Théor. XV. Propos. XVIII.

Un ſegment de cercle plus petit qu'un demi-cercle eſt au triangle maximum inſcrit dans un rapport plus grand que quatre à trois; mais plus petit que celui de trois et un tiers fois le diamètre du ſegment reſtant au diamètre du cercle augmenté du triple de la droite qui, à partir du centre du cercle, atteint la baſe du ſegment[42]).

Soit un ſegment de cercle plus petit qu'un demi-cercle, dans lequel eſt inſcrit le triangle maximum ABC. Soit BD le diamètre du ſegment, et BF le diamètre du cercle dont le ſegment eſt découpé, E ſon centre. Je dois montrer d'abord que le rapport du ſegment ABC au triangle inſcrit eſt plus grand que quatre à trois. Soit G le centre de gravité du ſegment ABC, et coupons DF en H, de telle manière que HD ſoit le double du reſte HF.

Alors, parce que FB eſt le double de EB, et que DB eſt plus petit que le double de GB[43]), le rapport de FB à BD ſera plus grand que celui de EB à BG. Et par converſion des rapports le rapport de BF à FD ſera moindre que celui de BE à EG[44]). Et en permutant, BF à BE (lequel rapport eſt de deux à un) eſt moindre que FD à EG. Donc FD eſt plus grand que le double de EG. Mais les deux tiers de cette FD ſont HD. Donc HD eſt plus grand que les quatre tiers de EG. Mais, comme HD eſt à EG, ainſi le ſegment ABC eſt au triangle inſcrit; car c'eſt ce que nous avons démontré antérieurement dans les Théorèmes ſur la quadrature de l'Hyperbole, de l'Ellipſe et du Cercle[45]). Donc le rapport de la portion au triangle inſcrit ABC eſt plus grand que de quatre à trois.

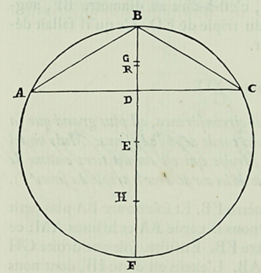
Mais nous allons démontrer maintenant que le ſegment eſt au triangle ABC dans un rapport moindre que celui de trois et un tiers fois DF au diamètre du cercle BF augmenté du triple de ED. Coupons le diamètre du ſegment en R, de telle façon que BR ſoit une fois et demie le reſte RD. Le point R tombe donc
* d'après ce qui précède[46]). entre G et D*, car nous avons ſuppoſé que G eſt le centre de gravité du ſegment ABC. Et puiſque le rapport du ſegment au triangle inſcrit eſt le même que celui de HD à EG, comme nous venons de le dire, mais que le rapport de HD à EG eſt plus petit que celui de HD à ER, pour cette raiſon le rapport du ſegment au

[42]) La première partie de cette proposition n'est qu'une répétition du „Theor. III. Prop. III", p. 123 du Tome présent; mais la seconde partie amène pour la limite supérieure une approximation plus forte, que celle fournie par le „Theor. IV. Prop. IV", p. 127; ce qui résulte de la circonstance que le rapport dans lequel le point R, dont on fait usage dans la démonstration, divise BD, est égal á la limite du rapport $\frac{BG}{GD}$ pour des arcs de plus en plus petits.

Theor. XV. Propos. XVIII.

Circuli portio ſemicirculo minor ad inſcriptum triangulum maximum majorem rationem habet quam ſeſquitertiam, minorem verò quam diameter portionis reliquæ tripla ſeſquitertia ad circuli diametrum cum tripla ea, quæ à centro circuli pertingit ad portionis baſin[42]).

Sit portio ſemicirculo minor, cui inſcriptum triangulum maximum ABC. Diameter autem portionis ſit BD; & diameter circuli à quo portio reſecta eſt, BF, centrum E. Oſtendendum eſt primò, portionis ABC ad triangulam inſcriptum majorem eſſe rationem quam ſeſquitertiam. Eſto portionis ABC centrum grav. punctum G, & ſecetur DF in H, ut ſit HD dupla reliquæ HF.



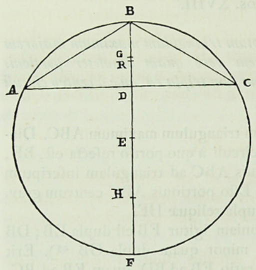
[Fig. 19.]

Quoniam igitur FB eſt dupla EB; DB autem minor quam dupla GB[43]). Erit major ratio FB ad BD, quam EB ad BG. Et per converſionem rationis, minor BF ad FD, quam BE ad EG[44]). Et permutando minor BF ad BE, (quæ proportio dupla eſt) quam FD ad EG. Igitur FD major eſt quam dupla EG. Ipſius autem FD duas tertias continet HD. Ergo HD major eſt quam ſeſquitertia EG. Sicut autem HD ad EG, ita eſt portio ABC ad inſcriptum ſibi triangulum: hoc enim antehac demonſtravimus in Theorematis de Hyperbolis Ellipſis & Circuli quadratura[45]). Itaque major eſt ratio portionis ad inſcriptum triangulum ABC quam ſeſquitertia.

Quod autem ad triangulum ABC portio minorem habeat rationem quam tripla ſeſquitertia ipſius DF ad diametrum circuli BF unà cum tripla ED, id nunc oſtendemus. Secetur diameter portionis in R, ut BR ſit ſeſquialtera reliquæ RD. Ergo cadit R punctum inter G & D* quoniam poſitum fuit G centrum gravitatis * per præced.[46])
in portione ABC. Quumque portionis ad inſcriptum triangulum eadem ſit ratio, quæ HD ad EG, ut modò dictum fuit; minor autem ſit ratio HD ad EG, quam HD ad ER: Erit propterea minor quoque portionis ad inſcriptum triangulum

[43]) Voir la première partie du théorème précédent.
[44]) Voir la note 25, p. 151.
[45]) Voir le „Theorema VII" de la p. 305 du Tome XI.
[46]) Voir la seconde partie du théorème précédent.

triangle inſcrit ſera auſſi plus petit que celui de HD à ER, ou de HD priſe cinq fois au quintuple de ER. Or, HD (puiſqu'il eſt égal aux deux tiers de DF) pris cinq fois ſera égal aux dix tiers, c'eſt-à-dire à trois et un tiers fois DF. Mais ER, qui ſe compoſe de ED et des deux cinquièmes de DB, ſi on le prend cinq fois, ſera égal au double de BD avec le quintuple de ED, c'eſt-à-dire, au double de toute la droite EB et en plus le triple de ED. Il paraît donc que le rapport du ſegment ABC au triangle inſcrit eſt moindre que celui de trois et un tiers fois DF au double de EB, c'eſt-à-dire au diamètre BF, augmenté du triple de ED. Ce qu'il fallait démontrer.



[Fig. 19.]

Théor. XVI. Propos. XIX.

Un arc quelconque, plus petit qu' une demi-circonférence, eſt plus grand que ſa corde augmentée du tiers de la différence dont la corde dépaſſe le ſinus. Mais un tel arc eſt plus petit que la corde priſe avec la droite qui eſt au dit tiers comme le quadruple de la corde joint au ſinus eſt au double de la corde avec le triple du ſinus[47]).

Soit un cercle dont le centre eſt D, le diamètre FB. Et ſoit un arc BA plus petit que la demi-circonférence, auquel nous menons la corde BA et le ſinus AM; ce dernier eſt donc à angles droits ſur le diamètre FB. Enſuite, ſoit une droite GH égale à cette AM, et GI égale à la corde AB. L'excès eſt donc HI, dont nous ajoutons le tiers IK à GI. Il faut montrer d'abord que l'arc AB eſt plus grand que toute la droite GK. Or, cela eſt manifeſte d'après le théorème 7[48]). Mais ſi l'on ajoute à GI la droite IO qui eſt à IK, le tiers de HI, dans le même rapport que le quadruple de GI avec GH au double de GI avec le triple de GH; je dis que toute la droite GO eſt plus grande que l'arc AB. Formons, en effet, ſur les lignes GH, HI, IO des triangles dont le ſommet commun eſt L, et dont la hauteur ſoit égale au rayon DB. Et joignons DA, et menons le diamètre CE du cercle qui diviſe la droite AB en deux parties égales en N, et l'arc AB en E. Et joignons AE, EB.

---

47) La première partie est identique avec le „Theor. V. Prop. V", p. 129 du Tome présent. D'après la seconde partie on a, en employant toujours les notations de la note 10, p. 136,

$$2\pi : 2n < a_{2n} + \tfrac{1}{3}\left(a_{2n} - \tfrac{1}{2}\, a_n\right) \frac{4a_{2n} + \frac{1}{2}a_n}{2a_{2n} + \frac{3}{2}a_n},$$

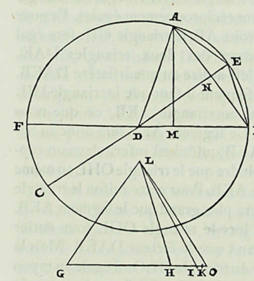
c'est-à-dire:

ratio quam HD ad ER, ſive quam HD quinquies ſumpta ad quintuplam ER. Atqui HD, (cum ſit æqualis duabus tertiis DF) quinquies ſumpta æquabitur decem tertiis, hoc eſt, triplæ ſeſquitertiæ DF. ER verò quæ continet ED & duas quintas ipſius DB, ſi quinquies ſumatur, æquabitur duplæ BD & quintuplæ ED; hoc eſt, duplæ totius EB atque inſuper triplæ ED. Igitur apparet portionem ABC ad inſcriptum triangulum minorem habere rationem quam triplam ſeſquitertiam DF ad duplam EB, hoc eſt, diametrum BF, unà cum tripla ED. Quod erat demonſtrandum.

