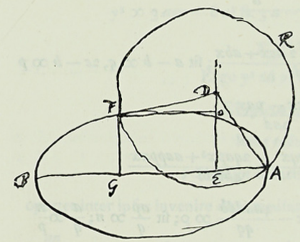
APPENDICE I [1])

AUX „ILLUSTRIUM QUORUNDAM PROBLEMATUM CONSTRUCTIONES.".

SEPTEMBRE 1657.



[Fig. 1.]

Quomodo data qualibet Ellipsi duae mediae inter duas datas inveniri queant [2]). *Et quomodo brevissimè per Ellipsin cujus latus transv. sit triplum lateris recti* [3]).

[PREMIÈRE PARTIE.]

1657. Sept. [4])

AFB est Ellipsis
AFR est circulus

---

[1]) La pièce est empruntée aux pages 2 et 3 du manuscrit N°. 13. Nous l'avons divisée en deux parties.

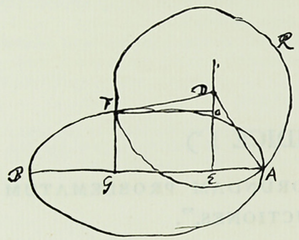
[2]) Voir la première partie qui contient la solution générale du problème de trouver les deux moyennes entre deux lignes données à l'aide d'une ellipse quelconque donnée d'avance.

Remarquons tout de suite que dans cette première partie la construction ne s'achève pas par l'ellipse donnée mais par une autre qui lui est semblable; mais il est clair que, par un artifice facile à deviner et qu'on trouve indiqué dans la seconde partie (p. 221), la construction peut être accommodée à l'ellipse même que l'on considère comme donnée.

[3]) Voir la seconde partie.

[4]) La date précise de l'invention de la construction qui va suivre est le 8 septembre 1657, comme cela résulte des pages 14—17 d'un petit livret où Christiaan Huygens a annoté sur la

AB ∞ a; l. rect. ∞ b; AE ∞ c; ED ∞ d; AG ∞ x [5]).



[Fig. 1.]

$$\begin{array}{r} a - x \ \mathrm{BG} \\ x \ \mathrm{GA} \\ \hline \end{array}$$

l. tranf. a ad l. rect. b ut $ax - xx$

ad $\frac{bax - bxx}{a}$ q.^m GF

fit $r \infty \sqrt{\frac{bax - bxx}{a}} \infty$ GF ∞ EO

q.^m AE q^m. ED q. FO

$$cc + dd \infty xx - 2\,cx + cc +$$
$$+ dd - 2\,dr + \frac{bax - bxx}{a} \ \mathrm{q.^m\,DO}$$

$$r \infty \frac{xx - 2\,cx + bx - \frac{bxx}{a}}{2d}$$

$$r \infty \frac{axx - bxx - 2\,acx + abx}{2ad};\ \text{fit } a - b \infty q,\ 2c - b \infty p$$

$$r \infty \frac{qxx - pax}{2ad}$$

$$rr \infty \frac{abx - bxx}{a} \infty \frac{qqx^4 - 2qapx^3 + aappxx}{4aadd}$$

$$x^3 - \frac{2ap}{q}xx + \frac{aapp}{qq}x + \frac{4addb}{qq}x - \frac{4aaddb}{qq} \infty 0;\ \text{fit } \frac{ap}{q} \infty n;\ \frac{a}{q} \infty \frac{n}{p}$$

---

première page: „Philippi Hugenij dum viveret". C'est son frère Philippe qui mourut le 14 mai 1657.

Or, aux pages citées, on retrouve, sous cette date du 8 septembre 1657, dans une forme moins bien arrangée, tous les calculs et la construction même de la première partie de la pièce présente avec la conclusion: Possumus igitur inter datas duas rectas, invenire duas medias proportionales, cujuslibet ellipsis datae ope. Sed commodissime si latus transversum fuerit triplum lateris recti.

On trouve encore aux pages 16, 22 et 29 du même manuscrit des calculs qui se rapportent au problème analogue où l'ellipse est remplacée par une hyperbole.

5) Partant de ces données, Huygens va déduire l'équation cubique qui détermine les abscisses des points d'intersection avec l'ellipse d'un cercle passant par le sommet A.

$$x^3 - 2nxx + nnx + \frac{4nddb}{pq}x - \frac{4nnddb}{pp} \infty 0 \ ^{6)}.$$

rejicitur fecundus terminus ponendo $x - \frac{2}{3}n \infty y$

$$y^3 - \tfrac{1}{3}nny + \frac{4nddb}{pq}y + \tfrac{2}{27}n^3 + \tfrac{8}{3}\frac{nnddb}{pq} - \frac{4nnddb}{pp} \infty 0$$

ut eliminetur terminus fub y fit $\frac{1}{3}nn \infty \frac{4nddb}{pq}$.

$$\tfrac{1}{3}n \infty \tfrac{1}{3}\frac{ap}{q} \infty \frac{4ddb}{pq};\ \tfrac{1}{12}\frac{app}{b} \infty dd;\ \tfrac{1}{12}\frac{aqqnn}{aab} \infty dd.$$

$$\text{Sit } v \infty \tfrac{1}{3}n;\ \tfrac{3}{4}\frac{qqvv}{ab} \infty dd.$$

$$y^3 \infty \tfrac{1}{3}ann - \tfrac{8}{27}n^3$$

$$y^3 \infty 3avv - 8v^3 \text{ fit } 3a - 8v \infty s;\ a \infty \tfrac{1}{3}s + \tfrac{8}{3}v$$

$$y^3 \infty vvs$$

Ergo y^3 ad v^3 ut s ad v [7]).

Ellipfeos l. tr. AB

latus rectus ∞ b

s ∞ major datarum; v ∞ minor

oportet inter ipfas invenire duas medias proportionales

$$\frac{qn}{a} \infty p \infty 2c - b;\ qn \infty 2ac - ab;\ 3qv \infty 2ac - ab;\ \tfrac{3}{2}\frac{qv}{a} + \tfrac{1}{2}b \infty c$$

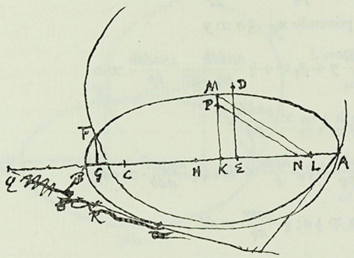
$$\tfrac{3}{4}\frac{qqvv}{ab} \infty dd;\ \tfrac{1}{3}s + \tfrac{8}{3}v \infty 3v + \frac{s - v}{3} \infty a.$$

---

6) L'équation cubique étant trouvée Huygens la réduit, dans ce qui suit, à la forme binomiale.

