſir de trouver le moyen de définir une longueur invariable à l'aide du pendule avait été pour lui un motif de chercher le centre d'oſcillation. Dans la Prop. XXV de la Pars Quarta de l'„Horologium oſcillatorium” („De menſuræ univerſalis, & perpetuæ, conſtituendæ ratione”) il mentionne le fait que la place du centre d'oſcillation de la ſphère (comparez la Pièce XI, à la p. 470) ſe trouve à une diſtance du centre de figure qui dépend du rayon et ajoute: „Facile autem apparet cur neceſſaria ſit hujus centri conſideratio, ad accuratam pedis Horarii conſtitutionem, etc.” [1]).

En 1663 on prenait, paraît-il, à la „Royal Society” des expériences ſur l'oſcillation de corps, non ſeulement de diverſes matières, mais auſſi de diverſes formes [2]), ce qui peut avoir eu une certaine influence ſur Huygens et l'avoir déterminé à étendre ſes recherches théoriques de 1659 et de 1661, qui ne portaient encore que ſur des pendules linéaires, à des ſurfaces planes et à des corps de différentes formes oſcillant autour d'un axe déterminé. Il eſt vrai que les expériences exécutées ou projetées par la „Royal Society” n'avaient pas pour but de trouver le centre

14 mars 1662 (T. IV, p. 86) Moray écrit à-propos de ces expériences: „... si vous voulez prendre la peine d'examiner s'il y en a [c. à. d. s'il y a une différence de longueur] dans les pendules d'une seconde entière comme nous l'auons fait, vous trouuerez que non seulement les diferentes matieres [effet de la résistance de l'air], mais aussi les diferentes grandeurs des Balles de mesme matiere requierent des longueurs dont les diferences sont considerables”.

[1]) Comparez sa lettre à Estienne du 21 septembre 1668 (T. VI, p. 258; voir sur Estienne la note 1 de la p. 490 du T. VI).

[2]) Birch, I, p. 205 (séance du 4 mars 1663) parle de corps „round, elliptical, square, etc.” Nous y lisons que Hooke proposait de faire ces expériences dans l'air atmosphérique, ainsi que dans de l'air comprimé ou raréfié et que „Mr. Hooke was appointed curator of these experiments”. Mais Birch ne nous apprend pas si les expériences ont réellement été exécutées.

[3]) Ce n'est que le 9 novembre 1664, après que Huygens eut trouvé la règle générale qui détermine la place du centre d'oscillation qu'on prit à la „Royal Society” (d'après Birch, I, p. 487) la

d'oſcillation [3]): elles devaient ſervir ſeulement à la détermination de la réſiſtance de l'air (comparez à ce propos les notes 1 et 2 de la p. 344), mais ce ſujet eſt intimement lié à celui de la meſure univerſelle „ope penduli” comme on peut le voir par les paſſages cités dans la note 8 de la p. 355.

Conſidérons maintenant les Pièces II (p. 385—391) et IV—XIX (p. 414—555) qui ſuivent. Il y eſt partout queſtion d'oſcillations idéales, ſans aucune friction ou réſiſtance d'air. De plus les barres ou fils auxquels les lignes, ſurfaces ou corps oscillants ſont ſuſpendus ſont conſidérés comme impondérables (excepté au début de la Pièce II), et ces objets eux-mêmes ont toujours une forme ſymétrique [4]).

Le principe fondamental de la Dynamique de Huygens eſt une extenſion du principe adopté par lui dans ſa Statique [5]); nous avons déjà rencontré ce principe à la p. 56 de ce Tome: „en mécanique c'eſt un axiome très certain que par un mouvement des corps qui réſulte de leur gravité le centre commun de leur gravité ne peut pas s'élever”; il s'agit du centre de gravité potentiel, c. à d. du centre de gravité des corps ou points matériels ſuppoſé qu'ils ſe ſoient élevés tous à la plus grande hauteur poſſible, ayant épuiſé les viteſſes qu'ils poſſédaient à un inſtant donné. Mais „pour trouver une baſe” (voir les p. 414—415) du calcul des centres d'oſcillation, Huygens doit admettre en outre que dans le cas des oſcillations idéales conſidérées, ce centre de gravité commun s'élève préciſément à la hauteur d'où il eſt deſcendu, les viteſſes finales, auſſi bien que les viteſſes initiales de tous les éléments qui conſtituent le pendule, étant évidemment nulles [6]); ce qu'on peut exprimer auſſi (comparez les p. 21—23) en diſant qu'il admet la réverſibilité du phénomène, quoiqu'il ne ſe ſerve pas lui-même de cette expreſſion. Dans certains cas [7]) il ſe figure que les globules — ou autres éléments [8]) infiniment petits et par-

résolution „of making simple pendulums isochrone to triangles and other figures and bodies differently suspended”. Comparez les p. 374—375 qui suivent.

[4]) Excepté dans le cas du théorème général de la p. 461.

[5]) Voir les p. 21—24 de ce Tome et les deux premières pages (p. 331 et 332) du présent Avertissement, ainsi que la note 1 de la p. 56, laquelle est d'ailleurs mentionnée dans la note 1 de la page 332 nommée. Huygens a probablement adopté ce principe fondamental de la Dynamique en 1652 (voir la p. 7 et la note 8 de la p. 9 de ce Tome).

[6]) Comparez les „Hypotheses” I et II de la Pars Quarta de l'„Horologium oscillatorium”.

[7]) Il est évident que ce sont des cas où le pendule est soit linéaire soit formé par une surface plane oscillant perpendiculairement à son plan.

