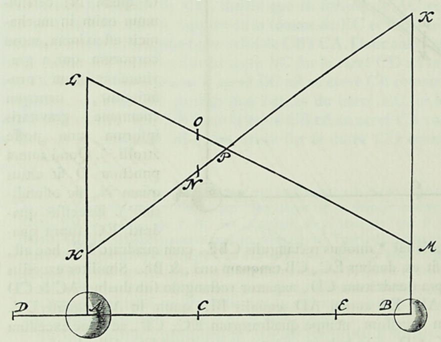
car le carré AC était au carré CD comme HA à AL: donc, par égalité, on aura que l'excès du carré EC ſur le carré CB eſt à l'excès du carré AC ſur le carré CD comme MK à HL. Donc le rapport de MK à HL ſera auſſi plus grand que celui de BC à CA. Mais MK eſt à HL comme MP à PL et BC à CA comme MO à OL. Par conſéquent le rapport de MP à PL eſt auſſi plus grand que celui de MO à OL; et, par compoſition, celui de ML à PL plus grand que le rapport de ML à LO. Donc LO eſt plus grand que LP, d'où il paraît que le point O tombe par rapport au point d'interſection P au côté qui eſt vers M; mais la droite qui joint les points O et N eſt parallèle aux perpendiculaires MB et HA, puiſque par ces points les droites LM et HK ſont diviſées dans le même rapport. Donc, de même que M eſt plus haut que K, il paraît que O eſt auſſi plus haut que N. Ce qui reſtait à démontrer.

[Fig. 12.]

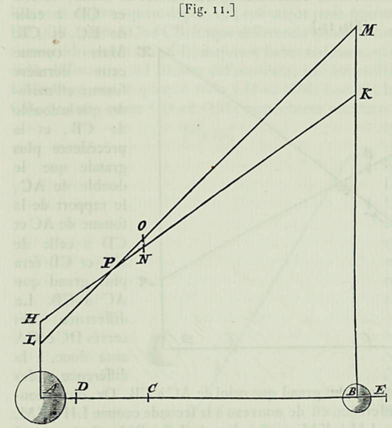


Maintenant que le corps A, ſi cela eſt poſſible, ſoit réfléchi du choc avec une viteſſe CD [Fig. 12], plus grande que celle CA avec laquelle il allait à la rencontre [1]). Or, CD ſera moindre que CB, la viteſſe du corps B avant la rencontre. Car ſi B n'était pas moindre que A mais égal à A, alors ſeulement A reculerait après le
* Prop. II. choc avec la viteſſe CB *[2]). Or, B ſera réfléchi du choc avec la viteſſe
* Prop. IV. CE de ſorte que DE ſoit égal à AB *. Suppoſons que tout le reſte ſe paſſe comme dans le cas précédent et que la conſtruction ſoit achevée comme dans ce cas. Il arrivera donc que L eſt plus haut que H, parce que DC eſt plus

[1]) Dans ce qui ſuit il s'agit, cette fois encore, de prouver que dans le cas en conſidération le point O (Fig. 12) ſe trouverait ſitué au-deſſus du point N; ce qui eſt impoſſible d'après le principe

ut quadratum AC, ad quadratum C D, ita HA ad AL: Itaque, ex æquo erit, ſicut exceſſus quadrati EC ſupra quadratum CB, ad exceſſum quadrati AC ſupra quadratum CD, ita MK ad HL. Quare major quoque erit ratio MK ad HL, quam BC ad CA. Eſt autem ut MK ad HL, ita MP, ad PL; ut autem BC ad CA ita MO ad OL. Ergo major quoque ratio MP ad PL, quam MO ad OL; &, componendo, major ratio ML ad LP, quam ML ad LO. Itaque LO major quam LP; unde liquet punctum O cadere ad eam partem interſectionis P, quæ eſt verſus M; quæ autem conjungit puncta O N, parallela eſt perpendicularibus MB, HA, quoniam iis punctis rectæ LM, HK ſecundum eandem rationem dividuntur. Igitur ſicut ſublimius eſt M quam K, ita quoque O ſublimius eſſe apparet quam N. Quod ſupererat demonſtrandum.

[Fig. 11.]



Jam ſi fieri poteſt reflectatur ab occurſu corpus A celeritate CD [Fig. 12], majori quam CA, quâ ad occurſum pergebat [1]). Erit autem CD minor quam CB, quæ fuit celeritas corporis B ante occurſum. Etenim ſi B non eſſet minus quam A
p. 384. ſed ipſi æquale, tum demum A ab im | pulſu recederet celeritate CB *[2]); reflecte- * Prop. II.
tur autem B ab occurſu celeritate CE, ita ut DE ſit æqualis AB *. Jam cætera facta * Prop. IV.
intelligantur, conſtructioque peracta ſicut in caſu præcedenti, eveniet igitur ut L ſit ſublimius quam H, quoniam DC major quam AC: utque M, ſit humilius

que Huygens vient d'introduire. En termes algébriques il faut donc démontrer l'inégalité:

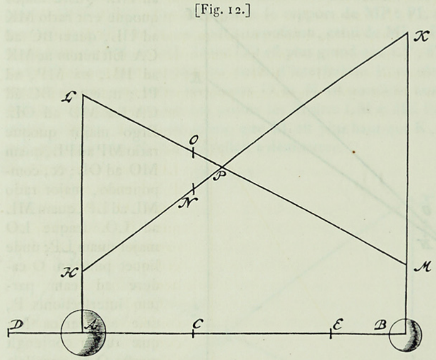
$$\frac{q(p+e)^2+p(q-e)^2}{p+q} > \frac{qp^2+pq^2}{p+q},$$

où $p = AC$, $q = BC$, $e = AD = BE$.

[2]) Comparez la note 5 de la p. 43.

grand que AC; et M ſera plus bas que K, parce que EC eſt moindre que CB. Enſuite on démontrera comme précédemment que la différence des carrés DC et CA eſt à la différence des carrés BC et CE comme la ſomme de AC et CD à celle de EC et CB. Mais comme cette dernière ſomme eſt moindre que le double de CB, et la précédente plus grande que le double de AC, le rapport de la ſomme de AC et CD à celle de CE et CB ſera plus grand que AC à CB. La différence des carrés DC et CA aura donc à la différence des carrés BC et CE un rapport plus grand que celui de AC à CB. Or, on démontrera que la première différence eſt de nouveau à la ſeconde comme LH à KM. Donc auſſi le rapport de LH à KM, c'eſt-à-dire de LP à PM, eſt plus grand que AC à CB, ou LO à OM; par conſéquent le point O tombe par rapport au point d'interſection P au côté qui eſt vers L. Mais ON, comme auparavant, eſt parallèle à LH. Par ſuite, comme le point L eſt plus élevé que H, O ſera auſſi plus élevé que N, mais ceci eſt abſurde pour la même raiſon que dans le cas précédent.

[Fig. 12.]

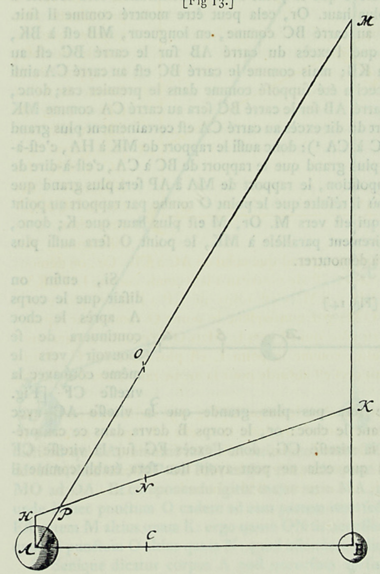


* Prop. IV. Et lorſqu'on dirait qu'après le choc le corps A [Fig. 13] reſtât en repos et que B ſeul fût réfléchi [1]), celui-ci prendrait donc la viteſſe AB * parce qu'avant le choc les deux corps ont eu la viteſſe relative AB. Or, ſuppoſant comme précédemment, que la viteſſe BC ait été acquiſe par le corps B en tombant de la hauteur KB, il ſuit que ſi l'on fait BK en longueur à BM comme le carré CB au carré AB,

[1]) C'eſt le cas particulier où l'on a $c = p$ dans l'inégalité de la note 2 de la p. 56.

quam K, quoniam EC minor quam CB. Porro oſtendetur ſicut prius, differentiam quadratorum DC, CA eſſe ad differentiam quadratorum BC, CE, ut duæ ſimul AC, CD, ad duas EC, CB. Quum vero hæ ſint ſimul minores quam dupla CB, illæ vero majores quam dupla AC, erit major ratio duarum ſimul AC, CD ad duas EC, CB, quam AC ad CB. Itaque differentia quadratorum DC, CA, ad differentiam quadratorum BC, CE, majorem habet rationem, quam AC ad CB. Ut autem dicta differentia, ad dictam differentiam, ita demonſtrabitur rurſus eſſe LH ad KM. Ergo maior quoque ratio LH ad KM, hoc eſt, LP ad PM, quam AC ad CB, hoc eſt, quam LO ad OM; quamobrem punctum O cadet ad eam partem interſectionis P quæ eſt verſus L. ON autem, ſicut ante, parallela eſt LH. Ergo ſicut punctum L ſublimius eſt quam H, etiam O ſublimius erit quam N, hoc autem, ob eandem quam in caſu præcedenti diximus rationem, abſurdum eſt.

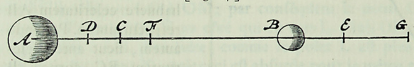
[Fig 13.]



Quod ſi vero dicatur conſiſtere poſt occurſum corpus A [Fig. 13], ſolumque B reflecti [1]), reflectetur ergo celeritate AB *, quoniam etiam ante occurſum corpora habuere celeritatem AB reſpectu mutuo. Ponendo autem, ſicut ante; celeritatem BC corpori B acquiſitam eſſe cadendo ex altitudine KB, ſequitur, ſi fiat ut quadratum CB ad quadratum AB, ita BK ad BM longitudine; ipſam BM fore altitudinem ad quam aſſurgere poterit corpus B, ſi convertat motum horizontalem, quo fertur celeritate * Prop. IV.

p. 385. AB, in motum perpendicularem ſurſum. | Corpus autem A, cum, poſt occurſum, BM ſera la hauteur à laquelle pourra monter le corps B s'il change le mouvement horizontal par lequel il eſt entraîné avec la viteſſe AB en un mouvement perpendiculaire en haut; mais le corps A, puisque après le choc il a été dit être ſans mouvement, reſtera dans la droite AB. Si donc on tire MA et ſi on la diviſe en O de ſorte que AO ſoit à OM comme AC à CB, O ſera le point jusqu'auquel montera le centre de la gravité compoſée des deux corps. Mais les corps étant ſitués en H et en K, d'où l'on ſuppoſe qu'ils ſont descendus, avaient leur centre de gravité commun en N qui diviſe pareillement la droite HK dans le rapport de AC à CB; donc ſi l'on montre comme auparavant que le point O eſt plus élevé que le point N la démonſtration ſera réduite à la même abſurdité que plus haut. Or, cela peut être montré comme il ſuit. Puisque le carré AB eſt au carré BC comme, en longueur, MB eſt à BK, on aura, par partage, que l'excès du carré AB ſur le carré BC eſt au carré BC comme MK à KB; mais comme le carré BC eſt au carré CA ainſi KB eſt auſſi à HA, car ceci a été ſuppoſé comme dans le premier cas; donc, par égalité, l'excès du carré AB ſur le carré BC ſera au carré CA comme MK eſt à HA; mais le rapport du dit excès au carré CA eſt certainement plus grand que celui de la droite BC à CA [1]): donc auſſi le rapport de MK à HA, c'eſt-à-dire de MP à PA, ſera plus grand que le rapport de BC à CA, c'eſt-à-dire de MO à OA. Et, par compoſition, le rapport de MA à AP ſera plus grand que celui de MA à AO; d'où il réſulte que le point O tombe par rapport au point d'interſection P au côté qui eſt vers M. Or, M eſt plus haut que K; donc, puisque ON eſt néceſſairement parallèle à MK, le point O ſera auſſi plus haut que N: ce qui reſtait à démontrer.