7) Ainsi $y = x - \frac{2}{3}n = \mathrm{AG} - 2v$ est une des moyennes proportionelles entre v et s. Il ne s'agit donc plus que d'arranger la construction de manière qu'on puisse partir des valeurs de v et s comme données; mais, puisqu'on a: $a = \frac{1}{3}s + \frac{8}{3}v$ et que l'on connaît le rapport $b:a$, il est permis dès l'abord de traiter a et b et aussi $q = a - b$ comme données. On doit donc exprimer dans ces données a, b, q, v et s les valeurs de AE $= c$ et ED $= d$; ce qui permettra de tracer le cercle et de trouver la moyenne proportionnelle y.

Conſtructio univerſalis data qualibet Ellipſi [Fig. 2].



[Fig. 2.]

HQ ∞ s. HC ∞ v. CB ∞ ∞ $\frac{1}{3}$CQ. CA ∞ $3v$ ∞ 3CH[8]). AL ∞ $\frac{1}{2}b$. BK ∞ KA. Ergo KL ∞ $\frac{1}{2}q$. BA ad AC ut KL ad LE ∞ $\frac{3}{2}\frac{qv}{a}$. KP ∞ ∞ HC ∞ v. PN parall. ML. ED ∞ $\sqrt{\frac{3}{4}\,\text{KNq.}^{m}}$ [9]) ∞ $\sqrt{\frac{3}{4}\frac{qqvv}{ab}}$ ∞ d.

D eſt centr. circuli AF. FG perp. BA. HG eſt minor duarum mediarum ∞ y [10]).

[SECONDE PARTIE].

Si ponatur b ∞ $\frac{1}{3}a$ Erit q ∞ $\frac{2}{3}a$. Quia $\frac{3qqvv}{4ab}$ ∞ dd; $\frac{\frac{4}{3}aavv}{\frac{4}{3}aa}$ ∞ vv ∞ dd; v ∞ d.

Et quia $\frac{3}{2}\frac{qv}{a} + \frac{1}{2}b$ ∞ c erit $v + \frac{1}{2}b$ ∞ c; $v + \frac{1}{6}a$ ∞ c.

Ergo in Ellipsi cujus latus tranſverſum triplum eſt lateris recti. Sumitur AL ∞ ∞ $\frac{1}{6}$ AB [11]). LE ∞ v ∞ HC. (nam ſic fit AE ∞ $v + \frac{1}{6}a$ ∞ c). Et ED ∞ ∞ EL ∞ v [12]).

---

[8]) De cette manière $a = AB = CB + CA = \frac{1}{3}(s - v) + 3v$.

[9]) On a, par construction, $KN = KL \times KP : MK = \frac{1}{2}vq : MK$; mais:

$$\text{l. trans.}\,(a) : \text{l. rect.}\,(b) = KB \times KA\,(\tfrac{1}{4}a^2) : MK^2;$$

donc $MK^2 = \frac{1}{4}ab$; $KN^2 = \frac{1}{4}v^2q^2 : \frac{1}{4}ab = v^2q^2 : ab$ et enfin $ED^2 = \frac{3}{4}q^2v^2 : ab = d^2$.

[10]) On a, en effet, $HG = AG - AH = x - (AC - CH) = x - 2v = x - \frac{2}{3}n = y$.

[11]) Voir encore la Fig. 2. Les points A et B sont supposés construits d'après les indications qu'on trouve au début de la „Constructio universalis".

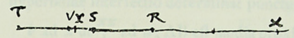
[12]) On retrouve cette construction sous une forme plus achevée dans la lettre du 12 octobre 1657 à de Sluse (p. 67 du T. II), et sur une feuille détachée où elle est comme il suit:

„mea Constructio.

HQ [voir toujours la figure 2 du texte] major, HC minor extremarum. CB ∞ $\frac{1}{3}$ CQ HA ∞ 2 HC. BMA ellipſis axe BA, latere recto ∞ $\frac{1}{3}$ BA. AL ∞ $\frac{1}{6}$ AB ſive $\frac{1}{2}$ l. rect. LE ∞ HC. ED ∞ HC perpend. AB. AF est circulus centro D.

FG perpend. AB. HG eſt minor duarum mediarum."

Data autem certa primum Ellipſi et dein duabus quibuſvis rectis RS, RT [Fig. 3], inter quas duae mediae ſint reperiendae. Oportet ſumere SV ∞ $\frac{1}{3}$ differentiae ST. Et RX ∞ 2 SR. Tum BA diameter ſecunda [Fig. 2] eſt proportionaliter in C et H ſicut VX [Fig. 3] in S et R ſecta eſt. unde etiam inventâ mediâ HG [Fig. 2] oportet facere ſicut HC ad HG ita RS [Fig. 3] ad RY. Eritque RY minor mediarum inter RS, RT. Et hoc ad utramque conſtructionem pertinet [13]).



[Fig. 3].

---

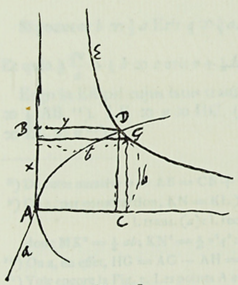
[13]) C'est-à-dire: l'artifice employé ici (et dont nous avons déjà parlé dans la note 2) peut servir aussi pour la construction universelle de la première partie.

APPENDICE II[1]

AUX „ILLUSTRIUM QUORUNDAM PROBLEMATUM CONSTRUCTIONES."

[1657].

Miratus ſum aliquando, qua ratione veteres in conſtructiones eas inciderint, quae fiunt per interſectionem duarum conicarum ſectionum [2]). Puto autem hac ratione inventas eſſe.



[Fig. 1.]

Primum ad cubi duplicationem eſt hujusmodi aequatio $x^3 \infty abb$. Ergo $\frac{xx}{a} \infty \frac{bb}{x}$. Sit $y \infty \frac{xx}{a}$; $ay = xx$. Ergo et $\frac{bb}{x} \infty y$; $bb \infty xy$.