[8]) Aux p. 385—387, 434—439, 441—442, 444—445, 447, 449—452 les éléments sont des globules; aux p. 505—507 et 517—521 ce sont de petits carrés, à la p. 447 le caractère des éléments n'est pas nettement déterminé, aux p. 457—458 ce sont des tranches horizontales

faitement durs — qui conſtituent le corps oſcillant viennent frapper, au moment où ils atteignent le point le plus bas de leur trajectoire, d'autres éléments égaux et également durs pouvant oſciller [1]) librement et ſéparément (p. 388—391, 415—425, 457—458). Dans d'autres cas [2]) ce ſont les éléments [3]) du corps oſcillant lui-même (et alors l'hypothèſe d'une dureté parfaite eſt ſuperflue) qui ſe détachent les uns des autres à l'inſtant nommé (ou à un inſtant quelconque, comme Huygens le ſuppoſe aux p. 436—437) pour exécuter chacun l'oſcillation [1]) libre mentionnée (p. 385—387, 434—439, 441—442, 444—445, 447—452, 487—488, 505—507). Dans tous les cas, comme nous l'avons dit, les viteſſes finales ſont nulles. Il faut évidemment admettre que les éléments qui exécutent des oſcillations [1]) libres et qui atteignent à des moments différents leurs plus grandes hauteurs, ſoient arrêtés et maintenus chacun dans ſa poſition finale. C'eſt à cette condition ſeulement que le centre commun de gravité remonte à la hauteur initiale. Dans le premier cas, celui où les éléments du corps viennent frapper d'autres éléments égaux, il faut qu'au moment du choc le „motus" ſoit conſervé (voir les huit dernières lignes de la p. 415). Il eſt évident que le „motus" eſt également conſervé dans le deuxième cas, où les éléments ſe détachent les uns des autres avec la viteſſe que chacun d'eux poſſède en ce moment. Huygens ſe ſert de l'expreſſion „motum ſurſum convertere" ou „motum ſurſum convertere quouſque poſſunt" [4]) pour indiquer que chaque élément s'élève juſqu'au point où ſa viteſſe eſt entièrement épuiſée [5]). Nous parlerions d'une converſion de l'énergie [6]) cinétique ou force vive [6]) du mouvement en une quantité d'énergie potentielle [6]) égale à l'énergie potentielle primitive par rapport au même plan horizontal, mais il ne

découpées dans une surface verticale qui viennent frapper des éléments de même forme (voir la note 2 de la p. 458), enfin aux p. 489—490 ce sont des arcs de cercle, ou anneaux, concentriques. Au lieu de „globules" on peut aussi dire „particulæ" (p. 484) ou points pesants.

[1]) Nous parlons ici d'*oscillations* libres, pour fixer les idées. Il est évident qu'un élément qui possède une vitesse déterminée v peut s'élever à la hauteur $\frac{v^2}{2g}$ soit en oscillant soit en s'élevant d'une autre manière.

[2]) Ce procédé est évidemment applicable dans tous les cas.

[3]) Voir la note 8 de la p. 357.

[4]) On trouve aussi (p. 507, lignes 4 et 5) l'expression: „celeritatem sursum convertere".

[5]) Par analogie avec l'expression „gravitatis descensus" dont Huygens se servira en 1662 (voir la note 5 de la p. 341) on pourrait dire que le „motus" est converti en „gravitatis ascensus", mais Huygens n'employe pas cette dernière expression: il dit (p. 417, quatrième ligne d'en bas): „altitudo ducta in gravitatem". D'ailleurs en disant que le „motus" est converti en „gravitatis ascensus" nous précisons trop la pensée de Huygens, pour qui apparemment (voir le texte) l'expression „motus" ne désigne pas ici une quantité nettement déterminée et cer-

faut pas ſe figurer que l'expreſſion „motus" de Huygens eſt ici équivalente à notre expreſſion „énergie cinétique". Chez lui le ſens de „motus" ſe rapproche ſouvent de celui de „celeritas"; voir à la p. 33 la „Hypotheſis III" et à la p. 41 la „Hypotheſis V"; „motus quantitas" déſigne généralement la quantité de mouvement mv ou Σmv; voir p. e. la Prop. VI de la p. 49 et les p. 91 et 98. Bien ſouvent auſſi le mot „motus" a un ſens plus général, non quantitatif. Dans le dernier alinéa de la p. 415 et dans l'expreſſion „motum ſurſum convertere" le mot „motus" a

tainement pas la quantité mv^2 ou $\frac{1}{2}mv^2$: comparez la note précédente. C'est plutôt l'expression „vis motus" de Huygens (voir le troisième alinéa de la note suivante) dont le sens se rapproche de celui de notre expression „énergie cinétique".

[6]) Voir les notes 4 et 5 de la p. 341. Remarquons que le mot „énergie" aussi bien que le mot „potentiel" est un terme aristotélique. Pour Aristote une chose peut exister ἐνεργείᾳ, actuellement (en latin scolastique: actu) ou δυνάμει, potentiellement (en latin scolastique: potentia). Chez Aristote le mot ἐνέργεια ne désigne donc pas une substance (οὐσία), mais un état d'activité ou d'actualité. Dn temps de Huygens le mot „énergie" figurait déjà dans l'optique ainsi que dans la mécanique; voir la note 8 de la p. 99 (ce fut Jean Bernoulli qui donna, en 1717, un sens précis non aristotélique à ce mot, savoir celui du travail d'une force; voir la p. 174 du Tome second de l'ouvrage de Varignon mentionné dans la note 2 de la p. 338); le terme „potentia" était souvent employé pour désigner la force en général (voir p. e. la troisième ligne d'en-bas de la p. 99 qui précède et l'ouvrage posthume de Leibniz: „Dynamica de Potentia et Legibus Naturæ corporeæ", publié par C. I. Gerhardt, dans le T. 6 de „Leibnizens mathematische Schriften", Halle, Schmidt, 1860, où l'on trouve à la p. 440 la Propositio 8: „Eadem semper potentia est in Universo").

Leibniz, en introduisant l'expression „vis viva", ne la définit pas par le produit mv^2: il parle de la „vis ordinaria [par opposition à la „vis" mentionnée dans le deuxième alinéa de la note 8 de la p. 199] cum motu actuali conjuncta, quam voco vivam" („Specimen dynamicum", p. 238 du T. 6 de l'édition de Gerhardt). Pour désigner mv^2 il employe parfois le mot „potentia" qui a d'ailleurs un sens plus général („potentiam oriri ex quadratis velocitatum in molis elementa ductis"; „Dynamica de Potentia", p. 430 de l'édition nommée); mais à la suite des discussions entre Leibniz et les Cartésiens l'expression „vis viva" ou „force vive" fut bientôt identifiée avec l'expression mv^2. Le coëfficient $\frac{1}{2}$ ne fut introduit qu'en 1829 par Coriolis; voir la p. IX de l'ouvrage mentionné dans la note 4 de la p. 247, dont la première édition parut en 1829 sous le titre „Le calcul de l'effet des machines".