Theor. XVI. Propos. XIX.

Arcus quilibet ſemicircumferentiâ minor, major eſt ſuâ ſubtenſâ ſimul & triente differentiæ quâ ſubtenſa ſinum excedit. Idem verò minor quam ſubtenſa ſimul cum ea quæ ad dictum trientem ſeſe habeat, ut quadrupla ſubtenſa juncta ſinui ad ſubtenſam duplam cum ſinu triplo[47]).

Eſto circulus cujus D centrum, diameter FB. Et ſit arcus BA ſemicircumferentiâ minor, cui ſubtenſa ducatur BA, ſinus autem AM: quæ nimirum diametro FB ſit ad angulos rectos. Porro ipſi AM ſit æqualis recta GH, & GI æqualis ſubtenſæ AB. Exceſſus igitur eſt HI; cujus triens IK ipſi GI adjiciatur. Oſtendendum eſt primò, arcum AB totâ GK majorem eſſe. Hoc autem ex Theoremate 7. eſt manifeſtum[48]). At cum ipſi GI additur IO quæ ad IK trientem ipſius HI rationem habeat, quam quadrupla GI unà cum GH ad duplam GI cum tripla GH. Dico totam GO arcu AB majorem eſſe. Conſtituantur enim ſuper lineis GH, HI, IO, triangula quorum communis vertex ſit L, altitudo autem æqualis radio



[Fig. 20.]

$$2\pi < p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n)\cdot\frac{4p_{2n} + p_n}{2p_{2n} + 3p_n} = p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n)\left\{1 + \frac{2(p_{2n} - p_n)}{2p_{2n} + 3p_n}\right\} =$$

$$= p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \tfrac{2}{15}\frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}}\left\{1 + \frac{3(p_{2n} - p_n)}{2p_{2n} + 3p_n}\right\} = p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n) +$$

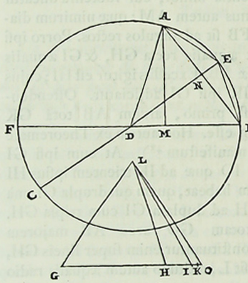
$$+ \tfrac{2}{15}\frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \tfrac{2}{25}\frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_{2n}^2}\left\{1 + \frac{3(p_{2n} - p_n)}{2p_{2n} + 3p_n}\right\} = p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \tfrac{2}{15}\frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} +$$

$$+ \tfrac{2}{25}\frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_{2n}^2} + \left[\frac{6(p_{2n} - p_n)^4}{25p_{2n}^2(2p_{2n} + 3p_n)}\right];$$ expression dont les *trois* premiers termes correspondent avec la suite (1) de la note 7, p. 94 du Tome présent.

48) Voir le dernier alinéa de la démonstration du „Theor. VII", p. 135 du Tome présent.

Puiſque OI eſt à IK comme le quadruple de GI avec GH eſt au double de GI avec le triple de GH, en prenant les triples des conſéquents, OI ſera à IH (qui eſt notamment le triple de IK) comme le quadruple de GI avec GH eſt au ſextuple de GI avec le nonuple de GH. Et, par compoſition, OH eſt à HI comme le décuple des deux droites IG, GH eſt au ſextuple de IG avec le nonuple de GH; ou bien, prenant les tiers, comme les dix tiers de la ſomme des deux droites GI, GH eſt au double de GI avec le triple de GH. Mais le rapport de la ligne GI à GH, c'eſt-à-dire, de BA à AM, eſt le même que celui de BD à DN, à cauſe des triangles ſemblables BAM, BDN. Donc auſſi OH eſt à HI, comme $\frac{10}{3}$ de la ſomme des deux droites BD, DN eſt au double de BD avec le triple de DN, c'eſt-à-dire, comme $\frac{10}{3}$ NC eſt au diamètre EC avec le triple de DN. Mais plus petit que ce rapport eſt le rapport du ſegment AEB au triangle AEB*. Donc le rapport du dit ſegment au dit triangle eſt auſſi moindre que celui de OH à HI, c'eſt-à-dire, que celui du triangle OHL au triangle IHL. Mais le triangle IHL eſt égal au triangle AEB. C'eſt ce que l'on démontre de la manière ſuivante. Le triangle GHL eſt égal au triangle DAB, parce que leurs baſes et leurs hauteurs ſont réciproquement égales. Et pour une raiſon ſemblable, puiſque GI eſt égal à la droite AB, le triangle GIL ſera égal à la ſomme des deux triangles DAE, DBE, c'eſt-à-dire au quadrilatère DAEB. Par conſéquent il faut que le triangle HIL ſoit égal au triangle AEB, ce que nous diſions. Le ſegment AEB ſera donc au triangle AEB qui lui eſt inſcrit dans un rapport moindre que le triangle OHL au même triangle AEB. Pour cette raiſon le triangle OHL ſera plus grand que le ſegment AEB. Et dès lors le triangle OGL tout entier plus grand que le ſecteur DAEB. Mais la hauteur du triangle GLO eſt égale au rayon DB. Donc la baſe GO ſera plus grande que l'arc AB. Ce qu'il fallait démontrer.

* d'après ce qui précède.



[Fig. 20.]

Or, il réſulte évidemment de cela que de la circonférence toute entière on peut dire que, *ſi l'on inſcrit dans le cercle deux polygones équilatéraux dont l'un a un nombre deux fois plus grand de côtés que l'autre, et que ſi l'on ajoute le tiers de la différence des périmètres au périmètre du polygone le plus grand, la droite ainſi compoſée ſera plus petite que la circonférence du cercle. Mais ſi au même plus grand périmètre on ajoute une ligne qui eſt au dit tiers de la différence comme le quadruple du plus grand périmètre augmenté du plus petit périmètre eſt au double du plus grand avec le triple du plus petit, la droite ainſi compoſée dépaſſera la circonférence du cercle* [49]).

DB. Et jungatur DA, ducaturque diameter circuli CE quæ rectam AB bifariam dividat in N, arcum verò AB in E. Et jungantur AE, EB.

Quoniam igitur OI eſt ad IK ut quadrupla GI unà cum GH ad duplam GI cum tripla GH; ſumptis conſequentium triplis erit OI ad IH (hæc enim tripla eſt IK,) ut quadrupla GI unà cum GH ad ſexcuplam GI cum noncupla GH. Et componendo, OH ad HI, ut decupla utriuſque IG, GH ad ſexcuplam IG cum noncupla GH: vel ſumptis horum trientibus ut decem tertiæ duarum ſimul GI, GH ad duplam GI cum tripla GH. Eſt autem eadem ratio linearum GI ad GH, hoc eſt, BA ad AM, quæ BD ad DN, propter ſimiles triangulos BAM, BDN. Ergo etiam OH ad HI, ut $\frac{10}{3}$ utriuſque ſimul BD, DN ad duplam BD cum tripla DN; hoc eſt, ut $\frac{10}{3}$ NC ad diametrum EC cum tripla DN. Hac autem ratione minor eſt ratio portionis AEB ad AEB triangulum *. Ergo dictae portionis ad dictum triang. minor quoque ratio quam OH ad HI, hoc eſt, quam trianguli OHL ad triangulum IHL. Triangulum autem IHL æquale eſt triangulo AEB. Quod ſic oſtenditur. Triangulum enim GHL æquale eſt triangulo DAB, quoniam baſes & altitudines reciprocè æquales habent. Similique ratione quoniam GI æqualis eſt rectæ AB, erit triangulum GIL æquale duobus ſimul triangulis DAE, DBE, hoc eſt, quadrilatero DAEB. Itaque triangulum HIL triangulo AEB æquari neceſſe eſt, quod dicebamus. Habebit itaque portio AEB ad triangulum ſibi inſcriptum AEB minorem quoque rationem quam triangulum OHL ad idem triangulum AEB. Quamobrem triangulum OHL portione AEB majus erit. Et totum proinde triangulum OGL majus ſectore DAEB. Altitudo autem trianguli GLO æqualis eſt radio DB. Ergo baſis GO major erit arcu AB. Quod erat oſtendendum.

* per praeced.

Ex his autem manifeſtum eſt de tota quoque circumferentia pronunciari poſſe, quod, *Si circulo inſcribantur polygona duo æquilatera, quorum alterum alterius ſit duplo laterum numero, & differentiæ perimetrorum triens perimetro polygoni majoris adjungatur, compoſita ex his circuli circumferentiâ minor erit. Eidem verò majori perimetro ſi linea addatur quæ ad dictum differentiæ trientem ſeſe habeat, ſicut quadrupla perimetri majoris juncta perimetro minori, ad duplam majoris cum tripla minoris, compoſita circumferentiam circuli excedet* [49]).

---

[49]) Voir la ſeconde formule de la note 47.

Problème IV. Propos. XX.

Trouver le rapport de la circonférence au diamètre ; et au moyen des cordes données inſcrites dans un cercle donné trouver la longueur des arcs auxquels elles ſont ſous-tendues.

Soit un cercle de centre D, dont le diamètre eſt CB, et ſoit l'arc BA un ſextant de la circonférence, dont nous menons la corde AB, ainſi que le ſinus AM. Si nous ſuppoſons donc que le demi-diamètre DB eſt de 100000 parties, la corde BA en contiendra le même nombre. Mais AM ſe compoſera de 86603 parties, et pas une de moins (ce qui veut dire que ſi l'on enlevait une partie ou une unité des 86603 on aurait moins que le dû) [50]), puiſqu' elle eſt la moitié du côté du triangle équilateral inſcrit dans le cercle.