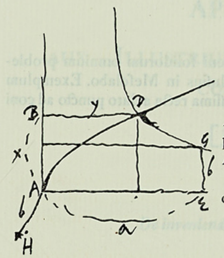
Deſcripta ad axem AC parabola AD cujus latus rectum ∞ a, ductaque AB perp. ad AC apparet ſi ſumatur in ea quaelibet longitudo AB ∞ x. fore BD, quae parallela eſt AC, ∞ y, ex aequatione $ay \infty xx$. At ex altera aequatione $bb \infty xy$, apparet, ſumpta x pro arbitrio, quoniam $\square^m$ xy ſive AB, BD ∞ xy, fore D ad hyperbolen in asymptotis AB, AC, per

[1]) La pièce est empruntée aux pages 4 et 5 du manuscrit N°. 13. Huygens y donne plusieurs solutions du problème des deux moyennes proportionnelles.

[2]) Comparez la p. 191 du Tome présent au début du Probl. III. Il s'agit surtout des deux solutions de Ménechme, qu'on trouve p. 20—21 du texte Latin des Commentaires d'Eutocius de l'édition de Bâle, citée T XI, p. 274, note 3 (Heiberg, T. III, p. 92—99).

angulum G, qu.[1] bb. Sed x in utraque aequatione eſt eadem. Ergo parabolae et hyperbolae interſectio determinat punctum D, ut fiat DC, vel AB ∞ x.

b ad x ut $\frac{xx}{b}$ ad a; AB eſt media proxima extremae b. BD autem non eſt altera mediarum [3]). ſed haec facile invenitur.



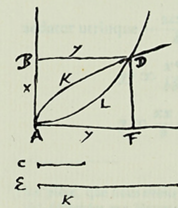
[Fig. 2.]

Aliter. $x^3 \infty abb$; $y \infty \frac{xx}{b} \infty \frac{ab}{x} \infty y$;

$by \infty xx \qquad ab \infty xy$

datae ſunt AH ∞ b. AE ∞ a $\angle$BAE rectus. AD est parab. à latere recto b. DG eſt hijperbole per G. facto rectangulo AG ∞ ab. Mediae ſunt AB, BD.

Haec Menechmi eſt Conſtuctio[4]) itemque altera quae ſequitur [5]).



[Fig. 3.]

$x^3 \infty abb$; $x^4 \infty abbx$; $\frac{x^4}{bb} \infty ax$.

$y \infty \frac{xx}{b} \infty \sqrt{ax} \infty y$

$by \infty xx \qquad ax \infty yy$

C et E ſunt datae. $\angle$BAF rectus. AKD parabola à latere recto b. ALD parabola à latere recto a. mediae AB, AF [5]).

---

[3]) Comparez la solution suivante où les deux moyennes sont indiquées immédiatement toutes les deux par le point d'intersection.

[4]) C'est la première de ses solutions.

[5]) C'est la seconde solution de Ménechme.

$$x^3 \infty abb;\ ax^3 \infty aabb$$

$$yy \infty ax \infty \frac{aabb}{xx} \infty yy$$

$$\frac{ab}{x} \infty y;\ ab \infty xy$$

Hyperbole eadem quae ſuperius in prima Menechmi conſtructione, Parabola vero à latere recto *a*.

Hanc methodum poſtea ulterius excolens inveni ſolidorum omnium problematum conſtructiones meliores ijs quas docet Sluſius in Meſolabo. Exemplum dedi in problemate illo Apollonij Pergei, de breviſſima recta a dato puncto ad coni ſectionem ducenda [6]).

[6]) Ce dernier alinéa doit dater de 1682. Huygens fait allusion à un ouvrage inédit intitulé: „Constructio problematum solidorum per resolutionem aequationis in duos Locos", que nous publierons à sa propre place.

APPENDICE III [1])

AUX „ILLUSTRIUM QUORUNDAM PROBLEMATUM CONSTRUCTIONES."

[JUILLET 1659].

[PREMIÈRE PARTIE].

De inveniendis duabus medijs proportionalibus.

$$x^3 \infty abb;\ x^4 \infty abbx;\ \frac{x^4}{bb} \infty ax$$

addatur utrinque $-\frac{2cxx}{b}+cc$

$$yy \infty \frac{x^4}{bb}-\frac{2cxx}{b}+cc \infty ax-\frac{2cxx}{b}+cc \infty yy$$

$$y \infty \frac{xx}{b}-c$$

[1]) La pièce, que nous avons divisée en quatre parties, est empruntée à quelques feuilles qui ont été détachées par Huygens du livre A des Adversaria. Le revers de la dernière feuille porte la date du 28 juillet 1659; il contient des calculs que nous mentionnerons plus bas dans la note 11 de l' Appendice IV, p. 235 du Tome présent.

En composant cette pièce, Huygens s'est appliqué surtout à retrouver par l'analyse les constructions exposées par de Sluse dans la première édition de son „Mesolabum seu duæ mediæ proportionales inter datas per circulum et ellipsim vel hyperbolam infinitis modis exhibitæ. Accedit problematum quorumlibet solidorum effectio per easdem curvas, ijsdem modis & appendix de eorum solutione per circulum et parabolam. Leodij Eburorum. Typis I. F. van Milst. CIↃ IↃC LIX". in 4°. Voir sur cette édition la note 65, p. 105 du Tome présent.

Sit $2c \infty b$

$$y \infty \frac{xx}{b} - \tfrac{1}{2} b; \sqrt{by + \tfrac{1}{2} bb} \infty x. \text{ Parabola.}$$

$$xx \infty ax + \tfrac{1}{4} bb - yy; x \infty \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa + \tfrac{1}{4} bb - yy}. \text{ Circulus.}$$

Modus 1. Conſtructio Carteſij [2]).

$$\frac{x^4}{bb} \infty ax$$

$$yy \infty \frac{x^4}{bb} - \frac{2axx}{b} + aa \infty ax - \frac{2axx}{b} + aa \infty yy$$

$$y \infty a - \frac{xx}{b}; xx \infty ab - by; x \infty \sqrt{ab - by} \text{ Parabola}$$

$$\frac{abx + aab - byy}{2a} \infty xx; \tfrac{1}{2} bx + \tfrac{1}{2} ab - \tfrac{1}{2} \frac{byy}{a} \infty xx; \tfrac{1}{4} b + \sqrt{\tfrac{1}{16} bb + \tfrac{1}{2} ab - \tfrac{1}{2} \frac{b}{a} yy} \infty x$$

Ellipſis.

