grand que celui de $3\frac{10}{71}$ à 1. Le rapport de la périphérie au diamètre ſera donc à plus forte raiſon auſſi plus grand.

D'autre part, puiſque le côté du dodécagone inſcrit eſt plus petit que $5176\frac{2}{5}$ parties, huit côtés, c'eſt-à-dire $\frac{2}{3}$ du périmètre, ſeront moindres que $41411\frac{1}{5}$. De même, puiſque le côté du dodécagone circonſcrit eſt plus petit que 5359, quatre côtés, c'eſt-à-dire, le tiers du périmètre, ſeront moindres que 21436. Pour cette raiſon, $\frac{2}{3}$ du périmètre du dodécagone inſcrit plus le tiers du périmètre du circonſcrit ſeront moindres que $62847\frac{1}{5}$. Mais la circonférence de cercle eſt auſſi plus petite que cette ſomme*. Cette circonférence ſera donc à plus forte raiſon au diamètre dans un rapport moindre que $62847\frac{1}{5}$ à 20000; et bien moindre par conſéquent que $62857\frac{1}{7}$ à 20000, ce qui eſt le triple et un ſeptième. Et ainſi ſont démontrées les limites du rapport de la périphérie au diamètre qu' Archimède établit. Mais nous les démontrerons dans la ſuite [13]) en nous ſervant du côté du ſeul triangle équilatéral inſcrit. Enſuite, pour trouver un rapport plus approché il faudra conſidérer des polygones d'un plus grand nombre de côtés. Ainſi figurons nous que nous ayons circonſcrit au cercle un polygone de 60 côtés et que nous en ayons inſcrit un autre. Et qu'en outre ſoit inſcrit un polygone d'un nombre de côtés égal à la moitié, ſavoir celui de trente côtés.

** d'après 9. ici.*

Or, on trouve que le côté du polygone à ſoixante côtés inſcrit eſt plus grand que 10467191 parties dont le rayon en contient 100000000 et le côté du polygone à trente côtés plus petit que 20905693 parties: dont la moitié $10452846\frac{1}{2}$ eſt le ſinus de l'arc égal à $\frac{1}{60}$ de la circonférence. Mais la corde ſous-tendue était 10467191. Donc la différence eſt $14344\frac{1}{2}$, moindre que la vraie: et le tiers de la différence eſt $4781\frac{1}{2}$, ce qui, ajouté à la ſous-tendue 10467191, fait $10471972\frac{1}{2}$. De ſorte que l'arc de $\frac{1}{60}$ de la circonférence eſt plus grand que ce nombre de parties. Mais en le comptant 60 fois on obtient 628318350. Par conſéquent la circonférence entière eſt à plus forte raiſon plus grande que ce nombre de parties.

Et puis, comme le côté du polygone inſcrit à 60 angles eſt plus petit que 10467192, les deux tiers de celui-ci ſeront moindres que 6978128. Mais comme le côté du polygone circonſcrit de 60 angles eſt plus petit que 10481556, le tiers de celui-ci ſera plus petit que 3493852. Ce qui ajouté à 6978128 fait 10471980. Ce nombre de parties ſurpaſſe donc certainement $\frac{1}{60}$ de la circonférence, et le ſoixantuple de celles-là, c'eſt-à-dire, 628318800, ſera plus grand que la circonférence toute entière. Mais employons encore des polygones de 10800 côtés, dont d'une part le côté de l'inſcrit, qui eſt ſous-tendu par un arc de deux minutes, a été trouvé, d'après le calcul de Ludolphe de Cologne, un arithméticien diſtingué, ſe compoſer de 58177640912684919 parties et pas une de plus, tandis que le côté du polygone circonſcrit eſt de 58177643374063182 parties et pas une de moins. Et en outre le côté du polygone inſcrit dont le nombre des côtés eſt la moitié, eſt de 116355276902613523 parties et pas une de moins [14]). On déduit de

quam $3\frac{10}{71}$ ad 1. Ergo omnino etiam peripheriæ ad diametrum ratio major erit.