Huygens en 1661 parle déjà de la „vis" d'un corps en mouvement (voir les lignes 2 et 13 de la p. 417). En 1690 il dit que les corps gardent leur „force". Voir les deux dernières lignes du texte de la p. 456 du T. IX et la p. 463 du même Tome, où l'on trouve l'expression „force ascensionelle" (comparez la note 2 de la p. 164 qui précède). Huygens dit „que les corps doivent garder leur *force ascensionelle* & que pour cela la somme des quarrez de leurs vitesses [c. à. d. Σmv^2] doit demeurer la même." Il n'a apparemment pas eu l'impression que les considérations très générales et plus ou moins métaphysiques de Leibniz sur le mouvement (le premier article de Leibniz sur ce sujet, intitulé „Brevis Demonstratio Erroris memorabilis Cartesii, etc." parut dans les „Acta Eruditorum" de 1686) contenaient quelque chose de plus que ce qu'il avait trouvé lui-même et pourraient être de quelqu'utilité pour „l'etablissement apparemment ce ſens général, tout auſſi bien que dans la troiſième ligne d'en bas de la p. 434 et dans le titre du traité „De Motu Corporum ex Percuſſione”.

L'application du principe fondamental nommé, joint à l'hypothèſe de la réverſibilité du phénomène (ou, ſi l'on veut, l'application du principe que le centre commun de gravité doit monter autant dans le cas où tous les points ſont libres que dans celui où ils compoſent un corps unique [1])) conduit Huygens à l'invention de pluſieurs procédés différents pour trouver la place du centre d'oſcillation, autrement dit, pour calculer la longueur du pendule iſochrone.

Partant du cas le plus ſimple, celui du pendule linéaire (p. 385—391 et 414—439), il conſidère enſuite quelques lignes et ſurfaces (et même, p. 448, une paire de pyramides infiniment effilées) oſcillant dans leur plan. Bientôt après avoir exécuté ces calculs il découvre (p. 458) une méthode générale pour trouver le pendule iſochrone avec une ſurface oſcillant perpendiculairement à ſon plan. Depuis ce moment il s'efforce (p. 462—469) à réduire l'oſcillation d'une ſurface dans ſon plan à celle d'une autre ſurface oſcillant perpendiculairement à ſon plan. Vers le même temps il trouve la formule générale (p. 470, note 6) ſuivant laquelle la longueur du pendule iſochrone avec un corps oſcillant quelconque eſt égale, comme on dira plus tard, au moment d'inertie [2]) du corps par rapport à l'axe de ſuſpenſion, diviſé par le produit de la „maſſe” du corps par la diſtance de ſon centre de gravité à l'axe nommé [3]); cette formule rend poſſible la réduction cherchée de l'oſcillation plane à l'oſcillation perpendiculaire au plan de la figure (p. 462, note 3). Auſſitôt qu'il a découvert la formule générale Huygens cherche en outre le centre d'oſcillation de la ſphère; il réuſſit (p. 470) à réduire ce corps lui auſſi à une ſurface oſcillant perpendiculairement à ſon plan. Pour trouver les longueurs des pendules iſochrones avec l'ellipſoïde de révolution (p. 473) et quelques autres corps il ſe ſert d'autres procédés d'intégration. Il trouve enfin (voir les deux derniers alinéas de la note qui occupe la p. 477) une méthode générale pour les ſurfaces de forme ſymétrique oſcillant dans leur plan, ainſi qu'une méthode générale pour les corps oſcillants de révolution (p. 482), toujours en appliquant la

---

des regles du mouvement” (voir les premières lignes de la p. 177 du T. X, où il faut lire, d'après le texte de la lettre de Huygens, „depend l'etablissement” au lieu de „depend de l'etablissement”). Comparez la note 7 de la p. 21.

[1]) Nous avons formulé le principe en ces termes dans la note 4 de la p. 385.

[2]) Voir la p. 378 qui suit, en particulier la note 5.

formule générale. La plupart de ces calculs ont été exécutés aux mois de ſeptembre et d'octobre de l'année 1664.

On trouvera dans les Pièces qui ſuivent des notes détaillées expliquant les méthodes de Huygens (voir p. e. les p. 470—477). Nous pouvons donc nous borner ici à énumérer brièvement ces différents procédés de calcul [4]).

Pour trouver le centre d'oſcillation d'un nombre fini ou infini de points peſants compoſant un pendule linéaire, Huygens ſe ſert de ce qu'on peut appeler la „méthode directe”, celle qui découle immédiatement du principe fondamental (Pièce II, p. 385—391; Pièce IV, p. 415—433 et Pièce V, p. 434—439); on y trouve déjà (p. 419) la formule générale pour ce cas particulier. Dans certains cas (p. 385—387; p. 391; p. 421—425) il y fait uſage d'une parabole (voir la note 4 de la p. 385 et les p. 421 et ſuiv.) pour effectuer la ſommation des produits des différents poids par les hauteurs qu'ils atteignent dans le mouvement libre; on peut parler alors de la „méthode de la parabole” (voir la Pièce IX, en particulier le troiſième alinéa de la note 2 de la p. 458).

La „méthode directe” peut encore être employée pour un pendule compoſé de deux points peſants ſitués ſur une ligne horizontale (p. 447) [5]), pour quelques lignes oſcillant dans leur plan [6]) (demi-circonférence de cercle, oſcillant autour du centre de ce cercle, p. 441; ligne droite horizontale, p. 444; ligne briſée, le point de ſuſpenſion étant ſitué au milieu de la droite qui joint les extrémités, p. 449—452), ainſi que pour une paire de ſurfaces triangulaires infiniment aigues (p. 448), pour une paire de pyramides poſſédant la même propriété (p. 448) et pour un ſecteur de cercle ſuſpendu au centre de ce cercle (p. 489—490), l'oſcillation ayant toujours lieu dans le plan de la figure. Toutes ces figures [7]) ſont décompoſées, comme nous l'avons dit, en une infinité d'éléments pouvant exécuter chacun le mouvement aſcenſionnel libre dont nous avons parlé [8]).

