Avertiſſement.

APERÇU GÉNÉRAL DE LA GENÈSE DU TRAITÉ „DE MOTU CORPORUM EX PERCUSSIONE".

On connaît la grande amitié qui liait le père de Chriſtiaan Huygens à Descartes et l'admiration profonde que celui-ci lui inſpirait [1]). Cette admiration fut partagée par le jeune Chriſtiaan qui, ſans doute, a rencontré plus d'une fois le philoſophe français dans la maiſon paternelle, et ſubi l'aſcendant de cette puiſſante perſonnalité.

Voici, en effet, comment vers la fin de ſes jours Chriſtiaan Huygens décrivit l'influence que Descartes avait exercée ſur lui dans ſa jeuneſſe [2]): „Mr. des Cartes avoit trouvè la maniere de faire prendre ſes conjectures et fictions pour des veritez. Et il arrivoit a ceux qui liſoient ſes Principes de Philoſophie [3]) quelque choſe de ſemblable qu'a ceux qui liſent des Romans qui plaiſent et font la meſme impreſſion

---

[1]) Voir sur les relations entre Constantyn Huygens et Descartes les p. 113—116 du T. XII, 1910, des „Œuvres de Descartes" publiées par Adam et Tannery.

[2]) Voir la p. 403 de notre T. X.

[3]) Les „Principia philosophiæ", ouvrage mentionné dans la note 4 de la p. 546 du T. II, parurent en juillet 1644, lorsque Huygens, né le 14 avril 1629, avait 15 ans; voir la p. 358 du T. XII des „Œuvres de Descartes".

que des hiſtoires veritables. La nouveautè des figures de ſes petites particules et des tourbillons y font un grand agrement. Il me ſembloit lorſque je lus ce livre des Principes la premiere fois que tout alloit le mieux du monde, et je croiois, quand j'y trouvois quelque difficultè, que c'étoit ma faute de ne pas bien comprendre ſa penſée. Je n'avois que 15 à 16 ans. Mais y ayant du depuis decouvert de temps en temps des choſes viſiblement fauſſes, et d'autres tres peu vraiſemblables je ſuis revenu de la preoccupation ou j'avois eſtè".

En mai 1645, à l'âge de 16 ans, Chriſtiaan entra dans l'Univerſité de Leiden, où il rencontra le mathématicien Frans van Schooten, qui, l'année ſuivante, ſuccéda à ſon père, du même nom, comme profeſſeur de mathématiques à l'école des ingénieurs, dépendant de l'Univerſité. Cet homme d'environ trente ans, grand admirateur de Descartes, fut le précepteur et bientôt l'ami de Chriſtiaan. Il conſidérait comme ſa vocation principale d'enſeigner à ſes élèves, et ſurtout au plus éminent d'entre eux [1]), les nouvelles méthodes et découvertes mathématiques du philoſophe français.

En 1650 Huygens donna encore un témoignage éloquent de ſon admiration, à peine atteinte, pour Descartes dans les vers qu'il conſacra à ſa mémoire et qui finiſſent par la ſtance [2]):

„Nature, prends le deuil, viens plaindre la première
Le Grand Descartes, et monſtre ton déſespoir;
Quand il perdit le jour, tu perdis la lumière,
Ce n'eſt qu'à ce flambeau que nous t'avons pu voir."

C'eſt, paraît-il, en 1652 que la réaction dans l'eſprit de Huygens à l'égard de Descartes ſe fait jour.

Le 17 janvier 1652 il écrit à van Gutſchoven [3]) qu'il doute de la vérité des

[1]) Nous possédons encore le Manuscrit de l'écriture de van Schooten qui a servi aux études de Huygens; voir les p. 7—20 de notre T. XI.
[2]) Voir la p. 125 du T. I.
[3]) Voir la p. 167 du T. I.
[4]) Voici ces règles dans la version française de la traduction, autorisée par Descartes, de 1647 (voir la note 4 de la p. 101):
„La premiere est que, si ces deux corps, par exemple B & C [voir la figure de la note 4 de la p. 93] estoient exactement égaux, & se mouuoient d'égale vitesse en ligne droite l'vn vers l'autre..., lors qu'ils viendroient à se rencontrer, ils rejalliroient tous deux également

règles de Descartes ſur le choc des corps [4]), la première exceptée, pour ne pas dire qu'il les ſuſpecte d'être fauſſes. Il pourrait apporter ſes raiſons, ſurtout contre

& retourneroient chacun vers le costè d'où il seroit venu, sans perdre rien de leur vitesse.
La seconde est que, si B estoit tant soit peu plus grand que C, & qu'il se rencontrassent auec mesme vitesse, il n'y auroit que C qui rejallit vers le costé d'où il seroit venu, & ils continueroient par apres leur mouuement tous deux ensemble vers ce mesme costè.
La troisiéme que, si ces deux corps estoient de mesme grandeur, mais que B eust tant soit peu plus de vitesse que C, non seulement, apres s'estre rencontrez, C seul rejalliroit, & ils iroient tous deux ensemble, comme deuant, vers le costé d'où C seroit venu; mais aussi il seroit nécessaire que B luy transferast la moitié de ce qu'il auroit de plus de vitesse.
La quatriéme que, si le corps C estoit tant soit peu plus grand que B, & qu'il fust entierement en repos, de quelle vitesse que B pust venir vers luy jamais il n'auroit la force de le mouuoir, mais il seroit contraint de rejallir vers le mesme costé d'où il seroit venu.
La cinquiéme est que, si, au contraire, le corps C estoit tant soit peu moindre que B, celuy-cy ne sçauroit aller si lentement vers l'autre, lequel je suppose encore parfaitement en repos, qu'il n'eust la force de le pousser & luy transferer la partie de son mouuement qui seroit requise pour faire qu'ils allassent par apres de mesme vitesse.
La sixiéme, que si le corps C estoit en repos, & parfaitement égal en grandeur au corps B, qui se meut vers luy, il faudroit necessairement qu'il fust en partie poussé par B, & qu'en partie il le fit rejallir; en sorte que, si B estoit venu vers C auec quatre degrez de vitesse, il faudroit qu'il luy en transferast vn, & qu'avec les trois autres il retournast vers le costé d'où il seroit venu.
La septiéme & derniere regle est que, si B et C vont vers vn mesme costé, & que C precede, mais aille plus lentement que B, en sorte qu'il soit enfin atteint par luy..., il peut arriuer que B transferera vne partie de sa vitesse à C, pour le pousser deuant soy; & il peut arriuer aussi qu'il ne luy en transferera rien du tout, mais rejallira, auec tout son mouuement, vers le costé d'où il sera venu. A sçavoir, non seulemenr lors que C est plus petit que B, mais aussi lors qu'il est plus grand, pourueu que ce en quoy la grandeur de C surpasse celle de B, soit moindre que ce en quoy la vitesse de B surpasse celle de C, jamais B ne doit rejallir, mais pousser C, en luy transferant vne partie de sa vitesse. Et au contraire, lors que ce en quoy la grandeur de C surpasse celle de B, est plus grand que ce en quoy la vitesse de B surpasse celle de C, il faut que B rejallisse, sans rien communiquer à C de son mouuement; & enfin, lors que l'excez de grandeur qui est en C, est parfaitement égal à l'excez de vitesse qui est en B, cetuy-cy doit transferer vne partie de son mouuement à l'autre, & rejallir auec le reste."
Il est clair que plusieurs de ces règles, nommément la quatrième, sont en contradiction avec la plus simple expérience. Seulement le fait de leur admission par Descartes devient un peu moins incompréhensible par ce qu'il considérait ces règles comme des règles théoriques qui ne se réalisent dans la pratique que très rarement. Ainsi il dit à propos de la quatrième que pour sa réalisation il est nécessaire que le corps C „non seulement n'eust point de mouuement apparent, mais aussi qu'il ne fust point enuironné d'air, ni d'aucuns autres corps liquides, lesquels, comme je diray cy-apres, disposent les corps durs qu'ils enuironnent, à pouuoir estre meus fort aisement" et il revient encore plus d'une fois (voir les articles 53—59, p. 93—99 de la pagination de la dernière partie du T. IX de l'édition d'Adam et Tannery) sur cette restriction; voir encore la note 7 de la p. 101.

la quatrième [1]), mais il craint que cela n'intéreſſe pas ſuffiſamment ſon correſpondant.