De là l'excès de AB ſur AM devient 13397, moindre que le vrai. Le tiers en eſt $4465\frac{2}{3}$, ce qui ajouté à AB 100000, donne $104465\frac{2}{3}$ parties, ce qui eſt moins que l'arc AB. Et ceci eſt une première limite inférieure; dans la ſuite nous en trouverons une autre, plus rapprochée que celle-là de la vraie valeur. Mais d'abord nous devons chercher auſſi une limite ſupérieure, conformément au theorème précédent.

Il y a donc trois nombres auxquels il s'agit de trouver une quatrième proportionnelle. Le premier eſt égal au double des parties de AB et au triple de AM; il ſera donc 459807, moindre que le vrai, (car on doit auſſi prendre ſoin que ce nombre ſoit moindre ici; et de même avec les autres de la manière que nous l'indiquerons); le ſecond eſt égal au quadruple de AB et au ſimple AM, ſoit 486603, plus grand que le vrai. Et le troiſième eſt le tiers de l'excès de AB ſur AM, 4466, plus grand que le vrai. La quatrième proportionelle ſera donc 4727, plus grande que le vrai, ce qui, ajouté à AB ou 100000 donne 104727, plus grand que le nombre de parties que contient l'arc AB, ſextant de la périphérie *. Nous avons donc déjà trouvé la longueur de l'arc AB d'après une limite inférieure et une ſupérieure, dont cependant la dernière eſt de beaucoup la plus rapprochée de la vraie valeur, car le nombre 104719 eſt le plus voiſin du vrai.

* d'après ce qui précède.

Mais au moyen de ces deux là nous obtiendrons une autre limite inférieure plus exacte que la première, en faiſant uſage du précepte ſuivant, qui réſulte d'un examen plus précis du centre de gravité [51]).

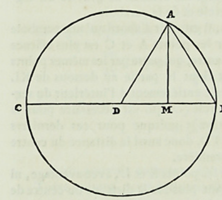
[50]) La phraſe entre parenthèſes à été ajoutée par Huygens en marge de l'exemplaire que nous poſsédons.

[51]) Les manuſcrits et les lettres ne donnent aucun renſeignement déciſif ſur la manière dont la

Problema IV. Propos. XX.

Circumferentiæ ad diametrum rationem inveſtigare; & ex datis inſcriptis in dato circulo invenire longitudinem arcuum quibus illae ſubtenduntur.

Eſto circulus centro D, cujus diameter CB, & ſit arcus BA ſextans circumferentiæ, cui ſubtenſa ducatur AB, itemque ſinus AM. Poſitâ igitur DB ſemidiametro partium 100000, totidem quoque erit ſubtenſa BA. AM verò partium 86603 non unâ minùs, (hoc eſt, ſi una pars ſive unitas auferatur ab 86603 fiet minor debito) [50]), quippe ſemiſſis lateris trianguli æquilateri circulo inſcripti.



[Fig. 21.]

Hinc exceſſus AB ſupra AM ſit 13397 vero minor. Cujus triens $4465\frac{2}{3}$ additus ipſi AB 100000, fiunt partes $104465\frac{2}{3}$ minores arcu AB. Et hic primus eſt minor terminus, quo poſtea alium vero propiorem inveniemus. Priùs autem major quoque terminus ſecundùm Theorema præcedens inquirendus eſt.

Tres nimirum ſunt numeri quibus quartum proportionalem invenire oportet. Primus eſt partium duplæ AB & triplæ AM qui erit 459807, vero minor, (nam hoc quoque obſervandum ut minor ſit, idemque in cæteris prout dicetur) ſecundus quadruplæ AB & ſimplæ AM qui 486603 vero maj. Et tertius triens exceſſus AB ſupra AM, 4466 vero major. Itaque quartus proportionalis erit 4727 vero maj. quo addito ad AB 100000 ſit 104727, major numero partium, quas continet arcus AB, peripheriæ ſextans *. Jam igitur invenimus longitudinem arcus AB ſecundùm minorem majoremque terminum, quorum hic quidem longè propior vero eſt, cum vero proximus ſit 104719.

* per præced.

Sed ex utroque iſtorum alius minor terminus habebitur priore accuratior ſi utamur præcepto ſequenti, quod à diligentiori centrorum gravitatis inſpectione dependet [51]).

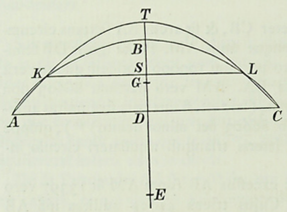
règle qui va ſuivre a été obtenue. Nous ſavons ſeulement par la Lettre N°. 185 du 1[er] avril 1654 (p. 279 du T. I) que ſa démonſtration dépendait, comme celle de la ſeconde partie du Théorème XVI, de l'emploi d'une parabole.

Il était donc à ſuppoſer que la règle en queſtion s'obtiendrait ſuivant la voie indiquée par les Théorèmes XIV et XV, en remplaçant toutefois la parabole HBK de la figure 18 par une autre

Ajoutez les quatre tiers de la différence des limites trouvées au double de la corde et au triple du sinus, et que dans le même rapport dans lequel se trouve la droite ainsi composée à trois et un tiers, ou $\frac{10}{3}$ fois la somme du sinus et de la corde, se trouve aussi l'excès de la corde sur le sinus à une certaine autre droite; celle-ci ajoutée au sinus constituera une droite plus petite que l'arc [52]).

---

dont le centre de gravité se trouverait nécessairement *au dessus* de celui du segmentde cercle.



Or, la parabole qui, mieux qu'aucune autre, peut servir à ce but est celle ATC tracée dans la figure ci-jointe, où $DS = \frac{2}{3}$ TD. Elle permet de conclure qu'on a $DG < DS$, où G et S représentent les centres de gravité du segment de cercle et de la parabole.

En effet, il est clair d'abord qu'une parabole passant par les points A et C est plus efficace que toute autre, qui passe par les mêmes points K et L et dont la partie au dessous de KL se trouverait entièrement à l'intérieur du segment de cercle (ce qui est nécessaire pour la démonstration); puisque pour ces dernières paraboles TD, donc aussi la distance du centre de gravité à la base AC, sera plus grande que pour la première.

Ensuite on voit aisément qu'on ne peut pas prendre les points K et L, avec avantage, ni plus bas, ni plus haut que dans la figure. En les prenant plus bas la distance du centre de gravité de la parabole à la base s'agrandit avec TD. En les prenant plus haut il est vrai que cette distance s'amoindrit; mais alors le centre de gravité de la parabole se trouve au dessous de la droite KL et on n'est plus sûr qu'il est encore au dessus du centre de gravité G du segment de cercle.

Il s'agit donc de calculer la limite inférieure pour la longueur de l'arc, et ensuite pour 2π, à laquelle on est conduit en employant la parabole de la figure. Nous avons trouvé ainsi la formule:

$$2\pi > p_n + \frac{10(p_{2n}^2 - p_n^2)}{6p_{2n} + 9p_n + \frac{27(p_{2n} - p_n)^2}{6p_{2n} + 9p_n}},$$

pour la déduction de laquelle nous renvoyons à un article de notre collaborateur M. F. Schuh à paraître dans les Archives Néerlandaises sous le titre: „Sur quelques formules aproximatives de la circonférence du cercle et sur la Cyclométrie de Huygens."

Or, en comparant cette limite avec celle qui suit de la règle de Huygens (voir la note 52), on s'aperçoit qu'elle est moins rapprochée; mais puisqu' elle est la meilleure de cette forme qu'on peut obtenir par le procédé que nous avons décrit, il faut que Huygens ait suivi une autre voie; si, du moins, il n'y pas question d'une faute de calcul.

Nous aurons d'ailleurs l'occasion de revenir sur ces approximations à propos d'une pièce de 1668 composée par Huygens pendant sa polémique avec Gregory sur la quadrature du cercle. Dans cette pièce, qu'on trouve aux pages 61—64 des „Adversaria olim D", Huygens arrive par une méthode différente à une formule, qui conduit à l'inégalité:

$$2\pi > p_n + \frac{10(p_{2n}^2 - p_n^2)}{6p_{2n} + 9p_n + \frac{3(p_{2n} - p_n)^2}{5p_{2n} + 5p_n}}.$$

Inventorum terminorum differentia sesquitertia jungatur duplæ subtensae & sinui triplo, & quam rationem habet ex his composita ad triplam sesquitertiam seu $\frac{10}{3}$ utriusque simul, sinus, subtensæque, eandem habeat subtensæ supra sinum excessus ad aliam quandam; Hæc ad sinum addita rectam constituet arcu minorem [52]).