[Fig. 14.]



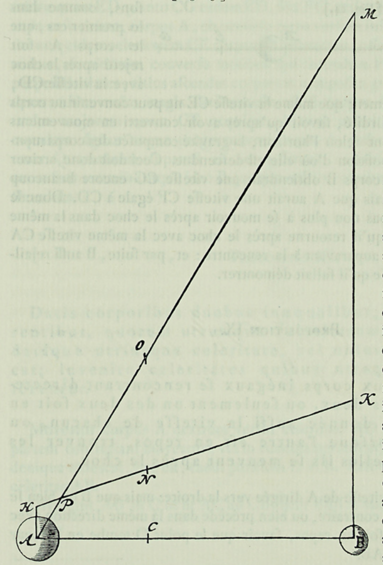
Si, enfin on diſait que le corps A après le choc continuera de ſe mouvoir vers le même côté avec la viteſſe CF [Fig. 14], celle-ci certes ne ſera pas plus grande que la viteſſe AC avec laquelle il ſe mouvait avant le choc: or, le corps B devra dans ce cas précéder le corps A avec la viteſſe CG, dont l'excès FG ſur la viteſſe CF

* Prop. IV. ſoit égal à AB *. Mais que cela ne peut avoir lieu ſera établi comme il

[1]) Puisqu'on a $\frac{(p+q)^2-q^2}{p^2} > \frac{q}{p}$.

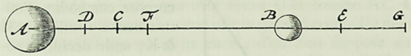
motus expers dicatur, manebit in rectâ AB. Itaque ſi jungatur MA, ſeceturque in O ut ſit AO ad OM ſicut AC ad CB, erit punctum O ad cujus altitudinem ascendet centrum gravitatis ex utroque corpore compoſitæ. Poſitis autem corporibus in H & K, unde decidiſſe ponuntur, erat ipſorum commune gravitatis centrum in puncto N, quod ſimiliter dividit rectam HK, ſecundum rationem AC ad CB; itaque ſi rurſus oſtendatur punctum O ſublimius eſſe puncto N, ad idem quod ſuperius abſurdum deducta erit demonſtratio. Illud vero ſic oſtenditur. Quum ſit ut quadratum AB ad qu.BC, ita MB ad BK longitudine, erit dividendo, ſicut exceſſus quadrati AB ſupra qu.BC ad qu. BC, ita MK ad KB; ſicut autem qu. BC ad qu. CA, ita & KB ad HA, namque poſitum hoc eſt, ſicuti in caſu primo; igitur ex æquo ſicuti exceſſus quadrati AB ſupra qu.BC ad qu.CA, ita erit MK ad HA; exceſſus autem dicti ad qu.CA, omnino major eſt ratio quam rectæ BC ad CA [1]): itaque & MK ad HA, hoc eſt, MP ad PA, major erit ratio quam BC ad CA, hoc eſt, quam MO ad OA. Et componendo igitur major ratio MA, ad AP, quam MA ad AO; unde liquet punctum O cadere ad eam partem interſectionis P quæ eſt verſus M. Eſt autem M altius quam K: ergo quum ON ſit neceſſario parallela ipſi MK, erit quoque punctum O altius quam N: quod oſtendere reliquum erat.

[Fig. 13.]



Si denique dicatur corpus A poſt occurſum verſus eandem partem pergere moveri celeritate CF [Fig. 14], ea quidem non major erit quam AC quâ ante ſuit [1]): prenons CD égal à CF, enſuite DE égal à AB; par ſuite, CE devient autant plus petit que ED, que CG eſt plus grand que ce même ED, ou FG: mais ſi nous ſuppoſons, comme dans le premier cas, que le corps A ſoit rejeté après le choc avec la viteſſe CD,

[Fig. 14.]



il eſt montré indubitablement que même la viteſſe CE ne peut convenir au corps B ſans amener une abſurdité, ſavoir qu'après avoir converti en mouvements verticaux ceux qui ſe font ſelon l'horizon, la gravité compoſée des corps monterait plus haut que la poſition d'où elle eſt deſcendue. Ceci doit donc arriver à plus forte raiſon ſi le corps B obtiendrait une viteſſe CG encore beaucoup plus grande que CE, mais que A aurait une viteſſe CF égale à CD. Donc le corps A ne continuera pas non plus à ſe mouvoir après le choc dans la même direction. Il reſte donc qu'il retourne après le choc avec la même viteſſe CA avec laquelle il ſe portait auparavant à la rencontre: et, par ſuite, B auſſi rejaillira avec la viteſſe CB. Ce qu'il fallait démontrer.

Proposition IX.

Étant donnés deux corps inégaux ſe rencontrant directement, dont tous les deux, ou ſeulement un des deux ſoit en mouvement; étant donnée auſſi la viteſſe de chacun, ou celle d'un ſeul, lorſque l'autre eſt en repos, trouver les viteſſes avec leſquelles ils ſe meuvent après le choc.

Soit AD [Fig 15.] la viteſſe de A dirigée vers la droite: mais que B ou bien ſe meuve dans la direction contraire, ou bien précède dans la même direction avec la viteſſe BD, ou bien ſoit en repos, ſavoir que le point D tombe en B. Leur viteſſe relative ſera donc AB.

Diviſons AB en C de ſorte que AC ſoit à CB comme B à A en grandeur et faiſons CD égale à CE. Je dis que EA ſera la viteſſe du corps A après le choc,

[1]) En termes algébriques on doit prouver cette fois qu'on a:

$$\frac{qf^2 + p(p+q+f)^2}{p+q} > \frac{qp^2 + pq^2}{p+q}, \text{ où } CF = f < p.$$

occurſum movebatur: debebit autem corpus B ipſum præcurrere celeritate CG, cujus ſupra celeritatem CF exceſſus FG æqualis ſit AB *. At hoc fieri non poſſe * Prop. IV.
p. 386. ſic conſtabit [1]): | ſumatur CD æqualis CF; deinde DE æqualis AB; ſit igitur CE minor quam ED quanto CG eâdem ED, ſive FG, major èſt; quum autem, ponendo, ut in caſu primo, corpus A, ab occurſu retro verſum fuiſſe celeritate CD, evincatur ne quidem celeritatem CE corpori B convenire poſſe, quin ad abſurdum deveniatur, ut nimirum converſis motibus qui ſecundum Horizontem ſunt, in motus perpendiculares, altius aſcendat corporum compoſita gravitas quam unde deſcenderat; idem multo magis fieri neceſſe eſt ſi corpus B celeritatem CG adhuc multo majorem quam CE acquirat, A vero celeritatem CF habeat ipſi CD æqualem. Igitur neque perget moveri corpus A, poſt occurſum, in eandem partem. Quamobrem ſupereſt ut retro feratur celeritate CA quantâ prius ad occurſum tetendit: atque ideo B quoque reſiliet celeritate CB. Quod erat demonſtrandum.

Propositio IX.

Datis corporibus duobus inæqualibus, directè ſibi occurrentibus, quorum utrumque vel alterum tantum moveatur, datâque utriusque celeritate, vel unius, ſi alterum quieſcat; invenire celeritates quibus utraque poſt occurſum ferentur.

Moveatur corpus A dextram verſus celeritate AD [Fig. 15]: B vero, vel in partem contrariam moveatur, vel in eandem partem præcedat celeritate BD, vel denique quieſcat, hoc eſt, cadat punctum D in B. Erit igitur ipſis mutuo reſpectu celeritas AB.

Dividatur AB in C ut ſit AC ad CB, ſicut B ad A magnitudine, & ſumatur ipſi

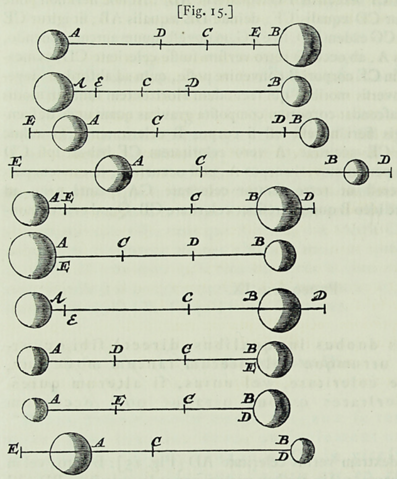
À cet effet il ſuffira à coup ſûr qu'on montre:

$$\frac{qf^2 + p(p+q-f)^2}{p+q} > \frac{qp^2 + pq^2}{p+q},$$

inégalité qui devient identique à celle de la note 2 de la p. 56 lorsqu'on remplace f par $p - e$ où $e = AD$. Il en résulte que la démonstration du cas présent peut se réduire à celle du premier cas; ce dont Huygens profite ici.

mais EB celle du corps B, et cela dans la direction indiquée par l'ordre des points E A, E B [1]). Alors que le point E tombe en A, le corps A ſera réduit au repos: mais ſi E tombe en B, le corps B ſera en repos.

[Fig. 15.]



En effet, lorſque nous aurons montré que ces événements ſe paſſent ainſi dans un navire qui eſt emporté avec une viteſſe uniforme, il ſera certain qu'ils arriveront de la même façon pour celui qui ſe trouve à terre. Figurons nous donc que le navire ſe meuve le long de la rive d'un fleuve et que dans ce navire un paſſager porte de ſes mains F, G deux boules A, B, ſuspendues à des fils, lesquelles, en les mouvant avec des viteſſes AD & BD, ſavoir par rapport à lui-même et au navire, il faſſe ſe rencontrer au point D; mais poſons que le navire s'avance avec la viteſſe DC dans la direction indiquée par l'ordre des points D, C. Il arrivera donc que, par rapport à la rive et au ſpectateur qui s'y trouve, la boule A ſe meut avec la viteſſe AC vers la droite, puisque par rapport au navire elle avait la viteſſe AD. Mais la boule B ayant dans le bateau la viteſſe BD, aura par rapport à la rive la viteſſe BC vers la gauche. Si donc le ſpectateur qui ſe trouve ſur la rive prend de ſes mains H K les mains F G du paſſager, et avec elles les têtes des fils qui ſoutiennent les boules A B, il paraît que tandis que le paſſager, par rapport à lui-même, les meut avec les viteſſes AD, BD, en même temps celui qui eſt ſur la rive les meut, par rapport à lui même et à la rive, avec les viteſſes AC, BC. Or, puisque ces viteſſes font en proportion réciproque des grandeurs des corps A et B, il faut que ces corps, par rapport au même ſpectateur, rejailliſſent de leur contact avec les mêmes viteſſes CA et CB, ainſi qu'il a été demontré plus haut [3]).

p. 387. CD æqualis CE. Dico EA | fore celeritatem corporis A poſt occurſum, EB vero corporis B, idque in eam partem quam demonſtrat ordo punctorum E A, E B [1]). Quod ſi in A incidat punctum E, ad quietem redigetur corpus A; ſi vero E incidat in B, quieſcet corpus B.