En octobre 1652 [2]), pour illuſtrer la différence entre ſes vues et celles de Descartes, il indique à van Schooten le cas où les deux corps ſe meuvent en ſens contraire de manière que le produit de la maſſe et de la viteſſe a la même valeur pour les deux. D'après lui, Huygens, les deux corps rejailliront chacun du côté d'où ils ſont venus avec la même viteſſe qu'ils avaient avant leur rencontre; ſuivant Descartes, qui dans ſes règles avait omis ce cas, le plus petit n'aurait pas même la puiſſance de mouvoir le plus grand lorsque celui-ci ſerait en repos. Or, la ſolution indiquée ici par Huygens eſt préciſément celle de laquelle il affirme [3]) dans le manuſcrit de 1652, dont nous parlerons bientôt, pouvoir déduire la ſolution de tous les autres cas [4]).

Enfin, le 16 décembre 1653, il fait connaître à Kinner à Löwenthurn [5]) ſa ſolution du cas où de deux corps égaux qui ſe choquent l'un eſt en repos, et lui propoſe le cas où le corps en mouvement rencontre un corps en repos de grandeur double. Perſonne, qu'il ſache, n'a donné une ſolution acceptable dece dernier cas, ou du moins pas une qui convienne aux raiſonnements qu'il avait inſtitués à ce ſujet.

Voilà ce que nous apprend la Correspondance de Huygens à propos de ſes premières recherches ſur le choc des corps. Voyons maintenant ce que les Manuſcrits nous révèlent. Il n'y en a qu'un que l'on puiſſe dater de ſi tôt que 1652. C'eſt la première feuille, de 4 pages, d'un Manuſcrit plus étendu dont les pages furent numérotées par Huygens. Cette feuille nous a fourni les trois premières Parties de l'Appendice I [6]). Sans doute contient-elle les premières recherches ſur le choc des corps durs. On y voit Huygens faire fauſſe route au début [7]) pour revenir immédiatement ſur ſes pas et choiſir une voie meilleure; en outre on trouve au milieu de la troiſième page, qui a été reproduite à la fin du préſent Tome en facſimilé, la minute d'une lettre à van Schooten [8]) à laquelle celui-ci répondit le

Manuſcrit de 1652.

[1]) Comparez (p. 39) la Prop. III et surtout la note 1 de la p. 38.
[2]) Voir la lettre du 29 octobre 1652, p. 186 du T. I.
[3]) Voir le deuxième et le troisième alinéa de la p. 96. On y voit que Huygens a même pensé à ériger sa solution du cas en question en axiome. Dans le Traité définitif on la rencontre comme Prop. VIII (p. 53). Elle joue un rôle prépondérant dans la déduction de la solution générale contenue dans la Prop. IX (p. 65—71); comparez les p. 65—67.

28 juillet 1652 [9]). Pourquoi cette minute aurait-elle été écrite à cette place ſi le reſte de la page n'était pas déjà occupé?

Or, ſur cette feuille qui doit donc dater de 1652, on rencontre déjà pluſieurs des Théorèmes les plus importants du futur Traité ſur le choc des corps durs [10]). En premier lieu le Principe de la relativité [11]), dont Huygens a tiré tant de profit et qui conſtate (pour employer l'image choisie de préférence par Huygens) que les choſes ſe paſſent de même dans un bateau ſe mouvant avec une viteſſe uniforme, qu'elles ſe paſſent ſur la rive. Enſuite le beau Théorème d'après lequel dans le choc des corps durs la viteſſe de la ſéparation eſt égale à celle du rapprochement [12]). Enfin, ce qui eſt très remarquable, le Théorème de la conſervation de la force vive [13]).

Remarquons que rien ſur la feuille n'indique la manière dont ce dernier Théorème a été obtenu. Il ſemble très improbable que la voie expoſée dans le Traité [14]) ait été ſuivie: il ne reſte à notre avis que la conjecture énoncée par nous dans la note 10 de la p. 95. Mais nous reviendrons plus loin ſur cette question [15]).

En outre on trouve à la troiſième page de la feuille des calculs baſés ſur le Principe de la conſervation de la quantité de mouvement [16]). Il eſt peu vraiſemblable qu'à cette époque Huygens avait déjà donné à ce Principe ſa forme propre

[4]) Dans sa réponse du 28 juillet 1652 (p. 187—188 du T. I) van Schooten cherche à suppléer à la lacune laissée par Descartes. Par analogie probablement avec la quatrième règle de Descartes, il prétend que le corps le plus grand ne perdra rien de sa vitesse et que le corps le plus petit rejaillira avec la vitesse qu'il possède avant le choc. On trouve dans la réplique de Huygens du 7 novembre 1652 (p. 457 du T. III) la réfutation très ingénieuse de cette solution de van Schooten.
[5]) Voir sa lettre du 16 décembre 1653, p. 260 du T. I.
[6]) Voir les p. 92—99.
[7]) Voir le deuxième et le troisième alinéa de la p. 92.
[8]) Voir le premier alinéa de la p. 99.
[9]) Voir les p. 183—184 de notre T. I.
[10]) Remarquons qu'il s'agit toujours du choc direct (nous dirions plutôt du choc central). Nous ne connaissons qu'un seul endroit dans les Manuscrits (voir les p. 117—118) où Huygens traite le choc indirect ou oblique. Il est vrai que ce qu'il y donne équivaut à une solution complète du cas de deux sphères dures, du moins lorsqu'on néglige le frottement.
[11]) Voir les p. 93—95.
[12]) Voir la phrase en italiques de la p. 92, de plus (p. 94) le premier alinéa de la Deuxième Partie et enfin les p. 96—97.
[13]) Voir le dernier alinéa de la p. 95.
[14]) Voir les p. 73—77.
[15]) Voir la p. 21—23.
[16]) Voir la p. 98.

qu'il n'a pas manqué de découvrir plus tard [1]), mais quoiqu'il fût déjà que le Principe interprété ſuivant la conception de Descartes n'eſt pas vrai [2]), il ſuppoſait, non ſans raiſon, que dans beaucoup de cas il peut être appliqué ſans amener d'erreur [3]). Il avait commencé par y attacher une grande valeur et ne l'a jamais rejeté entièrement [4]).

En tout cas ce que Huygens avait trouvé en 1652 ſuffiſait pour réſoudre tous les cas du choc direct des corps durs [5]) et l'on peut ſe demander pourquoi il n'a pas procédé dès lors à la publication de ſes réſultats.

Ce n'eſt certainement pas l'avis contraire de van Schooten, qui l'a retenu. Dans ſa lettre du 25 octobre 1654 [6]) celui-ci opine qu'il peut croire à peine qu'un eſprit ſi ſublime et perſpicace aurait publié quelque choſe qui ne ſerait pas conforme à la vérité. Il déconſeille Huygens de s'occuper de ce ſujet de peur qu'il n'emploie inutilement ſon temps et ſon travail; mais Huygens lui répond [7]) qu'il ſait bien que van Schooten n'eſt pas de ſon avis ſur les règles de Descartes; mais s'il avait pris connaiſſance de ce que lui, Huygens, avait déjà mis par écrit, non ſans labeur, ſur cette matière, il jugerait bien autrement. Car ſi les règles de Descartes, à l'exception de la première, ne ſont toutes fauſſes et contraires à ſes propres principes, lui, Huygens, ne ſaurait plus discerner ce qui eſt vrai ou faux.

La véritable raiſon de l'ajournement, Huygens nous la révèle lui-même dans un manuſcrit qui date d'une des dernières années de ſa vie [7]). Il y dit qu'il avait

---

[1]) Voir la note 2 de la p. 102.
[2]) Voir le troisième alinéa de la p. 95.
[3]) Savoir lorsque toutes les vitesses, avant et après le choc, sont dirigées vers le même côté, ce qui a lieu e. a. dans le cas particulier où un corps plus grand rencontre un corps plus petit en repos. Les calculs de la Troisième Partie (p. 98) sont donc justes, même si x et y représentent les valeurs absolues des vitesses, pourvu que B (voir la note 2 de la p. 98) soit plus petit que A. Et nous ne doutons pas que des deux solutions numériques données par Huygens dans le premier alinéa de la p. 96, la première ne soit obtenue à l'aide de ces calculs, tandis qu'évidemment la deuxième est dérivée de la première en ajoutant à toutes les vitesses, suivant le Principe de la relativité, une vitesse commune qui annule la vitesse originale du plus grand corps.
[4]) Comparez les pp. 102, 131 et 146, note 8. Aux pp. 106 et 140—141 il indique deux Hypothèses dont il s'est servi plus tard dans le Traité, qu'il reconnaît avoir emprunté au Principe énoncé par Descartes.
[5]) Témoin (p. 132—133) le début de la Onzième Partie où le problème le plus général du

ſuſpendu la publication de ce qu'il avait trouvé en 1652 ou 1654, puisque, outre les lois du choc, il reſtait autres choſes regardant la nature du mouvement qu'il n'avait pas encore ſuffiſamment approfondies et qui exigeaient une méditation prolongée [8]).