---

[3]) Voir p. e. la note 7 de la p. 485.

[4]) Sauf à nous étendre un peu plus longuement sur ce que nous appelons ici la „méthode des trois quarts” et la „méthode des quatre cinquièmes”; voir le dernier alinéa de la note 2 de la p. 448, ainsi que le dernier alinéa de la note 3 de la p. 449 et la note 6 de la p. 453.

[5]) Ce pendule oscille dans le plan formé par le point de suspension et les deux points pesants. Inutile d'ajouter (puisque nous avons dit généralement que les pendules considérés par Huygens ont une forme symétrique) que les deux poids sont égaux et également distants du point de suspension.

[6]) Ou, s'il s'agit d'une ligne droite, dans le plan formé par cette ligne et le point de suspension

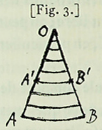
[7]) Excepté évidemment la figure composée de deux points pesants.

[8]) P. 357—358.

C'eſt apparemment en partant de ces réſultats que Huygens trouve les longueurs des pendules iſochrones avec certaines parties du cercle, et avec le cercle lui-même ſuſpendu en un point de ſon contour, ainſi qu'avec certains arcs de cercle, et avec la circonférence de cercle entière ſuſpendue en un de ſes points (p. 455), l'oſcillation ayant lieu ici auſſi dans le plan de la figure.

Il trouve en outre (p. 442) en ſe ſervant de la „méthode des trois-quarts", que nous expliquerons, la longueur du pendule iſochrone avec un demi-cercle ſuſpendu au centre de ce cercle, ainſi que celle du pendule correſpondant à un triangle iſoſcèle ſuſpendu au milieu de ſa baſe (p. 452—454) ou ſuſpendu à ſon ſommet (p. 456), l'oſcillation étant toujours plane.

[Fig. 3.]



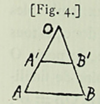
La „méthode des trois-quarts" conſiſte à calculer d'abord la longueur du pendule iſochrone correſpondant à ce qu'on peut appeler la ligne baſale de la ſurface conſidérée (demi-circonférence de cercle, ligne briſée, ou ligne droite horizontale dans les trois cas conſidérés par Huygens), ſuſpendue au même point et oſcillant latéralement, et à multiplier enſuite cette dernière longueur par $\frac{3}{4}$. Dans le cas de la Fig. 3 la ligne baſale de la figure plane OAB eſt AB, OA et OB étant des lignes droites. Huygens motive plus ou moins ſon procédé aux p. 442 et 453, mais, comme nous le diſons auſſi dans la note 2 de la p. 442 et dans la note 6 de la p. 453, ſon explication ne ſuffit guère pour convaincre le lecteur de la juſteſſe de cette méthode. Il reſſort de ſes paroles que cette méthode n'eſt pas généralement applicable, mais il ne dit pas clairement dans quels cas on peut l'appliquer; et il ne s'en ſert ni dans le cas de la Fig. 28 (voir la p. 448, en particulier le troiſième alinéa de la note 2 de cette page) ni dans celui du ſecteur de cercle ſuſpendu au centre de ce cercle (p. 489—490), où elle eſt applicable.

Huygens trouve la „méthode des trois quarts" en réduiſant l'oſcillation d'une ſurface dans ſon plan à l'oſcillation d'un pendule linéaire. En effet, tant à la p. 442 qu'à la p. 453 il ſubſtitue à la ſurface oſcillante un pendule linéaire dont la longueur eſt égale à celle du pendule iſochrone avec la ligne baſale de la figure conſidérée et dont la denſité eſt proportionnelle à la diſtance du point de ſuſpenſion (voir la Fig. 24 à la p. 442 et la Fig. 31 à la p. 452), de ſorte que le pendule iſochrone avec ce pendule linéaire a une longueur égale aux $\frac{3}{4}$ de la longueur du pendule linéaire,

c. à. d. aux $\frac{3}{4}$ de celle du pendule iſochrone avec la ligne baſale homogène oſcillant dans ſon plan. Mais c'eſt précifément cette ſubſtitution qu'on voudrait voir expliquée [1]). Le pendule linéaire en queſtion eſt compoſé des maſſes, en nombre infini, des anneaux ou bandes (voir la Fig. 3), ayant toutes la même largeur conſtante, dans leſquelles on peut découper la ſurface OAB, chaque maſſe étant concentrée dans le centre d'oſcillation de la bande ſuppoſée ſuſpendue ſeule au point O et oſcillant latéralement. Pour que la denſité de ce pendule linéaire puiſſe varier comme nous l'avons dit, il faut, dit-il, que les longueurs des pendules iſochrones avec les bandes forment une ſérie arithmétique (p. 453). Ceci indique que dans la penſée de Huygens la méthode n'eſt applicable que lorſque les lignes A'B' [Fig. 3] qui découpent la ſurface en bandes ayant toutes la même largeur conſtante ſont ſemblables et ont le point O comme centre de ſimilitude. En effet, lorſqu'il en eſt ainſi, le pendule linéaire qu'il conſidère peut être formé comme il le dit par les maſſes des bandes concentrées chacune dans ſon centre d'oſcillation; et les trois cas où il applique la méthode ſont tels. Or, nous démontrerons que dans les cas de ce genre la méthode eſt bonne.

On peut ſe demander plus généralement s'il eſt poſſible de découper une ſurface oſcillant latéralement, p. e. l'ellipſe de la Fig. 5 ou le triangle de la Fig. 4, en un certain nombre de bandes de telle manière que ſi l'on concentre la maſſe de chaque bande en ſon centre d'oſcillation et qu'on cherche enſuite la longueur du pendule iſochrone avec l'enſemble des maſſes ainſi concentrées, cette dernière longueur devient égale à la longueur du pendule iſochrone avec l'ellipſe ou le triangle donné. Ce qui n'eſt certainement pas permis, c'eſt de découper le triangle par des parallèles à la baſe arbitrairement choiſies en un nombre fini de bandes, p. e. en deux parties OA'B' et A'ABB', où OA' = A'A, et d'y appliquer le procédé décrit: on vérifie aiſément qu'on ne trouve pas de cette façon le centre d'oſcillation du triangle. Mais on peut chercher un mode ſpécial de découper le triangle (ou une des autres figures conſidérées par Huygens) en un certain nombre de bandes de telle manière qu'on trouve le vrai centre d'oſcil-

[Fig. 4.]