---

c'est-à-dire, qui donne une limite inférieure plus rapprochée que les autres; puisqu' on a:

$$\frac{3}{5p_{2n} + 5p^n} = \frac{6}{10p_{2n} + 10p_n} < \frac{8}{6p_{2n} + 9p_n} < \frac{27}{6p_{2n} + 9p_n}.$$

[52]) On trouve pour la différence des limites indiquées dans le Théorème XVI l'expression:

$$\tfrac{1}{3}(a_{2n} - \tfrac{1}{2}a_n) . \frac{2a_{2n} - a_n}{2a_{2n} + \frac{3}{2}a_n}.$$

La règle en question conduit donc à l'inégalité:

$$\frac{2\pi}{2n} > \tfrac{1}{2}a_n + \frac{\frac{10}{3}(a_{2n}^2 - \frac{1}{4}a_n^2)}{\frac{4}{9}(a_{2n} - \frac{1}{2}a_n)\frac{2a_{2n} - a_n}{2a_{2n} + \frac{3}{2}a_n} + 2a_{2n} + \frac{3}{2}a_n};$$

d'où l'on peut déduire:

$$2\pi > p_n + \frac{10(p_{2n}^2 - p_n^2)}{6p_{2n} + 9p_n + \frac{8(p_{2n} - p_n)^2}{6p_{2n} + 9p_n}}.$$

Pour pouvoir comparer cette limite inférieure avec la suite (1) de la note 7, p. 94 du Tome présent, nous écrivons successivement:

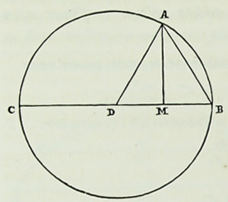
$$\begin{aligned}
2\pi &> p_{2n} - (p_{2n} - p_n) + \frac{60p_{2n}^2 + 150p_{2n}p_n + 90p_n^2}{44p_{2n}^2 + 92p_{2n}p_n + 89p_n^2}(p_{2n} - p_n) = p_{2n} + \\
&+ \frac{16p_{2n}^2 + 58p_{2n}p_n + p_n^2}{44p_{2n}^2 + 92p_{2n}p_n + 89p_n^2}(p_{2n} - p_n) = p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n)\Big[1 + \\
&+ \frac{(4p_{2n} + 86p_n)(p_{2n} - p_n)}{44p_{2n}^2 + 92p_{2n}p_n + 89p_n^2}\Big] = p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \tfrac{2}{15}\frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} \times \\
&\times \frac{10p_{2n}^2 + 215p_{2n}p_n}{44p_{2n}^2 + 92p_{2n}p_n + 89p_n^2} = p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \tfrac{2}{15}\frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}}\Big[1 + \\
&+ \frac{(-34p_{2n} + 89p_n)(p_{2n} - p_n)}{44p_{2n}^2 + 92p_{2n}p_n + 89p_n^2}\Big] = p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \tfrac{2}{15}\frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \\
&+ \tfrac{22}{675}\frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_{2n}^2} + \tfrac{22}{675}\frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_{2n}^2}\Big[-1 + \tfrac{45}{11}\frac{(-34p_{2n} + 89p_n)p_{2n}}{44p_{2n}^2 + 92p_np_{2n} + 89p_n^2}\Big] = p_{2n} + \\
&+ \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \tfrac{2}{15}\frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \tfrac{22}{675}\frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_{2n}^2} - \Big[\tfrac{2}{675}\frac{(2014p_{2n} - 979p_n)(p_{2n} - p_n)^4}{(44p_{2n}^2 + 92p_{2n}p^n + 89p_n^2)p_{2n}^2}\Big]
\end{aligned}$$

Ajoutons que la limite, mentionnée dans la note précédente, comme empruntée à la pièce. de 1668, amène l'inégalité:

$$\begin{aligned}
2\pi > p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \tfrac{2}{15}\frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \tfrac{4}{75}\frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_{2n}^2} + \\
+ \Big[\tfrac{4}{75}\frac{(-p_{2n} + 16p_n)(p_{2n} - p_n)^4}{(11p_{2n}^2 + 23p_np_{2n} + 16p_n^2)p_{2n}^2}\Big].
\end{aligned}$$

Des deux inégalités les trois premiers termes s'accordent avec ceux de la suite en question; mais le quatrième terme de la seconde se rapproche de beaucoup plus du quatrième terme de la suite, tout en y restant inférieur comme il fallait.

La limité inférieure était $104465\frac{2}{3}$; la ſupérieure 104727; leur différence eſt $261\frac{1}{3}$. Nous devons de nouveau trouver une quatrième proportionnelle à trois nombres. Le premier eſt le double des parties de AB augmenté du triple de AM et des quatre tiers de la différence des limites; on trouve 460158, plus grand que le vrai. Le ſecond eſt les $\frac{10}{3}$ des deux AB et AM enſemble, 622008, plus petit que le vrai. Enfin le troiſième eſt l'excès de AB ſur AM, 13397, plus petit que le vrai. La quatrième proportionnelle à ces nombres eſt 18109, plus petite que le vrai. Si donc nous ajoutons ceci au nombre de parties de AM, $86602\frac{1}{2}$, moindre que le vrai, il vient $104711\frac{1}{2}$, moindre que l'arc AB. Ainſi donc le ſextuple de ces parties, 628269, ſera plus petit que la circonférence toute entière. Mais parce que 104727 de ces parties ont été trouvées plus grandes que l'arc AB, leur ſextuple 628362 ſera plus grand que la circonférence. De ſorte que le rapport de la circonférence au diamètre eſt plus petit que celui de 628362, et plus grand que celui de 628269 à 200000. Ou bien plus petit que 314181 et plus grand que 314135 à 100000. D'où réſulte que ce rapport eſt certainement plus petit que $3\frac{1}{7}$ et plus grand que $3\frac{10}{71}$. Et par là auſſi eſt réfutée l'erreur de Longomontanus [53]), qui écrivit que la périphérie eſt plus grande que 314182 [54]) parties, dont le rayon contient 100000.



[Fig. 21.]

Suppoſons maintenant que l'arc AB ſoit $\frac{1}{8}$ de la circonférence; alors AM, moitié du côté du carré inſcrit dans le cercle, ſera de 7071068 parties, dont le rayon DB en contient 10000000, et pas une de moins. Tandis que AB, côté de l'octogone, eſt de 7653668 parties et pas une de plus. Au moyen de ces données on trouvera, de la même façon que ci-devant, comme première limite inférieure de la longueur de l'arc AB 7847868. Puis comme limite ſupérieure 7854066. Et de ces deux là de nouveau une limite inférieure plus préciſe 7853885. D'où il réſulte que le rapport de la périphérie au diamètre eſt moindre que $31416\frac{1}{3}$ et plus grand que 31415 ſur 10000.

Et comme la limite ſupérieure 7854066 s'écarte moins de la vraie longueur de l'arc que 85 parties (l'arc AB, en effet, d'après ce que nous avons prouvé plus haut [55]), eſt plus grand que 7853981), et que 85 parties font moins que deux ſecondes, c'eſt-à-dire que $\frac{2}{1296000}$ de la circonférence, car toute la circonférence a plus de 60000000 de ces parties; il eſt donc clair que, ſi d'un triangle rectangle nous cherchons les angles au moyen des côtés donnés, de la manière dont nous avons cherché cette limite ſupérieure un peu avant, jamais nous ne nous trompe-

[53]) Voir, sur Longomontanus et son ouvrage de 1644 sur la quadrature du cercle, les notes 4 et 5,

Minor terminus erat $104465\frac{2}{3}$. Major 104727. differentia horum eſt $261\frac{1}{3}$. Eſtque rurſus tribus numeris inveniendus quartus proportionalis. Primus eſt partium duplæ AB & triplæ AM & ſeſquitertiæ terminorum differentiæ, 460158 vero major. Secundus $\frac{10}{3}$ utriuſque ſimul AB, AM, 622008 vero minor. Tertius denique exceſſus AB ſupra AM, 13397 vero min. Quibus quartus proportionalis eſt 18109 vero min. Hic igitur additus numero partium AM $86602\frac{1}{2}$ vero min. fiunt $104711\frac{1}{2}$ minores arcu AB. Quare ſexcuplum earum, 628269 minus erit circumferentiâ totâ. At quoniam 104727 majores inventæ ſunt arcu AB, earum ſexcuplum 628362 circumferentiâ majus erit. Itaque circumferentiæ ad diametrum ratio minor eſt quam 628362, major autem quam 628269 ad 200000. Sive minor quam 314181, major autem quam 314135 ad 100000. Unde conſtat minorem utique eſſe quam triplam ſeſquiſeptimam, & majorem quam $3\frac{10}{71}$. Quin etiam Longomontani [53]) error per hæc refutatur, qui ſcripſit peripheriam majorem eſſe partibus 314182 [54]) qualium rad. 100000.

Eſto nunc arcus AB $\frac{1}{8}$ circumferentiæ, & erit AM, ſemiſſis lateris quadrati circulo inſcripti, partium 7071068, non unâ minùs, qualium radius DB 10000000. AB verò latus octanguli partium 7653668 non unâ majus. Quibus datis ad ſimilitudinem præcedentium invenietur primus minor terminus longitudinis arcus AB 7847868. Deinde major terminus 7854066. Et ex utroque rurſus terminus minor accuratior 7853885. Unde conſtat peripheriæ ad diametrum rationem minorem haberi quam $31416\frac{1}{3}$, majorem autem quam 31415 ad 10000.

Et quum terminus major 7854066 à vera arcus AB longitudine minus diſtet quam partibus 85; (Eſt enim arcus AB, per ea quæ ſupra oſtendimus [55]), major quam 7853981) partes autem 85 efficiant minus quam duos ſcrupulos ſecundos, hoc eſt, quam $\frac{2}{1296000}$ circumferentiæ, nam tota earundem plures habet quam 60000000: Hinc manifeſtum eſt, ſi trianguli rectanguli angulos quæramus ex datis lateribus, eo modo quo majorem iſtum terminum paulò antè, nunquam duobus

p. 176 du T. I. Déjà en 1612 il publia l'ouvrage qui suit: „Cyclometria ex Lunulis reciprocè demonstrata, unde tam Areae, quàm Perimetri circuli exacta dimensio, & in numeros diductio seqvuta est, hactenus ab omnibus Mathematicis unicè desiderata. Ad Christianum Qvartum Daniae & Septemtrionis Regem. Inventore Christiano S. Longomontano Regio Mathematum Professore. Hafniae Typis Henrici Waldkirchij. Anno CIↃ IↃCXII."