Modus 2.

$$yy \infty \frac{x^4}{bb} - 2xx + bb \infty ax - 2xx + bb \infty yy$$

$$y \infty \frac{xx}{b} - b; by + bb \infty xx; \sqrt{by + bb} \infty x \text{ Parabola}$$

$$\tfrac{1}{2} ax + \tfrac{1}{2} bb - \tfrac{1}{2} yy \infty xx; \tfrac{1}{4} a + \sqrt{\tfrac{1}{16} aa + \tfrac{1}{2} bb - \tfrac{1}{2} yy} \infty x \text{ Ellipſis}$$

---

[2]) Il s'agit de la construction, à l'aide du cercle et de la parabole, donnée par Descartes au Livre III de sa „Géométrie" (p. 469—470 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery) sous le titre „L'inuention de deux moyenes proportionelles." En effet, on vérifie aisément que la construction amenée par les formules du texte est identique avec celle de Descartes. Après ce premier succès de la méthode analytique qu'il vient de découvrir, Huygens procède à en chercher de nouvelles applications.

axis min. $\sqrt{\tfrac{1}{4} aa + 2bb}$; l.[atus] r.[ectus] $\infty \sqrt{\tfrac{1}{8} aa + bb}$; l. tr. $\infty \sqrt{\tfrac{1}{2} aa + 4bb}$ recti scilicit duplum.

Modus 3. Optima [3])

$$4yy \infty \frac{x^4}{bb} - 4xx + 4bb \infty ax - 4xx + 4bb \propto 4yy$$

$$2y \infty \frac{xx}{b} - 2b; \sqrt{2by + 2bb} \infty x \text{ Parabola}$$

$$\tfrac{1}{4} ax + bb - yy \infty xx, \tfrac{1}{8} a + \sqrt{\tfrac{1}{64} aa + bb - yy} \infty x \text{ circulus}$$

Modus 4.

$$\tfrac{1}{4} yy \infty \frac{x^4}{bb} - \tfrac{1}{4} xx + \tfrac{1}{64} bb \infty ax - \tfrac{1}{4} xx + \tfrac{1}{64} bb \infty \tfrac{1}{4} yy$$

$$\tfrac{1}{2} y \infty \frac{xx}{b} - \tfrac{1}{8} b; \tfrac{1}{2} by + \tfrac{1}{8} bb \infty xx; \sqrt{\tfrac{1}{2} by + \tfrac{1}{8} bb} \infty x \text{ parabola.}$$

$$4ax + \tfrac{1}{16} bb - yy \infty xx; 2a + \sqrt{4aa + \tfrac{1}{16} bb - yy} \infty x \text{ circulus}$$

Modus 5.

$$4yy \infty \frac{x^4}{bb} - 2xx + bb \infty ax - 2xx + bb \infty 4yy$$

$$2y \infty \frac{xx}{b} - b; \sqrt{2yb + bb} \infty x \text{ parabola}$$

$$\tfrac{1}{2} ax + \tfrac{1}{2} bb - 2yy \infty xx; \tfrac{1}{4} a + \sqrt{\tfrac{1}{16} aa + \tfrac{1}{2} bb - 2yy} \infty x \text{ Ellipſis}$$

---

[3]) Probablement Huygens préfère cette construction à la précédente à cause de la relation entre l'axe et le paramètre de l'ellipse; ce qui permettrait d'exécuter toutes les constructions de moyennes proportionnelles à l'aide d'une seule ellipse construite d'avance, c'est-à-dire, en se servant de l'artifice mentionné dans la note 2, p. 217 du Tome présent.

maj. axis $\sqrt{\tfrac{1}{4}aa+2bb}$; $\sqrt{\tfrac{1}{2}aa+4bb}$ l. r.; $\sqrt{\tfrac{1}{8}aa+bb}$ l. tr.

Modus 6.

Ex his duobis modis fit conſtructio folio ſequenti verſo [4]).

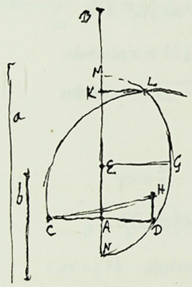
$$\frac{ccyy}{bb}\infty\frac{x^4}{bb}-\frac{ccxx}{bb}+\tfrac{1}{4}\frac{c^4}{bb}\infty ax-\frac{ccxx}{bb}+\tfrac{1}{4}\frac{c^4}{bb}\infty\frac{ccyy}{bb}$$

$$cy\infty xx-\tfrac{1}{2}cc;\ \sqrt{cy+\tfrac{1}{2}cc}\infty x \text{ parabola quaelibet}$$

$$yy\infty\frac{bbax}{cc}-xx+\tfrac{1}{4}cc;\ xx\infty\frac{bbax}{cc}+\tfrac{1}{4}cc-yy;\ x\infty\tfrac{1}{2}\frac{abb}{cc}+$$

$$+\sqrt{\tfrac{1}{4}\frac{aab^4}{c^4}+\tfrac{1}{4}cc-yy}\text{ circulus}$$

Modus 7.



[Fig. 1.]

Ex modo 4° et 6° haec inventa eſt conſtr°. [5])
AB[a] maj. CD[b] min. extremarum. CA ∞ AD. ∠BAD rectus.
AE ∞ $\tfrac{1}{4}$AB; EN vel EM qu. ∞ qu. EA + 2 qu. AD.
EG qu. ∞ $\tfrac{1}{2}$ qu. EM.
NGM eſt ellipſis, axis MN.
DH ∞ $\tfrac{1}{2}$ AE ∞ $\tfrac{1}{8}$ AB.
CL eſt circulus centro H.
Interſectio L. LK perpend. AB. AK eſt minor duarum mediarum.
NB. hinc data ellipſi cujus latus rectum ſit dimidium tranſverſi inter datas extremas duae mediae facili conſtructione habentur.

