même lieu[24]) la conftruction, plus fubtile que les autres, de Nicomède[23]), que Fr. Viète a inférée, arrangée un peu autrement, dans fon Supplément à la Géométrie[25]). La méthode de R. Defcartes par l'interfection d'une parabole et d'une circonférence[26]), dont on trouve la démonftration dans les livres de Harmoniques de M. Merfenne[27]), eft excellente et nouvelle. Viennent maintenant les nôtres.

Soit de deux lignes données AC la plus grande[28]), qui eft divifée en deux parties égales au point E. Et foit AB la plus petite, que nous fuppoferons placée de telle façon, que le triangle EAB ait les côtés AE, EB égaux. Achevons le parallélogramme CABD, et prolongeons AC, AB. Puis appliquons une régle au point D et mouvons-la jufqu'à ce qu'elle ait la pofition GF, où elle découpe justement une portion EF égale à la droite EG; (ce que nous obtiendrons en effayant fouvent, ou par le tracé d'une hyperbole, ainfi que nous le montrerons plus loin). Je dis que l'on a trouvé alors les deux moyennes BG, CF entre AC et AB.

Soit en effet EK à angles droits fur AB. Puis donc que BE eft égal à EA, la droite AB fera divifée en deux parties égales en K; mais la droite BG eft adjacente. Donc le rectangle AGB avec le carré fur KB fera égal au carré KG. Et ajoutant de part et d'autre le carré KE, le rectangle AGB avec les carrés BK et KE, c'eft-à-dire avec le carré BE, fera égal au carré EG. De même, puifque AC eft partagé en deux parties égales en E, et que la ligne CF eft adjacente, le rectangle AFC avec le carré EC fera égal au carré EF. Mais le carré EF eft égal au carré EG. Donc le rectangle AFC avec le carré CE fera égal au rectangle AGB avec le carré BE. Or, le carré CE ou EA eft égal au carré EB. Donc auffi le rectangle reftant AFC eft égal au rectangle AGB. Pour cette raifon, comme FA à AG ainfi BG eft à CF. Mais comme FA à AG ainfi DB eft à BG et ainfi auffi FC à CD.

[23]) Consultez, sur cette construction, la note 2, p. 13 et la p. 15 du Tome présent. Nous avons exposé ailleurs, aux p. 4—6 du Tome présent, comment l'étude de la construction de Nicomède a été pour Huygens le point de départ d'autres recherches sur les problèmes solides et surtout de ses solutions nouvelles, qui vont suivre, du problème des deux moyennes proportionnelles.

[24]) Voir les p. 26—27 de l'édition du Bâle (Heiberg, III, p. 122—127).

[25]) Voir la Prop. V, p. 242—243 de l'ouvrage cité dans la note 31, p. 10 du T. I. Pour comparer la construction de Viète avec celle de Nicomède on doit identifier respectivement les points A, B, C, D, G et H de la figure de Viète avec les points B, A, L, C, D et E de la figure de la page 15 du Tome présent. Alors on s'aperçoit que Viète commence sa construction par décrire un cercle dont le centre deviendra le point B de cette dernière figure et dont le diamètre est égal au plus grand des deux segments donnés. Dans ce cercle il inscrit une corde LA égale au plus petit segment et il prend CL = LA. Ensuite il tire la droite AD parallèle à CB et la droite BE de manière qu'on a DE = AB. Alors, d'après lui, AE est la première des deux moyennes et la seconde est la distance du point E au point d'intersection du cercle avec BE, mais puisqu' on a DE = BA on voit aisément que cette distance est égale à BD.

Ainsi la comparaison de la solution de Viète avec celle de Nicomède, qui donne AE et GK pour les deux moyennes, fait connaître une nouvelle propriété de la figure mentionnée, c'est-à dire l'égalité de BD avec GK. On a, en effet, BD : DE = CA : AE, donc BD : 2DE = $\frac{1}{2}$ CA : AE, ou bien BD : AH = GH : AE; mais, puisqu' on a de même GK : AH = GH : AE, il en résulte BD = GK.

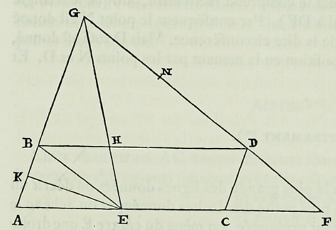
[26]) Voir, dans la „Géometrie", l'article: „L'inuention de deux moyenes proportionelles," p. 469—470 du Tome VI de l'édition d'Adam et Tannery.

[27]) Voir l'ouvrage cité dans la note 5, p. 100 du T. V. Aux pages 147—148 du second volume on y trouve, en effet, une démonstration à la mode des anciens de la construction de Descartes.

[28]) L'analyse de la construction qui va suivre ici en premier lieu fut inventée le 9 mars 1652 (voir la première partie de la pièce N°. XI, p. 49—50 du Tome présent). Le lendemain Huygens rédigea la construction et la démonstration en forme (voir les p. 50 et 51 de la pièce mentionnée); ensuite il les modifia ce même jour (voir la note 5 de la pièce mentionnée). C'est cette dernière rédaction qu'on retrouve ici avec de légères altérations.

medea autem conftructio[23]) præ cæteris fubtilis ibidem[24]) extat, quam Fr. Viëta paulo aliter concinnatam fuo Geometriæ fupplemento inferuit[25]). R. Cartefii egregia eft & nova per paraboles & circumferentiæ interfectionem[26]), cujus demonftratio legitur in libris Harmonicôn M. Merfenni[27]). Noftræ autem fequentes.

Sit datarum linearum major AC[28]), quæ bifariam fecetur in E. Minor autem fit AB, quæ fic conftituatur ut triangulus EAB habeat crura æqualia AE, EB. Et perficiatur parallelogrammum CABD. Et producantur AC, AB. Porro applicetur regula ad punctum D, & moveatur quousque pofitionem habeat GF, abfcindens nimirum EF æqualem rectæ EG; (Hoc autem vel fæpius tentando affequemur, vel defcriptâ hyperbole, uti poftea oftendetur) Dico inter AC, AB medias duas inventas effe BG, CF.



[Fig. 4.]

Sit enim EK ipfi AB ad angulos rectos. Quia igitur BE æqualis EA, dividetur AB in K bifariam: adjecta autem eft linea BG. Ergo rectangulum AGB cum quadrato ex KB, æquabitur quadrato KG. Et addito utriumque quadrato KE, erit rectangulum AGB unà cum quadratis BK, KE, hoc eft unà cum quadrato BE, æquale quadrato EG. Similiter quia AC bifariam dividitur in E, & adjecta eft linea CF, erit rectangulum AFC cum quadrato EC æquale quadrato EF. Quadratum autem EF æquale eft quadrato EG. Erit igitur rectangulum AFC cum quadrato CE, æquale rectangulo AGB cum quadrato BE. Atqui quadratum CE feu EA æquale eft quadrato EB. Ergo & reliquum rectangulum AFC æquale rectangulo AGB. Quare ficut FA ad AG ita BG ad CF. Ut autem FA ad AG ita eft DB ad BG, & ita quoque FC ad CD. Igitur ut DB, hoc eft, Donc comme DB, c'eſt-à-dire AC, à BG, ainſi BG eſt à FC, et FC à CD, c'eſt-à-dire AB. Ce qu'il fallait démontrer. Quant à ce que nous avons dit, que l'on peut également trouver par la deſcription d'une hyperbole comment la droite FDG doit être tracée, cela ſera évident par ceci: ſuppoſons que l'on ait fait en ſorte que EF, EG ſoient égales, et que l'on prenne GN égale à DF. Le point N eſt ainſi ſur l'hyperbole que l'on tracera par le point D avec les droites FA, AG comme asymptotes *. Mais le même point N eſt auſſi ſur la circonférence de cercle, dont le centre eſt E et le rayon ED; (car ceci ſe comprend facilement, puiſque le triangle FEG eſt iſocèle et que NG eſt égal à DF). Par conſéquent le point N eſt donné par l'interſecton de l'hyperbole et de la dite circonférence. Mais D auſſi eſt donné, La ligne FG eſt donc donnée en poſition en la menant par les points N et D. Et la conſtruction eſt évidente.

* 8. 2. *Coniques* [29]).