La fausse quadrature qu' il y développe amène à la page 55 la valeur numérique $\pi =$ $= 3,14185959069768\ldots$; elle est différente de celle de l'ouvrage de 1644, laquelle le conduit à la page 24 au nombre 3, 141859604427...

[54]) Dans l'exemplaire que nous possédons, ce dernier chiffre a été changé à la plume, probablement par Huygens lui-même. On y lit 314185.

[55]) Il s'agit du dernier alinéa du „Problema I. Prop. X", p. 143 du Tome présent, d'après lequel la circonférence contient plus de 62831852 des parties mentionnées dans le texte; dont le huitième excède 7853981.

rons de plus de deux fecondes; même fi les côtés autour de l'angle droit font égaux entre eux, comme ils l'étaient ici dans le triangle DAM.

Mais fi le rapport du côté DM à MA eft tel que l'angle ADM ne dépaffe pas $\frac{1}{4}$ d'un angle droit, l'erreur ne fera pas même d'une tierce. En effet, pofant l'arc AB égal à $\frac{1}{16}$ de la circonférence, AM fera la moitié du côté de l'octogone équilatéral infcrit dans le cercle, et égal à 382683433 parties et pas une de moins; tandis que AB fera le côté du polygone de feize côtés, et contiendra donc 390180644 parties et pas une de plus, le rayon DB contenant 1000000000 de ces parties. On trouve par là une première limite inférieure de la longueur de l'arc AB de 392679714 parties. Et la limite fupérieure eft 392699148. Et de là de nouveau une limite inférieure 392699010. Or, il réfulte de ce que nous avons démontré plus haut [56]) que l'arc AB, $\frac{1}{16}$ de la circonférence, eft plus grand que 392699081 parties, lefquelles la limite fupérieure dépaffe de 67 parties. Mais celles-ci font moins qu'une tierce, c'eft-à-dire que $\frac{1}{77760000}$ de toute la circonférence, puifque celle-ci eft plus grande que 6000000000.

Puis, des nouvelles limites que nous venons de trouver le rapport de la circonférence au diamètre fortira plus petit que 3141593 $\frac{1}{5}$, mais plus grand que 3141592 à 1000000.

Et si nous prenons un arc AB égal à $\frac{1}{60}$ de la circonférence, foit à 6 parties dont elle en contient toute entière 360, AM fera la moitié du côté du polygone (infcrit) [57]) à 30 angles, formé de 10452846326766 parties dont le rayon en a 100000000000000, et pas une de moins. Et AB eft le côté du polygone (infcrit) [57]) de 60 angles, 10467191248588 et pas une de plus. Au moyen de ces données on trouvera l'arc AB d'après la première limite inférieure 10471972889195. D'après la fupérieure 10471975512584. Et de là l'autre limite inférieure 10471975511302. D'où il réfulte que le rapport de la périphérie au diamètre eft moindre que 31415926538, mais plus grand que 31415926533 à 10000000000.

S'il fallait chercher ces limites par l'addition des côtés des polygones infcrit et circonfcrit, il faudrait aller prefque jufqu à quatre cent mille côtés [58]). Car au moyen du polygone à 60 angles infcrit et circonfcrit on prouve feulement que le rapport de la périphérie au diamètre est moindre que 3145 à 1000 et plus grand que 3140. Ainfi donc le nombre de chiffres vrais fourni par notre calcul paraît être trois fois plus grand et même plus. Mais fi quelqu' un en fait l'expérience, il verra que la même chofe arrive toujours avec les polygones suivants: nous n'en ignorons pas la raifon, mais elle demanderait une explication trop longue [59]).

D'ailleurs je crois qu'il eft fuffifamment clair comment, étant données d'autres infcrites quelconques, on peut trouver par les méthodes expofées la longueur des arcs auxquels elles font fous-tendues. Car, fi elles font plus grandes que le côté du carré infcrit, on devra chercher la longueur de l'arc reftant à la demi-circonférence, dont la corde eft alors auffi donnée. Mais on doit auffi favoir trouver les cordes des moitiés des arcs, lorfque la corde de l'arc entier eft donnée.

fcrupulis fecundis aberraturos; etiamfi æqualia inter fe fuerint latera circa angulum rectum, veluti hic erant in triangulo DAM.

Si verò ea fit ratio lateris DM ad MA, ut angulus ADM non excedat $\frac{1}{4}$ recti; non unius tertii fcrupuli error erit. Pofito enim arcu AB $\frac{1}{16}$ circumferentiæ, erit AM femiffis lateris octanguli æquilateri circulo infcripti partium 382683433, non unâ minùs. AB verò latus fexdecanguli 390180644 non unâ ampliùs, qualium radius DB 1000000000. Unde primus minor terminus longitudinis arcus AB invenitur partium 392679714. Terminus autem major 392699148. Et ex his minor rurfus 392699010. Conftat autem ex fupra demonftratis [56]) arcum AB $\frac{1}{16}$ peripheriæ, majorem effe quam 392699081, quas terminus major fuperat partibus 67. Hæ autem minus efficiunt uno fcrupulo tertio, hoc eft, $\frac{1}{77760000}$ totius circumferentiæ, quoniam ea major eft utique quam 6000000000.

Porrò ex noviffimis terminis inventis orietur ratio circumferentiæ ad diametrum minor quam 3141593$\frac{1}{5}$, major autem quam 3141592 ad 1000000.

Quod fi $\frac{1}{60}$ circumferentiæ ponatur arcus AB, feu partium 6 qualium tota 360: Erit AM femiffis lateris trigintanguli (infcripti) [57]) partium 10452846326766, non unâ minùs, qualium radius 100000000000000. Et AB latus fexagintanguli (infcripti) [57]) 10467191248588 non unâ amplius. Invenieturque ex his arcus AB fecundùm primum minorem terminum 10471972889195. Secundùm majorem 10471975512584. Et ex his minor alter terminus 10471975511302. Unde efficitur peripheriæ ad diametrum ratio minor quam 31415926538, major autem quam 31415926533 ad 10000000000.

Quos terminos fi ex additis infcriptorum & circumfcriptorum polygonorum lateribus inquirendum effet ferè ad laterum quadringenta millia deveniendum [58]). Nam ex fexagintangulo infcripto circumfcriptoque hoc tantùm probatur, minorem effe rationem peripheriæ ad diametrum quam 3145 ad 1000, majorem autem quam 3140. Adeo ut triplum & ampliùs verarum notarum numerum noftro ratiocinio productum appareat. Idem verò in ulterioribus polygonis fi quis experiatur femper evenire cernet: non ignota nobis ratione, fed quæ longiori explicatione indigeret [59]).

Porrò autem quomodo, datis quibufcunque aliis infcriptis arcuum quibus fubtenduntur longitudo per hæc inveniri queat fatis puto manifeftum. Si enim quadrati infcripti latere majores funt, longitudo arcus ad femicircumferentiam

[56]) Voir toujours le lieu cité dans la note précédente.

[57]) Les mots entre parenthèses furent ajoutés en marge par Huygens dans l'exemplaire que nous possédons.

[58]) En appliquant les relations approchées de la note 7, p. 94 du Tome présent, on trouve que des polygones de 240000 côtés suffiraient à déduire ces limites à l'aide de la méthode Archimédienne.

[59]) Voir, à ce propos, la note 15, p. 142 du Tome présent.

Et de cette manière, si nous voulons faire usage des bisections, nous pourrons connaître sans difficulté pour toute corde la longueur de son arc, aussi rapprochée que nous voulons. Ceci est utile pour l'examen des tables des sinus. Et de même pour leur composition; car connaissant la corde d'un certain arc, on peut déterminer aussi avec une précision suffisante celle de l'arc qui est un peu plus grand ou un peu plus petit.

reliqui inquirenda est, cujus tum quoque subtensa datur. Sciendum autem & dimidiorum arcuum subtensas inveniri cum totius arcus subtensa data est. Atque hâc ratione si bisectionibus uti placebit, poterimus ad omnem subtensam, arcus ipsius longitudinem quamlibet veræ propinquam non difficulter cognoscere. Utile hoc ad sinuum tabulas examinandas. Imo ad componendas quoque: quia cognitâ arcus alicujus subtensâ, etiam ejus qui paulò major minorve sit satis accuratè definiri potest.

CHRISTIAAN HUYGENS, FILS DE CONSTANTIN.

CONSTRUCTIONS DE CERTAINS PROBLÈMES CÉLÈBRES.

PROBL. I.

Couper une ſphère donnée par un plan de manière que les ſegments ſoient entre eux dans un rapport donné [1]).

Archimède a réſolu ce problème dans le livre 2 de ſon traité de la Sphère et du Cylindre [2]). Mais il ſemble qu'il n'a pas expoſé la conſtruction qu'il avait promiſe, à moins que ne ſoit de lui celle qu' Eutocius inſéra dans ſes Commentaires, l'ayant trouvée dans un livre très vieux [3]). Or, elle y est effectuée par l'interſection d'une parabole et d'une hyperbole comme celle dont Dionyſidore eſt l'auteur [4]), laquelle cependant diffère de la précédente. Outre celles-là Eutocius donne encore une troiſième [5]), tirée du livre de Dioclès sur les Miroirs ardents, laquelle demande le tracé d'une hyperbole et d'une ellipſe. Quant à la nôtre, que nous décrirons ici, elle exige la triſection de l'angle; et cette façon de conſtruire paraît pour les problèmes ſolides en quelque ſorte la plus ſimple, et la plus appropriée à l'usage.