Si enim hæc ita contingere oſtenderimus in navi quæ æquabili celeritate provehitur, conſtabit & in terrâ ſtanti eodem modo eventura. Intelligatur itaque navis ferri juxta ripam fluminis, in quâ conſiſtens vector ſuſtineat manibus F, G, globos A, B, ex filis ſuspenſos, quos ita movendo celeritatibus AD, & BD, reſpectu nimirum ſui naviſque, concurrere faciat in puncto D, navis autem pergere ponatur celeritate DC, in partem eam quam oſtendit ordo punctorum D C; eveniet igitur ut, reſpectu ripæ & ſpectatoris in eâ ſtantis, globus A moveatur celeritate AC dextram verſus, quia reſpectu navis habebat celeritatem AD. Globus autem B cum in navi habeat celeritatem BD, habebit, reſpectu ripæ, celeritatem BC ſiniſtram verſus. Quod ſi igitur ſpectator in ripâ ſtans prehendat manibus ſuis H K, manus vectoris F G [2]), cumque iis capita filorum quibus corpora A B ſuſtinentur; apparet dum vector, ſui reſpectu, illa movet celeritatibus AD, BD, ſimul eum qui in ripâ conſiſtit illa movere reſpectu ſui & ripæ, celeritatibus AC, BC, quæ celeritates quum ſint in proportione reciprocâ ipſarum magnitudinum, neceſſe eſt ut corpora A, B, ejusdem ſpectatoris reſpectu, reſiliant a contactu iisdem celeritatibus CA, CB, ut in præcedentibus demonſtratum fuit [3]). Navis autem ſemper progreditur celeritate DC ſive CE; idque ſecundum ordinem punctorum

---

[1]) Voici, en forme algébrique, la règle générale à laquelle on arrive en appliquant la construction de Huygens. Soient m_A et m_B les grandeurs, ou plutôt les masses, des corps A et B; $v_A = AD$ et $v_B = BD$ leurs vitesses avant, $v'_A = EA$ et $v'_B = EB$ après le choc, toutes comptées positives lorsqu'elles sont dirigées de gauche à droite. Posons encore $M = m_A + m_B$, on trouve alors:

$$Mv'_A = M.EA = M.CA + M.EC = -M.AC + M.CD = -M.AC + M(AD - AC) = M.AD - 2M.AC = Mv_A - 2m_B\,AB = (m_A + m_B)v_A - 2m_B(v_A - v_B) = (m_A - m_B)v_A + 2m_B v_B;$$

et pareillement:

$$Mv'_B = M.EB = M.CB + M.EC = M.CB + M.CD = M.CB + M(CB + BD) = M.BD + 2M.CB = Mv_B + 2m_A\,AB = (m_A + m_B)v_B + 2m_A(v_A - v_B) = -(m_A - m_B)v_B + 2m_A v_A.$$

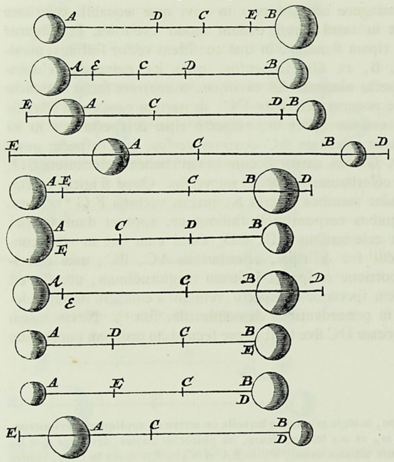
Inutile de dire que ces formules sont identiques avec celles qu'on donne dans les traités modernes pour le choc direct des corps élastiques lorsqu'on néglige leurs mouvements vibratoires après le choc.

[2]) On lit encore de la main de Huygens en marge du Manuscrit: „handen F G in de schuyt, H K op het land" (les mains F G dans le bateau, H K sur la terre).

[3]) Voir la Prop. VIII, p. 53. Ajoutons que les cinq derniers mots furent ajoutés de la main de Huygens dans le Manuscrit.

Mais le navire avance toujours avec la viteſſe DC ou CE; (et cela ſelon l'ordre des points C E): il faut donc que A, par rapport au bateau et au paſſager, ſe meuve avec la viteſſe EA dans la direction que déſigne l'ordre des points E A. B, au contraire, par rapport à ce même bateau, avec la viteſſe EB, elle auſſi ſelon l'ordre des points E B; mais lorſque E tombe en A, ou B, il paraît que le corps A ou B ſe meut après le choc, avec la même viteſſe que le navire lui-même et dans la même direction; d'où il réſulte que dans ces cas ils doivent être en repos par rapport au navire et au paſſager. Nous avons donc montré que les corps A et B, qui, dans le navire ſe portaient au contact avec les viteſſes AD, BD, ſe meuvent après leur contact dans le même bateau avec les viteſſes EA, EB ſelon l'ordre de ces points.

[Fig. 15.]



Or, ce qui arrive dans le bateau doit certainement ſe paſſer de même, comme nous l'avons dit, pour celui qui ſe trouve à terre. Ce qui a été propoſé eſt donc prouvé [4]). Cependant pour l'uſage dans le calcul il ſera permis de tirer de la conſtruction de ce problème les règles ſuivantes.

Dans le cas de deux corps A et B, tous les deux en mouvement, afin de trouver la viteſſe du corps A après le choc, que l'on faſſe comme la ſomme des corps eſt au double du corps B ainſi leur viteſſe relative à une autre viteſſe qui ſoit nommée C: la différence entre cette viteſſe et celle du corps A avant le choc, ou dans un des cas leur ſomme, ſavoir lorſque A précède dans le mouvement, donnera la viteſſe avec laquelle ce dernier corps ſe mouvra après la rencontre, c'eſt-à-dire en reculant lorſque l'excès ſera en faveur de C, et en avançant dans le cas contraire [5]).

C E [1]); igitur neceſſe eſt ut A moveatur, navigii & vectoris reſpectu, celeritate EA, in partem eam, quam deſignat ordo punctorum E A. B vero, ejusdem | navigii reſpectu [2]), celeritate EB, ſecundum ordinem item [3]) punctorum E B; cum autem E incidit in A, vel B, apparet corpus A vel B poſt occurſum, pari celeritate cum navi ipſâ, inque eandem partem ferri: unde illa eis caſibus, reſpectu navis & vectoris, quieſcere neceſſe eſt. Itaque oſtendimus corpora A & B, quæ in navi movebantur ad occurſum celeritatibus AD, BD, poſt occurſum in eâdem navi moveri celeritatibus EA, EB, ſecundum ordinem horum punctorum. Quod autem in navi contingit, idem in terrâ conſiſtenti, uti diximus, evenire certum eſt. Igitur conſtat propoſitum [4]). Ad calculi vero uſum licebit ex conſtructione hujus problematis formare regulas ſequentes.

p. 388.

Si fuerint duo corpora A & B, quorum utrumque moveatur; ad inveniendam celeritatem corporis A poſt impulſum, fiat, ut ſumma corporum ad duplum corporis B, ita celeritas, quam habent reſpectu mutuo, ad aliam celeritatem quæ dicatur C: differentia inter hanc & celeritatem corporis A ante impulſum, vel uno caſu eorum ſumma, cum nimirum A in motu præcedit, efficiet celeritatem, quâ hoc ipſum poſt occurſum movebitur, regrediendo quidem ſi exceſſus fuerit penes C, at pergendo ſi contra [5]). Quod ſi nulla ſit differentia, corpus A poſt occurſum quieſcet.

Inventâ autem celeritate corporis A, etiam corporis B celeritas innoteſcit, ex eo quod mutuo reſpectu eadem debeat eſſe corporum celeritas poſt atque ante occurſum.

---

[1]) L'indication de la direction de la vitesse selon l'ordre des points fut ajoutée de la main de Huygens. Il résulte du Manuscrit d'environ 1656 qu'elle avait été omise par mégarde par le copiste.

[2]) Les mots qui précèdent, à commencer par: „celeritate EA", avaient été également omis par le copiste.

[3]) Le mot „item" fut inséré de la main de Huygens.

[4]) Ce qui va suivre jusqu'au début de la Prop. XI fut intercalé après coup par la main du copiste mais sur l'indication de Huygens lui-même puisqu'on lit en marge du Manuscrit de la main de celui-ci: „il faut insérer icy ce qu'il y a pag. 21.1." Tout cela doit dater d'une époque postérieure à celle où le reste du texte fut composé. En effet cela manque dans le Manuscrit d'environ 1656.

[5]) En tenant compte du sens des mouvements tel que Huygens le suppose, on retrouve facilement dans ce qui précède la première formule de la note 1 de la p. 67 sous la forme:

$$v'_A = v_A - \frac{2m_B}{m_A + m_B}(v_A - v_B).$$

Et si la différence est nulle, le corps A restera en repos après la rencontre.

Or, la vitesse du corps A étant trouvée, celle du corps B est également connue puisque leur vitesse relative doit être la même après et avant la rencontre.

Si le corps A a été donné comme étant en repos et que B est seul en mouvement vers A, il paraît que la vitesse de A après la rencontre est égale à la vitesse C, trouvée ainsi que nous l'avons dit. D'où l'on déduit encore le théorème suivant.

Proposition X.

La vitesse qu'un corps plus grand donne à un corps plus petit en repos, se rapporte à celle que le corps plus petit avec la même vitesse imprime au plus grand en repos comme la grandeur du plus grand à celle du plus petit.

Soit le corps A plus grand que B, et supposons que la vitesse AC [Fig. 16] soit imprimée au corps A en repos s'il est poussé par le corps B, se mouvant avec la vitesse BA; mais que le corps B en repos, s'il est poussé par le corps A se mouvant avec la même vitesse AB, reçoive la vitesse BD: je dis que comme A est à B en grandeur, ainsi la vitesse BD à AC.

En effet, puisque la vitesse BD est au double de la vitesse AB comme le
* Prop. IX [1]). corps A est à la somme de B et de A*; mais que la somme de B et A est à
* Prop. IX. B comme le double de la vitesse AB à la vitesse AC *, on aura, par égalité, que la vitesse BD est à la vitesse AC comme le corps A à B; ce qu'il fallait démontrer [2]).

[1]) Voir le dernier alinéa qui se rapporte à cette Proposition. On a dans le premier cas, où A repose avant le choc: $C = \frac{2m_B}{m_A + m_B}$ BA et dans le second: $C = \frac{2m_A}{m_A + m_B}$ AB.

[2]) On trouve encore, écrite de la main de Huygens à une date inconnue, sur une feuille détachée, la Proposition suivante: „Si corpus minus moveatur ac majori quiescenti occurrat, motus quantitas post impulsum augebitur tantoque magis quanto corpus quiescens majus fuerit. Ita tamen ut nunquam fiat prioris tripla."

Nous ne connaissons pas la manière dont cette Proposition a été déduite par Huygens, mais il est facile d'en constater l'exactitude.

Soit à ce propos dans les notations de la note 1 de la p. 67, v_B dirigée vers A qui se trouve

Si corpus A quiescens detur, solumque B versus ipsum moveatur, apparet celeritatem ipsius A post occursum, fore æqualem celeritati C, ita, ut jam diximus, inventæ. Hinc vero & theorema sequens deducitur. |

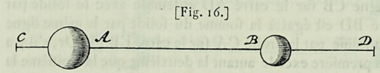
p. 389.