AUTREMENT [30]).

Autour du diamètre AC égal à la plus grande des lignes données on décrit un cercle; on y place AB égale à la plus petite des droites données et on achève le parallélogramme AD; puis, AB étant prolongée, on mène du centre E une droite EHG, de telle manière que HD, HG ſoient égales entr'elles. Suppoſons qu'elle coupe la circonférence en L. Je dis qu' on a trouvé les deux moyennes BG et GL aux deux droites AC, AB.

Prolongeons [31]), en effet, GE juſqu' à la circonférence en K, joignons AK et menons BO qui lui ſoit parallèle. Alors les triangles AEK, BHO ſont ſemblables; et comme AE eſt égale à EK, BH et HO ſeront auſſi égales entr'elles. Mais encore HG, HD ſont égales entr'elles. Donc toute la droite OG eſt égale à BD, c'eſt-à-dire au diamètre AC ou LK; et après avoir enlevé la partie commune LO, il reſte des lignes égales LG, OK. Mais le rectangle KGL eſt égal au rectangle AGB. Donc comme KG eſt à GA ainſi BG à GL. Mais comme KG à GA ainſi OG eſt à GB et ainſi auſſi le reſte OK, c'est-à-dire LG, à BA. Donc comme OG, c'eſt-à-dire AC, à GB ainſi BG eſt à GL et GL à AB. Ce qu'il fallait démontrer. Or, l'invention de cette conſtruction a la même origine que la précédente [32]).

---

29) Voir, à la p. 46 recto de l'édition de Commandin, citée dans la note 4, p. 6 du T. I, la proposition suivante: „Si hyperbolae recta linea occurrat in duobus punctis, producta ex utraque parte cum asymptotis conueniet: & lineae, quae ex ipsa abscissae intersectionem, & asymptotos interiiciuntur, aequales erunt."

30) On retrouve la construction qui suit à la p. 52 du Tome présent.

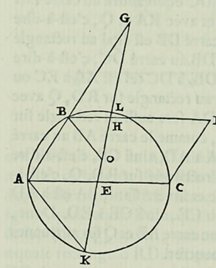
31) La démonstration qui va suivre ne diffère pas sensiblement de celle qu'on trouve, sous la date du 5 juin 1652, dans le dernier alinéa de la pièce XI. p. 49—53 du Tome présent. L'avant-

AC ad BG ita BG ad FC, & FC ad CD, hoc eſt, AB. Quod erat dem. Quod autem dictum eſt, etiam deſcriptâ hyperbole inveniri quomodo linea FDG ducenda ſit, hinc conſtabit: Factum enim ſit, ut EF, EG ſint æquales, & ſumatur GN æqualis DF. Itaque punctum N eſt ad hyperbolem quæ deſcribetur per D punctum circa aſymptotos FA, AG *. Sed idem punctum N eſt quoque ad circuli circumferentiam cujus centrum E radius ED: (Hoc enim facile intelligitur quia triangulus FEG eſt æquicruris, & NG æqualis DF) Itaque datum eſt punctum N ad interſectionem hyperboles & circumferentiæ dictæ. Sed & D datum eſt. Datur igitur poſitione linea FG ducenda per puncta N, D. Et compoſitio manifeſta eſt.

* 8. 2. *Conic.* [29])

ALITER [30]).

Circa diametrum AC majori datarum linearum æqualem circulus deſcribatur & ponatur AB minori datarum æqualis, & perſiciatur parallelogrammum AD: productâque AB, ducatur ex centro E recta EHG eâ ratione ut HD, HG ſint inter ſe æquales. Secet autem circumferentiam in L. Dico duabus AC, AB duas medias inventas eſſe BG, GL.



[Fig. 5.]

Producatur [31]) enim GE uſque ad circumferentiam in K, & jungatur AK, eique parallela ducatur BO. Similes itaque ſunt trianguli AEK, BHO; & quia AE æqualis EK, etiam BH, HO æquales erunt. Sed & HG, HD inter ſe æquales ſunt. Igitur tota OG æqualis BD, hoc eſt, diametro AC vel LK; & ablatâ communi LO, relinquentur æquales LG, OK. Eſt autem rectangulum KGL æquale rectangulo AGB. Ergo ut KG ad GA ita BG ad GL. Sed ut KG ad GA ita eſt OG ad GB & ita reliqua OK, hoc eſt, LG ad BA. Ergo ut OG, hoc eſt, AC ad GB ita BG ad GL & GL ad AB. Quod erat demonſtr. Hujus autem conſtructionis inventio eandem cum præcedenti originem habet [32]).

---

dernier alinéa de cette même pièce contient une autre démonstration et fait connaître l'origine de la construction.

32) Voir la note 9, p. 52 du Tome présent.

Autrement [33]).

Soient données AB et Q auxquelles il s'agiſſe de trouver deux moyennes proportionnelles, AB étant d'ailleurs plus grande que Q.

Prenons AF égale à la moitié de Q et, ayant prolongé AB des deux côtés, ſoit BR égale à cette droite même. Elevons à AB la perpendiculaire FC, et portons RC égale à RA; puis joignons BC et menons AE parallèle à cette droite. Enfin, ayant appliqué une règle au point C, mouvons la jusqu' à ce qu'elle ait la poſition CD, où elle fait CE égale à AD. Je dis qu'entre AB et Q les deux moyennes proportionnelles ſont CE et ED.

Joignons en effet CA. Alors, comme RA et RC ſont égales et que l'angle CFA eſt droit, RA ſera à AC comme AC au double de AF, c'eſt-à-dire à Q, et par conſéquent le carré AC ſera égal au rectangle ſur RA et Q. Mais le carré AC avec le carré AD et le double du rectangle DAF, c'eſt-à-dire le rectangle formé
12.2. Élém.[34]) par DA et Q, égale le carré DC. Donc le carré DC équivaudra au carré DA augmenté des rectangles conſtruits avec DA et Q et avec RA et Q, c'eſt-à-dire augmenté avec le rectangle ſur DR et Q. Mais le carré DB eſt égal au rectangle
6.2. Élém.[35]) RDA avec le carré AB. Donc, comme le carré DB au carré DC, c'eſt-à-dire comme le carré AB au carré AD, (car, comme DB à DC tel eſt AB à EC ou AD) ainſi le rectangle RDA avec le carré AB ſera au rectangle ſur RD, Q avec le carré AD. Et pour cette raiſon le rectangle RDA ſera auſſi au rectangle ſur
19.5. Élém.[36]) RD, Q comme le carré AB au carré AD. Mais, comme le carré AB au carré AD, ainſi AB eſt à ED en longueur: car, comme BA à AD, ainſi CE, c'eſt-à-dire la même AD, à ED. Donc le rectangle RDA eſt au rectangle ſur RD, Q, c'eſt-à-dire AD eſt à Q, comme AB à ED. Permutant donc et invertiſſant, BA eſt à AD comme ED à Q. Mais auſſi, comme BA à AD, ou CE, ainſi CE à ED. Donc, comme AB à CE ainſi CE à ED et ED à Q. Ainſi donc entre AB et Q les moyennes proportionnelles ſont CE, ED. Ce qu'il fallait démontrer.

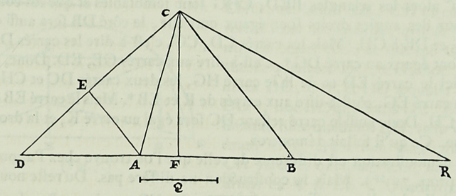
[33]) Comparez, aux pages 54—56 du Tome préſent, la pièce N° XII, datée du 16 et du 19 mars 1652. Elle contient dans une autre rédaction la construction et la démonstration qui vont suivre, et elle nous fait connaître l'analyse qui les a amenées.
[34]) Voir la note 15, p. 29 du Tome présent.
[35]) Voir la note 2, p. 46 du Tome présent.
[36]) Voir la note 26, p. 311 du Tome XI.

Aliter [33]).

Sint datæ AB & Q quibus duas medias proportionales invenire opus ſit; AB autem quam Q major.