---

4) Voir plus loin, à la page présente, après le „modus 7". Il s'agit des „modus 4 et modus 6".
5) Voici comment: Les paraboles des modes 4 et 6 sont égaux, mais leurs sommets se trouvent sur l'axe des y à des distances inégales b et $\tfrac{1}{2}b$ de l'origine des coordonnées. Si donc on fait subir la première parabole *avec le cercle qui la coupe* une translation $\tfrac{1}{2}b$ dans la direction de l'axe des y, elle couvrira la seconde parabole et le point d'intersection avec le cercle tombera nécessairement sur celui de la seconde parabole avec l'ellipse, puisque ces points doivent avoir la même distance à l'axe des y, laquelle distance est égale à la moyenne cherchée. On peut donc

$$yy\infty\frac{x^4}{bb}-\frac{cxx}{b}+\tfrac{1}{4}cc\infty ax-\frac{cxx}{b}+\tfrac{1}{4}cc\infty yy$$

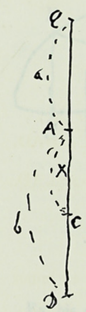
$$y\infty\frac{xx}{b}-\tfrac{1}{2}c;\ \sqrt{by+\tfrac{1}{2}bc}\infty x\text{ parabola}$$

$$\frac{bax+\tfrac{1}{4}ccb-byy}{c}\infty xx;\ \tfrac{1}{2}\frac{ab}{c}+\sqrt{\tfrac{1}{4}\frac{aabb}{cc}+\tfrac{1}{4}cb-\frac{b}{c}yy}\infty x\text{ Ellipſis quaelibet}$$

Modus 8.

Ex hoc modo et primo, oritur Conſtructio univerſalis Sluſij [6]), per circulum et ellipſin. Ex eo quod utriuſque parabolam latus rectum eſt idem nempe ∞ b.

[Seconde partie].



[Fig. 2.]

Secare AD in C, ut ſit qu. QA ad qu. AC ut AC ad CD [7]).

$$aa\text{ ad }xx\text{ ut }x\text{ ad }b-x$$

$$x^3\infty aab-aax$$

$$x^4\infty aabx-aaxx$$

$$\frac{x^4}{aa}\infty bx-xx$$

$$yy\infty\frac{x^4}{aa}\infty bx-xx\infty yy$$

$$y\infty\frac{xx}{a};\ ay\infty xx;\ \sqrt{ay}\infty x\text{ parabola}$$

$$bx-xx\infty yy;\ bx-yy\infty xx;\ \tfrac{1}{2}b+\sqrt{\tfrac{1}{4}bb-yy}\infty x\text{ circulus}$$

---

supprimer la parabole et déterminer ce point d'intersection à l'aide de l'ellipse et du cercle, pourvu que le centre du cercle du mode 4 soit déplacé sur une distance $\tfrac{1}{2}b$; ce qui amène facilement la construction du texte. Toutefois Huygens n'est pas encore satisfait, puisque la „Propositio Prima" de de Sluse apprend de construire la moyenne cherchée à l'aide d'un cercle et d'une ellipse „infinitis modis", c'est-à-dire à l'aide d'une infinité d'ellipses *différentes*. C'est pourquoi il procède au mode 8, ou une constante arbitraire est introduite.
6) La „Propositio prima" citée dans la note précédente, qu'on trouve à la page 3 de la première et de la seconde édition du „Mesolabum". On l'obtient en effet par l'artifice même exposé dans la note précédente, en observant que la parabole du „modus 8" est égale, cette fois, à celle du mode 1.
7) Dans sa „Propositio septima" (p. 27 de la première, p. 22 de la seconde édition du „Mesola-

$$yy \infty \frac{x^4}{aa} + \frac{cxx}{a} + \tfrac{1}{4}cc \infty bx - xx + \frac{cxx}{a} + \tfrac{1}{4}cc \infty yy$$

$$y \infty \frac{xx}{a} + \tfrac{1}{2}c; \sqrt{ay - \tfrac{1}{2}ac} \infty x \text{ parabola}$$

$$abx + \tfrac{1}{4}acc - ayy \infty axx - cxx; \frac{abx}{a-c} + \tfrac{1}{4}\frac{acc}{a-c} - \frac{ayy}{a-c} \infty xx; a - c \infty d;$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{ba}{d} + \sqrt{\tfrac{1}{4}\frac{aabb}{dd} + \tfrac{1}{4}\frac{acc}{d} - \frac{ayy}{d}} \infty x \text{ Ellipſis.}$$

Ex hoc et ſuperiori oritur conſtr.° propoſitionis 7.^{ae} Sluſij in Meſolabo.

[TROISIÈME PARTIE.] [8])

aa ad xx ita x ad $x - b$

$x^3 \infty aax - aab$. Aequatio triſectionis anguli [9]).

$$\frac{x^4}{aa} \infty xx - bx$$

$$yy \infty \frac{x^4}{aa} - 2xx + aa \infty - xx - bx + aa \infty yy$$

$$y \infty \frac{xx}{a} - a; \sqrt{ay + aa} \infty x \text{ parabola}$$

$$- bx + aa - yy \infty xx; - \tfrac{1}{2}b + \sqrt{\tfrac{1}{4}bb + aa - yy} \infty x \text{ Circulus.}$$

bum") de Sluse résolut ce problème à l'aide du cercle et d'une ellipse „infinitis modis". Huygens se propose de retrouver cette solution. A cet effet il commence à chercher une solution à l'aide du cercle et de la parabole; ensuite une autre par une parabole du même paramètre et d'une ellipse de figure quelconque. Après cela il supprime la parabole et il obtient la solution désirée.

[8]) Dans cette troisième partie il s'agit de la „Propositio undecima" (p. 39 de la première, 31 de la seconde édition) de de Sluse, laquelle est comme il suit: „Datis duabis rectis P, & Q, invenire tertiam ut X, ad cujus quadratum, quadratum datæ P eandem habeat rationem, quæ est ipsius X, ad excessum X, supra Q." Ici encore le même artifice va conduire Huygens à la solution de de Sluse.