Propositio X.

Celeritas quam majus corpus dat minori quiescenti, ad eam quam simili velocitate minus imprimit quiescenti majori, eandem habet rationem quam majoris magnitudo ad minoris magnitudinem.

Esto corpus A majus quam B, & ponamus quiescenti A, si impellatur a corpore B, moto velocitate BA [Fig. 16], tribui velocitatem AC. Ipsi vero B quiescenti, si impellatur a corpore A, pari velocitate AB, dari velocitatem BD: dico ut A ad B magnitudine, ita esse celeritatem BD ad AC.

[Fig. 16.]



Quia enim celeritas BD est ad duplam celeritatem AB ut corpus A ad utrumque simul B & A*; sicut autem utrumque B & A ad B, ita dupla celeritas AB ad * Prop. IX [1]).
celeritatem AC *, erit ex æquo celeritas BD ad celeritatem AC, sicut corpus A * Prop. IX.
ad B; quod erat demonstrandum [2]).

à droite de B, $v_A = 0$ et $m_A > m_B$. On a alors:

$$v'_A = \frac{2m_B}{m_A + m_B} v_B; \quad v'_B = -\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_B;$$

et l'on trouve pour la quantité totale du mouvement suivant la conception de Descartes:

$$\frac{3m_A m_B - m^2_B}{m_A + m_B} v_B = m_B v_B \left(3 - \frac{4m_B}{m_A + m_B}\right),$$

où $m_B v_B$ représente la quantité du mouvement avant le choc, et où $\frac{4m_B}{m_A + m_B}$ diminue continuellement de 2 à zéro lorsque m_A augmente depuis $m_A = m_B$ jusqu'à $m_A = \infty$.

Proposition XI [1]).

Dans le cas de deux corps qui ſe rencontrent, ce que l'on obtient en prenant la ſomme de leurs grandeurs multipliées par les carrés de leurs viteſſes ſera trouvé égal avant et après la rencontre: ſavoir lorſque les rapports des grandeurs et des viteſſes ſont données en nombres ou en lignes.

Que A et B ſoient les corps, dont A ſe meut avant la rencontre avec la viteſſe AD [Fig. 17], mais B avec la viteſſe BD. Soit trouvé d'autre part, par ce qui précède [2]), qu'après la rencontre le corps A poſſède la viteſſe EA, et le corps B la viteſſe EB: ſavoir en diviſant AB en C de ſorte que comme A ſoit à B ainſi BC à CA, et en faiſant CE égal à CD. Puiſque donc le rapport de la grandeur de A à B eſt indiqué par le rapport de CB à CA, on doit démontrer que le ſolide conſtitué par la ligne CB ſur le carré AD enſemble avec le ſolide par la droite CA ſur le carré BD eſt égal à la ſomme du ſolide par la même ligne CB ſur le carré EA et du ſolide par la droite CA ſur le carré EB [3]). Or, s'il y a quatre grandeurs dont la première excède autant la deuxième que la troiſième la quatrième, ou dont la première eſt inférieure à la deuxième autant que la troiſième à la quatrième, la ſomme de la première et de la quatrième ſera certainement égale à la ſomme de la deuxième et de la troiſième. Ce qui a été propoſé ſera donc juſtifié lorſque nous aurons montré que le ſolide ſur le carré AD et la droite CB excède autant ou eſt autant ſurpaſſé par le ſolide ſur le carré EA et la même droite CB que celui conſtitué ſur le carré EB par la droite CA excède ou eſt ſurpaſſé reſpectivement par le ſolide ſur le carré BD et la même droite CA. Mais ceci ſe montre comme il ſuit.

---

[1]) Cette Propoſition est numérotée 10 dans le Manuscrit où la Prop. X de la p. 71 fut insérée après coup; comparez la note 4 de la p. 69.

[2]) Voir l'alinéa qui commence en bas de la p. 65.

[3]) Prenant en considération le sens des segments (de sorte qu'on a p. e. $CD = -DC$) et comptant comme positifs ceux qui sont dans la direction AB, cette relation peut s'écrire sous la forme $CB\,(AC + CD)^2 + AC\,(CB - CD)^2 = CB\,(AC - EC)^2 + AC\,(EC + CB)^2$, valable pour tous les cas de la Fig. 17. Pour la prouver il suffit d'y substituer $EC = CD$ après quoi elle se réduit à une identité.

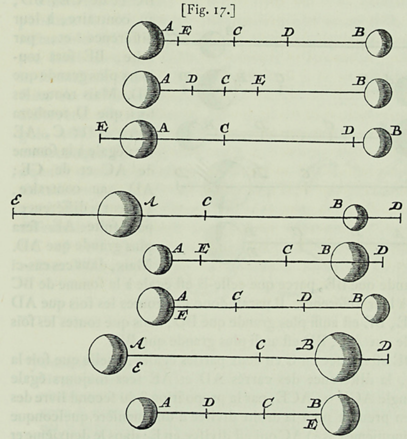
Toutefois la démonstration qui suit devient assez compliquée à cause de la forme géométrique à la mode des anciens que Huygens lui donne et des différents cas qu'il doit distinguer en conséquence.

Propositio XI [1]).

Duobus corporibus ſibi mutuo occurrentibus, id quod efficitur ducendo ſingulorum magnitudines in velocitatum ſuarum quadrata, ſimul additum, ante & poſt occurſum corporum æquale invenitur: ſi videlicet & magnitudinum & velocitatum rationes in numeris lineisve ponantur.

Sint corpora A & B, quorum A moveatur, ante occurſum, celeritate AD [Fig. 17]; B vero, celeritate BD. Poſt occurſum autem ſit inventa, per antecedentem [2]),

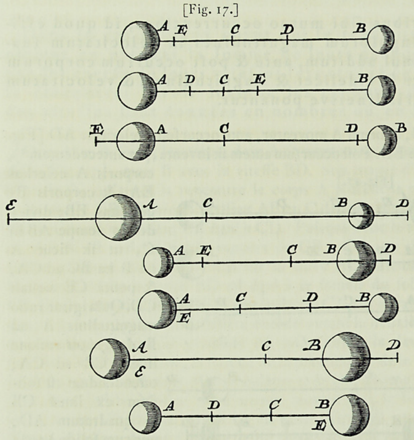
[Fig. 17.]



p. 390. corporis A celeritas EA, & corporis B, celeritas EB: divi- | dendo nempe AB in C, ut ſit ſicut A ad B ita BC ad CA, & poſitâ CE æquali CD. Quia igitur ratio magnitudinis A ad B, deſignatur ratione lineæ CB ad CA; oſtendendum eſt ſolidum ex lineâ CB in quadratum AD, una cum ſolido è rectâ CA in quadratum BD, æquari aggregato ſolidi ab eâdem CB in quadratum EA, & ſolidi è rectâ CA in quadratum EB [3]). Atqui, ſi ſint quatuor magnitudines, quarum prima ſecundam tantum exſuperet, quantum tertia quartam, vel quarum prima tantundem à ſecundâ deficiat atque tertia à quartâ; certum eſt, primam cum quartâ æquari ſecundæ & tertiæ. Itaque conſtabit propoſitum, ſi oſtenderimus ſolidum a quadrato AD in rectam CB tantum excedere vel ſuperari a ſolido ex quadrato EA in eandem CB, quantum quod fit a quadrato EB in rectam CA, ſimul excedit vel ſuperatur a ſolido ex quadrato BD in eandem CA. Hoc vero ſic oſtenditur.

En tout cas, ou bien le point C tombe entre A et D, ou bien le point D entre A et C [1]). Toutes les fois où C eſt ſitué entre A et D, AD ſera égale à la ſomme de AC et CD, mais AE à leur différence; car CE eſt égale à CD. Par conſéquent AD ſera alors toujours plus grande que AE. Mais dans les mêmes cas BE ſera égale à la ſomme de BC et de CE; BD, au contraire, à leur différence et, par ſuite, BE ſera toujours plus grande que BD. Mais toutes les fois que D tombera entre A et C, AE ſera égale à la ſomme de AC et de CE; AD, au contraire, à leur différence; par ſuite AE ſera plus grande que AD. Mais, dans ces cas-ci BD ſera auſſi plus grande que BE, parce que celle-là eſt égale à la ſomme de BC et de CD et celle-ci à leur différence. Il paraît donc que toutes les fois que AD eſt plus grande que AE, BE eſt auſſi plus grande que BD, mais que toutes les fois que AE eſt plus grande que AD, BD eſt auſſi plus grande que BE.

[Fig. 17.]



Enſuite, puiſque DE eſt diviſée en C en deux parties égales, quelle que ſoit la ſituation du point A, la différence des carrés AD et AE ſera toujours égale au quadruple du rectangle ACD ou ACE, par la propoſition 8 du ſecond livre des Éléments [2]); ſavoir en prenant pour la droite diviſée d'une manière quelconque dans le premier et le cinquième cas [3]) AC qui eſt diviſée en E: dans le deuxième et le huitième, AC qui eſt diviſée en D: dans le troiſième et le quatrième EC coupée par A: dans le ſixième et le ſeptième, où il n'y a pas de carré AE, il paraît que la dite différence eſt le carré AD, qu'on ſait être égal pareillement au quadruple du rectangle ACD ou ACE. Pour la même raiſon, à cauſe de la Biſection de la ligne DE en C, quelle que ſoit la ſituation du point B, la différence des carrés BE et BD ſera toujours égale au quadruple du rectangle BCD ou BCE. Or, puiſ-

Omni caſu aut punctum C cadit inter A & D, aut D inter A & C [1]). Quoties C ſitum eſt inter A & D æquabitur AD duabus ſimul AC, CD; AE vero, earundem differentiæ; nam CE, æqualis eſt CD, unde tunc ſemper major erit AD quam AE. Iisdem vero caſibus erit BE æqualis duabus ſimul BC, CE; at BD earum differentiæ; ac proinde ſemper major BE quam BD. At quoties D cadet inter A & C, erit AE æqualis duabus ſimul AC, CE; AD vero, ipſarum differentiæ; ac proinde AE major quam AD. Sed & BD hisce caſibus major erit, quam BE, quoniam illa æquabitur duabus ſimul BC, CD; hæc vero earundem differentiæ. Itaque apparet quoties AD major eſt quam AE, etiam BE majorem eſſe quam BD; quoties autem AE major quam AD, etiam majorem eſſe BD quam BE.

p. 391. Porro quoniam DE ex æquo diviſa eſt in C, quomo | docunque ſeſe habeat punctum A, erit ſemper differentia quadratorum AD, AE æqualis quadruplo rectangulo ACD vel ACE, per 8 ſecundi elementorum [2]); ſumendo nimirum pro lineâ utcunque ſectâ, in primo & quinto caſu [3]), AC quæ dividitur in E: in ſecundo & octavo, AC quæ dividitur in D, in tertio & quarto caſu EC quam ſecat A: in ſexto & ſeptimo, ubi nullum eſt quadratum AE, apparet pro dictâ differentiâ eſſe quadratum AD, quod ſimiliter æquari conſtat quadruplo rectangulo ACD vel ACE. Eâdem ratione propter Biſectionem lineæ DE in C, quomodocunque ſe habeat punctum B, erit ſemper differentia quadratorum BE, BD æqualis quadruplo rectangulo BCD, vel BCE. Eſt autem, propter communem altitudinem, quadruplum rectangulum BCD, ad quadruplum rectangulum ACD, quod æquale erat differentiæ quadratorum AD, AE, ſicut BC, ad AC. Igitur differentia quadratorum BE, BD ad differentiam quadratorum AD, AE, ut BC ad AC. Quamobrem quod fit ex differentiâ quadratorum AD, AE, in rectam BC, quod ipſum eſt differentia ſolidorum ex quadrato AD in BC, &

[1]) Puisque le point C se trouve toujours entre A et B, c'est-à-dire à droite du point A, Huygens n'exclut ici (à l'exception du cas intermédiaire où C et D coïncident et où les vitesses ont les mêmes valeurs absolues avant et après le choc) que les cas où la vitesse AD du corps A avant le choc est dirigée de droite à gauche, auxquels cas le corps A est poursuivi par le corps B. Or, il est évidemment permis dans les cas où les deux corps se meuvent au début dans la même direction de supposer que ce soit le corps B qui est poursuivi par le corps A et que la poursuite se fasse de gauche à droite. Aucun cas essentiellement différent des autres n'est exclu par cette supposition.