Soit donc donnée une ſphère [Fig. 1] dont le centre eſt M, le diamètre CA. Et ſoit donné le rapport de la ligne S à T, d'une plus grande à une plus petite. Que l'on ſe figure la ſphère coupée par un plan ſuivant le diamètre AC et ſoit CBAD le cercle le plus grand dans cette ſphère. Et que l'on prolonge des deux côtés le diamètre CA et que chacun des deux prolongements CH et AE ſoit égal au demi-diamètre. Et que l'on diviſe toute la droite HE au point Q, de façon que EQ ſoit à QH comme S à T. Que l'on place maintenant contre la circonférence la droite

[1]) Consultez, sur l'historique de ce problème, la page 102 de l'„Avertissement". La solution qui va suivre se retrouve dans une forme modifiée aux p. 16—18 du Tome présent sous la date du 31 janvier 1652.

CHRISTIANI HUGENII C. F.

ILLVSTRIVM QVORVNDAM PROBLEMATVM CONSTRVCTIONES.

PROBL. I.

Datam ſphæram plano ſecare, ut portiones inter ſe rationem habeant datam [1]).

Hoc Archimedes problema reſolvit lib. 2. de Sphæra & Cylind. [2]) Compoſitionem autem promiſſam non videtur explicuiſſe, niſi ipſius eſt illa quam Eutocius in vetuſto quodam libro repertam commentariis ſuis inſeruit [3]). Ea verò paraboles & hyperboles interſectione perficitur, uti & illa cujus Dionyſidorus autor eſt [4]), quæ tamen à priori differt. Præter has tertiam quoque adfert Eutocius [5]) è Dioclis de Pyriis libro, quæ hyperboles & ellipſis deſcriptionem requirit. Noſtra autem quam hic conſcribemus anguli triſectionem poſtulat; Et hæc conſtruendi ratio in ſolidis problematibus quodammodo ſimpliciſſima videtur, atque ad uſum maximè accommodata.

Eſto igitur data ſphæra [Fig. 1] cujus centrum M, diameter CA. Et data ſit proportio lineæ S ad T majoris ad minorem. Intelligatur ſecari ſphæra plano ſecundum AC diametrum, ſitque maximus in ea circulus CBAD. Et producatur utrimque diameter CA, & ponatur ſemidiametro æqualis utraque harum CH, AE. Et dividatur tota HE in Q, ut ſit EQ ad QH ſicut S ad T. Ipſi autem MQ æqualis

[2]) Voir la note 3, p. 3 du Tome présent.
[3]) Consultez les notes 16 et 17, p. 12 du Tome présent.
[4]) Voir p. 37—38 du texte Latin des „Commentarii Eutocii" de l'édition de Bâle, citée note 3, p. 274 du T. XI, (Heiberg, III, p. 181—188).
[5]) Voir p. 38—42 de l'édition de Bâle, (Heiberg, III, p. 189—209).

AR, égale à la droite MQ. Et que l'on prenne MN égale à celle qui ſous-tend la troiſième partie de l'arc AR. Enfin que par le point N on mène le plan KL qui ſoit à angles droits ſur le diamètre CA. Je dis que ce plan coupe la ſphère de telle manière, que le ſegment dont A eſt le ſommet eſt à celui dont le ſommet eſt C dans le rapport de S à T [6]).

En effet, coupons la ſphère par un plan BD paſſant par le centre M et parallèle à KL, et joignons KM, ML; et imaginons un cône ayant comme baſe le cercle formé par la ſection KL, mais dont le ſommet eſt en M. Comme le carré CM au carré MN, de même ſoit MN à NO, quant à la longueur. On aura donc, par converſion des rapports, que le carré CM, ou le carré KM, eſt au carré KN (car le carré KN eſt l'excès du carré KM ſur le carré MN) comme la droite NM eſt à MO. Or, comme le carré KM, c'eſt-à-dire le carré BM, au carré KN, ainſi le cercle autour du diamètre BD eſt à celui décrit autour du diamètre KL. Donc auſſi ce cercle là ſera à celui-ci comme NM à MO. Et par conſéquent le cône KML ſera égal à celui dont la baſe eſt le cercle autour
*15.12. Élém.[7]) du diamètre BD, mais dont la hauteur eſt MO *. Mais ce cône eſt à l'hémiſphère BCD, c'eſt-à-dire au cône qui a comme baſe le même cercle autour
*32. 1. Archim. du Sphère et du Cyl.[8]) du diamètre BD, et comme hauteur MH *, dans le même rapport que MO à MH. Donc auſſi le cône KML ſera à l'hémiſphère BCD comme MO à MH. Et inverſement.

Mais enſuite, puiſque l'hémiſphère BCD eſt au ſecteur ſolide MKCL comme
* 42. 1. Arch. du Sphère et du Cyl.[9]) la ſuperficie ſphérique de celle-là eſt à la ſuperficie ſphérique de celui-ci *, c'eſt-à-dire comme MC à CN †, par converſion des rapports, l'hémiſphère BCD
† 3. 2. Arch. du Sphère et du Cyl.[10]) ſera à la partie qui en reſte après enlèvement du ſecteur MKCL, comme CM à MN: ou bien, après en avoir pris les doubles, comme HM à OQ. Car que OQ eſt le double de MN, c'eſt ce que nous montrerons plus tard. Mais on a démontré que l'hémiſphère BCD eſt au cône KML comme HM à MO. Donc déjà l'hémiſphère BCD ſera à toute la partie compriſe entre les plans BD,
*24,5. Élém.[11]) KL comme HM aux droites QO, OM enſemble *, c'eſt-à-dire à MQ. C'eſt pourquoi, par converſion des rapports, l'hémiſphère BCD ſera au ſegment KCL, comme MH à HQ. Et ſi l'on prend les doubles des antécédents, la ſphère toute

[6]) La construction exposée est sans doute une modification de celle qui fut communiquée le 9 août 1653 à Kinner à Löwenthurn, laquelle elle-même ne diffère pas essentiellement de celle inventée le 31 janvier 1652 (voir la note 1).

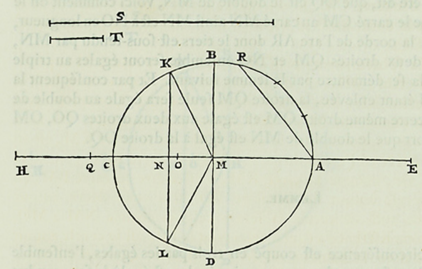
Consultez là-dessus la note 4, p, 16 du Tome présent. Ici encore il est facile de montrer que la corde, dont l'arc est divisé en trois parties égales, aura la longueur $\frac{S-T}{S+T}$. AC.

[7]) Voir la note 10, p. 11 du Tome présent.

[8]) Voir la note 7, p. 17 du Tome présent.

[9]) Voir la note 11, p. 11 du Tome présent.

ponatur ad circumferentiam recta AR. Et ei quæ tertiam partem ſubtendit arcus AR, æqualis ſumatur MN. Et per N punctum ducatur planum KL quod diametro CA ſit ad angulos rectos. Dico hoc ſphæram ſic ſecare, ut portio cujus A vertex eſt ad eam cujus vertex C rationem habeat quam S ad T [6]).



[Fig. 1.]

Secetur enim ſphæra per centrum M plano BD ipſi KL parallelo, & jungantur KM, ML; & intelligatur conus baſin habens circulum factum ſectione KL, verticem vero M. Et ſicut quadratum CM ad quadratum MN, ita ſit MN ad NO longitudine. Erit igitur per converſionem rationis ut quadratum CM ſive quadr. KM ad quadratum KN (eſt enim quadr. KN exceſſus quadrati KM ſupra quadr. MN) ita linea NM ad MO. Sicut autem quadr. KM, hoc eſt, quadr. BM ad quadr. KN, ita eſt circulus circa diametrum BD ad eum qui circa diametrum KL. Ergo quoque ille circulus ad hunc ſeſe habebit ut NM ad MO. Ac proinde conus KML æqualis erit cono cujus baſis circulus circa diametrum BD, altitudo MO *. Hic autem conus ad hemiſphæram BCD, hoc eſt, ad conum qui baſin *15.12. Elem.[7])
habeat eundem circulum circa BD diametrum, & altitudinem MH *, eam habet *32. 1. Archim. de Sphær. & Cylin.[8])
rationem quam MO ad MH. Itaque & conus KML erit ad hemiſphæram BCD ſicut MO ad MH. Et invertendo.

Porro autem quoniam hemiſphæra BCD eſt ad ſectorem ſolidum MKCL ſicut ſuperficies illius ſphærica ad ſphæricam hujus ſuperficiem *, hoc eſt, ut MC ad *42. 1. Archim. de Sphær. & Cyl.[9])
CN †. Erit per converſionem rationis hemiſphæra BCD ad partem ſui quæ remanet dempto ſectore MKCL, ſicut CM ad MN: vel ſumptis horum duplis ut † 3. 2. Archim. de Sphær. & Cyl.[10])
HM ad OQ. Quod enim OQ dupla ſit ipſius MN poſtea oſtendemus. Fuit autem oſtenſum, quod hemiſphæra BCD ad conum KML ſicut HM ad MO. Ergo jam hemiſphæra BCD ad totam portionem inter plana BD, KL contentam erit ut HM ad utramque ſimul QO, OM *, hoc eſt, ad MQ. Quare & per converſionem *24.5. Elem.[11])
rationis, erit hemiſphæra BCD ad portionem KCL, ut MH ad HQ. Et ſumptis

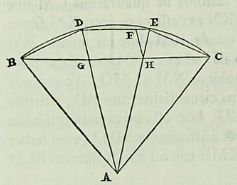
[10]) Voir la note 9, p. 17 du Tome présent.