Dimidiæ Q ſumatur æqualis AF, & producta AB utrimque, ſit ipſi æqualis BR. Erigatur autem ad AB perpendicularis FC, & ipſi RA æqualis ponatur RC: & jungatur BC, & huic parallela ducatur AE. Denique applicatâ regulâ ad punctum C, moveatur ea quouſque poſitionem habeat CD, faciens CE æqualem AD. Dico inter AB & Q duas medias eſſe CE, ED.

Jungatur enim CA. Igitur quia æquales ſunt RA, RC & angulus CFA rectus,



[Fig. 6.]

erit RA ad AC ut AC ad duplam AF, hoc eſt, Q: ac proinde quadratum AC æquale rectangulo ſub RA & Q. Quadratum autem AC cum quadrato AD & duplo rectangulo DAF, hoc eſt, ſub DA & Q contento, æquatur quadrato DC*. *12.2. Elem.[34])
Igitur quadratum DC æquabitur quadrato DA unà cum rectangulis ſub DA, Q, & ſub RA, Q, hoc eſt, unà cum rectangulo ſub DR & Q. Quadratum autem DB æquale rectangulo RDA & quadrato AB*. Igitur ut quadratum DB ad quadratum *6. 2. Elem.[35])
DC, hoc eſt, ut quadr. AB ad quadr. AD, (eſt enim ut DB ad DC ſic AB ad EC ſive AD) ita erit rectangulum RDA cum quadrato AB ad rectangulum ſub RD, Q, cum quadrato AD. Quamobrem & rectangulum RDA ad rectangulum ſub RD, Q, ſicut quadr. AB ad quadr. AD*. Eſt autem ut quadratum AB ad quadr. *19.5. Elem.[36])
AD, ita AB ad ED longitudine: nam ut BA ad AD ſic CE, hoc eſt, ipſa AD ad ED. Ergo rectangulum RDA ad rectangulum ſub RD, Q, hoc eſt, AD ad Q ſicut AB ad ED. Et permutando & invertendo, BA ad AD ut ED ad Q. Atqui ut BA ad AD, hoc eſt, CE ita CE ad ED. Ergo ut AB ad CE ita CE ad ED, & ED ad Q. Itaque inter AB & Q mediæ proportionales ſunt CE, ED. Quod erat oſtendendum.

Probl. IV.

Étant donné un carré dont l'un des côtés eſt prolongé, appliquer dans l'angle extérieur une droite de grandeur donnée qui paſſe par le ſommet oppoſé [37]).

Soit BA un carré dont le côté FA eſt prolongé. Soit donné auſſi la ligne K Et qu'il s'agiſſe de mener la droite BDC de telle façon, que la partie interceptée DC ſoit égale à la droite donnée K.

Suppoſons qu' aux carrés ſur K et EB ſoit égal le carré EG; ſur BG comme diamètre décrivons le demi-cercle BCG, coupant la droite FA prolongée en C, et menons BDC. Je dis que DC eſt égale à cette droite K. Joignons en effet CG, GD; et ſoit CH à angles droits ſur BG.

Puiſqu' alors les triangles BED, CHG ſont ſemblables et que les côtés BE, CH autour des angles droits ſont égaux entr'eux, le côté DB ſera auſſi égal au côté GC, et DE à GH. Mais les carrés CD, CG, c'eſt-à dire les carrés DC, CH
*47.1. *Élém.*[38]) et HG, ſont égaux au carré DG*, c'eſt-à-dire aux carrés GE, ED. Donc, retranchant d'ici le carré ED et de là le carré HG, les deux carrés DC et CH feront
* *Par conſtruct.* égaux au carré EG, c'eſt-à-dire aux carrés de K et EB*. Mais le carré EB eſt égal au carré CH. Donc auſſi le carré reſtant DC ſera égal au carré K, et la droite DC à K même. Ce qu'il fallait démontrer.

Cette démonſtration eſt différente de celle que l'on trouve chez Pappus Alex. livre 7. prop. 72 [39]). Mais la conſtruction ne diffère pas. Du reſte nous avons trouvé qu'elle s'applique auſſi au cas ſuivant.

Probl. V.

Soit donné un carré dont deux côtés adjacents ſont prolongés, appliquer dans l'angle intérieur une droite de grandeur donnée qui paſſe par le ſommet oppoſé. Il faut cependant que la droite donnée ne ſoit pas moindre que le double de la diagonale du carré [40]).

Soit donné le carré AB [Fig. 8], et ſoient prolongées les côtés AF, AE. Et ſoit donnée la droite K, pas moindre que le double de la diagonale AB. Et qu'il faille faire paſſer par le ſommet B une droite DC égale à K.

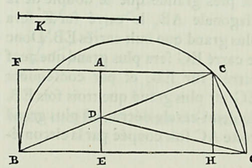
[37]) Consultez, sur l'historique du problème, la p. 106 du Tome présent.
[38]) „In rectangulis triangulis, quadratum quod à latere rectum angulum subtendente describitur, aequale est eis, quae à lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis." (Clavius, p. 147).
[39]) Voir la page 206 verso de l'ouvrage cité dans la note 3, p. 259 du T. II.

Probl. IV.

Quadrato dato & uno latere producto, aptare ſub angulo exteriori rectam magnitudine datam quæ ad angulum oppoſitum pertineat [37]).

Eſto quadratum BA cujus productum ſit latus FA. Data verò linea K. Et oporteat ducere rectam BDC, ita ut pars intercepta DC ſit datæ K æqualis.

Quadratis ex K & EB ſit æquale quadratum EG; & ſuper BG diametro deſcribatur ſemicirculus BCG ſecans rectam FA productam in C, & ducatur BDC. Dico DC æqualem eſſe ipſi K. Jungantur enim CG, GD; ſitque CH ipſi BG ad angulos rectos.



[Fig. 7.]

Quia igitur ſimiles ſunt trianguli BED, CHG, & latera BE, CH circa angulos rectos inter ſe æqualia, erit & latus DB æquale lateri GC, & DE ipſi GH. Sunt autem quadrata DC, CG, hoc eſt quadrata DC, CH, & HG æqualia quadrato
DG *, hoc eſt, quadratis GE, ED. Ergo *47.1. *Elem.*[38])
dempto hinc quadrato ED, inde verò quadrato HG; erunt duo quadrata DC & CH æqualia quadrato EG, hoc eſt qua-
dratis ex K & EB *. Quadratum autem * *Ex conſtruct.*
EB æquale eſt quadrato CH. Ergo & reliquum quadratum DC æquabitur K quadrato; & recta DC ipſi K. Quod erat oſtendendum.

Demonſtratio hæc ab ea diverſa eſt quæ apud Pappum Alex. legitur lib. 7. prop. 72 [39]). Conſtructio verò non differt. Cæterum eandem ad caſum quoque ſequentem pertinere invenimus.

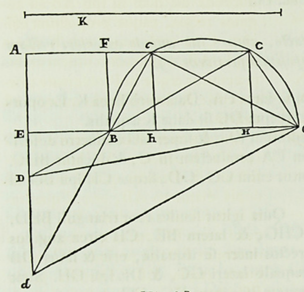
Probl. V.

Dato quadrato, & duobus contiguis lateribus productis, aptare ſub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per angulum oppoſitum tranſeat. Oportet autem non minorem eſſe datam quam ſit quadrati diameter dupla [40]).

Datum ſit quadratum AB [Fig. 8], productaque latere AF, AE. Data vero linea K, non minor duplâ AB diametro. Et oporteat per angulum B ponere rectam DC ipſi K æqualem.

[40]) Voir, pour l'historique du problème, la p. 107 du Tome présent.

Si K était égal au double de AB, la conſtruction ſerait évidente; alors, en effet, il faut mener par B la droite qui eſt à angles droits ſur AB, et celle là réſoudra le problème. Mais alors que K eſt plus grand que le double de AB, la conſtruction s'exprime par les mêmes mots que dans le problème précédent; et la démonſtration auſſi eſt la même.

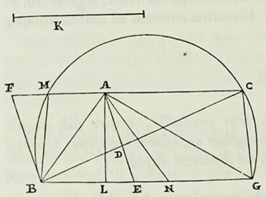


[Fig. 8.]