[2]) Voici cette Proposition des „Éléments" d'Euclide: „Si recta linea secetur vtcunque: Rectangulum quater comprehensum sub tota, & uno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit, quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato" (Clavius, p. 183).

[3]) Il s'agit des divers cas représentés dans la Fig. 17.

qu'ils ont en commun la hauteur, le quadruple du rectangle BCD eſt au quadruple du rectangle ACD, qui était égal à la différence des carrés AD et AE comme BC eſt à AC. Donc la différence des carrés BE et BD eſt à la différence des carrés AD et AE comme BC à AC. Par conſéquent, le produit de la différence des carrés AD et AE par la droite BC, ou, ce qui revient au même, la différence des ſolides conſtitués par BC ſur le carré AD et par BC ſur le carré AE, eſt égal au produit de la différence des carrés BE et BD par la droite AC, ſavoir à la différence des ſolides ſur le carré BE par AC et ſur le carré BD par AC.

Mais toujours lorſque le carré AD ſurpaſſe le carré AE ou lui eſt inférieur, le carré BE lui auſſi ſurpaſſe reſpectivement le carré BD ou eſt excédé par lui. Il paraît donc que le ſolide conſtitué par BC ſur le carré AD excède autant ou eſt autant ſurpaſſé par le ſolide conſtitué par BC ſur le carré de AE que le ſolide conſtitué par AC ſur le carré BE, excède ou eſt reſpectivement ſurpaſſé par celui conſtitué par AC ſur le carré BD: ce qu'il fallait démontrer.

Lemme I [1]).

Soit la droite AB [Fig. 18] diviſée en C et D de ſorte que le ſegment AC eſt moindre que CD et CD moindre que BD; je dis que le rectangle ſur AD et CB eſt moindre que le double de la ſomme des deux rectangles ACD et CDB [2]).

Décrivons ſur le ſegment CD le carré CGND, et prolongeons CG jusqu'en E de ſorte que GE ſoit égale à CA et complétons le rectangle ECBF et prolongeons

[1]) Ce Lemme et le suivant servent à préparer la démonstration de la Prop. XII qui suit.

[2]) Posons CD $= a$, AC $= a - e$, DB $= a + f$, où a, e et f sont des grandeurs positives et $a > e$. Il s'agit alors de démontrer l'inégalité:

$$(2a - e)(2a + f) < 2[a(a - e) + a(a + f)],$$

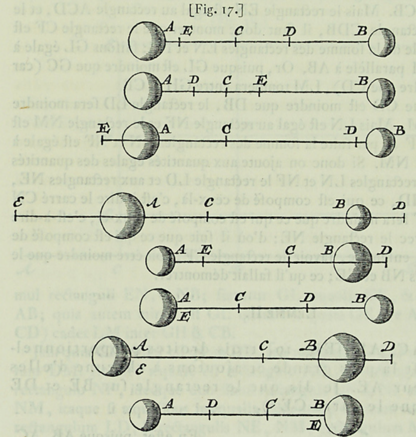
dont la vérification est facile.

Remarquons que le Lemme reste valable lorsqu'on a AC > CD > BD puisqu'en invertissant l'ordre des segments le premier rectangle ne change pas et que les deux autres rectangles dont il est question dans le Lemme échangent leurs valeurs. Comparez à ce propos la note 3 de la p. 82.

[3]) Dans le Manuscrit Huygens remplaça ici „absolvatur" par „perficiatur".

ex quadrato AE in BC, æquale eſt ei quod fit ex differentiâ quadratorum BE, BD in rectam AC, hoc eſt, differentiæ ſolidorum ex quadrato BE in AC, & ex quadrato BD in AC.

[Fig. 17.]



Semper autem cum quadratum AD ſuperat vel deficit a quadrato AE, etiam quadratum BE ſimul ſuperat vel exceditur a quadrato BD. Ergo apparet ſolidum ex quadrato AD in BC, ſemper tantum excedere vel ſuperari ab eo quod fit ex quadrato AE in BC, quantum id quod ex quadrato BE in AC, ſimul excedit vel ſuperatur ab eo, quod ex quadrato BD in AC: quod erat demonſtrandum. |

Lemma I [1]).

p. 392. Recta AB [Fig. 18] ſecta ſit in C & D ita ut ſegmentum AC minus ſit quam CD, & CD minus quam BD. Dico rectangulum ex AD, CB minus eſſe quam duplum utriusque ſimul rectanguli ACD, CDB [2]).

Deſcribatur ſuper ſegmentum CD quadratum CGND, & producatur CG usque in E, ut GE ſit æqualis CA, & perficiatur [3]) rectangulum ECBF [4]), &

[4]) On lisait primitivement „CF" mais Huygens ajouta le „E" et le „B".

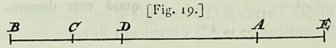
DN jusqu'à K et GN jusqu' à H. Puisque donc CG eſt égale à CD et GE à AC, la droite entière CE ſera égale à AD. Ainſi le rectangle CF eſt celui qui eſt conſtruit ſur AD et CB. Mais le rectangle EN eſt égal au rectangle ACD, et le rectangle NB au rectangle CDB, il faut donc montrer que le rectangle CF eſt moindre que le double de la ſomme des rectangles EN et NB; faiſons GL égale à GE, et menons LM parallèle à AB, Or, puisque GL eſt moindre que GC (car GE ou AC eſt moindre que CD), LM tombera entre GH et CB.

D'ailleurs, puisque CD eſt moindre que DB, le rectangle LD ſera moindre que le rectangle DM. Mais LN eſt égal au rectangle NE et le rectangle NM eſt égal au rectangle NF et par ſuite la ſomme des rectangles LN et NF eſt égale à la ſomme de NE et NM. Si donc on ajoute aux quantités égales des quantités inégales, ſavoir aux rectangles LN et NF le rectangle LD et aux rectangles NE, NM le rectangle MD, ce qui eſt composé de ceux-là, c'eſt-à-dire le carré CN avec le rectangle NF ſera moindre que ce qui eſt composé de ceux-ci, c'eſt-à-dire le rectangle NB avec le rectangle NE: d'où il ſuit que ce qui eſt composé de toutes ces quantités enſemble, ſavoir le rectangle CF, doit être moindre que le double des rectangles NB et NE; ce qu'il fallait démontrer.

Lemme II.

Soient AB, AC, AD [Fig. 19] trois droites proportionnelles, dont AB eſt la plus grande et ajoutons à chacune d'elles la même longueur AE. Je dis que le rectangle ſur BE et DE eſt plus grand que le carré CE [2]).

[Fig. 19.]



En effet, puisque AB, AC, AD, ſont proportionnelles, l'excès BC ſera à l'excès CD comme BA eſt à AC, ou comme CA eſt à AD. Mais le rapport de CA à AD eſt plus grand que CE à ED, donc auſſi BC à CD eſt plus grand que CE à ED, et, par permutation, le rapport de BC à CE eſt plus grand que CD à DE et, par compoſition, le rapport de BE

[1]) Huygens intercala après coup „ſive AC".

[2]) Posant AB $= a$, AD $= b$, AE $= f$, il s'agit donc de démontrer pour $a > b$ la relation:

$$(a+f)(b+f) > (\sqrt{ab}+f)^2,$$

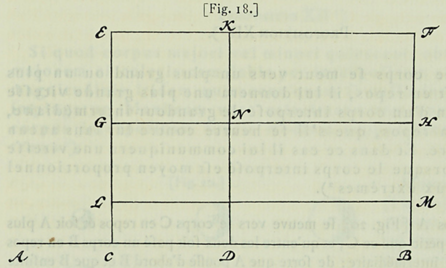
ce qui est facile puisqu'elle conduit immédiatement à l'inégalité bien connue:

$$\tfrac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab},$$

pour $a \neq b$.

producantur DN in K, & GN in H. Quoniam igitur CG eſt æqualis CD, & GE æqualis AC, erit tota CE æqualis AD. Itaque rectangulum CF eſt id quod ſub AD, CB continetur. Rectangulum vero EN æquale rectangulo ACD, & rectangulum NB, æquale rectangulo CDB; oportet igitur oſtendere quod rectangulum CF minus eſt quam duplum utriusque ſimul rectanguli EN, & NB; ſumatur GL æqualis GE, & agatur LM parallela AB; quia autem minor eſt GL quam GC (nam GE ſive AC [1]) minor eſt quam CD) cadet LM inter GH & CB.

[Fig. 18.]



Jam quia CD minor eſt quam DB, erit rectangulum LD minus quam rectangulum DM. At LN æquale eſt rectangulo NE, & rectangulum NM æquale eſt rectangulo NF, ideoque duo ſimul rectangula LN & NF æqualia duobus NE & NM, itaque ſi æqualibus inæqualia addantur, nimirum rectangulis LN & NF, rectangulum LD, & rectangulis NE, NM, rectangulum MD, fiet quod ex illis componitur nempe quadratum CN cum rectangulo NF minus quam quod ex his componitur, nempe rectangulum NB cum rectangulo NE: unde quod ex omnibus ſimul componitur, hoc eſt, rectangulum CF minus apparet eſſe quam duplum rectangulorum NB & NE; quod erat oſtendendum. |

p. 393.

Lemma II.

Sint tres proportionales rectæ AB, AC, AD [Fig. 19], quarum major AB, omnibusque adjiciatur eadem longitudo AE. Dico rectangulum ex BE, DE, majus eſſe quadrato CE [2]).

Quia enim proportionales ſunt AB, AC, AD, erit quoque exceſſus BC ad exceſſum CD, ſicut BA ad AC, ſive ut CA ad AD. Major autem eſt ratio CA ad AD, quam CE ad ED, itaque major quoque BC ad CD, quam CE ad ED; &, permutando, major ratio BC ad CE quam CD ad DE; &, componendo, à EC eſt donc plus grand que CE à ED: par conſéquent, le rectangle ſur BE et ED eſt plus grand que le carré de CE, ce qui était propoſé.

Proposition XII [1]).

Si quelque corps ſe meut vers un plus grand ou un plus petit qui eſt en repos, il lui donnera une plus grande viteſſe par le moyen d'un corps interpoſé de grandeur intermédiaire, de même en repos, que s'il ſe heurte contre lui ſans aucun intermédiaire. Et dans ce cas il lui communiquera une viteſſe maximum lorsque le corps interpoſé eſt moyen proportionnel entre les deux extrêmes [2]).