[1]) Il est fort possible que Huygens n'avait de la justesse de cette substitution qu'une certitude intuitive. Les pages qui suivent (p. 363—368) servent à justifier, et en même temps à étendre, sa méthode, nullement à reconstruire la marche de ses idées.

lation du triangle en cherchant le centre d'oſcillation des maſſes des bandes concentrées chacune en ſon centre d'oſcillation; et rien ne démontre qu'il eſt impoſſible de trouver d'une manière analogue la vraie longueur du pendule iſochrone avec une ſurface elliptique (Fig. 5) — ou une autre ſurface plane à laquelle la méthode des trois quarts telle que Huygens l'applique n'eſt pas applicable — en la découpant en un nombre fini ou infini d'anneaux ne poſſédant pas la propriété d'avoir une largeur conſtante.

[Fig. 5.]

Nous ferons voir d'abord que la juſteſſe de la „méthode des trois quarts" [1]) peut être démontrée pour un cas différant de celui conſidéré par Huygens et en partant de ce réſultat nous démontrerons (deuxième et troiſième alinéa de la p. 366) la juſteſſe de la méthode dans le cas envisagé par lui.

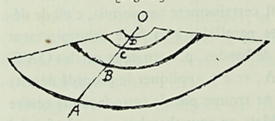
À cet effet, nous nous ſervirons de la formule générale pour la longueur du pendule iſochrone

$$l = \frac{I}{Mb},$$

où I déſigne le moment d'inertie [2]) de la ſurface (ou plus généralement du corps) par rapport à l'axe d'oſcillation, M la maſſe de la ſurface (ou du corps) et b la diſtance de ſon centre de gravité à l'axe de ſuſpenſion. Il eſt vrai que Huygens n'avait apparemment pas encore trouvé cette formule générale [3]) au moment d'exécuter les calculs en queſtion, mais il doit l'avoir trouvée peu de jours après [4]).

Conſidérons une ſurface plane [Fig. 6 ou Fig. 7] [5]) compoſée d'un nombre fini de bandes ou d'anneaux ſemblables entre eux [6]) et ne poſſédant donc pas tous la même largeur conſtante, le point O étant par hypothèſe le point de ſimilitude des bandes. Soit $OA = r$, $OB = kr$,

[Fig. 6.]



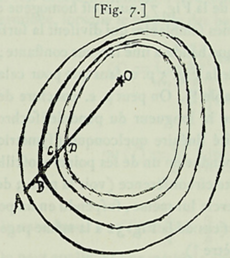
[1]) On verra en effet que la méthode mérite toujours ce nom dans le cas où la bande extérieure devient infiniment mince et se change donc en une „ligne basale", non homogène en général. C'est le produit de trois quarts par la longueur du pendule isochrone avec cette ligne basale qui donnera la longueur du pendule isochrone avec la figure plane.

[2]) Voir la note 5 de la p. 378 qui suit.

[3]) Comme il suppose le corps divisé en un nombre immense n de parties de même masse, cette

$OC = k^2 r$, $OD = k^3 r$, où la conſtante $k < 1$. On aura pour les bandes ſucceſſives, où la plus grande eſt nommée d'abord, $b = \rho_0, k\rho_0, k^2\rho_0, k^3\rho_0 \ldots$ reſpectivement; $M = \mu_0, k^2\mu_0, k^4\mu_0, k^6\mu_0 \ldots$; $I = i_0, k^4 i_0, k^8 i_0 \ldots$ Les longueurs des pendules iſochrones correſpondant aux différentes bandes ſeront $l = \lambda_0, k\lambda_0, k^2\lambda_0, k^3\lambda_0 \ldots$, où $\lambda_0 = \frac{i_0}{\mu_0 \rho_0}$.

[Fig. 7.]



La longueur du pendule iſochrone avec l'enſemble des maſſes des bandes concentrées chacune dans ſon centre d'oſcillation ſera alors d'après la formule générale $\frac{\mu_0 \lambda_0^2 (1 + k^4 + k^8 + k^{12} \ldots)}{\mu_0 \lambda_0 (1 + k^3 + k^6 + k^9 \ldots)}$ ou $\lambda_0 \frac{1 + k^4 + k^8 + k^{12} \ldots}{1 + k^3 + k^6 + k^9 \ldots}$ (1).

Mais la longueur du pendule iſochrone avec la figure donnée ſera d'après la même formule $\frac{i_0 (1 + k^4 + k^8 + k^{12} \ldots)}{\mu_0 \rho_0 (1 + k^3 + k^6 + k^9 \ldots)}$ ou $\frac{i_0}{\mu_0 \rho_0} \cdot \frac{1 + k^4 + k^8 + k^{12} \ldots}{1 + k^3 + k^6 + k^9 \ldots}$ (2).

Les longueurs (1) et (2) étant les mêmes, il eſt permis de ſubſtituer à la ſurface oſcillante l'enſemble des maſſes des bandes ſemblables concentrées chacune dans ſon centre d'oſcillation. Or, ſi l'on ſuppoſe que le nombre des bandes s'accroît jusqu'à l'infini, de ſorte que le point O qui était extérieur à la ſurface formée par les bandes devient un point du contour de cette ſurface dans le cas de la Fig. 6 et de la ſurface elle-même dans le cas de la Fig. 7, les longueurs des pendules (1) et (2) deviendront égales à $\lambda_0 \frac{1 - k^3}{1 - k^4}$. Pour $k \to 1$, on trouve la longueur

formule a chez lui la forme $\frac{\Sigma r^2}{nb}$, ou Σr^2 désigne la somme des carrés des distances de toutes ces particules à l'axe d'oscillation. Comparez la note 1 de la p. 369 et la note 5 de la p. 378.

[4]) Voir sur la découverte de la formule générale, qui eut lieu avant le 10 octobre 1664, la note 6 de la p. 470. À la p. 452 on trouve la date du 29 septembre 1664.

[5]) Il n'est pas nécessaire que la surface considérée ait une forme symétrique.