On rencontre des traces de cette méditation dans la ſuite du Manuſcrit mentionné à la p. 6 [9]). Elle concernait la nature et la puiſſance des forces qui accompagnent le choc [10]). Aucun inſtrument, dit-il [11]), ne ſurpaſſe en efficacité le marteau qui utiliſe cette puiſſance. Sans lui aucun édifice ne pourrait être conſtruit, aucun coin, aucun clou enfoncé, presqu'aucun travail accompli. Ne vaut-il donc pas la peine de comprendre la puiſſance infinie de la percuſſion, ſi grande qu'un ſeul homme muni d'un marteau pourrait mettre en mouvement une ſphère auſſi grande que toute la terre. *Annotations de 1654.*

Galilée, qu'il cite conſtamment à ce propos [12]), l'avait précédé dans cette recherche mais il n'avait pas fait beaucoup plus que diſſerter ſur la difficulté du

---

choc direct des corps durs est résolu par Huygens à l'aide de deux des théorèmes qui lui étaient connus en 1652.
[5]) Voir la p. 301 du T. I.
[6]) Voir la p. 303 du même Tome et consultez encore au même propos les pp. 312—313, 317, 410—411 et surtout la p. 441 du T. I.
[7]) Nous le publierons plus loin dans ce Tome parmi les „Manuscrits ultérieurs concernant l'historique de la doctrine du choc des corps et la question de l'existence et de la perceptibilité du mouvement absolu".
[8]) „Me jam inde ab anno $165\overset{2}{4}$ veras leges reperisse quæ ad dura seu resistentia pertinent. sed de ijs in lucem edendis supersedisse, quod præter eas leges superessent quædam de motus natura nondum penitus mihi nec satis liquido perspecta, quæ longiorem meditationem requirebant".
[9]) Nous avons reproduit cette suite dans les dernières Parties, à commencer par la Quatrième, de l'Appendice I, p. 99—136. Consultez sur la date de 1654 que nous lui avons assignée la note 7 de la p. 99 et remarquez qu'elle doit avoir précédée certainement le Manuscrit de 1656 qui a fourni l'Appendice II tandis que la Correspondance de 1655 ne contient aucune indication que Huygens se soit occupé dans cette année du choc des corps.
[10]) Voir les pp. 99—100, 104—105, 111—113, 124, et aussi la note 10 de la p. 117 qui montre la préoccupation de Huygens à noter tout ce qui peut jeter de la lumière sur la nature de la percussion. De plus il est à présumer que les recherches intéressantes sur l'effet de l'intercalation d'un ou de plusieurs autres corps en repos entre deux corps dont l'un est en mouvement et l'autre en repos avaient ce même but; voir (p. 81—91) les Prop. XII et XIII du Traité „De Motu".
[11]) Voir les p. 104—105.
[12]) Voir les pp. 99, 100, 105, 112 et 113.

ſujet [1]). Huygens n'a pas réuſſi non plus à pénétrer le mécaniſme de la percuſſion. L'état imparfait de la ſcience de la dynamique en était la cauſe. Des Théorèmes qui à nous, élevés dans l'école de la mécanique claſſique dont Newton fut le fondateur, ſemblent des plus élémentaires, étaient inconnus alors, et Huygens n'a pas ſu les découvrir. Il s'agit de l'égalité de l'impulſion Fdt reçue dans une certaine direction et de l'accroiſſement de la quantité de mouvement dans cette même direction [2]) comme auſſi de l'égalité de la réaction et de l'action [3]), Theorèmes, d'où Huygens aurait pu déduire facilement la grande force de la percuſſion comme conſéquence du peu de temps dans lequel elle s'accomplit, et de plus la formule véritable de la conſervation de la quantité de mouvement, qu'il a fini, en effet, par trouver, mais, comme nous le montrerons plus loin [4]), ſans bien ſentir la généralité et la ſignification primordiale pour la dynamique du Principe en queſtion.

En 1656 [5]) Huygens entreprend la tâche ardue de rédiger ſon Traité par axiomes ou hypothèſes, lemmes, théorèmes ou propoſitions [6]), pourvus de démonſtrations géométriques à la mode des anciens, comme il le jugeait alors néceſſaire ou du moins très déſirable. Le 20 juillet il peut écrire à de Roberval que ſon ouvrage eſt achevé [7]). Dans la note 1 de la p. 130 nous avons donné les *Manuſcrit de 1656.* raiſons qui nous portent à croire que le Manuſcrit de cet ouvrage eſt celui auquel nous avons emprunté l'Appendice II, p. 138—149.

Le choix des hypothèſes était déjà fait depuis 1652. Il les expoſe [8]) dans ſa Préface [9]) qu'il ne fit qu'ébaucher, mais on les retrouve, numérotées, dans le Manuſcrit définitif [10]) qui a été reproduit dans le Traité. Les hypothèſes I, III, IV [11]) ſont faciles à accepter, II et V [12]) excluent les corps mous

[1]) Voir la p. 112—113 et comparez pour l'opinion de Huygens à ce propos le premier alinéa de la p. 138.
[2]) Comparez la „Lex. II", p. 12 de l'édition originale des „Philosophiæ naturalis principia mathematica" (1687) de Newton.
[3]) Voir la „Lex III", p. 13 des „Principia".
[4]) Comparez les p. 24—25.
[5]) Voir les pp. 448 et 457 du T. I.
[6]) Il avait eu aussi l'intention d'y joindre des problèmes à réſoudre; voir la note 12 de la p. 117.
[7]) Voir la p. 457 du T. I.
[8]) Voir les p. 140—141.
[9]) Voir la note 2 de la p. 137.
[10]) Consultez la note 1 de la p. 30.

ou demi-durs. Avec le Principe: que le centre de gravité commun ne peut pas monter par l'effet de la gravité ſeule, elles ſuffiſent, ou à peu près [13]), aux démonſtrations quelques fois très compliquées des Propoſitions. Quant à ces Propoſitions, outre celles que nous avons mentionnées plus haut comme étant déjà connues de lui en 1652, les plus remarquables ſont la Prop. V (p. 47) ſur la réverſibilité du choc, la Prop. IX (p. 65) contenant la ſolution complète du choc direct des corps durs, et les belles Prop. XII (p. 81) et XIII (p. 87) ſur l'effet de l'interpoſition d'un ou de pluſieurs corps en repos entre un corps en mouvement et un autre en repos.

Le Manuſcrit définitif du Traité, écrit d'une autre main que celle de Huygens, *Manuſcrit définitif.* eſt en grande partie une copie preſque textuelle de celui de 1656 [14]). Mais il préſente avec ce dernier certaines différences dont nous ſignalons celles qui ont quelque importance:

1°. La Préface eſt ſupprimée dans le Manuſcrit définitif. Elle aurait dû contenir d'après l'eſquiſſe qu'on en trouve dans le Manuſcrit de 1656, outre les hypothèſes dont nous venons de parler, un aperçu des travaux antérieurs de Galilée et de Descartes et les raiſons qui ont conduit Huygens à commencer ſes recherches. Elle était deſtinée à être complétée à l'aide des annotations faites en 1654 [15]).