Que le corps A [Fig. 20] ſe meuve vers le corps C en repos et ſoit A plus grand ou plus petit que ce C, et qu'entre les deux ſoit poſé un corps B en repos et de grandeur intermédiaire: de ſorte que A pouſſe d'abord B et que B enſuite pouſſe C; je dis que C acquiert ainſi une plus grande viteſſe que ſi A l'eût rencontré directement.

Que le rapport qu'ont entre eux les corps A, B, C ſoit auſſi le rapport qu'aient les droites DE, EH, HK et que LP ſoit la viteſſe du corps A, dont le double ſoit LQ; ſi donc comme la ſomme de DE et EH à DE on fait LQ à MR, MR ſera la

---

1) Huygens mentionne cette Proposition et sa démonstration dans une lettre à Claude Mylon du 6 juillet 1656; voir la p. 448 de notre T. I.

Dans le Manuscrit elle est comptée la onzième; comparez la note 1 de la p. 72.

2) Soit v_A la vitesse avec laquelle le corps A de masse m_A se meut avant le choc avec les corps B ou C de masses m_B et m_C, v'_B celle acquise par B après le choc, v''_C celle que B communique à C après le second choc; soit enfin v'_C la vitesse que C acquiert s'il est choqué directement par A sans l'intervention du corps B.

On trouve alors en appliquant la deuxième formule de la note 1 de la p. 67.

$$v'_B = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_A,\ v''_C = \frac{4m_A m_B}{(m_A + m_B)(m_B + m_C)},\ v'_C = \frac{2m_A}{m_A + m_C} v_A.$$

On a donc:

$$\frac{v''_C}{v'_C} = \frac{2m_B(m_A + m_C)}{(m_A + m_B)(m_B + m_C)} = 1 + \frac{(m_A - m_B)(m_B - m_C)}{(m_A + m_B)(m_B + m_C)},$$

valeur plus grande que l'unité toutes les fois que m_B est intermédiaire en grandeur entre m_A et m_C.

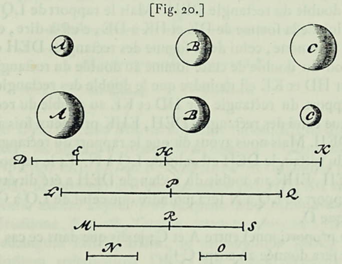
Quant au rapport maximum de v''_C à v'_C on l'obtient facilement en écrivant:

major igitur ratio BE ad EC quam CE ad ED: Quamobrem rectangulum ex BE, ED, majus quadrato ex CE quod erat propoſitum.

Propositio XII [1])

Si quod corpus majori vel minori quieſcenti obviam pergat, majorem ei celeritatem dabit per interpoſitum corpus mediæ magnitudinis itidem quieſcens quam ſi nullo intermedio ipſi impingatur. Maximam vero celeritatem tum conferet, quum corpus interpoſitum fuerit medium proportionale inter extrema [2]).

[Fig. 20.]



Moveatur corpus A [Fig. 20] verſus C quod quieſcat, ſitque A majus vel minus ipſo C, atque inter utrumque medium ponatur corpus B immotum, & mediocris magnitudinis; ita ut A primum impellat B, B vero deinde impellat C dico majorem motum ſic acquiri corpori C, quam ſi ſimpliciter ei occurriſſet A.

Quam rationem inter ſe habent corpora A, B, C, eandem habeant rectæ DE, EH, HK, ſitque LP celeritas corporis A, cu|jus

p. 394. dupla ſit LQ; ſi igitur fiat ſicut utraque ſimul DE, EH ad DE, ita LQ, ad MR;

$$\frac{v''_C}{v'_C} = \frac{2m_B(m_A + m_C)}{(m_A + m_B)(m_B + m_C)} = \frac{2(m_A + m_C)}{m_A + m_C + 2\sqrt{m_A m_C} + \left(\sqrt{m_B} - \frac{\sqrt{m_A m_C}}{\sqrt{m_B}}\right)^2}.$$

Il est donc atteint pour $m_B = \sqrt{m_A m_C}$. Notons encore qu'alors, posant $m_C = \varepsilon m_A$, on trouve:

$$v''_C\,(\text{max.}) = \frac{4}{(1 + \sqrt{\varepsilon})^2} v_A.$$

Ajoutons qui le premier alinéa (p. 153) de la Pièce III de l'Appendice III nous fait connaître la manière dont la formule pour m_B a été obtenue par Huygens.

* Prop. IX. viteſſe acquiſe par le corps B en repos lorſqu'il eſt pouſſé par A *. Soit MS le double de MR. Si donc, de nouveau, comme la ſomme de EH et HK à EH ainſi MS ſoit à N, N ſera la viteſſe du corps C après qu'il a été pouſſé par B avec la
* Prop. IX. viteſſe MR *. Mais ſi, comme la ſomme de DE et HK à DE ainſi LQ eſt à O, O ſera la viteſſe cherchée du corps C lorſqu'il eſt pouſſé par le corps A avec la viteſſe LP. Il faut donc démontrer que la viteſſe N eſt plus grande que O.

Le rapport de LQ à N eſt compoſé des rapports de LQ à MR et de MR à N. Or, le rapport de LQ à MR eſt le même que le rapport de HD à DE. Et le rapport de MR à N le même que celui de KE au double de EH. Car, comme KE à EH, ainſi eſt SM à N; par ſuite, KE eſt au double de EH comme SM à 2N, c'eſt-à-dire comme RM à N. Donc le rapport de LQ à N ſe compoſera des rapports de HD à DE et de KE au double de EH et il ſera, par conſéquent, celui du rectangle ſur HD et KE au double du rectangle DEH. Mais le rapport de LQ à O eſt, par conſtruction, celui de la ſomme de DE et HK à DE, c'eſt-à-dire, en prenant EH pour la hauteur commune, celui de la ſomme des rectangles DEH et EHK au rectangle DEH, ou du double de cette ſomme au double du rectangle DEH. Mais le rectangle ſur HD et KE eſt moindre que le double des rectangles
*Lemme I [3]). DEH, EHK *. Donc le rapport du rectangle ſur HD et KE au double du rectangle DEH ſera moindre que celui des rectangles DEH, EHK pris deux fois au double du même rectangle DEH. Mais nous avons dit que le rapport du rectangle ſur HD et KE au double du rectangle DEH eſt celui de LQ à N. Et le rapport du double des rectangles DEH, EHK au double du rectangle DEH a été dit être celui de LQ à O. Donc le rapport de LQ à N ſera moindre que celui de LQ à O, et, par ſuite, N plus grand que O.

Soit maintenant B moyen proportionnel entre A et C; je dis que dans ce cas la plus grande viteſſe de toutes ſera donnée au corps C [4]).

En effet ſoit dit, s'il eſt poſſible, qu'étant interpoſé au lieu du corps B d'abord un corps X [Fig. 21] plus grand (de ſorte que A pouſſe X et X pouſſe C) le corps C ait acquis ainſi une plus grande viteſſe que lorſque B aurait été interpoſé [5]).

[1]) Ce qui ſuit dans cette ligne et les ſuivantes jusqu'aux mots „simul DE, HK ad" y compris, fut intercalé en marge par Huygens dans le Manuscrit; évidemment il ne s'agissait que de corriger une inadvertance du copiste, comme cela résulte aussi de la comparaison avec le Manuscrit d'environ 1656.

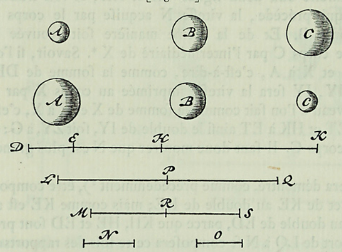
[2]) Ce mot fut intercalé de la main de Huygens dans les mêmes circonstances.

[3]) Huygens applique ici le lemme aux deux cas DE < EH < EK, c'est-à-dire A < B < C, et DE > EH > EK (A > B > C) quoiqu'il ne l'ait formulé et prouvé que pour le premier de ces cas (voir les p. 77—79); mais comparez le dernier alinéa de la note 2 de la p. 76.

[4]) Comparez pour une démonstration algébrique les deux derniers alinéas de la note 2 de la p. 80.

erit MR, celeritas acquiſita corpori quieſcenti B cum pellitur ab A. * Sit MS dupla ipſius MR. Rurſus igitur ſi ſit, ut utraque ſimul EH, HK ad [1]) EH ita MS * Prop. IX.
ad N, erit N celeritas corporis C poſtquam impulſum eſt ab B celeritate MR. * Si vero ut utraque ſimul DE, HK ad DE ita ſit LQ ad O, erit O celeritas corporis C quæſita ſi pellatur a corpore A celeritate LP. Itaque demonſtrandum eſt majorem eſſe celeritatem N quam O. * Prop. IX.

[Fig. 20.]



Ratio LQ ad N compoſita eſt ex rationibus LQ ad MR & MR ad N. Ratio autem LQ ad MR eadem eſt rationi HD ad DE. Et ratio MR ad N eadem rationi KE ad duplam EH. Eſt enim ut KE ad EH, ita SM ad N, unde KE ad duplam [2]) EH ut SM ad 2N, hoc eſt, ut RM ad N. Ergo ratio LQ ad N componetur ex rationibus HD ad DE, & KE ad duplam EH, ac proinde erit ea quæ rectanguli HD, KE ad duplum rectangulum DEH. Ratio autem LQ ad O eſt ea quam habet utraque ſimul DE, HK ad DE, ex conſtructione, hoc eſt, ſumpta communi altitudine EH, quam habent utraque ſimul rectangula DEH, EHK, ad rectangulum DEH, vel quam illa bis ſumpta ad duplum rectangulum DEH. Eſt autem rectangulum HD, KE, minus quam duplum rectangulorum DEH, EHK *. Ergo minor erit ratio rectanguli HD, * Lemm. I [3]).
KE, ad duplum rectangulum DEH, quam rectangulorum DEH, EHK, bis ſumptorum, ad idem duplum rectangulum DEH. Quam autem rationem habet rectangulum HD, KE ad duplum rectangulum DEH, eam dictum eſt habere LQ ad N. Et quam rationem habet duplum rectangulorum DEH, EHK, ad duplum rectangulum DEH, eam dictum eſt habere LQ ad O. Igitur minor erit ratio LQ ad N quam LQ ad O, ac proinde N major quam O. |

p. 395. Eſto jam B proportione medium inter A & C, dico hac ratione maximam omnium celeritatum corpori C collatum iri [4]).

Nam, ſi fieri poteſt, interpoſito primum loco B, corpore majori X [Fig. 21], ita ut A pellat X, X autem pellat C, dicatur major ſic celeritas acquiri corpori C, quam ſi interponatur B [5]). Et ſicut A ad X, ita ſit DE ad ET. Ergo ET

[5]) Huygens semble donc vouloir donner à sa démonstration la forme d'une réduction à l'absurde; mais il abandonne ensuite cette idée pour démontrer directement que la vitesse acquise par

Or, comme A à X, ainſi ſoit DE à ET. Donc ET eſt plus grand que EH, ſuppoſant bien entendu que comme précédemment les proportionnelles DE, EH, HK ſont dans le même rapport que les corps A, B, C. Mais ſoit VE la troiſième proportionnelle aux deux lignes TE et HE, et ſoit trouvée enſuite, comme dans ce qui précède, la viteſſe N acquiſe par le corps C par l'intermédiaire du corps B. Et de la même manière ſoit trouvée la
* Prop. IX. viteſſe acquiſe par le même corps C par l'intermédiaire de X *. Savoir, ſi l'on fait comme la ſomme de A et X à A, c'eſt-à-dire, comme la ſomme de DE, ET à DE ainſi LQ [1]) à IY, IY ſera la viteſſe imprimée au corps X par la pouſſée de A: d'où de nouveau ſi l'on fait comme la ſomme de X et C à X, c'eſt-à-dire comme la ſomme de ET et HK à ET ainſi le double de IY, ſoit ZY, à G: G ſera la viteſſe cherchée du corps C. Il faut donc montrer que N est plus grande que G.