[6]) Pour que les *bandes* puissent être semblables entre elles, il est évidemment nécessaire que les *lignes* qui limitent la surface considérée et celles qui la découpent en bandes soient également semblables entre elles.

$\frac{3}{4}\lambda_0$, où λ_0 eſt la longueur du pendule iſochrone avec la ligne baſale (ouverte dans le cas de la Fig. 6, fermée dans le cas de la Fig. 7) qui n'eſt homogène que dans le cas conſidéré par Huygens où les lignes ſemblables qui diviſent la ſurface en une infinité de bandes ſont telles que chaque bande a une largeur conſtante; ce qui évidemment n'eſt pas vrai dans le cas de la Fig. 5 p. e. ſans que pour cela la méthode des trois quarts ceſſe d'être applicable [1]). On peut p. e. conclure de la préſente théorie, après avoir démontré que la longueur du pendule iſochrone avec une circonférence de cercle de denſité linéaire quelconque (ſymétrique cependant par rapport à l'axe vertical), ſuſpendue en un de ſes points et oſcillant dans ſon plan, eſt égale au diamètre de cette circonférence (voir la note 3 de la p. 455), que le pendule iſochrone avec le cercle lui-même, ſuſpendu en un point de ſon contour et oſcillant dans ſon plan (cas de la Fig. 32 à la même page) a une longueur égale aux trois quarts du diamètre [2]).

Mais ſi la ſurface peut être diviſée par des lignes ſemblables, ayant le point O comme centre de ſimilitude, en bandes ayant toutes la même largeur conſtante — ce qui eſt le cas enviſagé par Huygens — nous pouvons maintenant démontrer comme ſuit que la concentration des maſſes des bandes en leurs points d'oſcillation eſt permiſe dans le cas d'une pareille ſurface ainſi diviſée en bandes, du moins lorſque le nombre des bandes devient infini, de ſorte que toutes les bandes deviennent infiniment minces.

Soit N le nombre des bandes, l la longueur du pendule iſochrone avec la ſurface entière, oſcillant toujours dans ſon plan. Le pendule iſochrone avec l'enſemble des bandes depuis le point O juſqu'à la $n^{\text{ième}}$ bande incluſivement ſera alors $\frac{n}{N}l$. Suivant la théorie qui précède (voir la première ligne de cette page) la longueur du pendule iſochrone avec la $n^{\text{ième}}$ bande à elle ſeule aura une valeur ſupérieure à $\frac{4}{3}\frac{n-1}{N}l$ et inférieure à $\frac{4}{3}\frac{n}{N}l$, c. à. d. une valeur $\frac{4}{3}\frac{n-q_n}{N}l$, où $q_n < 1$. Or, la maſſe de la $n^{\text{ième}}$ bande eſt $\frac{(n+1)^2-n^2}{N^2}$ M ou $\frac{(2n+1)}{N^2}$M. La longueur (l) du

[1]) Comparez la note 1 de la p. 364.
[2]) Le cercle est découpé en anneaux de la manière indiquée dans la Fig. 5, p. 364. L'anneau extérieur, infiniment mince, peut être considéré comme la ligne basale. Cette ligne pesante n'est pas homogène comme dans les cas considérés par Huygens.

pendule iſochrone avec l'enſemble des maſſes des bandes concentrées chacune dans ſon centre d'oſcillation ſera donc, d'après l'équation générale de la p. 364, déterminée, lorſque le nombre des bandes augmente indéfiniment, par l'équation

$$(l) = \lim_{N=\infty} \frac{\sum_{1}^{N}\left\{(2n+1)\frac{M}{N^2}\left(\frac{4}{3}\frac{n-q_n}{N}l\right)^2\right\}}{\sum_{1}^{N}\left\{(2n+1)\frac{M}{N^2}\left(\frac{4}{3}\frac{n-q_n}{N}l\right)\right\}}$$

$$\text{ou } (l) = \frac{4}{3}l \lim_{N=\infty}\left\{\frac{1}{N}\frac{\sum_{1}^{N}(n-q_n)^2(2n+1)}{\sum_{1}^{N}(n-q_n)(2n+1)}\right\}$$

On aura donc $(l) = \frac{4}{3}l \times \frac{3}{4} = l.$ Ce qu'il fallait démontrer.

On peut appliquer une méthode analogue dans le cas où le pendule oſcillant eſt formé par un corps pouvant être découpé en tranches par des ſurfaces ſemblables entre elles et ayant pour point de ſimilitude le point de ſuſpenſion O, c. à. d. la projection du centre de gravité du corps ſur l'axe d'oſcillation. Le corps (comparez la Fig. 3, p. 362) peut être limité par une „ſurface baſale" et un cône, dont les génératrices relient le point O à tous les points du contour de la ſurface baſale; ou bien ce point O (comparez les Fig. 5 et 7) peut ſe trouver ſur la ſurface baſale fermée ou encore à l'intérieur du corps. Si l'on a dans le cas du corps (Fig. 6 ou 7) $OA = r$, $OB = kr$, $OC = k^2r$, etc., donc $b = \rho_0, k\rho_0, k^2\rho_0$, etc. pour les tranches ſucceſſives, on aura $M = \mu_0, k^3\mu_0, k^6\mu_0$, etc., $I = \iota_0, k^5\iota_0, k^{10}\iota_0$, etc. Les longueurs des pendules iſochrones correſpondant aux diverſes tranches ſeront $l = \lambda_0$, $k\lambda_0$, $k^2\lambda_0$, etc., où $\lambda = \frac{\iota_0}{\mu_0\rho_0}$. La longueur du pendule iſochrone avec l'enſemble des maſſes des tranches concentrées chacune dans ſon centre d'oſcillation ſera alors d'après la formule générale $\frac{\mu_0\lambda_0^2(1+k^5+k^{10}\ldots)}{\mu_0\lambda_0(1+k^4+k^8\ldots)}$ ou $\lambda_0\frac{1+k^5+k^{10}\ldots}{1+k^4+k^8\ldots}$. Et la longueur du pendule iſochrone correſpondant au corps donné ſera d'après la même formule $\frac{\iota_0(1+k^5+k^{10}\ldots)}{\mu_0\rho_0(1+k^4+k^8\ldots)}$, c. à. d. elle ſera égale à la longueur précédente. Lorſque le nombre des tranches devient infini du côté du point O, la longueur du pendule iſochrone deviendra $\lambda_0\frac{1-k^4}{1-k^5}$. Pour $k\to 1$, on trouve la longueur $\frac{4}{5}\lambda_0$, où λ_0 eſt la longueur du pendule iſochrone avec la ſurface baſale qui peut ne pas être homogène. On peut donc appliquer aux corps de ce genre une méthode des quatre cinquièmes analogue à la méthode des trois quarts.