Rurſus quoniam latus dodecagoni inſcripti minus eſt partibus $5176\frac{2}{5}$. Erunt octo latera, hoc eſt, $\frac{2}{3}$ perimetri minora quam $41411\frac{1}{5}$. Item quia latus dodecagoni circumſcripti minus eſt quam 5359, erunt quatuor latera, hoc eſt, triens perimetri minor quam 21436. Quamobrem $\frac{2}{3}$ perimetri dodecagoni inſcripti cum triente perimetri circumſcripti minores erunt quam $62847\frac{1}{5}$. Sed iſtis ſimul minor etiam eſt circuli circumferentia *. Ergo hæc ad diametrum omnino minorem habebit rationem, quam $62847\frac{1}{5}$ ad 20000; & multo minorem proinde, quam $62857\frac{1}{7}$ ad 20000, hoc eſt, quam triplam ſeſquiſeptimam. Demonſtrati itaque ſunt termini Rationis peripheriæ ad diametrum, quos Archimedes ſtatuit. Eoſdem verò poſtmodum ſolius inſcripti trigoni æquilateri latere indagato comprobabimus [13]). Porrò ut propinquior inveniatur ratio plurium laterum polygona conſideranda ſunt. Intelligatur igitur circumſcriptum circulo polygonum aliudque inſcriptum laterum 60. Et præter hæc ſubduplo numero laterum inſcriptum, nempe trigintangulum.

**per. 9. huj.*

Et invenitur quidem latus inſcripti ſexagintanguli majus partibus 10467191, qualium radius 100000000 & latus trigintanguli minus quam 20905693: cujus dimidium $10452846\frac{1}{2}$ eſt ſinus arcus æquantis $\frac{1}{60}$ circumferentiæ. Subtenſa autem erat 10467191. Ergo differentia $14344\frac{1}{2}$ minor verâ: & triens differentiæ $4781\frac{1}{2}$, qui additus ad ſubtenſam 10467191 facit $10471972\frac{1}{2}$. Quibus itaque major eſt arcus $\frac{1}{60}$ circumferentiæ. Ductis autem $10471972\frac{1}{2}$ ſexagies fiunt 628318350. Hiſce igitur partibus omnino major eſt circumferentia tota.

Rurſus quoniam latus inſcripti 60 anguli minus eſt quam 10467192, erunt duæ tertiæ ipſius minores quam 6978128. Circumſcripti autem 60 anguli latus cum ſit minus quam 10481556, erit triens ipſius minor quam 3493852. Quibus additis ad 6978128, fiunt 10471980. Hæ igitur omnino excedunt $\frac{1}{60}$ circumferentiæ, & ſexagecuplum ipſarum, hoc eſt 628318800 majus erit circumferentiâ totâ. Quod ſi verò polygona adhibeamus laterum 10800, quorum inſcripti quidem latus, calculo Ludolphi Colonienſis, Arithmetici nobilis, inventum eſt partium 58177640912684919 non unâ amplius, ſubtenditurque duobus ſcrup. primis; circumſcripti autem latus 58177643374063182 non unâ minus. Prætereaque latus polygoni ſubduplo laterum numero inſcripti, quod eſt 116355276902613523 non unâ minus [14]). Hinc peripheriæ longitudo invenitur major quam partium

[13]) Voir le „Problema IV. Propos. XX", p. 173.

[14]) Les côtés des polygones de 10800 et 5400 côtés, c'est-à-dire, les cordes des arcs de 2′ et de 4′, Huygens pouvait les emprunter à une petite table des cordes de 1′ à 12′ qui les donne avec encore quatre chiffres en plus et qu'on trouve au folio 21 de l'ouvrage de Ludolphe de Cologne, mentionné en premier lieu dans la note 3, p. 93 du Tome présent.

Le côté du polygone circonscrit devait être calculé par la formule $A_n = 2a_n\, r : \sqrt{4r^2 - a_n^2}$; mais ce calcul était beaucoup simplifié par ce que la table en question contient aussi les cordes complémentaires, c'est-à-dire, les valeurs de $\sqrt{4r^2 - a_n^2}$. Ainsi, pour trouver A_{10800}, Huygens n'avait qu' à multiplier a_{10800} par la fraction: $\frac{20000000000000000\ldots}{19999999153840506 5\ldots}$.

là que la longueur de la périphérie eſt plus grande que 6283185307179584 parties et plus petite que 6283185307179589, dont le rayon en a 1000000000000000. Or, par la méthode habituelle de l'addition des côtés de ces polygones inſcrit et circonſcrit on trouverait ſeulement que la périphérie eſt plus grande que 62831852 parties, et plus petite que 62831855. On voit donc que nous avons trouvé un nombre de chiffres vrais plus grand que le double. Mais il en eſt de même auſſi dans ce qui précède, et doit toujours arriver quel que ſoit le nombre de côtés des polygones dont nous faiſons uſage. Et par les propoſitions que nous donnerons dans la ſuite, on verra qu'on peut facilement obtenir un nombre de chiffres trois fois plus grand [15]).