[9]) Soit r le rayon du cercle, q la corde de l'arc de l'angle donné, x celle de la troisième partie de cet arc, alors: $x^3 = 3r^2x - qr^2$. Comparez le livre III de la „Geométrie" de Descartes, à l'article: „La façon de diviser un angle en trois" (T. VI, p. 470 de l'édition d'Adam et Tannery).

$$yy \infty \frac{x^4}{aa} - \frac{cxx}{a} + \tfrac{1}{4}cc \infty - bx + xx - \frac{cxx}{a} + \tfrac{1}{4}cc \infty yy$$

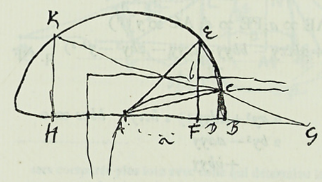
$$y \infty \frac{xx}{a} - \tfrac{1}{2}c; \sqrt{ay + \tfrac{1}{2}ac} \infty x \text{ parabola}$$

$$- abx + axx - cxx + \tfrac{1}{4}acc \infty ayy; - \frac{abx}{c-a} + \tfrac{1}{4}\frac{acc}{c-a} - \frac{ayy}{c-a} \infty xx; c - a \infty d;$$

$$- \tfrac{1}{2}\frac{ab}{d} + \sqrt{\tfrac{1}{4}\frac{aabb}{dd} + \tfrac{1}{4}\frac{acc}{d} - \frac{ayy}{d}} \infty x \text{ Ellipſis.}$$

Ex his oritur conſtructio Sluſij propoſ.^{e} undecima per circulum et ellipſin.

[QUATRIÈME PARTIE] [10]).



[Fig. 3.]

AF [11]) ∞a; FE ∞b; AD ∞y; DC ∞x
GD $(\sqrt{aa + bb - xx})$ ad DC (x)
ut GH $(a + 2\sqrt{aa + bb - xx})$ ad
HK (b)

$$b\sqrt{aa + bb - xx} \infty ax + {}$$
$$+ 2x\sqrt{aa + bb - xx}$$

$$\sqrt{aa + bb - xx} \infty \frac{ax}{b - 2x}$$

$$yy \infty aa + bb - xx \infty$$
$$\infty \frac{aaxx}{bb - 4bx + 4xx} \infty yy$$

$$x \infty \sqrt{aa + bb - yy} \text{ Circulus}$$

$$\frac{ax}{b - 2x} \infty y; ax \infty by - 2xy; - \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{2}by \infty xy \text{ Hyperbole.}$$

Ex his conſtructio oritur propoſitionis 13 Sluſij. qua triſecat angulum per hyperbolam.

[10]) Dans cette partie Huygens retrouve la trisection de l'angle, telle qu'elle fut exécutée à l'aide de l'intersection d'un cercle avec une hyperbole équilatère dans la 13^e proposition de de Sluse, p. 45 de la première, p. 36 de la seconde édition du „Mesolabum".

[11]) La figure, avec omission de plusieurs lignes, est empruntée par Huygens à celle de de Sluse. On y a DG = AD; donc $\angle$KCA = 2$\angle$CAB = $\frac{2}{3}$$\angle$EAB. De même $\angle$KAH + $\angle$CAB = = 2 $\angle$KCA = $\frac{4}{3}$ $\angle$EAB; donc encore $\angle$KAH = $\frac{4}{3}$$\angle$EAB − $\frac{1}{3}$$\angle$EAB = $\angle$EAB et par conséquent KH = EF = b.

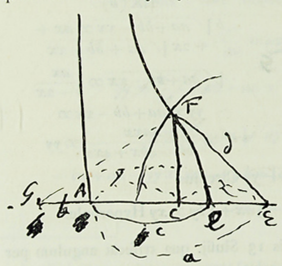
APPENDICE IV [1]

AUX „ILLUSTRIUM QUORUNDAM PROBLEMATUM CONSTRUCTIONES."

[1659].

[GA ∞ b; AQ ∞ c; AE ∞ a; FE ∞ d; AC ∞ y] [2]

$$\text{q. CF } dd - aa + 2\,ay - yy \ \infty\ \frac{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}{yy} \ ^{3)} \text{ q. CF}$$



$$2\,ay^3 + ddyy - 2\,bccy - bbcc \ \infty\ 0$$
$$2\,by^3 - aayy$$
$$+ bbyy$$
$$- ccyy$$

$$y^3 + ddyy - 2\,bccy - bbcc \ \infty\ 0 \ ^{4)}$$
$$- aa$$
$$+ bb$$
$$- cc$$
$$\overline{\quad 2a + 2b \quad}$$

[Fig. 1.]

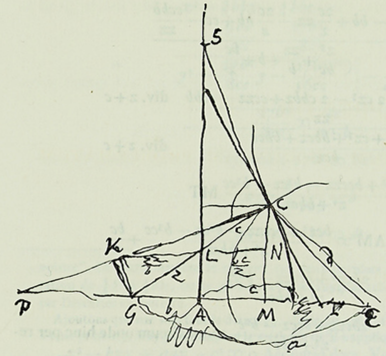
[1]) Cet appendice a été emprunté aux pages 123—131 du livre A des „Adversaria". Il contient la solution d'août 1659 du problème „In conchoide linea invenire confinia flexus contrarii." Voir, pour l'historique de cette solution, l'Avertissement à la page 110—111.

[2]) Nous avons ajouté ces indications.

[3]) Cette seconde valeur de CF^2 découle des propriétés de la conchoïde. On la retrouve p. 83 du Tome présent. Elle est égalée à la première pour trouver l'équation cubique qui donne les intersections de la conchoïde avec un cercle ayant E pour centre.

[4]) Cette équation cubique:

$$y^3 + \frac{d^2 - a^2 + b^2 - c^2}{2\,(a+b)}\,y^2 - \frac{bc^2}{a+b}\,y - \frac{b^2c^2}{2\,(a+b)} = 0$$



[Fig. 2.]

[GA (Fig. 2) ∞ b; LC ∞ c] [5]; GL ∞ z.

(GL) z ad (LC) c ut GA (b) ad AM$\left(\frac{bc}{z}\right)$

PA ∞ $\frac{z^3}{bc} + \frac{zz}{b} + b$ [6]

MC ∞ $\sqrt{zz - bb} + \frac{c}{z}\sqrt{zz - bb}$ [7]

(PM) $\frac{z^3}{bc} + \frac{zz}{b} + b + \frac{bc}{z}$ ad (MC) $\sqrt{zz - bb} + \frac{c}{z}\sqrt{zz - bb}$ ut MC ad MT

sera comparée plus loin avec celle qui détermine le point d'inflexion de la conchoïde. Remarquons tout de suite qu'on en peut faire disparaître le second terme en posant $d^2 = a^2 - b^2 + c^2$; substituant ensuite $y = kx$, on peut identifier, par un choix convenable de k et de a l'équation obtenue avec une équation cubique quelconque sans second terme. On peut donc à l'aide des intersections d'un cercle et d'une conchoïde donnée d'avance, résoudre chaque problème menant à une équation cubique; pourvu seulement que la valeur obtenue de a satisfasse à l'inégalité $a^2 + c^2 > b^2$, ce qui n'est pas toujours le cas, et que de plus le cercle, qu'on obtient, coupe réellement la conchoïde donnée. Comparez la note 16 de la pièce présente et la note 10 p. 86 du Tome présent.