2°. Huygens introduit la fiction de deux hommes, l'un dans un bateau l'autre ſur la rive [16]), joignant leurs mains et combinant leurs mouvements pour déplacer

[11]) Voir respectivement les pp. 31, 33 et 39.
[12]) Voir les pp. 31 et 41. L'Hypothèse V est remarquable en ceci que le cas auquel elle se rapporte ne peut se présenter que lorsque la somme algébrique des deux quantités de mouvement est nulle. Elle dit que, lorsque la vitesse de l'un des deux corps ne change pas en valeur absolue par le choc il en doit être de même du deuxième corps. Or, lorsqu'on a $v'_A = \pm v_A$ (voir les notations de la note 1 de la p. 67) on doit avoir, à cause de la conservation de la force vive, $v'_B = \pm v_B$. Des quatre combinaisons possibles, trois peuvent être rejetées facilement lorsqu'on prend en considération que dans le choc la vitesse relative doit changer de signe et non de grandeur et qu'aucune des vitesses ne peut demeurer inaltérée à la fois en grandeur et en direction. Il ne reste donc que $v'_A = - v_A$, $v_B = - v_B$, mais cette solution, substituée dans l'équation $m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B$, donne $m_A v_A + m_B v_B = 0$.
[13]) Consultez la note 5 de la p. 43.
[14]) Comparez la note 19 de la p. 143.
[15]) Comparez la note 2 de la p. 137.
[16]) Consultez le frontispice de la p. 29 et la démonstration de la „Propositio Prima", p. 33—37.

des boules qui s'entrechoquent. On rencontre cet artifice pour la première fois dans une note [1]) envoyée par Huygens à la „Royal Society" le 5 janvier 1669 [2]). D'après la lettre qui accompagna l'envoi il devait ſervir à convaincre même les plus ſceptiques de la juſteſſe du principe de la relativité [3]). Son emploi a néceſſité un remaniement des démonſtrations des trois premières et de la neuvième Propoſition du Traité [4]). Ces démonſtrations en ſont devenues moins concises, mais on peut douter ſi elles ſont plus convaincantes qu'elles ne l'étaient auparavant [5]).

3°. En deux endroits différents il y a des additions. Nous les avons ſignalées dans les notes 4 de la p. 69 et 1 de la p. 90.

4°. Il y a une omiſſion à première vue très ſurprenante. Elle ſe rapporte à la Prop. VI (p. 49) où Huygens expoſe l'erreur de Descartes à propos de la conception du Principe de la conſervation de la quantité de mouvement. Cette Propoſition correspond au „Theorema 7" (p. 147) du Manuſcrit de 1656, mais dans ce dernier Manuſcrit Huygens ne ſe borne pas à démontrer l'erreur de Descartes, il indique enſuite par quelle modification ſon Principe peut être rectifié [6]). L'omiſſion complète et voulue de cette indication dans le Traité lui-même fait l'impreſſion d'une injuſtice envers Descartes. L'un de nous à cherché à expliquer cette attitude de Huygens par le déſir de porter un coup bien dirigé à la grande autorité de Descartes, qui menaçait de devenir un obſtacle au progrès de la

1) Voir les p. 336—343 de notre T. VI.

2) Voir la lettre à Oldenburg de cette date, p. 334—335 du T. VI.

3) Voir la p. 335 du T. VI, où l'on lit: „Vous verrez quelque difference entre la maniere dont j'ay demontrè la premiere proposition et celle dont je me suis servy aux autres, leurs contradictions et disputes [il s'agit des discussions dans l'Académie des Sciences du 4, 11 et 18 janvier 1668; voir la note 2 de la p. 156] m'ayant obligè de chercher toutes sortes de biais pour les convaincre, et la methode de la premiere proposition est celle ou ils ont trouvè le moins a redire. I'en ay voulu envoier de l'une et de l'autre pour savoir si ceux de la Societè Royale seront de mesme avis".

Ajoutons que dans la Pièce en question l'artifice a été employé aussi bien dans les autres démonstrations que dans celle de la première Proposition mais sous une forme légèrement différente. En effet, celles de la deuxième et de la troisième correspondent presque textuellement avec celles des Prop. II et III (p. 37—41) du Traité et de même celle de la quatrième Proposition de la Pièce avec les trois premiers alinéas (p. 65—69), excepté les dernières lignes du troisième, de la démonstration de la Prop. IX du Traité.

Dans ce Traité la deuxième forme fut donc préférée et des avant-projets de la note envoyée à Londres montrent qu'elle était de même antérieure à l'autre. Nous n'avons d'ailleurs pas cru nécessaire de reproduire ces avants-projets.

ſcience [7]). Cela eſt poſſible [8]), mais il y a une autre explication fondée ſur la nature même du Traité qu'il ſe propoſait de publier. Dans ce Traité rien n'eſt avancé qui ne ſoit prouvé par une démonſtration rigoureuſe baſée ſur des Hypothèſes bien définies. Or, il eſt certain que Huygens aurait pu compoſer une telle démonſtration du Théorème de la conſervation de la quantité de mouvement dans ſa vraie forme. Il ſuffiſait à cet effet de partir de ſa ſolution générale du problème du choc direct des corps durs [9]), comme il l'avait fait pour la Prop. XI (p. 73—77) ſur la conſervation de la force vive. Toutefois cela lui aurait coûté un certain effort pour lequel il lui manquait probablement l'inſpiration, occupé comme il l'était toujours de nouveaux projets et de nouvelles découvertes qui pluſieurs fois l'ont empêché de publier des réſultats importants qui avaient commencé à l'intéreſſer moins vivement [10]). Et c'eſt ſans doute cette même

4) Voir les pp. 33—41 et 67—69.

5) On peut comparer à cet effet les démonstrations p. 93—94 et p. 109—110 de la première Proposition avec celle p. 33—37 du Traité.

6) Voir la note 9 de la p. 146.

7) Voir les p. 1417—1418 de l'article „Christian Huygens' wissenschaftliche Lehrjahre" par D. J. Korteweg, qui a paru dans l'„Internationale Wochenschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik, 3ter Jahrgang", 1909, p. 1391—1396; 1411—1426. Aussi „Jaarboek der Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, 1909, Een en ander over de Huygens-Uitgave en over den invloed van Descartes op Christiaan Huygens", p. 13.

8) Voici, en effet, l'opinion de Huygens, en 1693 (voir la p. 405 de notre T. X), sur l'influence exercée par les écrits de Descartes: „Il devoit nous proposer son systeme de physique comme un essay de ce qu'on pouvoit dire de vraisemblable dans cette science en n'admettant que les principes de mechanique et inviter les bons esprits a chercher de leur costè. Cela eust estè fort louable. Mais en voulant faire croire qu'il a trouvè la veritè, comme il le fait par tout, en se fondant et se glorifiant en la suite et en la belle liaison de ses expositions, il a fait une chose qui est de grand prejudice au progrès de la philosophie. Car ceux qui le croient et qui sont devenus ses sectateurs, s'imaginent de posseder la connoissance des causes de tout, autant qu'il est possible de les sçavoir; ainsi ils perdent souvent le temps a soutenir la doctrine de leur maitre, et ne s'etudient point a penetrer les raisons veritables de ce grand nombre de phenomenes naturels, dont des Cartes n'a debitè que des chimeres".

9) Naturellement une telle démonstration aurait été loin de faire valoir la portée générale du Théorème qui n'eût été prouvé de cette manière que pour le cas du choc direct des corps durs.

10) Voir pour un exemple frappant concernant sa „Dioptrique" qui, de même que le Traité „De Motu", n'a paru que comme Œuvre posthume, les pp. III—VII et XVIII—XIX de notre T. XIII; voir aussi aux p. 95—96 de notre T. IX la lettre de Huygens à de la Hire du 26 sept. 1686 avec la longue liste d'ouvrages de Huygens qui n'avaient pas encore paru mais dont la conception datait de 1667—1680 et dont probablement plusieurs n'auraient jamais paru pendant sa vie sans l'intercession de De la Hire et de Fatio de Duilliers (voir la p. 190 du T. IX).

raiſon qui l'a empêché d'incorporer dans ſon Traité certains autres réſultats obtenus après 1656, ſavoir ſes ſolutions complètes et motivées des problèmes du choc direct des corps mous et des corps ſemi-durs [1]).

Nous ignorons à quelle époque le Manuſcrit définitif, qui a ſervi à la publication du Traité, en 1703, dans les „Opuscula poſtuma" [2]), fut compoſé, et par quelle main il fut écrit ſous la direction de Huygens [3]). Nous ſavons ſeulement qu'il doit être poſtérieur à 1673 [4]), année dans laquelle parut l'„Horologium oscillatorium".

En 1669 Huygens publia ſes „Regles du mouvement dans la rencontre des corps" dans le Journal des Sçavans [5]) ſans les faire accompagner d'aucune démonſtration. Nous raconterons les circonſtances qui ont amené cette publication dans l'Avertiſſement ſuivant. Ici nous voulons noter encore que trois ans avant ſa mort Huygens n'avait pas abandonné le projet de faire paraître les démonſtrations de ſes règles, puiſqu'il écrivit à Leibniz le 11 juillet 1692 [6]) „Sur la matiere du mouvement j'ay bien des choſes nouvelles et paradoxes à donner, que l'on verra, quand je publieray mes demonſtrations des Regles de la Percuſſion, inſérées autrefois dans les Journaux de Paris et de Londres".