Problème II. Prop. XI.

Prendre une droite égale à la périphérie d'un cercle donné.

Nous avons montré ci-deſſus [16]) que huit côtés du dodécagone inſcrit, diminués du rayon du cercle, ſont plus petits que la demi-périphérie. Mais dans une conſtruction, la différence ne peut pas être aperçue dans la plupart des cas. Car ſi l'on ajoute la quatre-millième partie du diamètre à la longueur ainſi trouvée, elle dépaſſera déjà la demi-périphérie. C'eſt ce que l'on reconnaît comme il ſuit. Des parties dont le rayon en a 10000, le côté du dodécagone inſcrit dans le cercle en contient plus que $5176\frac{3}{8}$. De ſorte que huit côtés ſont plus grands que 41411, et retranchant le rayon 10000, le reſte ſera plus grand que 31411; ſi l'on ajoute à cela 5 parties, ce qui eſt $\frac{1}{4000}$ du diamètre, on trouve déjà 31416; et il réſulte de ce qui précède que la moitié de la circonférence eſt plus petite que ce nombre de parties. Or, le côté du dodécagone inſcrit s'obtient facilement, puiſque le rayon ſous-tend un ſextant de la périphérie. Et ce rapport eſt plus précis que ſi nous faiſons uſage du triple et un ſeptième. Car ſuivant ce dernier rapport la longueur dépaſſe la $\frac{1}{2}$ [17]) périphérie de plus de $\frac{1}{1000}$ du diamètre.

---

[15]) Soit k le nombre des chiffres fourni par la méthode d'Archimède, appliquée aux polygones de $2n$ côtés, alors, en posant le rayon du cercle égal à l'unité, on aura:

$$P_{2n} - p_{2n} = \frac{p_{2n}^2}{p_n} - p_{2n} = \frac{p_{2n}}{p_n}(p_{2n} - p_n) = a\,10^{-k+1}, \text{ où } a < 1;$$

donc, certainement:

$$p_{2n} - p_n < a\,10^{-k+1}.$$

Or, la différence des limites respectives, données par les Théorèmes VII et IX est égale à

$$\tfrac{1}{3}\,\frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_n}.$$

Elle sera donc plus petite que $\frac{10}{3p_n}a^2 10^{-2k+1}$.

On connaîtra donc, *généralement parlant*, le nombre 2π, à l'aide de ces limites, jusqu'en $2k$

6283185307179584; minor autem quam 6283185307179589, qualium radius 1000000000000000. Solitâ autem methodo ex additis inſcripti circumſcriptique polygoni iſtius lateribus, invenietur tantùm majorem eſſe peripheriam partibus 62831852, & minorem 62831855. Patet igitur notaram verarum ampliùs quam duplum numerum eſſe à nobis inventum. Hoc autem & in præcedentibus ita ſe habet, ſemperque evenire neceſſe eſt quotcunque laterum polygonis utamur. At per ea, quae poſtea trademus, triplum numerum notarum facilè obteneri apparebit [15]).

Problema II. Prop. XI.

Rectam ſumere peripheriæ dati circuli æqualem.

Oſtenſum eſt ſuperius [16]), quod octo inſcripti dodecagoni latera dempto circuli radio minora ſunt peripheriâ dimidiâ. In conſtructione autem ut plurimum defectus animadverti nequit. Nam ſi quatermilleſima diametri pars accedat longitudini ſic inventæ, jam dimidiam peripheriam excedet. Quod ſic fiet manifeſtum. Quarum partium radius eſt 10000, earum latus dodecagoni inſcripti circulo eſt amplius quam $5176\frac{3}{8}$. Unde latera octo majora quam 41411. & dempto radio 10000, erit reliqua major quam 31411. cui ſi addantur partes 5, hoc eſt, $\frac{1}{4000}$ diametri, fient jam 31416; quibus minorem eſſe circumferentiam dimidiam liquet ex præcedentibus. Latus autem dodecagoni inſcripti facilè invenitur, quia radius peripheriæ ſextantem ſubtendit. Eſtque hæc ratio accuratior quam ſi triplâ ſeſquiſeptimâ utamur. Nam ſecundùm eam excedetur $\frac{1}{2}$ [17]) peripheriæ longitudo ampliùs quam $\frac{1}{1000}$ diametri.