Or, que la circonférence BCG coupera la droite AF prolongée, cela eſt manifeſte par ceci. Puiſque K eſt plus grande que le double de la diagonale AB, le carré ſur K ſera plus grand que huit carrés EB. Donc le carré EG ſera plus grand que neuf carrés ſur EB; et par conſéquent EG eſt plus grand que trois fois EB. Donc la moitié de BG, c'eſt-à-dire le rayon du demi-cercle décrit, eſt plus grand que EB ou BF; il eſt donc néceſſaire que la droite AC ſoit coupée par la circonférence BCG.

Probl. VI.

Soit donné un loſange dont l'un des côtés ſoit prolongé, appliquer dans l'angle extérieur une droite de grandeur donnée qui paſſe par le ſommet oppoſé[41]).

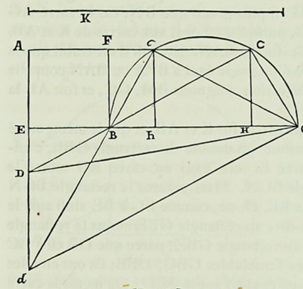


[Fig. 9.]

Soit donné le loſange AB, dont le côté FA eſt prolongé. Soit donnée auſſi la ligne K. Et qu'il s'agiſſe de mener la droite BDC, de telle façon que la partie interceptée DC ſoit égale à cette ligne K.

Menons la diagonale AB et prolongeons le côté BE; et ſoit le carré AG égal aux carrés de K et AB. Sur BG décrivons un arc de circonférence qui ſoit capable d'un angle égal à BFA. Elle coupera le côté FA prolongé, ainſi qu'il ſera prouvé. Puis, vers le point d'interſection C menons BC. Je dis que la partie DC interceptée de cette ligne eſt égale à la droite donnée K. Mais d'abord voici comment on démontre que la circonférence décrite coupe le côté FA prolongé. Menons AN de telle façon que l'angle BAN ſoit égal à l'angle BFA ou BEA. Alors le triangle

Si K æqualis fuerit duplæ AB, conſtructio manifeſta eſt; tunc enim per B ducenda eſt quæ ſit ipſi AB ad angulos rectos, eaque propoſitum efficiet. Cum verò major erit K quam dupla AB, conſtructio iiſdem verbis præcipitur atque in Problemate præcedenti: & demonſtratio quoque eſt eadem.



[Fig. 8.]

Quod autem circumferentia BCG ſecabit productam AF hinc manifeſtum eſt. Etenim quia K major eſt duplâ diametro AB, erit K quadratum majus octo quadratis EB. Itaque quadratum EG majus quam quadrata novem ex EB; ac proinde EG major quam tripla EB. Dimidia igitur BG, hoc eſt, radius deſcripti ſemicirculi major quam EB vel BF; unde neceſſe eſt rectam AC ſecari à circumferentia BCG.

Probl. VI.

Rhombo dato, & uno latere producto, aptare ſub angulo exteriori lineam magnitudine datam quæ ad oppoſitum angulum pertineat[41]).

Sit datus rhombus AB [Fig. 9], cujus productum latus FA. Data autem linea K. Et oporteat ducere rectam BDC, ita ut pars intercepta DC ſit ipſi K æqualis.

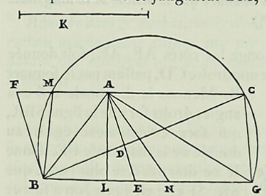
Ducatur diameter AB, & latus BE producatur; & quadratis ex K & AB ſit æquale quadratum AG. Et ſuper BG circumferentiæ portio deſcribatur quæ capiat angulum ipſi BFA æqualem. Secabit ea productum latus FA, ut modo oſtendetur. Itaque ad interſectionis punctum C ducatur BC. Dico hujus partem interceptam DC lineæ datæ K æqualem eſſe. Quod autem circumferentia deſcripta latus FA productum ſecabit, ſic primùm oſtenditur. Ducatur AN ita ut ſit angulus BAN angulo BFA vel BEA æqualis. Itaque triangulus BAN triangulo BEA ſimilis eſt, ac proinde iſoſceles quoque. Quare ſi ſuper BN circumferentia deſcribatur quæ capiat angulum BFA, ea continget latus FA in A puncto. Sed

[41]) Voir, pour l'historique du problème, les p. 107—108 du Tome présent. La rédaction du texte, qui va suivre, ne diffère que légèrement de celle de la pièce du 23 octobre 1653 (p. 247—248 du T. I), envoyée à van Schooten. Et cette dernière pièce est le résultat d'un remaniement de celle du 9 février 1652, que l'on trouve aux p. 26—31 du Tome présent et qui contient l'analyse, qui a amené la construction, dans sa forme primitive un peu différente de celle du texte. Voir, sur cette modification, la note 8, p. 28 du Tome présent.

BAN eſt ſemblable au triangle BEA, et par conſéquent iſocèle comme celui-ci. Pour cette raiſon, ſi ſur BN on décrit une circonférence capable de l'angle BFA, elle touchera le côté FA en A. Mais BG eſt plus grand que BN: car le carré AG eſt plus grand que le carré AN ou AB, puiſqu'il eſt égal aux carrés de K et AB. Donc AG tombera en dehors du triangle iſocèle BAN. Et ainſi il eſt établi que la circonférence décrite ſur BG et capable d'un angle égal à BFA ou BAN coupe la ligne FAC. Soit M l'autre point d'interſection, joignons BM, GC, et ſoit AL la perpendiculaire abaiſſée de A ſur BE.

Puis donc que le carré AG eſt égal aux carrés ſur K et AB, et que le même carré AG eſt égal aux carrés AB et BG diminué du double du rectangle GBL, c'eſt-à-dire moins le rectangle GBN; le carré K ſera égal au carré BG moins le rectangle GBN, c'eſt-à-dire au rectangle BGN. Mais, comme le rectangle BGN au rectangle BE, GN, ainſi BG eſt à BE. Donc, comme BG à BE ainſi auſſi le carré K au rectangle GN, BE, c'eſt-à-dire au rectangle GBE moins le rectangle NBE. Mais le rectangle CBD eſt égal au rectangle GBE, parce que GB eſt à BC comme DB à BE à cauſe des triangles ſemblables GBC, DBE; ils ont en effet l'angle en B commun, et l'angle BCG eſt égal à l'angle BED. De même le carré AB eſt égal au rectangle NBE, puiſque, à cauſe des triangles ſemblables, NB eſt à BA comme AB à BE. Donc GB ſera à BE comme le carré K au rectangle CBD moins le carré AB. Mais au rectangle CBD moins le carré AB équivaut le rectangle DA, AC; ce qui ſe prouve ainſi. En effet, puiſque le quadrilatère CGBM eſt dans un cercle, les angles CGB et BMC enſemble ſont égaux à deux angles droits. Mais de même les angles EDB, ADB. De ceux-ci EDB eſt égal à l'angle CGB en vertu de la ſimilitude des triangles GBC, DBE. Donc auſſi l'angle BMC ſera égal à l'angle ADB. Les triangles ABM, ADB ont donc les angles M et D égaux entr'eux. Mais auſſi les angles en A et le côté AB commun. Et ainſi les dits triangles ſont ſemblables et égaux. Par conſéquent AM égale AD et MB égale BD, et l'angle MBA égale ABD. Donc dans le triangle MBC l'angle B eſt diviſé en deux parties égales par la droite BA, et par conſéquent le rectangle MBC moins le carré BA eſt égal au rectangle MAC. Mais le rectangle CBD eſt égal au rectangle CBM; et le rectangle DAC égal au rectangle MAC. Donc le rectangle CBD moins le carré BA eſt égal au rectangle CAD, ainſi qu'il a été dit. Ainſi GB eſt à BE comme le carré K au rectangle DAC. Mais, comme GB à BE ainſi le rectangle GBE, c'eſt-à-dire le rectangle CBD, eſt au carré BE. Donc, comme le carré K au rectangle DAC ainſi le rectangle CBD au carré BE. Or, le rapport du rectangle CBD au carré BE eſt compoſé du rapport DB à BE, c'eſt-à-dire DC à CA, et du rapport CB à BE ou BF, c'eſt-à-dire CD à DA. Donc auſſi le carré K eſt au rectangle DAC dans le rapport compoſé du rapport DC à CA et DC à DA, c'eſt-à-dire dans le même rapport que celui du carré DC au rectangle DAC. Pour cette raiſon le carré K eſt égal au carré DC; et DC à K en longueur. Ce qu'il fallait démontrer.