LES CORPS DURS DE HUYGENS.

Des corps durs, poſſédant les propriétés que Huygens leur attribue, n'exiſtent pas dans la nature.

Imaginons, en effet, deux corps parfaitement élaſtiques et ſuppoſons que leur choc ſoit un procès parfaitement adiabatique; ces corps ſe quitteront, excepté dans des cas très ſpéciaux, en exécutant des vibrations, et ces vibrations abſorberont une partie plus ou moins grande, mais *finie*, de l'énergie de leur mouvement, de ſorte qu'après le choc la ſomme des forces vives de leurs mouvements progreſſifs ne ſera plus ce qu'elle était auparavant [7]).

[1]) Voir les p. 161—167.
[2]) Comparez la note 1 de la p. 30.
[3]) Nous nous sommes assurés qu'il n'est pas de l'écriture de Niquet (voir la p. VII de notre T. XIII), ni de celle de Fatio de Duilliers (voir la p. 190 du T. IX)
[4]) Comparez la note 3 de la p. 52.

La queſtion peut être traitée à peu près rigoureuſement pour le cas du choc central de deux cylindres homogènes et iſotropes dont les ſections ſont égales et ſe couvrent au moment du choc, pourvu que leurs longueurs l_A et l_B ſoient ſuffiſamment grandes par rapport aux dimenſions des ſections, et que l'on accepte la loi de Hooke.

Suppoſons, en effet, que ces cylindres A et B [8]) (l_A étant égal ou ſupérieur à l_B) ont d'abord des viteſſes égales et oppoſées, dont la grandeur abſolue eſt v, les axes ſe mouvant le long d'une même droite, et qu'au moment $t = 0$ les extrémités planes viennent en contact au point $x = 0$. Si l'axe des x poſitif eſt dirigé vers le cylindre B, que, pour fixer les idées, nous ſuppoſerons ſe trouver à droite du cylindre A, et ſi l'on déſigne par c la viteſſe de propagation des ondes de compreſſion ou de dilatation, la ſolution prend la forme ſuivante:

Après un court intervalle de temps t la partie du cylindre B compriſe entre les plans $x = 0$ et $x = ct$ ſera ramenée au repos et il ſe ſera produit dans cette partie une contraction $v : c$ par unité de longueur. D'autre part la partie au delà du plan $x = ct$ ſe trouvera encore dans l'état naturel et aura conſervé la viteſſe $- v$.

Au moment $t = l_B : c$ le cylindre B tout entier ſe trouve en repos avec la contraction dont il vient d'être queſtion, contraction qui diſparaîtra maintenant à partir de l'extrémité droite. Tant que t eſt compris entre $l_B : c$ et $2l_B : c$ on peut dire que la partie du cylindre entre $x = l_B$ et $x = 2l_B - ct$ a repris ſa longueur naturelle; en même temps cette partie aura acquis la viteſſe $+ v$. Quant à la partie entre $x = 0$ et $x = 2l_B - ct$, elle eſt encore en repos et on y trouve la contraction $v : c$.

Enfin à l'inſtant $t = 2l_B : c$ le cylindre entier eſt animé de la viteſſe $+ v$, la contraction ayant diſparu dans toute ſon étendue.

Soit maintenant $l_B = l_A$. Alors dans le cylindre A des phénomènes tout-à-fait analogues auront lieu et les deux corps ſeront revenus à l'état naturel au même inſtant $t = 2l_A : c = 2l_B : c$. Comme à cet inſtant ils auront les viteſſes $- v$ et $+ v$

[5]) Voir l'article suivant du Tome présent.
[6]) Voir la p. 302 du T. X.
[7]) De même la vitesse relative avec laquelle leurs centres de gravité se quittent ne sera pas égale en grandeur à celle avec laquelle ils s'approchaient. Ces résultats sont donc en contradiction avec deux propriétés caractéristiques des corps durs de Huygens; voir les Prop. IV (p. 43) et XI (p. 73).
[8]) Pour simplifier nous nous bornons au cas de cylindres formés de la même substance.

ils ſe ſépareront avec ces viteſſes. Le réſultat du choc eſt donc conforme à la théorie de Huygens [1]),

Il n'en eſt plus ainſi lorsque $l_B < l_A$. Alors au moment $t = 2l_B : c$ où le cylindre B a atteint l'état qui vient d'être indiqué, la partie de A voiſine de B ſe trouvera encore en repos. Toute preſſion qu'elle exerce ſur B ceſſera donc et quoique les cylindres ne ſe ſéparent pas encore [2]) le choc peut être conſidéré comme fini. Le cylindre B, plus court que A, ſe comporte donc entièrement comme s'il avait rencontré dans les mêmes circonſtances un cylindre de longueur égale l_B.

Dans le cas plus général, où nous déſignerons par v_A et v_B les viteſſes avant, et par v'_A et v'_B celles après le choc, on déduit facilement de ces réſultats, pour les cylindres égaux: $v'_B = v_A$ et $v'_A = v_B$ [3]) et pour les cylindres inégaux $v'_B = v_A$, mais (à cauſe de la conſervation de la quantité de mouvement) $v'_A = [(l_A - l_B) v_A + l_B v_B] : l_A$.

On trouve ainſi pour la perte par le choc de l'énergie du mouvement progreſſif des cylindres:

$$T - T' = \tfrac{1}{2}\rho(l_A v^2_A + l_B v^2_B) - \tfrac{1}{2}\rho(l_A v'^2_A + l_B v'^2_B) = \tfrac{1}{2}\rho\, l_B (l_A - l_B)\rho(v_A - v_B)^2 : l_A,$$

où ρ repréſente la maſſe par unité de longueur.

Il en réſulte:

$$\frac{T - T'}{T} = \frac{l_B (l_A - l_B)(v_A - v_B)^2}{l_A (l_A v^2_A + l_B v^2_B)}.$$

Dans le cas $v_A = - v_B$ et $l_A = 2l_B$ on trouve p. e. $\frac{2}{3}$ pour ce rapport [4]).

Bien entendu, ce qui précède eſt limité à des viteſſes de translation v qui ſont petites par rapport à la viteſſe de propagation c. Dès que la fraction $v : c$, et par conſéquent la compreſſion produite dans les cylindres deviennent tant ſoit peu

[1]) Comparez l'Hypothèse II (p. 31). On n'en peut pas conclure qu'il en est de même pour des corps égaux quelconques; lorsque p. e. on pourvoit les cylindres égaux de tiges perpendiculaires à leur axe il est clair qu'en général ces tiges exécuteront des vibrations après la séparation des cylindres.

[2]) Parce que, à l'instant même où la contra-pression de B sur A cesse, la partie de A voisine de B commence successivement à retourner à son état naturel et à prendre la vitesse $+ v$, de sorte que la séparation des cylindres n'a lieu qu'au moment $t = 2l_A : c$.

[3]) Comparez (p. 37) la Prop. II.

[4]) Dans le cas remarquable $l_A v_A = - l_B v_B$ où la somme algébrique des quantités de mouve-

conſidérables la loi de Hooke ceſſe d'être vraie et certaines ſimplifications dont on s'eſt ſervi dans les calculs ne ſont plus juſtifiées.

La ſolution que nous venons d'esquiſſer fut trouvée par Cauchy en 1826 [5]), mais il paraît que pendant quelque temps elle fut ſupplantée preſque complètement par la ſolution du même problème par Poiſſon [6]) d'après laquelle les cylindres ne ſe ſépareront après le choc que dans le ſeul cas $l_B = l_A$. Or, la faute dans le raiſonnement de Poiſſon fut indiquée par de Saint-Venant [7]) qui élabora plus amplement la ſolution de Cauchy et la trouva juſte. En outre, ce qui eſt remarquable, la bonne ſolution fut découverte de nouveau indépendamment par F. Neumann [8]), par Thomſon et Tait [9]) et par A. Ritter [10]).

Bien que cette ſolution ne ſoit vérifiée que très imparfaitement par les expériences [11]), elle prouve du moins que la perte de force vive du mouvement pro-

ment est nulle, on a $T' : T = l^2_B : l^2_A$, ce qui montre que, pour une valeur donnée de T, T' (savoir l'énergie du mouvement progressif qui reste après le choc) peut diminuer indéfiniment avec le rapport $l_B : l_A$.

[5]) Voir son „Mémoire sur le choc des corps élastiques". Nouveau Bulletin des Sciences, par la Société philomatique", Paris, 1826, p. 180—182.