[5]) Ces notations, que nous avons ajoutées, correspondent avec celles de la figure précédente. Dans ce qui suit Huygens va calculer la valeur de AT, laquelle, au point d'inflexion, doit être maximale, CT étant la tangente de la conchoïde au point C.

[6]) La normale PC à la conchoïde est supposée avoir été construite d'après la manière qu'on trouvera décrite plus loin dans les „Contributions aux commentaires de van Schooten sur la Geometria Renati Dercartes"; c'est-à-dire le point K a été trouvé en tirant LK parallèle à PA et GK perpendiculaire à GC. On a donc, à cause de la similitude des triangles LNC et LGK, LN $\left(\frac{bc}{z}\right)$: LC (c) = LG (z): LK $\left(\frac{zz}{b}\right)$ et ensuite LC (c): CG $(z + c)$ = KL $\left(\frac{zz}{b}\right)$: PG $\left(\frac{z^3}{bc} + \frac{zz}{b}\right)$; donc PA = PG + GA = $\frac{z^3}{bc} + \frac{zz}{b} + b$.

[7]) Puisqu'on a MC = MN + NC où MN = $\sqrt{GL^2 - GA^2} = \sqrt{zz - bb}$ et NC = $\frac{c}{z} \times$ AL par similitude de triangles.

$$\mathrm{MT}\ \frac{zz - bb + \frac{2c}{z}zz - \frac{2c}{z}bb + cc - \frac{ccbb}{zz}}{\frac{z^3}{bc} + \frac{zz}{b} + b + \frac{bc}{z}}$$

$$\frac{\frac{z^4 - bbzz + 2\,cz^3 - 2\,cbbz + cczz - ccbb}{zz}}{\frac{z^4 + cz^3 + bbcz + bbcc}{bcz}} \quad \begin{matrix}\text{div. } z+c \\ \text{div. } z+c\end{matrix}$$

$$\frac{bcz^3 + bcczz - b^3cz - b^3cc}{z^4 + bbcz}\ \mathrm{MT}$$

$$\mathrm{AT} \infty \mathrm{MT} + \mathrm{AM} \infty \frac{bcz^3 + bcczz - b^3cz - b^3cc}{z^4 + bbcz} + \frac{bc}{z}$$

$$\frac{2bcz^3 + bcczz - b^3cz}{z^4 + bbcz}$$

$\dfrac{2bczz + bccz - b^3c}{z^3 + bbc} \infty$ maximum unde hinc per regulam de max. et minimis [8])

$$\begin{aligned} &o \infty 2bcz^5 + 2bccz^4 - 3b^3cz^3 - 4b^3cczz - b^3c^3z \\ &o \infty 2z^4 + 2cz^3 - 3bbzz - 4bbcz - bbcc \quad \text{div. } z+c \\ &2z^3 - 3bbz - bbc \infty o \\ &z^3 - \tfrac{3}{2}bbz - \tfrac{1}{2}bbc \infty o \end{aligned}$$

hinc etiam constr. breviss. per. parab. [9])

hi termini ex aequ°. pag. 2. [10])

$$2bcc \text{ ad } bbcc \text{ ut } \tfrac{3}{2}bb \text{ ad } \tfrac{3}{4}b^3 \quad \frac{\frac{3}{4}b^3}{\frac{1}{2}bbc} \left| \frac{3b}{2c} \right| \frac{p}{r} \ ^{11)}$$

[8]) Il s'agit de la règle publiée dans l'ouvrage: „Demonstratio regulae de maximis & minimis" (voir T. IX, p. 95, note 1) pour trouver le maximum ou le minimum d'une fraction. En effet, cette règle appliquée à la dernière expression pour AT amène immédiatement l'equation qui va suivre.

[9]) En effet, cette équation en z=GL est plus simple que celle en q=GM de la pièce N°. XX des „Travaux" de 1652 et 1653 (p. 84 du Tome présent). Consultez encore la note 5 de la même pièce N°. XX.

[10]) C'est-à-dire, l'équation de la note 4.

[11]) Pour arriver à la construction désirée à l'aide de la conchoïde donnée et du cercle, il suffirait d'identifier l'équation cubique en z avec celle en y de la note 4, privée du second membre, en posant $d^2 = a^2 - b^2 + c^2$. Or, cela est impossible, puisque le rapport du troisième au quatrième terme diffère dans les deux équations. On doit donc auparavant appliquer à l'équation en z la méthode enseignée par Descartes au Livre III de la „Géométrie" (p. 452 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery) pour „multiplier ou diuiser les racines sans les con-

$$\begin{array}{l} z^3 - \frac{3}{2}bbz - \frac{1}{2}bbc \\ \quad\ \ \frac{9bb}{4cc} \qquad \frac{27b^3}{8c^3} \\ \hline y^3 - \frac{27b^4}{8cc}y - \frac{27b^5}{16cc}\ ^{12)} \end{array} \left| - \frac{bc^2}{a+b}y \right. \text{ ex aequ. pag. 2 } ^{10)}$$

$$\frac{27b^3}{8cc} \infty \frac{cc}{a+b}$$

$$27abbb + 27b^4 \infty 8c^4$$

$$a \infty \frac{8}{27}\frac{c^4}{bbb} - b$$

$$aa + cc - bb \infty d^2$$

noistre". De cette manière le rapport des deux derniers termes doit être changé dans la raison de $\frac{3}{4}b^3$ à $\frac{1}{2}bbc$, ou de $3b$ à $2c$; ce que Huygens achève par l'algorithme même donné par Descartes au lieu cité.