Le rapport de LQ à N ſera démontré, comme précédemment [2]), être compoſé des rapports de HD à DE et de KE au double de HE; mais comme KE eſt au double de HE ainſi HD eſt au double de ED, parce que KH, HE et ED ſont proportionnelles. Donc le rapport de LQ à N ſe compoſera cette fois des rapports de HD à DE et de HD au double de DE: il ſera donc le même que celui du carré HD au double du carré DE. Mais le rapport de LQ à G eſt compoſé des rapports de LQ à IY et de IY à G, dont le rapport de LQ à IY eſt le même que celui de TD à DE, par conſtruction, mais le rapport de IY à G eſt le même que celui de la ſomme de KH et TE au double de TE, car, par conſtruction, ZY eſt à G comme la ſomme de KH et TE eſt à TE, par ſuite, en doublant les ſeconds termes des rapports, ZY ſera au double de G, ou IY à G, comme la ſomme de KH et TE au double de TE, comme nous l'avons dit. Par conſéquent, le rapport de LQ à G ſe compoſe des rapports de TD à DE et de la ſomme de KH et TE au double de TE: mais, puiſque DE, EH, HK ſont proportionnelles, le rectangle ſur DE et HK eſt égal au carré EH. D'ailleurs le rectangle ſur EV et ET eſt auſſi égal à ce même carré EH, parce que EV, EH, ET ſont proportionnelles. Par conſéquent le rectangle ſur DE et HK eſt égal au rectangle ſur EV et ET. D'où il ſuit que VE eſt à ED comme HK à ET, et, par compoſition, que VD eſt à DE comme la ſomme de KH et TE à TE, et, en doublant les ſeconds termes, VD eſt au double de DE

l'intermédiaire du corps B excède celle qu'on obtiendrait par l'interposition de tout autre corps X plus grand que B.

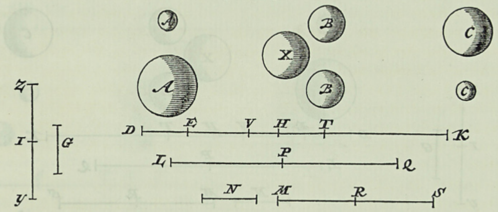
1) LQ représente, comme dans la Fig. 20 (p. 81), le double de la vitesse initiale du corps A.

2) Voir le deuxième alinéa de la p. 83.

3) Ce mot fut intercalé par Huygens pour corriger une inadvertance du copiste; comparez la note 1 de la p. 82.

major quam EH; poſitis videlicet, ſicut ante, proportionalibus DE, EH, HK, in eâdem ratione quæ eſt corporum A, B, C. Sit autem duabus TE, HE tertia pro-

[Fig. 21.]

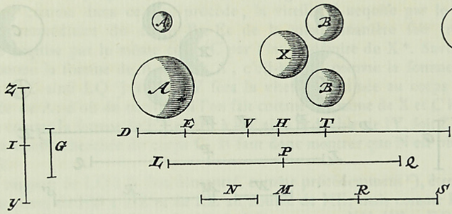


portionalis VE: atque inveniatur porro, ſicuti in præcedentibus, celeritas N corpori C acquiſita per interpoſitum B. Similique ratione inveniatur, celeritas quæ eidem C acquiretur per interpoſitum X *. Nempe ſi fiat ut utrumque ſimul * Prop. IX
A & X ad X, hoc eſt, ut utraque ſimul DE, ET ad DE, ita LQ [1]) ad IY, erit IY celeritas impreſſa corpori X impellente A: unde rurſus ſi fiat ut utrumque ſimul X & C ad X, hoc eſt, ut utraque ſimul ET, HK ad ET ita dupla IY quæ ſit ZY ad G; erit G celeritas quæſita corpori C. Quamobrem oſtendendum eſt N majorem eſſe quam G.

Ratio LQ ad N, ſicut antea [2]), componi oſtendetur ex rationibus HD ad DE, & KE ad duplam HE; eſt autem ſicut KE, ad duplam HE, ita HD ad duplam ED, quia proportionales KH, HE, ED. Igitur ratio LQ ad N componetur jam ex rationibus HD ad DE, & HD ad duplam DE: ac propterea erit eadem quæ quadrati HD ad duplum quadrati DE. Ratio autem LQ ad G componitur ex rationibus LQ ad IY & IY ad G, quarum ratio LQ ad IY eſt eadem quæ TD ad DE ex conſtructione, ratio autem IY ad G eadem quæ utriusque ſimul KH, TE ad duplam [3]) TE; etenim ex conſtructione eſt ſicut utraque ſimul KH, TE ad TE,
p. 396. ita ZY ad G, | ideoque, ſumptis conſequentium duplis, ſicut duæ KH, TE, ad duplam TE, ita ZY ad duplam G, ſive IY ad G, uti dictum fuit: itaque ratio LQ ad G componitur ex rationibus TD ad DE, & duarum ſimul KH, TE ad duplam TE: quia vero proportionales ſunt DE, EH, HK, erit rectangulum DE, HK æquale quadrato EH. Sed & rectangulum EV, ET eidem quadrato EH æquale eſt, quoniam proportionales EV, EH, ET. Igitur rectangulum DE, HK æquale rectangulo EV, ET. Unde ſicut VE ad ED ita HK ad ET, & componendo, ſicut VD ad DE, ita utraque ſimul KH, TE ad TE; &, ſumptis conſequentium duplis, ſicut VD ad duplam DE, ita duæ KH, TE ad duplam TE. Itaque ratio LQ ad G

comme la ſomme de KH et TE eſt au double de TE. Donc le rapport de LQ à G ſe compoſe des rapports de TD à DE et de VD au double de DE. Il eſt, par ſuite,

[Fig. 21.]



le même que celui du rectangle TDV au double du carré DE. Mais le rapport de LQ à N a été montré être le même que celui du carré HD au double du carré DE. Donc, puisque le rectangle TDV eſt plus grand que le carré HD, par le Lemme II (car TE, HE et VE ſont proportionnelles et la longueur ED eſt ajoutée à elles), il s'enſuivra que le rapport de LQ à G eſt plus grand que celui de LQ à N et que par ſuite N eſt plus grande que G, ce qu'il fallait démontrer.

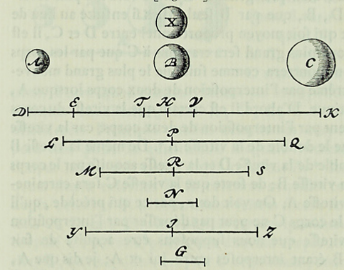
Qu'il ſoit dit enſuite qu'en interpoſant un corps X moindre que B une plus grande viteſſe ſerait acquiſe par le corps C [1]). Soit de nouveau comme A à X ainſi DE à ET [Fig. 22]. Donc puisque X eſt ſuppoſé moindre que B, ET ſera également moindre que EH, car, comme A à B, ainſi DE eſt à EH. Mais pour le reſte qu'on répète la conſtruction et la démonſtration appliquées tantôt, par laquelle de nouveau la viteſſe N ſera montrée être plus grande que G. Il eſt donc certain que la viteſſe maximum ſera acquiſe par le corps en repos C lorsqu'on interpoſe le corps B qui eſt moyen proportionnel entre A et C.

PROPOSITION XIII [2]).

À meſure qu'un plus grand nombre de corps ſont interpoſés entre deux corps inégaux, dont l'un ſoit en repos, et l'autre en mouvement, un plus grand mouvement pourra être communiqué au corps en repos. Mais le plus grand mouvement ſera transmis par un même nombre de corps interpoſés lorsque ces corps conſtituent avec les deux extrêmes une ſuite continue de grandeurs proportionnelles.

componitur ex rationibus TD ad DE & VD ad duplam DE, ac proinde eſt eadem quæ rectanguli TDV ad duplum quadratum DE. Ratio autem LQ ad N oſtenſa eſt eadem quæ quadrati HD ad duplum quadratum DE. Itaque cum rectangulum TDV majus ſit quam quadratum HD, per lemma II. (ſunt enim proportionales TE, HE, VE, quibus adjecta eſt longitudo ED) ſequetur majorem eſſe rationem LQ ad G quam LQ ad N; adeoque majorem eſſe N quam G, quod erat oſtendendum.

[Fig. 22.]



Dicatur deinde interpoſito corpore X [Fig. 22] minori quam B, acquiri majorem celeritatem corpori C [1]). Sit rurſus ut A ad X ita DE ad ET. igitur quia jam minor ponitur X quam B, erit quoque ET minor quam EH, nam, ſicut A ad B, ita eſt DE ad EH. De cætero autem eadem repetatur conſtructio & demonſtratio quæ modo adhibita fuit, quâ quidem rurſus celeritas N major oſtendetur quam G. Itaque conſtat maximam celeritatem acquiri corpori quieſcenti C per interpoſitionem corporis B quod ſit medium proportionale inter A & C. |

p. 397. PROPOSITIO XIII [2]).

Quo plura corpora interponentur inter duo inæqualia, quorum alterum quiescat alterum moveatur, eo major motus quieſcenti conciliari poterit. Maximus autem per unam quamque interpoſitorum multitudinem ita conferetur, ſi interpoſita cum extremis continuam proportionalium ſeriem conſtituant.

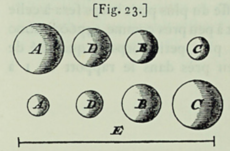
Sint proportionalia corpora A, B, C [Fig. 23], e quibus A moveatur reliqua duo quiescant; itaque maximus motus acquirendus corpori C per unius corporis

[1]) Comparez la note 5 de la p. 83.
[2]) Elle est comptée la douzième dans le Manuscrit; comparez le deuxième alinéa de la note 1 de la p. 80.