[11]) Voir la note 28, p. 312 du Tome XI et de même la note 13, p. 11 et 12 du Tome présent.

entière eſt au ſegment KCL comme EH à HQ. Et par partage, le ſegment KAL eſt au ſegment KCL comme EQ à QH, c'eſt-à-dire comme S à T. Ce qui était à faire. Quant à ce qui a été dit, que OQ eſt le double de MN, voici comment on le prouve. Puiſque comme le carré CM au carré MN ainſi MN eſt à NO en longueur, et que QM eſt égal à la corde de l'arc AR dont le tiers eſt ſous-tendu par MN, pour cette raiſon les deux droites QM et NO enſemble feront égales au triple de MN, ainſi que cela ſe démontre par le lemme ſuivant. Et par conſéquent la portion commune ON étant enlevée, la droite QM ſeule ſera égale au double de NM avec MO. Mais cette même droite QM eſt égale aux deux droites QO, OM enſemble, donc il reſſort que le double de MN eſt égal à la droite OQ.

Lemme.

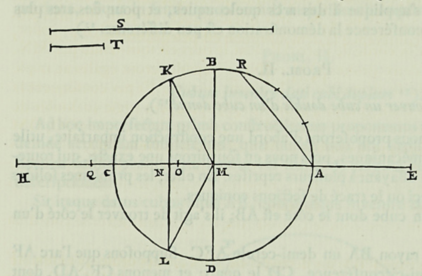
Lorſqu'un arc de circonférence eſt coupé en trois parties égales, l'enſemble des trois droites qui ſont ſous-tendues aux parties égales eſt égal à la ſous-tendue de l'arc entier avec une droite qui eſt à la ſous-tendue du tiers comme le carré de celle-ci au carré du demi-diamètre. Suppoſons que l'arc du ſecteur ABC ſoit diviſé en trois parties égales par les points D, E; et que les droites BD, DE, EC ſoient ſous-tendues à ces parties et la droite BC à l'arc tout entier. Puis joignons DA, EA et ſuppoſons que ces droites coupent la corde BC aux points G et H. Soit enfin HF parallèle à GD.



[Fig. 2.]

Ainſi donc la circonférence BDE eſt double de la circonférence EC, mais l'angle EAC qui repoſe ſur celle-ci eſt formé au centre, tandis que l'angle BCE repoſant ſur celle-là eſt formé ſur la circonférence. Pour cette raiſon l'angle BCE, c'eſt-à-dire l'angle HCE dans le triangle HCE, eſt égal à l'angle CAE dans le triangle CAE. Mais l'angle en E eſt commun à tous deux; donc les dits triangles ſont ſemblables entr'eux; et comme AE à EC ainſi EC ſera à EH. Donc le rapport de AE à EH, c'eſt-à-dire de DE à EF, eſt la deuxième puiſſance du rapport de AE à EC, et par conſéquent le même que celui du carré AE au carré EC ou ED. Donc, en permutant, FE ſera à ED comme le carré ED eſt au carré EA. A cauſe de cela il s'agit de démontrer, que les trois droites BD, DE, EC enſemble égalent la corde BC avec ce même EF; ce qui eſt tout à fait manifeste, car CE eſt égal à CH, BD égal à BG, et DE à l'enſemble des deux droites GH et FE. Donc la propoſition eſt établie.

antecedentium duplis, ſphæra tota ad portionem KCL ut EH ad HQ. Et dividendo, portio KAL ad portionem KCL ut EQ ad QH, hoc eſt ut S ad T. Quod erat faciendum.



[Fig. 1.]

Quod autem dictum fuit OQ duplam eſſe ipſius MN, ſic fiet manifeſtum. Quia enim ut quadratum CM ad quadr. MN ita eſt MN ad NO longitudine: Eſt autem QM æqualis ſubtenſæ arcus AR cujus trienti ſubtenditur MN. Erunt propterea duæ ſimul QM & NO æquales triplæ MN, uti ſequenti lemmate demonſtratur. Quamobrem ablata communi ON, erit ſola QM æqualis duplæ NM & ipſi MO. Sed eadem QM æqualis eſt duabus ſimul his QO, OM, ergo apparet duplam MN æquari ipſi OQ.

Lemma.

Si Circumferentiæ arcus in tria æqualia ſecetur, tres ſimul rectæ quæ æqualibus partibus ſubtenduntur, æquantur ſubtenſæ arcus totius & ei quæ ad ſubtenſam trientis ſeſe habeat, ſicut hujus quadratum ad quadratum ſemidiametri. Arcus ſectoris ABC [Fig. 2] in tria æqualia diviſus ſit punctis D, E. Et ſubtendantur partibus rectæ BD, DE, EC; & toti arcui linea BC. Porro jungantur DA, EA, atque interſecent ſubtenſam BC in punctis G & H. Sitque HF parallela GD.

Quoniam igitur circumferentia BDE dupla eſt circumferentiæ EC, angulus autem huic inſiſtens EAC ad centrum conſtitutus, qui verò illi inſiſtit angulus BCE ad circumferentiam. Erit propterea angulus BCE, hoc eſt, angulus HCE in triangulo HCE æqualis angulo CAE in triangulo CAE. Sed angulus ad E utrique eſt communis; itaque ſimiles inter ſe ſunt dicti trianguli: Eritque ut AE ad EC ita EC ad EH. Ratio igitur AE ad EH hoc eſt DE ad EF, duplicata eſt rationis AE ad EC, ac proinde eadem quæ quadrati AE ad quadr. EC ſeu quadr. ED. Erit igitur invertendo FE ad ED ſicut quadr. ED ad quadr. EA. Quamobrem oſtendendum eſt, tres ſimul BD, DE, EC æquari ſubtenſæ BC atque ipſi EF. quod ſane manifeſtum eſt; nam CE eſt æqualis CH; BD æqualis BG; DE vero utriſque ſimul GH, & FE. Ergo conſtat propoſitum.

Nous avons ſuppoſé, il eſt vrai, que l'arc BC eſt moindre que la demi-circonférence, parce que dans la conſtruction du problème en queſtion cela eſt toujours ainſi. Mais le lemme s'applique à des arcs quelconques, et pour des arcs plus grands que la demi-circonférence la démonſtration eſt peu différente. [12])

Probl. II.

Trouver un cube double d'un cube donné [13]).

Pour ce problème nous propoſerons d'abord une conſtruction imparfaite, utile pour les conſtructions mécaniques, puis nous en fournirons une exacte, qui toutefois ne s'effectue qu'en eſſayant à pluſieurs repriſes. En effet, les problèmes ſolides exigent toujours ou ceci ou le tracé de ſections coniques.

Soit donc donné un cube dont le côté eſt AB; il s'agit de trouver le côté d'un cube double.

Décrivons avec le rayon BA un demi-cercle AFC. Suppoſons que l'arc AF ſoit le tiers de la demi-circonférence, CD le quart; et menons CF, AD, dont l'interſection eſt au point E. AE ſera le côté du cube cherché; le dépaſſant toutefois d'une petite quantité, qui eſt moindre que ſa $\frac{1}{2000}$ partie, ainſi qu'on peut l'examiner facilement par les nombres. AE eſt, en effet, la ſécante d'un angle de 37 degrés 30 minutes, et eſt donc plus grande que 12600 parties dont AF ou AB en a 10000. Mais elle eſt moindre que 12605. Donc, comme le cube ſur 12600 eſt plus grand que le double de celui conſtruit ſur AB 10000, le cube ſur AE ſera plus grand que le double du cube ſur AB. D'autre part, puiſque AE eſt plus grand que 12600 parties, $\frac{1}{2000}$ AE ſera plus grand que 6 parties. Mais toute la droite AE eſt plus petite que 12605. Donc, enlevant de AE la deux-millième partie d'elle-même, le reſte ſera plus petit que 12599 parties; car il en reſte autant lorſqu'on déduit 6 de 12605. Or, le cube ſur 12599 eſt plus petit que le double du cube ſur 10000. Donc auſſi à plus forte raiſon AE diminuée de la deux-millième partie d'elle-même donne un cube plus petit que celui qui ſerait le double du cube de côté AB.

Puis, pour la conſtruction exacte, CF doit être tracée comme d'abord; mais AD de telle façon, que la ſous-tendue CD ſoit égale à la partie découpée EF. Et ceci poſé, je dis que le cube AE eſt double de celui formé ſur AB.

Prolongeons en effet CA, et ſoit AG égale à AE. A cauſe des triangles ſemblables EC eſt donc à CD, c'eſt-à-dire EF, comme EA à AF, c'eſt-à-dire comme

[12]) Cette remarque manque dans la rédaction du 31 janvier 1652 (p. 16—18 du Tome préſent), où le lemme et ſa démonſtration ſe retrouvent.

[13]) Comparez, pour ce problème, les pages 45—48 du Tome préſent où on retrouvera, ſous les dates du 1[er] et du 2 mars 1652, d'abord la ſolution exacte dans une rédaction peu différente, puis la conſtruction approximative avec une démonſtration bien plus prolixe.