Ajoutons que sur une feuille détachée, datée du „28 Jul. 1659" (voir la note 1, p. 225 du Tome présent), Huygens a exposé la méthode qu'il a appliquée ici; on y lit:

„$x^3 - bxx + aax - c^3 \infty o$ Aequatio data. Volo autem habere aliam similem, cujus radix ad radicem hujus habeat rationem cognitam in qua quantitas 3ij termini sit ad quantitatem 4ti termini in data ratione d ad ee."

A cet effet, appliquant l'algorithme de Descartes, il écrit l'équation désirée: $y^3 - \frac{bryy}{p} + \frac{aarry}{pp} - \frac{c^3r^3}{p^3}$; puis il calcule $\frac{r}{p}$ à l'aide de la proportion $\frac{aarr}{pp} : \frac{c^3r^3}{p^3} = d : ee$ et il fait suivre:

„Ergo loco aequationis prioris $x^3 - bxx + aax - c^3$ ponenda est alia cujus radix $y \infty \frac{rx}{p}$ hoc est $\frac{aaee}{dc^3}x$. Obtinebitur autem talis aequatio si multiplicemus hoc modo.

$$\begin{array}{l} x^3 - bxx + aax - c^3 \\ \quad 1. \ \ \frac{aaee}{dc^3}. \ \ \frac{a^4e^4}{ddc^6} \ \ \frac{a^6e^6}{d^3c^9} \\ \hline y^3 - \frac{aaeebyy}{dc^3} + \frac{a^6e^4y}{ddc^6} - \frac{a^6e^6c^3}{d^3c^9} \end{array}$$

hi jam duo posteriores sunt inter se ut d ad ee ut facile apparet".

Après quoi il ajoute:

In constructionibus solidorum problematum magni usus.

[12]) L'équation en y, obtenue par le procédé que nous venons d'indiquer, peut être identifiée maintenant à celle de la note 4. A cet effet Huygens égale les coëfficients des termes en y; l'égalisation des termes constants aurait d'ailleurs amené nécessairement la même relation $\frac{27b^3}{8cc} = \frac{cc}{a+b}$.

Constructio ad inveniendum radicem y [13]). Ut autem p ad r sive ut $3b$ ad $2c$ ita y ad z [14]). $\frac{pz}{r} \infty y$; $z \infty \frac{ry}{p}$.

$\frac{8}{27}\frac{c^4}{b^3}$ est dimidiam quintae prop.$^{\text{lis}}$ duarum $3b$ et $2c$, vel quinta prop. duarum $\frac{3}{2}b$ et c.

$$\text{necesse est } 8c^4 \Vert^{\,15)}\ 27b^4$$

$$\frac{8}{27}\frac{c^4}{bbb} - b \Vert \frac{bb}{2c} \text{ vid. pag. 4 in fin. }^{16)}$$

---

[13]) En effet, pour trouver y, on n'a plus qu'à construire a et d d'après les formules du texte; à prendre ensuite (voir la figure 1) $AE = a$, à construire le cercle qui a E pour centre et d pour rayon et enfin à abaisser du point d'intersection F avec la conchoïde la perpendiculaire FC. Alors $AC = y$.

[14]) Comparez la note 11. Il est clair qu'après cela la construction est facile à achever. On en trouve un résumé aux p. 200—201 du T. IX. Après avoir construit $y = AC$ (fig. 1), comme nous l'avons dit dans la note 13, on n'a qu'à prendre GL (fig. 2) égal à $z = \frac{2cy}{3b}$, ou bien GC à $(z + c)$. Dans ce dernier cas on a encore à déterminer l'intersection de la conchoïde donnée avec un cercle ayant G pour centre et GC pour rayon. C'est la voie suivie dans le résumé mentionné qui fut envoyé le 27 août 1687 à Mr. H. Coets.

[15]) Signe pour indiquer que $8c^4$ est plus grand que $27b^4$. Dans le cas contraire on obtiendra pour $a = AE$ (fig. 1) une valeur négative; ce qui en vérité n'importe guère. Plus tard Huygens a ajouté à ce propos: „videndum cum centrum E circuli est ex altera parte A, qualis tunc futura sit haec aequatio. 1680" Il s'agit de l'équation de la note 4.

[16]) Voici ce qu'on trouve au lieu cité: „bona est constr. cum d radius potest secare conchoidem, hoc est cum $d + a$ major quam c.

$$\sqrt{aa + cc - bb} + a \Vert c$$

$$aa + cc - bb \Vert cc - 2ac + aa$$

$$a \Vert \frac{bb}{2c}\text{"}$$

Cette condition est donc bien plus importante que la précédente, puisqu'elle décide sur la réalité du point d'intersection F (fig. 1). Au cas où $a > c$, la condition $a + d > c$ est remplacée par $a - d < c$; mais les deux conditions peuvent être exprimées ensemble par $(a - c)^2 < d^2$, ce qui mène à la relation $c^5 - \frac{27}{8}cb^4 - \frac{27}{16}b^5 > 0$, ou bien, posant $b = kc$, $16 - 27k^4(k + 2) > 0$, ce qui exige $k < 0,685\ldots$

On voit dès l'abord que cette condition est suffisante et on reconnaît facilement qu'elle

$$\frac{8}{27}c^4 - b^4 \Vert \frac{b^5}{2c}$$

$$8c^4 - 27b^4 \Vert \frac{27}{2}\frac{b^5}{c}$$

$$16c^5 - 54cb^4 - 27b^5 \infty 0$$

$$\text{determ}^{\circ}. \quad c^5 - \tfrac{27}{8}cb^4 - \tfrac{27}{16}b^5 \infty 0 \ ^{17)}$$

bona eſt conſtr°. cum b ad c ut 2 ad 3, non autem cum ut 20 ad 29 [18]).

---

est de même nécessaire, en remarquant que la relation $c^5 - \frac{27}{8}cb^4 - \frac{27}{16}b^5 > 0$ exprime que la seule racine positive de l'équation $y^3 - \frac{27b^4}{8c^2}y - \frac{27b^5}{16c^2} = 0$ est inférieure à c; voir encore la note 4, p. 202 du T. IX, où la même relation est déduite de cette manière.

[17]) Lisez plutôt: $c^5 - \frac{27}{8}cb^4 - \frac{27}{16}b^5 > 0$.

[18]) Au premier cas $k = \frac{2}{3} = 0,666\ldots < 0,685\ldots$; au second $k = \frac{20}{29} = 0,689\ldots > 0,685\ldots$