Soient A, B, C [Fig. 23] les corps proportionnels, dont A ſoit en mouvement, les deux autres en repos, le plus grand mouvement que peut acquérir le corps C par l'interpoſition d'un ſeul corps eſt donc celui effectué par l'interpoſition de
* Prop. XII. B*. Mais que par l'interpoſition de deux corps un mouvement plus grand encore peut être effectué paraîtra comme ſuit. En effet, ſi entre A et B eſt interpoſé le moyen proportionnel D, le corps B acquiert déjà un plus grand mouvement que s'il fût ſimplement pouſſé par le corps A; mais à meſure que la viteſſe de B eſt plus grande, celle produite en C ſera auſſi plus grande. Donc C ſera mû plus fortement par les corps interpoſés D, B, que par B ſeul. Mais ſi enſuite au lieu de de B un autre corps eſt introduit qui ſoit moyen proportionnel entre D et C, il eſt évident qu'un mouvement encore plus grand ſera transmis à C que par les corps interpoſés D, B. Après cela on montrera comme ſuit que le plus grand mouvement eſt transmis au corps extrême par l'interpoſition de deux corps lorsque A, D, B, C ſont en proportion continue. D'abord il eſt certain que la viteſſe du corps C ne peut pas croître indéfiniment par l'interpoſition de deux corps; car la viteſſe
* Prop. VII. de D ſera toujours moindre que le double de la viteſſe A*. De même la viteſſe B ſera toujours moindre que le double de la viteſſe D et la viteſſe acquiſe par le corps C moindre que le double de la viteſſe B; de ſorte que la viteſſe C ſera certainement moindre que huit fois la viteſſe A. On voit donc, par ce qui précède, qu'il exiſte une certaine viteſſe que le corps C ne peut pas dépaſſer par l'interpoſition de deux corps. Soit E cette viteſſe que nous ſuppoſons être acquiſe de fait par le corps C, les corps D, B étant interpoſés entre lui et A; je dis que A, D, B, C ſont en proportion continue. Car, en premier lieu, ſi les trois A, D, B ne ſont pas proportionnels, il faudra qu'en ſubſtituant pour le corps D un autre qui ſoit moyen proportionnel entre A et B, un plus grand mouvement paſſe en B que par l'interpoſition de D et, par conſéquent, C acquiert une plus grande viteſſe que par l'interpoſition de D, B, c'eſt-à-dire plus grande que la viteſſe E, ce qui eſt abſurde, parce qu'il a été ſuppoſé que E fut la plus grande viteſſe que le corps C pût acquérir par l'interpoſition de deux corps. De même ſi D, B, C ne ſont pas proportionnels, on pourra mettre au lieu de B un autre corps moyen proportionnel entre D et C, d'où il reſſortira que de nouveau le corps C obtiendrait une viteſſe plus grande que par l'interpoſition de D, B, c'eſt-à-dire, plus grande que la viteſſe E, ce qui eſt abſurde pour la même raiſon. Par ſuite, puisque auſſi bien A, D, B que D, B, C ſont proportionnels, tous les corps A, D, B, C feront en proportion continue, ce qu'il fallait démontrer. Or, on pourra dès lors démontrer par le même raiſonnement qu'en interpoſant entre A et C trois corps on peut communiquer au corps C un plus grand mouvement encore que lorsque ſeulement deux corps furent interpoſés, et ainſi de ſuite. Et par une argumentation pareille on montrera que le corps C obtient la plus grande viteſſe lorsque tous les corps ſont dans une proportion continue [1]). La propoſition eſt donc démontrée.

interpoſitionem eſt ille qui efficitur per interpoſitum B*. Quod autem ope duorum interpoſitorum major adhuc effici poſſit hinc conſtabit. Etenim ſi inter A & B medium proportionale interponatur D, major jam motus acquiritur corpori B quam ſi ſimpliciter a corpore A fuiſſet percuſſum; quo autem major eſt celeritas in B, eo & major inducetur in C. Igitur C magis movebitur per interpoſita corpora D, B, quam per ſolum B. Quod ſi vero in locum B aliud poſtea conſtituatur quod ſit medium proportionale inter D & C, evidens eſt adhuc majorem motum in C tranſiturum, quam per interpoſita D B corpora. Porro quod maximus motus per interpoſitionem duorum corporum corpori extremo concilietur, cum A, D, B, C fuerint continue proportionalia, ſic oſtendetur. Principio conſtat celeritatem corporis C per interpoſita duo corpora non poſſe in quantumvis magnam excreſcere; nam celeritas corporis D ſemper minor erit quam dupla celeritas A.* Item celeritas B ſemper minor erit * Prop. VII.
* Prop. XII.

[Fig. 23.]



quam dupla celeritas D & celeritas acquiſita corpori C ſemper minor erit quam dupla celeritas B. adeo ut minor ſaltem futura ſit celeritas C quam octupla celeri-
p. 398. tatis A. Itaque hinc intelligitur certam quandam celeritatem | exiſtere quâ major corpori C, per interpoſitionem duorum corporum, acquiri nequeat. Eſto ea celeritas E, quam quidem corpori C acquiſitam ponamus interpoſitis inter ipſum & A corporibus D, B dico A, D, B, C continue proportionalia eſſe. Etenim primo, ſi tria A, D, B non ſunt proportionalia, fiet ſubſtituendo corpus aliud pro corpore D, quod medium proportionale ſit inter A & B, ut major motus tranſeat in B quam per interpoſitum D. ac proinde etiam C majorem acquirit velocitatem, quam per interpoſita D, B, hoc eſt, majorem quam ſit velocitas E, quod abſurdum eſt, quia poſita fuit E maxima eſſe velocitas quam duorum corporum interpoſitione corpus C adipisci poſſet. Similiter ſi D, B, C non ſunt proportionalia, poterit in locum B aliud medium proportionale conſtitui inter D, C, quo fiet ut rurſus major acquiratur velocitas corpori C quam per interpoſita D B, hoc eſt, major velocitate E; quod eâdem ratione abſurdum eſt. Itaque quum & A, D, B & D, B, C ſint proportionales, erunt corpora omnia A, D, B, C in proportione continua, quod erat oſtendendum. Hinc vero jam eâdem ratione oſtendi poterit, interpoſitis inter A, C, tribus corporibus majorem adhuc motum corpori C tribui poſſe quam cum duo tantum interpoſita fuere, atque ita deinceps; ſimilique etiam argumentatione maximus motus corpori C acquiri oſtendetur cum omnium corporum continua eſt proportio [1]). Itaque conſtat propoſitum.

[1]) Dans ce cas, lorsque *n* représente le nombre des corps interposés on trouve, par des formules

Si[1]) l'on donne une rangée de cent corps dans la proportion de un à deux et que le mouvement commence par le plus grand on trouve en exécutant un calcul que nous ſupprimons, d'après la règle expoſée dans la neuvième [2]) propoſition, mais ſuivant ſa rédaction abrégée [3]), que la viteſſe du plus petit corps ſera à celle avec laquelle le plus grand fut mis en mouvement à peu près comme 14760000000 à 1 [4]). Or, ſi le mouvement commence par le plus petit corps la quantité de mouvement augmente dans l'univers [5]) à peu près dans le rapport de 1 à 4677000000000 [6]).

FIN.

analogues à celles de la note 2 de p. 80, pour la vitesse du dernier corps C l'expression:

$$v_C = \frac{2^{n+1}}{\left(1+\sqrt[n+1]{\varepsilon}\right)^{n+1}}\, v_A, \text{ où } \varepsilon = m_C : m_A.$$

Ajoutons encore que, par les méthodes modernes bien connues, on trouve facilement que pour $n = \infty$ on a $v_C = v_A : \sqrt{\varepsilon}$ de sorte qu'alors toute l'énergie du corps A passe après les chocs dans le corps C.

Nous empruntons cette remarque à l'annotation 17, p. 72, de l'ouvrage: „Christian Huygens' nachgelassene Abhandlungen über die Bewegung der Körper durch den Stoss [und] über die Centrifugalkraft. Herausgegeben von Felix Hausdorff, Leipzig, Wilhelm Engelmann, 1903." Cet ouvrage, qui constitue le N°. 138 d'„Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften," contient une traduction allemande du présent Traité de Huygens.

D'ailleurs il est facile de généraliser la remarque en question pour le cas où les masses consécutives ne forment pas précisément une suite géométrique, mais où leur différences successives sont toutes du même ordre de grandeur, savoir de l'ordre n^{-1}.

En effet les formules de la note 1 de la p. 67 montrent qu'alors après les chocs les vitesses du premier corps et de tous les corps intermédiaires seront de l'ordre n^{-1} et par suites leurs forces vives de l'ordre n^{-2}. La somme de ces forces vives, étant de l'ordre n^{-1}, s'approche donc, lorsque n augmente, indéfiniment de zéro et avec elle (puisque, d'après la Prop. XI, p. 73, il n'y a pas de force vive perdue dans les chocs des corps durs de Huygens) la différence entre $m_C v^2_C$ et $m_A v^2_A$.

1) Ce dernier alinéa manque entièrement dans le Manuscrit d'environ 1656, mentionné à la p. 10 de l'Avertissement qui précède. Il a probablement été composé beaucoup plus tard, peut-être en 1667. Nous en possédons, sur une feuille détachée, la rédaction originale, qui ne diffère pas du texte latin présent.

2) Le mot „nona" fut écrit de la main de Huygens.

3) Comparez la dernière phrase du premier alinéa de la p. 69 et les deux alinéas qui la suivent.

4) En vérité on trouve, en appliquant la formule de la note 1, qui commence à la page précé-

Si[1]) corpora centum ex ordine dentur in proportione duplâ, incipiatque motus a maximo, invenitur ſubducto calculo ad præceptum regulæ propoſitione nona [2]) traditæ ſed in compendium redactæ [3]), celeritas minimi ad celeritatem quâ movebatur maximum proxime ea quæ 14760000000 ad 1 [4]). Si vero a minimo motus incipiat augetur in univerſum [5]) motus quantitas ſecundum rationem proxime quæ 1 ad 4677000000000 [6]).

FINIS.

dente, pour le rapport en question: $\frac{2^{99}}{(1+\frac{1}{2})^{99}} : 1$, c'est-à-dire à peu près 2338500000000 : 1, comme on le donne aussi à la p. 72 de l'ouvrage mentionné dans la note citée. Voir pour la méthode de calcul suivie par Huygens la Pièce V (p. 156—158) de l'Appendice III et pour l'explication de l'erreur commise la note 2 de la p. 158.

5) Comparez la note 1 de la p. 49.

6) Considérons le cas de n corps interposés. La quantité de mouvement est d'abord $m_A v_A$. Après les chocs tous les corps, excepté le dernier, se meuvent dans une direction contraire à celle possédée primitivement par le premier et plus petit. Or, le dernier corps aura alors la vitesse $\frac{2^{n+1}}{\left(1+\sqrt[n+1]{\varepsilon}\right)^{n+1}} v_A$ (voir la note 1 de la p. 89) et par suite la quantité de mouvement $\frac{2^{n+1}\varepsilon}{\left(1+\sqrt[n+1]{\varepsilon}\right)^{n+1}} m_A v_A$. Puisque la somme algébrique des quantités de mouvement doit rester la même, on trouve donc facilement pour la somme des quantités de mouvement des autres corps prises dans la direction contraire: $\frac{2^{n+1}\varepsilon}{\left(1+\sqrt[n+1]{\varepsilon}\right)^{n+1}} m_A v_A - m_A v_A$ et pour la somme totale des valeurs absolues des quantités de mouvement après les chocs: $\frac{2^{n+2}\varepsilon}{\left(1+\sqrt[n+1]{\varepsilon}\right)^{n+1}} m_A v_A - m_A v_A$. Le rapport en question est donc celui de 1 à $\frac{2^{n+2}\varepsilon}{\left(1+\sqrt[n+1]{\varepsilon}\right)^{n+1}} - 1$. Dans le cas numérique traité par Huygens, on a $n = 98$, $\varepsilon = 2^{99}$ et l'on trouve donc 1 à $2(\frac{4}{3})^{99} - 1$, ou, comme dans le texte, environ 4677000000000 à 1.

Consultez sur la méthode suivie par Huygens pour arriver à ce résultat la Pièce V mentionnée dans la note 4 et surtout la note 2 de la p. 158.