[6]) Voir les § 499—504 (p. 331—343) du T. II du „Traité de Mécanique" par S. D. Poisson, Paris, Bachelier, 1833.

[7]) Voir son article: „Sur le choc longitudinal de deux barres élastiques de grosseurs et de matières semblables ou différentes, et sur la proportion de leur force vive qui est perdue pour leur translation ultérieure; Et plus généralement, sur le mouvement longitudinal d'un système de plusieurs prismes élastiques. Journal de mathématiques pures et appliquées", 2 sér., T. XII, 1867, p. 237—277.

[8]) F. Neumann, „Vorlesungen über die Theorie der Elastizität der festen Körper und des Lichtäthers", Leipzig, 1885, p. 332—347. Suivant la préface de O. E. Meyer la leçon en question fut déjà professée en 1858.

[9]) Voir les p. 280—282, article 303—306, Vol. I, Part. I, du „Treatise on natural philosophy", new edition, Cambridge, 1879, ou les articles correspondants de la première édition de 1867.

[10]) „Beitrag zur Theorie des elastischen Stosses", Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, Bd. 35, 1891, p. 1383—1386.

[11]) Le choc des corps physiques a donné lieu à de nombreuses recherches tant expérimentales que théoriques. On en trouve un résumé jusqu'à l'année 1909 dans l'introduction de l'article „Experimentelle und theoretische Grundlagen des elastischen und mechanischen Stosses" de C. Ramsauer („Annalen der Physik", Bd. 30, p. 417—494). Le même article contient, pour le cas des cylindres, les résultats de beaucoup d'expériences très variées. Des expériences plus récentes ont été instituées pour le même cas par L. Hartmann (voir ses articles

greffif, caufée par les vibrations que le choc excite, peut être confidérable dans le cas des cylindres et que, par conféquent, la théorie de Huygens n'y peut pas rendre compte des phénomènes.

Heureufement on eft conduit à une conclusion bien différente fi l'on confidère le choc de corps à furface convexe, qui dans leur rencontre ne fe touchent que fur une petite étendue. Dans ce cas, la théorie de Huygens peut être maintenue, fi feulement on fuppofe que les viteffes des corps font très petites par rapport aux viteffes avec lesquelles des ondes élaftiques fe propagent à leur intérieur. C'eft du refte une fuppofition fans laquelle la théorie deviendrait extrêmement compliquée.

Afin de juftifier la théorie de Huygens dans les cas dont il s'agit maintenant nous pouvons nous bafer fur les réfultats obtenus par H. Hertz [1]) dans fes recherches fur le contact de corps élaftiques. À cet effet il nous fuffira ici de confidérer des fphères à rayons égaux et formées de la même fubftance; on comprendra facilement que les conclufions refteront les mêmes pour des cas beaucoup plus généraux.

Voici le problème (fimplifié pour ce cas) que Hertz s'eft pofé. Une fphère élaftique eft affujettie à une preffion, exercée fur une petite étendue A de fa furface, dont la réfultante, dirigée vers le centre, a la grandeur donnée P, et à une deuxième force de direction oppofée et d'égale grandeur qui eft répartie uniformément fur tout le volume du corps. Il s'établira alors un état d'équilibre

„Variation systématique de la valeur de la force vive dans le choc élastique des corps". Comptes rendus, T. 163, 1916, p. 559—569 et T. 164, 1917, p. 491—494).

W. Voigt explique les divergences, souvent très grandes, des résultats expérimentaux d'avec ceux prédits par la théorie de l'élasticité dans le cas des cylindres, par les conditions qui existent dans le voisinage du plan du choc (voir les articles „Die Theorie des longitudinalen Stosses cylindrischer Stäbe" et „Zur Theorie des longitudinalen Stosses zylindrischer Stäbe". Annalen der Physik, Bd. 19, 1883, p. 44—65 et Bd. 46, 1915, p. 657—676).

Il est curieux du reste de remarquer que dans les Fig. 11 et 13 (p. 160) de Huygens les ressorts indiqués joueraient dans le choc précisément le même rôle que la couche intermédiaire plus compressible dont Voigt a besoin pour expliquer comment les cylindres se comportent en réalité. Et lorsqu'on suppose que la masse des ressorts est négligeable on retombe sur le cas examiné expérimentalement par Ramsauer (p. 478—482 de son article) où les lois de Huygens du choc des corps durs sont suivies presque parfaitement.

[1]) Voir son article „Ueber die Berührung fester elastischer Körper, Journal für die reine und angewandte Mathematik," Bd. 92, 1881, p. 156—171 („Gesammelte Werke" Bd. 1, 1895, p. 155—173).

bien défini avec un aplatiffement au point A que Hertz réuffit à calculer à l'aide de la théorie de l'élafticité. La fubftance de la fphère étant confidérée comme ifotrope, les formules contiennent deux conftantes, favoir le module de rigidité K et le coefficient bien connu de Poiffon μ. Rappelons ici que, fi ρ eft la denfité, les viteffes de propagation de vibrations transverfales et longitudinales auront refpectivement les valeurs:

$$c_t = \sqrt{\frac{K}{\rho}}, \quad c_l = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} \cdot \frac{K}{\rho}}$$

Si, au lieu d'être conftantes, les forces P et — P changent d'un moment à l'autre, elles donneront lieu à des vibrations, mais la mefure dans laquelle ces mouvements intérieurs interviennent dépend entièrement de la viteffe des variations des forces. On peut négliger les vibrations et appliquer à chaque inftant les formules de l'équilibre, lorsque les variations font tellement lentes que le temps T néceffaire pour un changement appréciable de P et de — P eft beaucoup plus grand que la période des vibrations propres du corps. Comme pour une fphère de rayon R cette période eft de l'ordre de grandeur $R : c_t$ ou $R : c_l$, la condition prend la forme:

$$T \gg \frac{R}{c_t} \text{ ou } T \gg \frac{R}{c_l}.$$

Dans ce qui fuit nous nous fervirons de la première de ces inégalités, qui embraffe la deuxième, parce que $c_l > c_t$.

Dans le problème du choc la force avec laquelle l'une des fphères agit fur l'autre joue le rôle de la preffion P; elle augmente à partir de zéro jusqu'à une certaine valeur maximum et diminue enfuite pour disparaître au moment de la féparation [2]). Il eft donc clair que les vibrations feront négligeables (ce qui affurera la jufteffe de la théorie de Huygens) fi l'intervalle de temps dans lequel ces variations ont lieu, c'eft-à-dire la durée du choc fatisfait à la première des conditions d'inégalité, que nous venons d'indiquer.

[2]) Le rôle des forces qui tiennent P en équilibre, donnant lieu à la résultante — P, est joué par des forces fictives opposées aux accélérations des éléments de volume et égales aux produits de ces accélérations par les masses.

Or, Hertz a trouvé pour cette durée [1]) une formule qu'on peut mettre sous la forme:

$$T = 2\left[\frac{5}{8}\pi\sqrt{2}(1-\mu)\right]^{\frac{2}{5}}\frac{R}{c_l^{\frac{4}{5}}v^{\frac{1}{5}}}\int_0^1\left(1-x^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx,$$

dans laquelle v déſigne la viteſſe relative avec laquelle l'une des ſphères s'approche de l'autre et où:

$$\int_0^1\left(1-x^{\frac{5}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx = 1{,}472.$$

En ſubſtituant cette dernière valeur et en prenant $\mu = \frac{1}{3}$ pour le coefficient de Poiſſon, on trouve:

$$T = 3{,}76.\frac{R}{c_l^{\frac{4}{5}}v^{\frac{1}{5}}}.$$

La condition pour T devient donc:

$$\left(\frac{v}{c_l}\right)^{\frac{1}{5}} \ll 3{,}76.$$

Elle pourra être remplie ſi la viteſſe v eſt ſuffiſamment petite.

Si, par exemple, on exige que $T = 20\,R : c_l$ on trouve $v = 0{,}000235\,c_l$. Pour l'acier la viteſſe de propagation des vibrations transverſales eſt à peu près $3{,}2.10^5$ cm. par ſec., donc: $v = 75$ cm. par ſec.

On voit ainſi que des expériences ſont poſſibles dans lesquelles la théorie de Huygens ſe vérifie approximativement et qu'il n'y a pas lieu de s'étonner que Huygens qui expérimenta ſurtout avec des ſphères était ſous l'impreſſion que les réſultats de ſa théorie correspondaient presque parfaitement avec les expériences [2]).