BG major eſt quam BN: nam quadratum AG majus eſt quadrato AN vel AB, cum ſit æquale quadratis ex K & AB. Quare AG cadet extra triangulum iſoſcelem BAN. Itaque manifeſtum eſt circumferentiam ſuper BG deſcriptam capientemque angulum ipſi BFA vel BAN æqualem ſecare lineam FAC. Eſto alterum interſectionis punctum M & jungantur BM, GC & cadat in BE ex A perpendicularis AL.



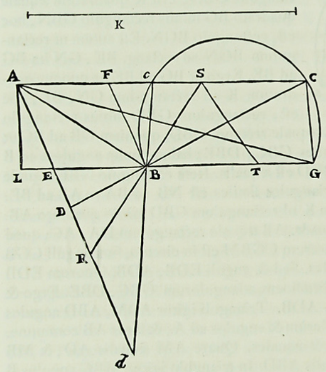
[Fig. 9.]

Quia igitur quadratum AG æquale eſt quadratis ex K & AB: atque idem quadratum AG æquale quadratis AB & BG minùs duplo rectangulo GBL, hoc eſt, minùs rectangulo GBN; erit K quadratum æquale quadrato BG minùs rectangulo GBN, hoc eſt, rectangulo BGN. Eſt autem ut rectangulum BGN ad rectang. BE, GN ita BG ad BE. Ergo ut BG ad BE ita quoque quadratum K ad rectangulum GN, BE, hoc eſt, rectangulum GBE minùs rectangulo NBE. Eſt autem rectangulo GBE æquale rectang. CBD, quoniam GB ad BC ut DB ad BE propter triangulos ſimiles GBC, DBE; habent enim angulum ad B communem, & angulus BCG ipſi BED eſt æqualis. Item rectangulo NBE æquale eſt quadratum AB quia propter triangulos ſimiles eſt NB ad BA ut AB ad BE. Ergo erit GB ad BE ut quadratum K ad rectangulum CBD minùs quadrato AB. Eſt autem rectangulo CBD minùs quadr. AB æquale rectangulum DA, AC; quod ſic oſtenditur. Etenim quia quadrilaterum CGBM eſt in circulo, ſunt anguli CGB & BMC ſimul duobus rectis æquales. Sed & anguli EDB, ADB. Quorum EDB æqualis angulo CGB propter ſimilitudinem triangulorum GBC, DBE. Ergo & angulus BMC æqualis erit angulo ADB. Trianguli igitur ABM, ABD angulos M & D inter ſe æquales habent. Verùm & angulos ad A, & latus AB commune. Itaque dicti trianguli ſimiles ſunt & æquales. Quare AM æqualis AD, & MB æqualis BD, & angulus MBA æqualis ABD. In triangulo igitur MBC angulus B in duo æqualia dividitur à recta BA, ideoque rectang. MBC minùs quadrato BA æquatur rectangulo MAC. Sed rectangulo CBM æquale eſt rectangulum CBD; & rectangulo MAC æquale rectang. DAC. Igitur rectang. CBD minùs quadrato BA æquale rectangulo CAD, uti dictum fuit. Eſt itaque GB ad BE ut quadr. K ad rectangulum DAC. Sicut autem GB ad BE ita eſt rectang. GBE, hoc eſt, rectang. CBD ad quadratum BE. Ergo ut quadratum K ad rectang. DAC ita rectang. CBD ad quadratum BE. Ratio autem rectanguli CBD ad quadr. BE compoſita eſt ex ratione DB ad BE, hoc eſt, DC ad CA, & ex ratione CB ad BE ſive BF, hoc eſt, CD ad DA. Ergo & quadr. K. ad rectang. DAC eam habet rationem quæ componitur ex ratione DC ad CA & DC ad DA, hoc eſt, eam quam quadratum DC ad rectang. DAC. Quamobrem quadr. K. quadrato DC æquale eſt: Et DC ipſi K longitudine. Quod erat demonſtrandum.

Probl. VII.

Soit donné un lofange dont deux côtés adjacents font prolongés, appliquer dans l'angle intérieur une droite de grandeur donnée qui paffe par le fommet oppofé. Il faut cependant que la droite donnée ne foit pas moindre que le double de la diagonale qui joint les deux autres fommets du lofange [42]).

Soit donné le lofange AB dont on prolonge les côtés AF, AE; foit donnée auffi la droite K égale à laquelle il faut placer une droite CD, paffant par le fommet B. Menons la diagonale AB et à angles droits fur elle la ligne SBR, qui fera évidemment égale au double de la diagonale FE. Donc K ne doit pas être plus petite que SR. Si elle eft égale, on a fait ce qui était propofé. Mais fuppofons que la droite donnée K foit plus grande que SR. Déjà dans la figure préfente la conftruction fera telle qu'il fut propofé; la même que dans le Problème précédent. Mais la démonftration eft un peu différente. Car d'abord on démontre autrement, que la circonférence décrite fur BG coupe AF prolongée. Soit AL perpendiculaire à EB et menons ST de façon que l'angle BST foit égal à l'angle EAF ou BFS. Alors le triangle BST eft femblable au triangle BFS; (car ils ont auffi les angles en B égaux:) et par conféquent le triangle BST eft de même ifocèle. On voit donc que la ligne AS eft égale à LB avec la moitié de BT. Pour cette raifon le double de AS fera égal au double de LB avec BT toute entière. Mais le double de AS eft le quadruple de AF ou EB. Donc le quadruple de EB eft égal au double de LB et BT. Et fi l'on prend une hauteur commune BT, le rectangle formé par le quadruple de EB et BT fera égal au double du rectangle LBT plus le carré BT. Et ajoutant de part et d'autre le carré BL, quatre fois le rectangle EBT avec le carré LB vaudra deux fois le rectangle LBT avec les carrés BT, BL, c'eft-à-dire avec le carré LT. Mais puifque en vertu des triangles femblables TB eft à BS comme BS à BF ou BE, le rectangle EBT fera égal au carré BS; et pris quatre fois au carré RS. Et ainfi le



[Fig. 10.]

Probl. VII.

Rhombo dato & duobus contiguis lateribus productis, aptare fub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per oppofitum angulum tranfeat. Oportet autem datam non minorem effe quam duplam diametri quæ reliquos duos rhombi angulos conjungit [42]).

Sit datus rhombus AB [Fig. 10] cujus producantur latera AF, AE; data autem fit recta K cui æqualem ponere oporteat CD, per angulum B tranfeuntem. Ducatur diameter AB, eique ad angulos rectos linea SBR, quæ quidem æqualis erit duplæ diametro FE. Igitur K non minor debet effe quam SR. Si vero æqualis, factum eft quod proponebatur. Sed ponatur K major data effe quam SR. Erit jam in fchemate hoc prout propofitum eft conftructio eadem, quæ in Problemate præcedenti. Demonftratio autem nonnihil diverfa. Etenim hoc primò aliter oftenditur quod circumferentia fuper BG defcripta fecat productam AF. Sit AL ad EB perpendicularis & ducatur ST ut fit angulus BST æqualis angulo EAF vel BFS. Eft itaque triangulus BST triangulo BFS fimilis; (nam & angulos ad B æquales habent:) ac proinde æquicruris etiam triangulus BST. Apparet igitur lineam AS æquari ipfi LB cum dimidia BT. Quare dupla AS æquabitur duplæ LB & toti BT. Sed dupla AS eft quadrupla AF vel EB. Ergo quadrupla EB æqualis duplæ LB & BT. Sumptâque communi altitudine BT, erit rectangulum fub quadrupla EB & BT contentum, æquale duplo rectangulo LBT & quadrato BT. Et addito utrimque quadrato BL, erit rectangulum EBT quater cum quadrato LB æquale rectangulo LBT bis cum quadratis BT, BL, hoc eft quadrato LT. Quia verò propter triangulos fimiles eft TB ad BS ut BS ad BF five BE, æquale erit rectang. EBT quadrato BS; & quater fumptum quadrato RS. Itaque quadr. SR cum quadrato LB æquale quadrato LT. Quadratum vero K (quod majus eft quam RS quadr.) una cum eodem quadrato LB æquale eft quadrato LG, uti ex conftructione manifeftum eft, quia fcilicet quadr. AG æquale pofitum fuit quadratis ex K & AB. Itaque majus eft quadr. LG quam LT, & LG major quam LT, & BG