Dans le cas de la Fig. 27 (p. 447) les deux poids ou points peſants O et R peuvent évidemment avoir une forme quelconque pourvu qu'ils ſoient infiniment petits. Si l'on prend pour O et R deux petits arcs de la circonférence de cercle POR, le réſultat du calcul de la p. 448 dans le cas de la Fig. 28 peut être obtenu immédiatement par l'application de la méthode des trois quarts. Mais ſi l'on donne aux poids O et R la forme de deux petites ſurfaces planes perpendiculaires reſpectivement aux droites AO et AR de la Fig. 27, le réſultat du calcul de la p. 448 dans le cas de la Fig. 29 peut être obtenu immédiatement par la méthode des quatre cinquièmes, comme nous le diſons auſſi dans la note 3 de la p. 449.

Après avoir trouvé la longueur du pendule iſochrone avec un cercle horizontal ſuſpendu en un point de la verticale paſſant par ſon centre (voir la note 7 de la p. 481), Huygens aurait pu en déduire celle du pendule iſochrone avec un cône droit ſuſpendu en ſon ſommet, s'il avait connu la méthode des quatre cinquièmes. La valeur qu'il trouve pour le cône dans la Prop. XXII de la Pars Quarta de l'„Horologium oſcillatorium", et qu'il calcule d'une tout autre manière, s'accorde avec la valeur $\frac{4}{5}\left(\frac{1}{4}\frac{y^2}{x}+x\right)$, où y eſt le rayon de la ſurface baſale (cercle) et x la hauteur du cône, valeur obtenue en multipliant par $\frac{4}{5}$ la longueur du pendule iſochrone avec le cercle baſal.

Obſervons encore que dans le cas du corps oſcillant conſidéré le pendule linéaire qu'on peut ſubſtituer à ce corps a une longueur égale à celle du pendule iſochrone avec la ſurface baſale (homogène ou non), et une denſité linéaire proportionnelle au carré de la diſtance au point de ſuſpenſion: tandis que ce pendule linéaire était un triangle infiniment aigu pour la ſurface oſcillante (Fig. 24 de la p. 442 et Fig. 31 de la p. 452), dans le cas du corps oſcillant c'eſt un cône infiniment effilé.

La Pièce IX (p. 457—460) nous apprend (voir la note 2 de la p. 458) comment Huygens a trouvé la longueur du pendule iſochrone avec une ſurface plane, oſcillant perpendiculairement à ſon plan, en ſe ſervant d'abord de la méthode directe, et en transformant enſuite cette méthode dans la „méthode de l'onglet", lorſque la ſurface eſt ſuſpendue en un point de ſon contour, et dans la „méthode du tronc", lorſqu'elle eſt ſuſpendue à un point (ou plutôt à un axe) extérieur. Dès lors, l'application de la méthode directe pour les ſurfaces planes, oſcillant

comme il a été dit, devient ſuperflue; il peut maintenant trouver la longueur du pendule iſochrone en prenant la diſtance de l'axe de ſuſpenſion à la projection ſur le plan de la figure du centre de gravité de l'onglet ou du tronc élevé ſur cette figure et limité par un plan oblique paſſant par l'axe de ſuſpenſion. Comparez la propoſition qui forme le dernier alinéa de la p. 503.

On conçoit qu'après la découverte de cette méthode, Huygens ſe ſoit efforcé, comme nous l'avons dit, de réduire l'oſcillation d'une ſurface dans ſon plan à celle d'une autre ſurface oſcillant perpendiculairement à ſon plan; c'eſt ce qu'il effectue d'une manière ingénieuſe en découpant la ſurface donnée en tranches horizontales et en donnant à ces tranches la poſition verticale par une rotation de 90°, comme on peut le voir dans la Deuxième et la Troiſième Partie (p. 462 et 463) de la Pièce X. Comme nous le diſons dans la note 6 de la p. 470, il doit avoir découvert, avant de trouver cette méthode de réduction de l'oſcillation latérale à l'oſcillation perpendiculaire au plan de la figure, la formule générale pour la longueur du pendule iſochrone, laquelle n'eſt d'ailleurs, pour le cas de l'oſcillation perpendiculaire au plan de la figure, autre choſe que la miſe en équation de la méthode de l'onglet ou du tronc; tandis qu'elle peut être trouvée dans le cas d'un corps oſcillant quelconque par la méthode directe. Mais il ne ſonge pas encore en 1664 à donner à cette formule générale la place éminente qu'elle occupe à bon droit dans l'„Horologium oſcillatorium" de 1673 [1]).

En poſſeſſion de ces méthodes, Huygens réuſſit maintenant à réſoudre le problème capital (voir les p. 355—356): quelle eſt la longueur du pendule iſochrone avec une ſphère homogène ſuſpendue à un fil de poids négligeable? Il réduit la ſphère d'une manière ingénieuſe (Pièce XI, à la p. 470) à une ſurface oſcillant perpendiculairement à ſon plan. Comme cette ſurface eſt ſuſpendue à un axe qui lui eſt extérieur, il faut appliquer la méthode du tronc. Or, pour trouver la place de la projection ſur le plan de la figure du centre de gravité de ce tronc, Huygens ſe ſert d'une formule (voir la p. 472) qui permet de déterminer