En tout cas cette théorie peut être conſidérée comme rigoureuſement exacte

[1]) Les durées du contact entre les corps choquants, telles que la théorie de Hertz les donne, ont été vérifiées expérimentalement par W. Müller; voir l'article „Zur Kenntniss der Stossdauer elastischer Körper. Wiener Berichte", IIa, Bd. 123, 1914, p. 2157—2169.

[2]) Consultez les pp. 100, 113 et 140.

dans un cas limite, dont on s'approche, avec des corps donnés, en diminuant les viteſſes, ou bien, pour des viteſſes données, en augmentant dans la penſée le module de rigidité K. Dans le choc de corps „parfaitement durs", caractériſés par $K = \infty$, il ne ſe produirait aucune vibration intérieure.

Nous ne pouvons pas finir cette diſcuſſion rapide de l'applicabilité de la théorie de Huygens dans le domaine des corps phyſiques, ſans rappeler le rôle prépondérant que ſes règles du choc des corps durs ont commencé à jouer, deux ſiècles après leur découverte, dans le développement de la théorie cinétique des fluides.

PRINCIPE QUE LE CENTRE DE GRAVITÉ COMMUN NE PEUT PAS MONTER PAR LA GRAVITÉ SEULE. CONSERVATION DE LA FORCE VIVE DANS LE CHOC. SOLUTION PAR HUYGENS DU PROBLÈME DU CHOC DES CORPS MOUS OU SEMI-DURS.

Dans ſes recherches ſur la chaînette qui „ne faict point une parabole" [3]) et dans ſon merveilleux Traité ſur l'équilibre des corps flottants [4]), Huygens avait employé le Principe que le centre de gravité commun ſe place auſſi bas que poſſible [5]). Ce Principe ne pouvait ſervir ſous cette forme que dans des queſtions de ſtatique. C'eſt pourquoi il le modifie dans ſa théorie du choc en lui donnant la forme nouvelle: que le centre de gravité commun ne peut pas monter par l'effet de la gravité ſeule. Formulé de cette façon il devient entre les mains de Huygens un inſtrument puiſſant de recherches, et il n'y a pas lieu de s'en étonner. En effet, pour tous les phénomènes réverſibles ce Principe, que Huygens appela plus tard „le grand Principe des mechaniques" [6]), eſt équivalent à celui de la conſervation de l'énergie dans un champ graviſique, où la gravité agit partout dans la même direction et avec la même intenſité [7]).

[3]) Voir les pp. 28 et 40 de notre T. I et les trois derniers alinéas de la note 2 qui commence à la p. 57 du T. XI.

[4]) Voir les pp. 93—119 du T. XI.

[5]) Consultez sur ce Principe la note 1 de la p. 56.

[6]) En 1684; voir la 499 du T. VIII. Comparez aussi les pp. 439, 456, 462 et 463 du T. IX. Le Principe de la conservation de l'énergie a passé par diverses étapes avant d'obtenir sa

Pour le montrer, confidérons un certain nombre de corpuscules (ou de corps lorsqu'on néglige les rotations) de maffes m, de viteffes v et qui fe trouvent à des hauteurs h au deffus d'un certain plan horizontal. Lorsque, à l'exemple de Huygens, on convertit les viteffes en des hauteurs d'où les corpuscules peuvent être cenfés descendre ou jusqu'auxquelles elles peuvent s'élever en conféquence de ces viteffes, le principe employé par Huygens donne:

$$(1) \qquad \frac{\Sigma mh' + \Sigma\lambda mv'^2}{\Sigma m} \leq \frac{\Sigma mh + \Sigma\lambda mv^2}{\Sigma m},$$

où h' et v' repréfentent les hauteurs et les viteffes après le phénomène, et où $\lambda = \frac{1}{2g}$.

Lorsque le phénomène eft réverfible on en déduit immédiatement:

$$(2) \qquad \Sigma mh' + \Sigma\lambda mv'^2 = \Sigma mh + \Sigma\lambda mv^2,$$

et dans le cas du choc central de deux corps durs:

$$(3) \qquad m_A v'^2_A + m_B v'^2_B = m_A v^2_A + m_B v^2_B.$$

Il eft vrai que dans le Traité la déduction de cette dernière relation eft beaucoup plus compliquée. Huygens n'y emploie pas la réverfibilité du choc [1]). En vérité, il n'applique le Principe du centre de gravité commun qui ne peut pas monter qu'au cas où $m_A v_A + m_B v_B = 0$ [2]). À l'aide de ce Principe et de la Prop. IV [3]), il arrive à la conclufion que dans le cas confidéré on doit avoir $v'_A = -v_A$ et $v'_B = -v_B$. Puis le Principe de la relativité lui permet de remonter de ce cas fpécial au cas général [4]), après quoi il déduit l'équation (3) des réfultats obtenus pour ce dernier cas [5]). Mais cette déduction eft de l'année 1656, lorfque Huygens compofa le Manufcrit de cette date [6]), tandis que la Propofition qui correfpond à l'équation (3) lui était connue depuis 1652 [7]) et appartenait aux

forme définitive. Or, on peut considérer la découverte de sa validité pour le champ gravifique en question comme une des premières de ces étapes et on doit en donner l'honneur à Huygens. En effet, non seulement pour le choc des corps durs mais aussi plus tard pour la détermination des centres d'oscillation (voir les Prop. IV et suivantes de la „Pars Quarta" de l'„Horologium oscillatorium" de 1673, p. 98—146 de l'édition originale) sa méthode est équivalente à l'emploi du Principe en question. Consultez encore la note 9 de la p. 163, où l'on voit que Huygens se rendait compte parfaitement que toute déviation de son Principe créerait la possibilité de construire un „perpetuum mobile".

[1]) Il l'avait toutefois déjà formulée dans la Prop. V (p. 47), et donné une démonstration

premiers réfultats de fes recherches fur le choc. Peut-on croire que cette Propofition fut obtenue fi tôt par la voie compliquée que nous venons d'esquiffer, et n'eft-il-pas beaucoup plus plaufible que dès l'abord Huygens ait confidéré la réverfibilité du choc comme une hypothèfe admiffible du moins provifoirement?

Il eft curieux de remarquer que le même Principe: que le centre commun de gravité ne peut pas monter par l'effet de la gravité, combiné avec le Principe de Huygens de la relativité, implique le Théorème de la confervation de la quantité de mouvement dans une direction donnée. Et cela fans fuppofer cette fois la réverfibilité des phénomènes.

Concevons, en effet, qu'entre le temps t et le temps t' il fe foit produit parmi les particules de maffe m, ou plutôt entre les corps qu'elles compofent et qu'on peut fuppofer durs, femi-durs ou mous, un certain nombre de chocs. Suppofons d'ailleurs toutes fortes de liaifons entre eux. Ajoutons enfuite à toutes leurs viteffes v (dont v_x, v_y et v_z foient les compofantes dans trois directions rectangulaires) une viteffe commune x, parallèle aux v_x; on aura donc:

$$(4) \quad \Sigma m\left[h' + \lambda\{(v'_x + x)^2 + v'^2_y + v'^2_z\}\right] \leq \Sigma m\left[h + \lambda\{(v_x + x)^2 + v^2_y + v^2_z\}\right].$$

On en déduit:

$$(5) \qquad \Sigma m[h' - h) + \lambda(v'^2 - v^2)] \leq 2\lambda x\left[\Sigma mv_x - \Sigma mv'_x\right],$$

mais cette inégalité ne peut être vraie pour toutes les valeurs de x fans qu'on ait:

$$(6) \qquad \Sigma mv_x = \Sigma mv'_x;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ce même raifonnement eft appliqué par Huygens au choc des corps mous et femi-durs, mais feulement dans le cas particulier où $m_A v_A + m_B v_B = 0$ [8]). Il

(p. 47—49) fondée sur le Principe de la relativité et sur l'égalité des vitesses d'approchement et d'éloignement.

[2]) Consultez (p. 53—65), la Prop. VIII et sa démonstration.

[3]) Voir la p. 43. Remarquons que cette Proposition s'appuie à son tour sur l'Hypothèse V (p. 41), laquelle ne fait en réalité que supposer la réversibilité dans un cas spécial.

[4]) Voir les p. 65—69.

[5]) Voir (p. 73—77) la Prop. XI et sa démonstration.

[6]) Consultez la Deuxième Partie (p. 143—149) de l'Appendice II.

[7]) Voir le quatrième alinéa de la p. 95.