[42]) Voir, pour l'historique du problème, les p. 109—110 du Tome présent. La construction et la démonstration qui suivent en premier lieu se trouvent sous une rédaction différente aux p. 248—250 du T. I dans la pièce du 23 octobre 1653, envoyée à van Schooten. Sous la date du 11 février 1652 on trouve, p. 32—37 du Tome présent, une rédaction plus primitive, précédée de l'analyse qui l'a produite.

carré SR avec le carré LB eſt égal au carré LT. Mais le carré K (qui eſt plus grand que le carré RS) pris avec le même carré LB eſt égal au carré LG, ainſi qu'il eſt clair par la conſtruction, parce que, en effet, le carré AG fut poſé égal aux carrés de K et AB. Donc le carré LG eſt plus grand que le carré LT, et LG plus grand que LT, et BG que BT. Pour cette raiſon la circonférence décrite ſur BG, capable de l'angle EAF, coupera la droite AS; car une circonférence ſemblable, ſi elle était décrite ſur BT, toucherait la même droite au point S, puiſque l'angle BST eſt égal à cet angle EAF et que le triangle BST eſt iſocèle.

Enſuite, que CD eſt égal à K ſe démontrera ainſi. Puiſque le carré AG eſt égal aux carrés ſur K et AB, et de même le carré AG égal aux carrés AB, BG avec le double du rectangle GBL, à cauſe de cela le carré K ſera égal au carré BG avec le double du rectangle GBL. Mais, comme BG à BE ainſi le carré BG avec le double du rectangle GBL eſt au rectangle GBE avec le double du rectangle EBL; en effet, ces parties ſont ſéparément dans le même rapport. Donc auſſi le carré K eſt au rectangle GBE avec le double du rectangle EBL comme BG à BE. Mais au rectangle GBE équivaut le rectangle CBD, parce que CB eſt à BG comme EB à BD, à cauſe des triangles ſemblables CBG, EBD; car ces triangles ont les angles en B égaux et l'angle BCG égal à l'angle BED. De même le carré AB eſt égal au double du rectangle EBL puiſque, en vertu des triangles ſemblables, comme SA, c'eſt-à-dire le double de BE, à AB ainſi AB eſt à BL. Donc, comme BG à BE ainſi ſera le carré K au rectangle CBD avec le carré AB. Mais à ces deux-ci équivaut le rectangle CAD, parce que dans le triangle CAD l'angle A eſt coupé en deux parties égales par la ligne AB. Donc, comme BG à BE ainſi le carré K eſt au rectangle CAD. Et de là nous concluons enſuite de la même façon que dans le cas précédent, que la ligne DC eſt égale à cette ligne K, en répétant[43]): Mais, comme GB à BE, etc.

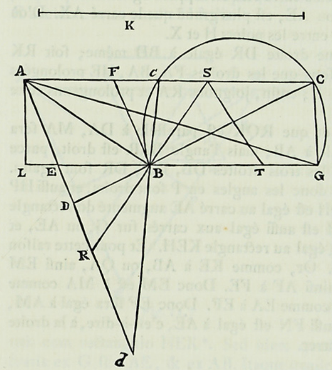
Autre ſolution des deux problèmes précédents[45]).

Soit donné le loſange ADBC [Fig. 11], dont le côté DB eſt prolongé. Et ſoit donnée la ligne G. Il s'agit de mener une droite ANF, de façon que la partie interceptée NF ſoit égale à la droite donnée G.

43) Voir la p. 202 à commencer par la ligne 9 d'en bas.
44) Voir la p. 203 à commencer par la ligne 8 d'en bas.
45) La pièce N° XIII, p. 57—59 du Tome préſent, contient ſous la date du 16 août 1652 les mêmes conſtructions et démonſtrations dans une rédaction peu différente. On les retrouve encore dans une lettre à van Schooten du 10 déc. 1653, p. 256—257 du T. I. Conſultez, ſur leur origine probable, la note 1, p. 57 du Tome préſent.

quam BT. Quamobrem circumferentia ſuper BG deſcripta capax anguli EAF ſecabit rectam AS; nam ſimilis circumferentia ſi ſuper BT deſcribatur ea continget ipſam in S puncto, quoniam angulus BST ipſi EAF æqualis eſt triangulusque BST æquicruris.

Porro quod CD ipſi K æqualis eſt, ſic demonſtrabitur. Quia quadratum AG æquale eſt quadratis ex K & AB: idemque quadratum AG æquale quadratis AB, BG cum duplo rectangulo GBL. Erit propterea quadratum K æquale quadrato BG cum duplo rectangulo GBL. Sicut autem BG ad BE ita eſt quadratum BG cum duplo rectangulo GBL ad rectangulum GBE cum duplo rectangulo EBL; ſingula enim ad ſingula eam habent rationem. Ergo & quadratum K ad rectangulum GBE cum duplo rectangulo EBL ut BG ad BE. Eſt autem rectangulo GBE æquale rectangulum CBD, quoniam CB ad BG ut EB ad BD, propter triangulos ſimiles CBG, EBD; habent enim angulos ad B æquales & angulum BCG angulo BED. Item duplo rectangulo EBL æquale eſt quadratum AB, quia propter triangulos ſimiles ut SA, hoc eſt, dupla BE ad AB ita AB ad BL.



[Fig. 10.]

Igitur ut BG ad BE ita erit quadratum K ad rectangulum CBD cum quadrato AB. Sed hiſce duobus æquale eſt rectangulum CAD; quoniam in triangulo CAD angulus A bifariam dividitur à linea AB. Ergo ut BG ad BE ita eſt quadr. K ad rectangulum CAD. Atque hinc porro eodem modo ut in caſu præcedenti concludemus lineam DC ipſi K æqualem eſſe, repetendo iſta[44]) : Sicut autem GB ad BE, &c.

Vtrumque præcedentium Aliter[45]).

Sit datus rhombus ADBC [Fig. 11] cujus productum latus DB. Et data ſit linea G. Oportet ducere rectam ANF, ut pars intercepta NF ſit datæ G æqualis.

Menons la diagonale AB, et ſoit le carré AH égal aux carrés de G et AB, et menons HE parallèle à cette diagonale BA. Plaçons encore AE égale à la droite G, et prolongeons la juſqu'en F. Je dis que NF eſt égale à cette même droite G.

Que l'on peut placer contre HE une droite AE égale à G, cela eſt évident par ceci. Le carré AH eſt plus grand que la ſomme des carrés AX et XH, parce que l'angle AXH eſt obtus. Mais le même carré AH eſt ſuppoſé égal aux carrés AB, ou HX, et G. Donc le carré G, ou AE, eſt plus grand que le carré AX. D'où il paraît que l'interſection E tombe entre les points H et X.

Prolongeons BD et plaçons une droite DR égale à BD même; ſoit RK parallèle à DA ou BC, et ſuppoſons que les droites FA, BA, HE prolongées la rencontrent aux points M, Q, K; enfin, joignons RA et prolongeons cette droite juſqu'en P.

Puiſque DR eſt égale à DB, et que RQK eſt parallèle à DA, MA ſera égale à AN et de même QA égale à AB; mais l'angle BAR eſt droit, parce qu'il eſt dans un demicercle, car les trois droites DB, DA, DR ſont égales. Or, BQ et HEK ſont parallèles; donc les angles en P ſont droits, et auſſi HP ſera égale à PK. Donc le carré AH eſt égal au carré AE augmenté du rectangle
* 12.2. *Élém.* 46) HEK *. Mais le même carré AH eſt auſſi égal aux carrés ſur G, ou AE, et ſur AB. Donc le carré AB ſera égal au rectangle KEH. Et pour cette raiſon KE eſt à AB comme AB à EH. Or, comme KE à AB, ou QA, ainſi EM eſt à MA: et comme AB à EH ainſi AF à FE. Donc EM eſt à MA comme AF à FE: Et par ſuite EA à AM comme EA à EF. Donc EF ſera égal à AM, et par conſéquent à AN. Donc auſſi FN eſt égal à AE, c'eſt-à-dire, à la droite donnée G. Ce qu'il fallait démontrer.