[1]) En 1669 (voir à la p. 488 du T. VI le 9ième anagramme) Huygens formule comme ſuit le théorème exprimé par la formule générale $x=\frac{\Sigma r^2}{nb}$ (voir le premier alinéa de la note qui occupe la p. 471): „Figuræ cuilibet oscillatorio motu agitatæ isochronum est pendulum simplex cujus longitudo æqualis ei quæ fit cum quadrata omnium perpendicularium, ductarum a particulis minimis, in quas figura secari intelligitur, in axem oscillationis dividuntur per distantiam centri gravitatis ab axe oscillationis multiplicem per numerum earundem particularum". Remarquons que les „particulæ minimæ" ſont ſuppoſées égales entre elles.

cette place lorſqu'on connaît la projection ſur le plan de la figure du centre de gravité de l'onglet correſpondant, c. à. d. de l'onglet obtenu en coupant le cylindre élevé ſur la figure plane par un plan oblique paſſant par une tangente à cette figure parallèle à l'axe d'oſcillation par lequel paſſe le plan oblique qui limite le tronc. Comme nous le diſons auſſi dans la note 1 de la p. 509, cette formule correſpond pour le cas ſpécial d'une figure plane en „mouvement ſolide" (p. 499) au Théorème XIX de la Pars Quarta de l'„Horologium oſcillatorium", ſuivant lequel, lorſqu'un même corps eſt ſuſpendu ſucceſſivement à différents axes parallèles entre eux et ſitués tous dans un même plan avec le centre de gravité du corps, le produit de la diſtance de l'axe d'oſcillation au centre de gravité du corps par la diſtance de ce centre de gravité au centre d'oſcillation [1]) eſt conſtant [2]).

Huygens cherche enſuite (p. 473) la longueur du pendule iſochrone avec un ellipſoïde de révolution ſuſpendu en un point de ſon axe. Dans ce cas le corps entier ne peut plus être réduit à une ſurface plane, mais en décompoſant la formule générale $x = \frac{\Sigma r^2}{nb}$ [3]) en $x = \frac{\Sigma y^2}{nb} + \frac{\Sigma z^2}{nb}$ — où y et z déſignent les diſtances d'un point à deux plans perpendiculaires entre eux —, il eſt cependant poſſible de ſe ſervir de la méthode du tronc, comme on peut le voir dans la note 2 de la p. 473. Pour trouver le Σz^2 d'une ſurface plane (c. à.d. la ſomme des carrés des diſtances des particules égales qui conſtituent cette ſurface à un axe donné ſitué dans le plan de la figure) Huygens fait uſage des formules qu'on trouve à la p. 503 et dans la Pièce XVIII (p. 545) et auſſi dans l'„Horologium oſcillatorium" (Prop. VIII, IX, X et XI de la Pars Quarta).

Enſuite Huygens applique à une ellipſe oſcillant dans ſon plan (p. 476) une méthode de calcul analogue à celle dont il s'eſt ſervi dans le cas de l'ellipſoïde, ce qui le conduit, paraît-il (voir les deux derniers alinéas de la note qui occupe la p. 477) à formuler une méthode générale pour les ſurfaces planes ſymétriques oſcillant dans leur plan (voir, à la p. 515, la Pièce XVI): la longueur l du pendule iſochrone eſt dans ce cas $l = l_1 + \frac{l'z'}{b'}$, où l_1 eſt la lon-

[1]) C'est cette dernière distance que nous désignons à la p. 472 par „λ trunci".
[2]) Dans les anagrammes envoyés en 1669 à la „Royal Society" (p. 489 du T. VI, comparez la note 1 de la p. 369), Huygens appelle ce produit „rectangulum distantiarum".
[3]) Voir la note 3 de la p. 364 et la note 1 de la p. 369.

gueur du pendule iſochrone correſpondant à la même ſurface ſuſpendue de la même manière, mais oſcillant perpendiculairement à ſon plan, l' celle du pendule iſochrone avec la demi-figure oſcillant autour de l'axe de ſymétrie de la figure totale, z' la diſtance du centre de gravité de la demi-figure à cet axe de ſymétrie et b' la diſtance du centre de gravité de la figure entière au point de ſuſpenſion. Cette formule eſt appliquée au ſecteur de cercle ſuſpendu au centre de ce cercle (p. 487—489 et p. 527—529), ainſi qu'à la paire de triangles infiniment aigus (voir le dernier alinéa de la p. 361) ſuſpendus en un point de l'axe de ſymétrie (p. 491, 494, 533 et ſuiv.), à l'hexagone régulier (p. 495), au rectangle (p. 521—523), au triangle iſoſcèle (p. 523—525) et dans quelques autres cas (voir p. e. la note 2 de la p. 493).

À la p. 482 on trouve une énumération des ſommes de la forme Σy^4, Σy^3, $\Sigma y^2 z^2$, $\Sigma y^2 z$, et Σyz — où y et z déſignent les diſtances d'un point d'une ſurface plane ſymétrique à l'axe de ſymétrie et à un autre axe perpendiculaire au premier — qu'il faut connaître pour pouvoir déterminer la longueur du pendule iſochrone avec la ſurface plane nommée oſcillant dans ſon plan, ainſi que celle du pendule iſochrone avec le corps obtenu par la rotation de cette figure plane autour de ſon axe de ſymétrie. Cette méthode générale pour les corps de révolution eſt appliquée au paraboloïde ſuſpendu à ſon ſommet (p. 483), ainſi qu'à l'hyperboloïde de révolution ſuſpendu de la même manière (Pièce XIX, à la p. 550).

Dans cette dernière Pièce, on trouve en outre une application de la méthode de calcul développée par Huygens dans la Prop. XV de la Pars Quarta de l'„Horologium oſcillatorium", ce qui fait voir que cette méthode, du moins pour le cas particulier des corps de révolution, lui était déjà connue en 1665 (ou peut-être en 1664). Il s'agit de trouver le Σz^2 du corps, c. à. d. la ſomme des carrés des diſtances de tous les points peſants égaux qui conſtituent le corps, au plan de ſymétrie paſſant par l'axe d'oscillation. Huygens démontre à l'endroit nommé que cette ſomme Σz^2 eſt égale au produit de N (nombre des particules du corps) par une „ſurface" Z, déterminée par une formule qui dans le cas où le corps eſt de révolution ſe réduit à la proportion $\frac{1}{2} R : z' = \frac{1}{4} \rho^2 : Z$ [4]), où ρ eſt le rayon du cercle baſal,

[4]) Voir la note 4 de la p. 554.