[8]) Voir les Pièces IX et X (p. 161—167).

prouve qu'alors néceſſairement $m_A v'_A + m_B v'_B$ s'annule auſſi, d'où il ſuit : $\frac{v'_A}{v_A} = \frac{v'_B}{v_B} = e$, où e varie entre 1 (pour les corps durs) et 0 (pour les corps mous).

On reconnaîtra facilement dans cette dernière équation le réſultat obtenu par Huygens dans le cas particulier en queſtion [1]), auquel le cas général du choc central de deux corps ſemi-durs peut être facilement réduit à l'aide du Principe de Huygens de la relativité [2]).

THÉORÈME DE LA CONSERVATION DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT DANS UNE DIRECTION DONNÉE.

Nous n'avons pas beaucoup à ajouter aux remarques déjà faites à propos de ce Théorème [3]).

Huygens a commencé par l'admettre dans la forme erronée ſous laquelle Descartes l'avait formulée [4]). Mais déjà en 1652, au début de ſes efforts pour conſtruire une théorie cohérente du choc des corps durs il avait reconnu la fauſſeté de cette forme dans certains cas [5]). Toutefois il ne douta pas de ſon applicabilité dans d'autres cas. Or, puiſqu'il lui était impoſſible de conſtruire ſa théorie ſans quelques hypothèſes ſuffiſamment évidentes, et qu'il n'en trouva pas ailleurs, il en emprunta deux [6]) au Principe énoncé par Descartes.

Deux années plus tard il avait découvert la véritable formule du Théorème [7]). Il la publia dans le Journal des Sçavans du 18 mars 1669 [8]), mais la forme même de cette communication montre qu'il n'avait pas reconnu le

1) Voir le résumé de ses résultats pour ce cas spécial que Huygens donne en haut de la p. 166.
2) Consultez pour la solution graphique du cas général les notes 8 des pp. 163 et 165.
3) Voir les pp. 7, 8, 10, 12, 13 et 23.
4) Voir sa lettre à de Sluse du 3 janvier 1658, p. 115 de notre T. II, où l'on lit : „Axioma Cartesij de conservatione motus ita ut eadem semper ejus quantitas supersit, olim mihi quoque plane verisimile ac rationi consentaneum videbatur. Sed nunc scio perpetuum esse non posse; evidentiori alio principio id evincente".
5) Voir le troisième alinéa de la p. 95.
6) Les Hypothèses II (p. 31) et V (p. 41). On les trouve déjà dans le Manuscrit de 1652 (voir les pp. 92 et 96) et dans le Manuscrit de 1654 (voir les pp. 102 et 126).
7) Comparez les pp. 102, 116 et 131. À la p. 116 on rencontre le théorème correspondant: que le centre de gravité commun persiste après le choc à se mouvoir dans la même direction et avec la même vitesse qu'auparavant. Consultez encore pour l'année 1656 la note 9 de la p. 146.

fondement ſimple ſur lequel nous baſons ce Théorème depuis l'édition des „Principia" de Newton. En effet, après l'expoſition de la formule véritable [9]), il y parle de la „loy admirable de la Nature" d'après laquelle „le centre commun de deux ou trois ou de tant qu'on voudra de corps, avance toûjours également vers le même coſté en ligne droite devant & aprés leur rencontre", loi qu'il prétend pouvoir „*démontrer* en ce qui eſt des corps Spheriques, & qui *ſemble* eſtre generale en tous les autres tant durs que mols, ſoit que la rencontre ſoit directe ou oblique" [10]). Or, cette limitation au cas „des corps Spheriques" de ſa démonſtration de la loi en queſtion (qui eſt, de fait, entièrement identique avec le Théorème de la conſervation de la quantité de mouvement) montre la nature ſpéciale et bornée de cette démonſtration, que d'ailleurs nous ne connaiſſons pas.

Pour Huygens le Théorème de la conſervation de la force vive prime de beaucoup celui de la conſervation de la quantité de mouvement [11]), et il y a lieu de s'étonner qu'il ait échappé à ſa perſpicacité que ce dernier Théorème peut ſe déduire facilement du premier, dans le cas des corps durs, à l'aide du Principe de la relativité. Ajoutant aux viteſſes v_A, v_B, v'_A, v'_B des corps A et B, avant et après leur rencontre, la viteſſe commune x, on a d'après le premier Théorème :

$$m_A(v_A' + x)^2 + m_B(v'_B + x)^2 = m_A(v_A + x)^2 + m_B(v_B + x)^2, \tag{7}$$

d'où il ſuit :

$$m_A v'_A + m_B v'_B = m_A v_A + m_B v_B. \tag{8}$$

Il eſt vrai qu'à cauſe de ſa méthode géométrique Huygens aurait dû diſtinguer divers cas ſelon le ſens des mouvements avant et après le choc.

8) Comparez la p. 14.
9) Voir la note 2 de la p. 102.
10) Les italiques ont été introduits par nous.
11) Encore en 1674, ou plus tard, Huygens jugeait qu'un théorème qui découle immédiatement de la conservation de la quantité de mouvement, peut être rendu probable par cette considération, mais non pas prouvé; voir le dernier alinéa (p. 164) de la Pièce IX.

THÉORÈME DE L'ÉGALITÉ DE LA VITESSE DE L'ÉLOIGNEMENT À CELLE DU RAPPROCHEMENT.

Concevons deux mécanismes A et B d'un nombre quelconque de degrés de liberté, sans frottement, formés par des corps durs dans le sens de Huygens, et supposons que deux pièces, appartenant chacune à l'un de ces mécanismes, se rencontrent. Soient P le point de contact; π le plan tangent du point P pour les deux pièces; ν_A et ν_B, au début du choc, les composantes perpendiculaires au plan tangent des vitesses du point P, considéré alternativement comme appartenant à l'un et à l'autre des pièces; ν'_A et ν'_B ces composantes à la fin du choc, on aura alors:

$$\nu'_A - \nu'_B = -(\nu_A - \nu_B). \tag{9}$$

Cette équation, qui dit que la vitesse relative dans la direction perpendiculaire au plan tangent commun change de sens par le choc sans changer de grandeur, permet de remplacer dans le système des équations qui peuvent servir à déterminer le mouvement après le choc, la seule équation quadratique (dépendant des forces vives) par une équation linéaire comme toutes les autres.

Or, le Théorème de Huygens de l'égalité de la vitesse de l'éloignement à celle du rapprochement, qui joue un rôle si important dans le Traité [1]) et qu'il a même pensé un instant à poser en axiome [2]), ne représente qu'un cas particulier de l'équation (9) et peut rendre le même service dans la théorie du choc direct des corps durs que le Théorème général dans le choc des mécanismes composés par ces sortes de corps.

Huygens a découvert une autre généralisation de son Théorème pour le cas du choc oblique. Elle est assez intéressante, mais bornée au cas de sphères homogènes; elle dit que par le choc la vitesse relative des centres change de direction mais pas de grandeur [3]).

[1]) Voir les pp. 43, 47, 51, 55, 57, 59, 61 et 65.
[2]) Voir la p. 94.
[3]) Voir la note 3 de la p. 119.
[4]) Voir la p. 93.
[5]) Voir e. a. le dernier alinéa de la p. 141.
[6]) Il considérait alors la question du mouvement absolu comme une de celles qui n'ont pas d'issue; voir la p. 142.

PRINCIPE DE HUYGENS DE LA RELATIVITÉ.

Dès le début de ses recherches [4]) Huygens a senti tout le profit qu'il pouvait tirer de ce Principe. Pour arriver à une théorie consistante du choc il l'a employé systématiquement et l'a suivi dans toutes ses conséquences. Il nous semble qu'on doit y attacher son nom, plutôt que celui d'un autre, pour le distinguer du Principe plus général de même appellation développé dans ces derniers temps par Einstein.

Il est vrai qu'il était déjà connu auparavant et fut employé surtout par les adhérents de la doctrine du mouvement de la Terre [5]). Il constituait l'un de leurs meilleurs arguments, mais ils ne l'employaient pas comme instrument de recherches. Ce mérite était réservé à Huygens.

Quant aux problèmes de métaphysique qui s'y rattachent: s'il existe un repos et un mouvement absolu et si l'on peut en reconnaître l'existence, du moins dans le cas de la rotation, Huygens n'a pas voulu s'en occuper dans la période dont nous traitons [6]). Plus tard, toutefois, il a changé d'attitude, comme nous le verrons dans la suite.