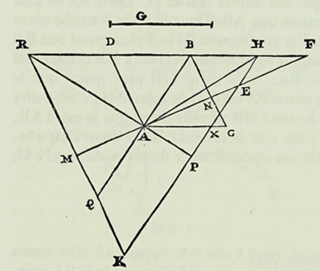
Soit de nouveau donné le loſange ADBC [Fig. 12], dont les côtés BD, BC ſont prolongés, et ſoit donnée la ligne G. Il s'agit de mener une droite NF paſſant par le ſommet A, et qui ſoit égale à cette ligne G.

Traçons la diagonale BA, et plaçons y RAL à angles droits. Si donc G eſt donnée moindre que RL, le problème ne ſaurait être conſtruit, ainſi qu'il fut déjà dit plus haut [47]). Et ſi elle eſt égale, on a déjà fait ce qui était demandé. Soit donc G plus grande que RL. Dans la figure ci-jointe la conſtruction ſera telle, qu'il fut propoſé, et la démonſtration la même que dans le cas précédent.

46) Voir la note 15, p. 29 du Tome préſent.

Ducatur diameter AB, & quadratis ex G & AB ſit æquale quadratum AH, & ducatur HE ipſi BA parallela. Et AE ipſi G ponatur æqualis, eademque producatur ad F. Dico NF ipſi G æqualem eſſe.

Quod autem ad HE poni poteſt AE ipſi G æqualis, hinc manifeſtum eſt. Etenim quadratum AH majus eſt quadratis AX & XH, quum ſit angulus AXH obtuſus. Sed idem quadratum AH æquale ponitur quadratis AB ſeu HX & G. Itaque quadratum G ſeu AE majus eſt quadrato AX. Unde apparet interſectionem E accidere inter puncta H & X.



[Fig. 11.]

Producatur BD & ponatur ipſi æqualis DR. & ſit RK parallela DA vel BC, eique occurrant productæ FA, BA, HE, in punctis M, Q, K: & jungatur RA, & producatur ad P.

Quoniam igitur DR æqualis eſt DB, & RQK parallela DA, erit & MA æqualis AN, & QA æqualis AB; angulus autem BAR rectus, quum ſit in ſemicirculo, nam tres hæ æquales ſunt DB, DA, DR. Parallelæ autem ſunt BQ, HEK, ergo & anguli ad P recti, & erit HP æqualis PK. Eſt itaque quadratum AH æquale quadrato AE unà cum rectangulo HEK*. Sed idem quadratum AH æquale eſt etiam qua- * 12.2. *Elem.* 46)
dratis ex G ſeu AE, & ex AB. Itaque quadr. AB æquale erit rectangulo KEH. Ac propterea KE ad AB ut AB ad EH. Verùm ut KE ad AB ſeu QA ita eſt EM ad MA: & ut AB ad EH ita AF ad FE. Igitur EM ad MA ut AF ad FE: Et proinde EA ad AM ut EA ad EF. Æqualis eſt igitur EF ipſi AM; quare & ipſi AN. Ideoque & F N ipſi AE, hoc eſt, datæ G. Quod erat demonſtrandum.

Sit denuo datus rhombus ADBC [Fig. 12], cujus producta latera BD, BC; & data ſit linea G. Oportet ducere rectam NF tranſeuntem per angulum A, quæque æqualis ſit ipſi G.

Ducatur diameter BA, eique ad angulos rectos RAL. Si igitur G minor detur quam RL, problema conſtrui nequit, uti ſupra quoque dictum fuit [47]). Si verò

47) Voir l'en-tête du problème, p. 205 du Tome préſent.

Mais ici doit être démontré d'une autre manière que l'on peut placer contre la ligne HE une ligne AE égale à G. Soit RS égale à RB, et joignons AS. Puiſque dans le triangle BAS on a mené la droite AR du ſommet au milieu de la baſe, les carrés BR et RA pris enſemble, c'eſt-à-dire le carré BA avec le double du carré AR, feront la moitié des carrés BA, AS *. Par ſuite le double du carré AB avec le quadruple du carré AR, c'eſt-à-dire avec le carré RL, ſera égal aux carrés BA, AS. De ſorte que, ayant retranché de part et d'autre le carré BA, le carré AS ſera égal aux carrés BA et RL, et par conſéquent moindre que le carré AH; car celui-ci eſt égal aux carrés AB et G. Donc AS eſt plus petite que AH. Mais elle eſt plus grande que AR. Donc le point S tombe entre R et H; car l'angle ARH eſt obtus. Par conſéquent RH eſt plus grand que RS ou RB. Et comme, en vertu des triangles ſemblables, RH eſt à HP comme RB à BA, HP ſera auſſi plus grand que BA; et le carré HP plus grand que le carré AB. Mais le carré HP avec le carré PA eſt égal au carré AH, c'eſt-à-dire aux carrés BA et G. Donc, comme le carré HP eſt plus grand que le carré AB, le carré PA ſera au contraire plus petit que le carré G. Il eſt donc clair que, ſi du point A comme centre on décrit une circonférence de rayon AE égal à G, elle coupera la ligne HE.

** d'après le livre 7. de Pappus [48]).*

Probl. VIII.

Trouver dans une conchoïde les limites de la courbure contraire [49]).

Nous connaiſſons la conchoïde qu'imagina Nicomède, par laquelle il diviſa l'angle en trois parties égales [50]) et trouva auſſi deux moyennes proportionnelles [51]). Soit CQD [Fig. 13] [52]) cette ligne, G ſon pôle, et AB la règle à l'aide de

---

[48]) Il s'agit de la „Propositio CXXII" du „Liber VII" des „Mathematicae Collectiones". On y lit (p. 234 verso de l'édition de Commandin): „Sit triangulum ABC, & ducatur quaedam recta linea AD, quae ipsam BC bifariam secet [in D]. Dico quadrata ex BA AC quadratorum ex AD DC dupla esse" (Hultsch, T. II, p. 856—857).

[49]) Voir, pour l'historique du problème, les p. 110—112 du Tome présent.

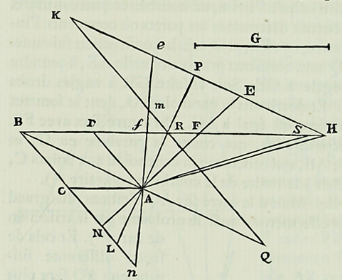
[50]) Voir la note 8, p. 86 du Tome présent.

[51]) Voir la Pièce N° II, p 13—15 du Tome présent.

[52]) Dans notre figure, reproduite par phototypie d'après l'original, la lettre D est renversée et la lettre O peu différente d'une C imparfaitement imprimée.

æqualis, jam factum eſt quod quærebatur. Sit igitur G major quam RL. Erit in ſchemate adjecto, ſicut propoſitum eſt, conſtructio & demonſtratio eadem quæ in caſu præcedenti.

Illud autem hic aliter eſt oſtendendum, quod ad lineam HE poni poteſt AE ipſi G æqualis. Sit RS æqualis RB, & jungatur AS. Quoniam igitur in triangulo BAS à vertice ad mediam baſin ducta eſt AR, erunt quadrata BR & RA ſimul ſumpta, hoc eſt, quadratum BA cum duplo quadrato AR, ſubdupla quadratorum BA, AS *. Itaque quadratum AB duplum cum quadruplo quadrato AR, hoc eſt, cum quadrato RL, æquabitur quadratis BA, AS. Quare ablato utrimque quadrato BA, erit quadratum AS æquale quadratis BA & RL, ac proinde minus quam quadr. AH; nam hoc æquale eſt quadratis AB & G. Eſt igitur AS minor quam AH. Sed major eſt quam AR. Ergo punctum S cadit inter R & H; angulus enim ARH obtuſus eſt. Major itaque eſt RH quam RS vel RB. Et quum propter triangulos ſimiles ſit RH ad HP ut RB ad BA, erit quoque HP major quam BA; & quadratum HP majus quadrato AB. At quadratum HP cum quadrato PA æquatur quadrato AH, hoc eſt, quadratis BA & G. Ergo cum quadratum HP ſit majus quadrato AB, erit invicem quadr. PA minus quam quadr. G. Patet igitur quod ſi centro A circumferentia deſcribatur radio AE ipſi G æquali, ea lineam HE ſecabit.