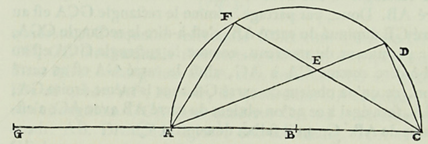
Sumpſimus autem arcum BC ſemicircumferentiâ minorem quoniam in conſtructione problematis ejuſmodi ſemper invenitur. Nam lemma ad quoſvis arcus pertinet, eſtque in ſemicircumferentiâ majoribus demonſtratio parum diverſa [12]).

Probl. II.

Cubum invenire dati cubi duplum [13]).

Ad hoc imperfectam primò conſtructionem proponemus ad mechanicen utilem; deinde accuratam ſubjiciemus, quæ tamen non niſi ſæpius tentando perficiatur. Etenim ſolida problemata omnia vel iſthic [14]) exigunt vel ſectionum conicarum deſcriptionem.

Sit itaque datus cubus latus AB, oporteatque invenire latus cubi dupli.



[Fig. 3.]

Radio BA ſemicirculus deſcribatur AFC. Sitque arcus AF ſemicircumferentiæ triens, CD vero quadrans; & ducantur CF, AD, quarum interſectio ad E punctum. Erit AE latus cubi quæſiti; exiguo tamen excedens, quodque minus ſit $\frac{1}{2000}$ ſui parte, ut facile numeris explorari poteſt. Fit enim AE ſecans anguli p. 37. ſcr. 30. quæ proinde major eſt partibus 12600 qualium AF vel AB 10000. Minor autem quam 12605. Itaque cum cubus ex 12600 ſit major quam duplus ejus qui ex AB 10000, erit & cubus AE major duplo cubo ex AB. Rurſus quia AE major eſt partibus 12600 erit $\frac{1}{2000}$ AE major part. 6. Tota verò AE minor eſt quam 12605. Ergo auferendo ab AE partem biſmilleſimam ſui ipſius reliqua minor erit partibus 12599, tot enim ſuperſunt cum ex 12605 deducuntur 6. Atqui cubus ex 12599 minor eſt duplo cubo ex 10000. Ergo omnino quoque AE diminuta parte ſui biſmilleſima cubum minorem producet quam ſit duplus cubus à latere AB.

Porrò ad perfectam conſtructionem, CF quidem uti priùs ducenda eſt: AD verò ſic, ut ſubtenſa CD æqualis ſit abſciſſæ EF. Etenim his poſitis dico cubum AE ejus qui ex AB duplum exiſtere.

Producatur enim CA, & ſit ipſi AE æqualis AG. Propter triangulos ſimiles igitur eſt EC ad CD, hoc eſt, EF ut EA ad AF, hoc eſt, ut GA ad AB. Et

[14]) Dans l'exemplaire que nous poſſédons le mot „isthic" a été changé à la plume par Huygens en „hoc".

GA à AB. Et par compoſition, CF eſt à FE comme GB à BA ou AF. Puis, permutant, CF eſt à GB comme EF à FA. Par conſéquent, comme le carré CF eſt au carré GB, ainſi le carré EF au carré FA. Et par compoſition, comme les carrés CF et GB enſemble ſont au carré GB, ainſi l'enſemble des carrés EF et FA, c'eſt-à-dire le carré EA au carré AF. Mais les carrés CF et GB valent enſemble le rectangle GCA avec le carré AG, ce qui ſe démontre ainſi. Le carré GB eſt égal au rectangle CGA augmenté du carré AB ou AF *. Donc, ajoutant de part et d'autre le carré FC, les carrés GB et FC pris enſemble ſeront égaux au rectangle CGA plus le carré AC. Or, le rectangle CGA avec le carré AC équivant au rectangle GCA avec le carré GA. Donc auſſi les carrés CF et GB équivaudront enſemble au rectangle GCA avec le carré AG, comme nous l'avons dit. Donc, comme le rectangle GCA avec le carré AG au carré GB, ainſi le carré EA eſt au carré AF, c'eſt-à-dire ainſi le carré GA au carré AB. Et permutant, comme le rectangle GCA avec le carré GA au carré GA, ainſi le carré GB eſt au carré AB. Donc, par partage, comme le rectangle GCA eſt au carré GA, ainſi le carré GB diminué du carré AB, c'eſt-à-dire le rectangle CGA, ſera au carré AB. Et permutant de nouveau, comme le rectangle GCA eſt au rectangle CGA, c'eſt-à-dire comme CA à AG, ainſi le carré GA eſt au carré AB. Pour cette raiſon, ce qu'on obtient du carré GA avec la même droite GA, c'eſt-à-dire le cube GA, ſera égal à ce qu'on obtient du carré AB avec AC; c'eſt-à-dire au double du cube de AB. Ce qu'il fallait démontrer [16]).

* 6. 2. Élém. [15])

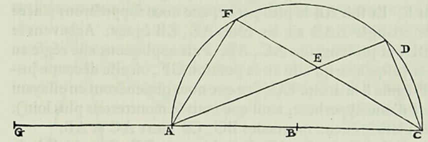
PROBL. III.

Trouver deux moyennes proportionnelles à deux droites données [17]).

Pour ce problème Eutocius a noté plusieurs conſtructions des vieux géomètres dans ſes commentaires ſur le livre 2 d'Archimède ſur la Sphère et le Cylindre [18]); mais elles ne ſont pas toutes d'invention différente, ainſi qu'il l'a lui-même juſtement remarqué. Car Apollonius et Philon le Byzantin [20]) paraiſſent avoir ſuivi l'invention d'Héron [19]), bien que quelques-uns jugent que Héron eſt poſtérieur à Apollonius [21]). Pappus et Sporus ont ſuivi la méthode de Dioclès [22]). On trouve au

[15]) Voir, sur cette proposition, la note 2, p. 46 du Tome présent.
[16]) On peut consulter encore sur cette démonstration la note 3, p. 46 du Tome présent.
[17]) Voir, sur l'historique de ce problème, les p. 103—106 de l'„Avertissement".
[18]) Voir les Commentaires d'Eutocius, aux p. 14—27 de l'édition de Bâle (Heiberg, III, p. 66—127).
[19]) Voir, sur la construction de Héron, les p. 15—16 de l'édition de Bâle (Heiberg, III, p. 70—73) et consulter encore la note 10, p 40 du Tome présent.
[20]) Voir, sur ces constructions, les p. 16—17 de l'édition de Bâle (Heiberg, III, p. 72—79). L'identité essentielle des trois constructions fut déjà constatée par Eutocius.
[21]) La question de déterminer l'époque où vivait Héron a beaucoup occupé les savants jusque dans notre temps. On peut consulter à ce propos le Chap. XVIII du T. I de l'ouvrage bien-

componendo CF ad FE ut GB ad BA ſive AF. Et permutando CF ad GB ut EF ad FA. Quare ut CF quadratum ad quadr. GB, ita quadr. EF ad quadr. FA. Et componendo ut quadr. CF & GB ad quadr. GB, ita quadr. EF & FA ſimul, hoc eſt, quadr. EA ad quadr. AF. Quadr. autem CF & GB ſimul æquantur rectangulo GCA cum quadr. AG, quod ſic oſtenditur. Quadratum enim GB æquale eſt rectangulo CGA & quadrato AB ſeu AF *. Quare addito utrimque quadrato FC, erunt quadrata GB, FC ſimul æqualia rectangulo CGA & quadrato AC. Rectangulum autem CGA cum



[Fig. 3.]

* 6. 2. Elem. [15])

quadrato AC æquatur rectangulo GCA cum quadrato GA. Itaque & quadrata CF, GB ſimul æqualia ſunt rectangulo GCA cum quadrato AG, ſicut diximus. Sicut igitur rectangulum GCA cum quadrato AG ad quadr. GB, ita eſt quadr. EA ad quadr. AF, hoc eſt, ita quadratum GA ad quadr. AB. Et permutando, ut rectangulum GCA cum quadrato GA ad quadratum GA ita quadr. GB ad quadr. AB. Dividendo igitur, erit ut rectang. GCA ad quadr. GA, ita quadr. GB dempto quadrato AB, hoc eſt, rectangulum CGA ad quadr. AB. Et permutando rurſus, ut rectang. GCA ad rectang. CGA, hoc eſt, ut CA ad AG ita quadratum GA ad quadr. AB. Quamobrem quod fit ex quadrato GA in ipſam GA, hoc eſt, cubus GA æquabitur ei quod fit ex quadrato AB in AC, hoc eſt, duplo cubo ex AB. Quod erat demonſtrandum [16]).

PROBL. III.

Datis duabus rectis duas medias proportionales invenire [17]).

Veterum Geometrarum ad hoc Problema conſtructiones complures retulit Eutocius ad lib. 2. Archimedis de Sphæra & Cylindro [18]), at non omnes inventione diverſas, uti rectè quoque ipſe animadvertit. Heronis enim inventionem [19]) ſecuti videntur Apollonius & Philo Byzantius [20]): quanquam Heronem Appolonio ætate poſteriorem nonnulli exiſtiment [21]). Dioclis modum Pappus & Sporus [22]). Nico-

connu de Cantor „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" qui place Héron dans le premier siècle avant J. C., c'est-à-dire après Philon de Byzance et plus d'un siècle entier après Apollonius.
[22]) Voir, sur ces constructions, les p. 17—20 de l'édition de Bâle (Heiberg, III, p. 78—93). Dioclès fait emploi de sa cissoïde; les autres constructions se réduisent aisément a celle de Dioclès, comme Eutocius l'a déjà remarqué.