[Fig. 12.]

** per 122. lib. 7. Pappi [48]).*

Probl. VIII.

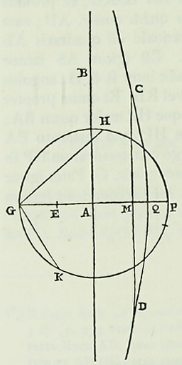
In Conchoide linea invenire confinia flexus contrarii [49]).

Conchoidem intelligimus quam Nicomedes excogitavit; quâ & angulum diviſit trifariam [50]), & duas medias invenit proportionales [51]). Eſto ea CQD, laquelle elle a été décrite, et que GQ coupe à angles droits. Telle eſt donc la propriété de cette ligne que, ſi l'on mène vers elle une droite quelconque du point G, la partie de cette droite compriſe entre la conchoïde et la droite AB eſt égale à AQ.

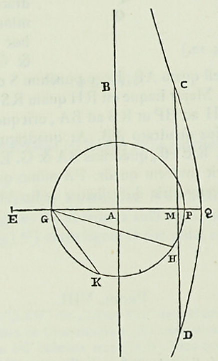
Or, puiſqu'il apparaît qu'une certaine partie de la conchoïde, comme CQD dans la figure préſente, eſt concave vers le pôle G; mais que la ligne reſtante, prolongée de part et d'autre par manière de dire juſqu'à l'infini, eſt courbée en ſens contraire, on demande de quelle façon on pourrait déterminer les points où commence l'inflexion contraire. Et nous avons trouvé, en effet, pour cela la conſtruction ſuivante.

Soit aux deux droites AG, AQ une troiſième proportionnelle AE, à prendre du côté de G. Et plaçons GF égale à GE. Soit enſuite GR à angles droits ſur GQ et égale au double de GA. Et décrivons la parabole RO, dont le ſommet eſt R, l'axe RG et dont le paramètre eſt égal à AG. Du centre F et avec FR comme rayon décrivons une circonférence, qui coupe la parabole en O; et menons la droite OC, parallèle à AB, qui rencontre la conchoïde aux points C, D. Ceux-ci ſeront les points cherchés à la limite de la courbure contraire [53]).

Cette conſtruction-là eſt générale. Mais ſi le carré ſur AQ n'eſt pas plus grand que le double du carré AG, nous effectuerons auſſi le problème par la triſection de l'arc [54]). Et cela de façon différente ſuivant que AQ ſera plus grande ou plus petite que AG. Car ſi elle eſt plus petite, on décrira une circonférence du centre A [Fig. 14] avec le rayon AG, et on y placera GK égale au double de GE, trouvée comme ci-devant. On prendra enſuite GM égale à la droite GH, qui ſous-tend le tiers de la circonférence KHG, et par M on mènera comme avant DC parallèle à AB. Mais ſi AQ eſt plus grande que AG [Fig. 15], les autres choſes ſeront faites de la même façon, mais il y aura cette différence, qu'il faut diviſer l'arc KP, qui avec l'arc GK complète une demi-circonférence, en trois parties égales, et déterminer une des parties PH, et prendre GM égale à la ſous-tendue GH.



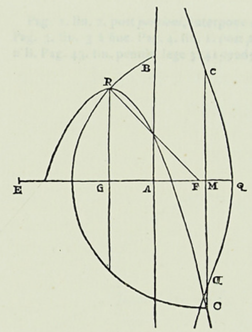
[Fig. 14.]



[Fig. 15.]

[Fig. 13] polus G, regula autem AB cujus ope deſcripta eſt; quam ſecet GQ ad angulos rectos. Hæc igitur lineæ proprietas eſt, ut ductâ ad ipſam rectâ qualibet ex G puncto, pars hujus inter conchoidem & rectam AB intercepta ſit ipſi AQ æqualis.

Quum autem appareat partem quandam Conchoidis ut in ſchemate ſubjecto CQD verſus polum G cavam eſſe, lineam verò reliquam in infinitum licet utrimque productam in diverſum curvari; quæſitum eſt qua ratione puncta ea determinari poſſent ubi contraria flexio initium capit. Et nos quidem ad hoc ſequentem invenimus conſtructionem.



[Fig. 13.]

Sit duabus AG, AQ tertia proportionalis AE, ſumenda verſus G. Et ponatur GF æqualis GE. Porro ſit GR ipſi GQ ad angulos rectos, & æqualis duplæ GA. Et deſcribatur parabole RO, cujus vertex ſit R axis RG, latus rectum ipſi AG æquale. Centro autem F radio FR circumferentia deſcribatur, quæ parabolen ſecet in O; & ducatur OC parallela AB occuratque conchoidi in punctis C, D. Hæc erunt puncta quæſita in confinio flexionis contrariæ [53]).

Iſta autem Univerſalis eſt conſtructio. At quando quadratum ex AQ non majus eſt quam duplum quadrati AG, arcus triſectione propoſitum quoque efficiemus [54]). Et diverſè quidem prout AQ major vel minor erit quam AG. Etenim ſi minor, deſcribenda eſt circumferentia centro A [Fig. 14] radio AG, in eaque ponendo GK æqualis duplæ GE, inventæ ut priùs. Et rectæ GH quæ ſubtendit trientem circumferentiæ KHG æqualis ſumenda GM, & per M ducenda ut ante DC ipſi AB parallela. Cum vero AQ major eſt quam AG [Fig. 15], cæteris ad eundem modum compoſitis, hæc tantum differentia erit quod arcum KP, qui unà cum arcu GK ſemicircumferentiam explet, in tria æqualia dividere oportet, & partium unam conſtituere PH, & ſubtenſæ GH æqualem ſumere GM.

[53]) Cette construction date du 25 septembre 1653, puisqu' on la retrouve avec l'analyse qui l'a amenée dans la pièce N° XX, p. 83—85 du Tome présent.

[54]) Les deux constructions qui suivent se retrouvent dans la même pièce du 25 septembre 1653 aux pages 85 et 86.

Enſuite le problème eſt plan [55]) lorſque AG égale AQ. Alors en effet il faut que GM ſoit égal au côté du triangle équilatère inſcrit dans le cercle. De même lorſque le carré AQ eſt double du carré AG: alors, en effet, GM eſt double de GA.

Mais il ſera encore plan dans d'autres cas innombrables, dont on pourra aiſément diſtinguer ceux, qui ſe réduiront à la triſection de l'angle.

FIN.

[55]) La considération des cas où le problème devient plan manque encore dans la pièce N° XX (p. 83—86 du Tome présent); mais on la trouve déjà dans une lettre à van Schooten du 23 octobre 1653 (p. 246 du T. I). De plus on y rencontre, comme aussi dans la pièce N° XX, mais biffée depuis, la remarque que, dans un certain sens, le problème serait toujours plan au cas où il se laisse exécuter à l'aide de la trisection de l'angle, puisqu' alors cette trisection pourrait s'accomplir à l'aide de la conchoïde même, qu'on suppose tracée. Sur cette remarque on peut consulter l'avant-dernier alinéa de la p. 7 du Tome présent, la note 10, p. 86 et la note 4, p. 232 du même Tome.

Porro planum eſt Problema [55]) cum AG æqualis AQ. Tunc enim GM fit æqualis lateri trigoni ordinati in circulo inſcripti. Item cum quadratum AQ duplum eſt quadrati AG: fit enim GM dupla ipſius GA.

Sed & aliis caſibus innumeris planum erit, quorum ii quidem facilè diſcerni poterunt, qui ad anguli triſectionem reducuntur.

ERRATA [56]).

Pag. 1. lin. 2. post *portioni*, interpone *semicirculo minori*. Item tribus hisce locis, Pag. 1. lin. 7. Pag. 3. lin. 3 à fine. Pag. 4. lin. 1. post *portio*, lege *semicirculo minor*. Pag. 30. in fig. mutetur P. n B. Pag. 43. lin. penult. lege 31415926533. Pag. 44. lin. 5. pro 3144. lege 3145.

FINIS.

[56]) De ces „errata" nous avons tenu compte dans le texte; voir la note 1, p. 120, qui se rapporte aux pages 121 et 123; la figure 16, p. 161 et la page 179, l. 23 et l. 27.