---

chiffres au moins; mais comme a^2 sera souvent considérablement moins que l'unité, le nombre des chiffres connus pourra excéder facilement le nombre $2k$ d'une et quelquefois de deux unités, et de plus encore.

Plus loin, au „Problema IV", Huygens emploie des limites dont la différence est à peu près égale à $\left(\frac{2}{25} - \frac{22}{675}\right)(p_{2n} - p_n)^3 : 4\pi^2 = \frac{8}{675\pi^2}(p_{2n} - p_n)^3 < \frac{32}{27\pi^2}a^3\,10^{-3k+1}$ et on trouvera donc alors, *en général*, $3k$ chiffres et plus, au moyen de ces nouvelles limites.

L'assertion de Huygens est donc juste, si l'on excepte les cas très spéciaux où une légère différence excerce une influence anormale sur le nombre des chiffres connus.

Nous ne savons pas, d'ailleurs, précisément comment Huygens y est parvenu; mais il semble probable qu'en cherchant la différence des limites, il a remarqué qu'elle dépendait respectivement du carré et du cube de l'expression $p_{2n} - p_n$; ce qui, de plus, a pu lui suggérer la compàraison avec le nombre des chiffres du carré et du cube d'un nombre donné, laquelle on rencontre dans la préface à la p. 117 du Tome présent.

[16]) Voir l'avant-dernier alinéa de la démonstration du „Theor. VII. Prop. VII", p. 135.

[17]) Le nombre $\frac{1}{2}$ a été interpolé à la plume dans l'exemplaire de Huygens, que nous possédons.

Autrement.

Soit donné un cercle dont BC eſt le diamètre. Diviſons la demi-circonférence BC en deux parties égales au point D, et le reſte en trois parties égales en E et F. Et joignons DE, DF, qui coupent le diamètre en G et H. Alors l'un des côtés du triangle GDH, ajouté à la baſe GH, ſera un tout petit peu plus grand que le quadrant BD, et ne le dépaſſera même pas de $\frac{1}{5000}$ du diamètre BC. Il faut ſavoir, en effet, que DG ou DH ſont égaux á deux côtés du dodécagone inſcrit [18]), tandis que GH eſt égal au côté du dodécagone circonſcrit [19]). D'où il réſulte que la ſomme de DG et GH eſt plus grande que le quadrant BD. Car, comme d'après la Prop. 8 [20]) huit côtés du dodécagone inſcrit dans le cercle avec quatre côtés du circonſcrit ſont plus grands que la périphérie toute entière, pour cette raiſon, en prenant la quatrième partie du tout, deux côtés de l'inſcrit avec un ſeul côté du circonſcrit ſeront auſſi plus grands que le quart de la périphérie. Enſuite, puiſque le côté du dodécagone inſcrit eſt plus petit que 51764 parties dont BC en a 200000, deux côtés, c'eſt-à-dire GD, ſeront moindres que 103528. Mais le côté du dodécagone circonſcrit eſt plus petit que 53590 parties, donc auſſi la droite GH. Par conſéquent les droites DG et GH réunies ſont moins que 157118. Mais, d'après ce qui précède, on ſait que le quadrant BD eſt plus grand que 157079. La différence eſt donc plus petite que 39 parties, alors que 40 ne font que $\frac{1}{5000}$ du diamètre BC.

Autrement [21]).

Ajoutons à trois demi-diamètres $\frac{1}{10}$ du côté du carré inſcrit; la droite ainſi compoſée égalera la demi-circonférence de ſi près, qu'elle n'eſt pas plus courte que $\frac{1}{10800}$ [22]) du diamètre. Le côté du carré eſt plus grand que 141421 parties dont le rayon en a 100000, d'où ce qui vient d'être dit ſe démontre aiſément.

Ou plutôt on ajoutera à ſix demi-diamètres $\frac{1}{5}$ du côté ſuſdit du carré inſcrit, pour avoir une droite égale à la périphérie totale.

---

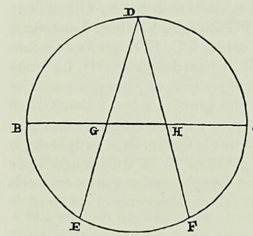
[18]) Puisque l'angle EDF égale 30°, on a $\frac{1}{2}\,\mathrm{DH} = \frac{1}{2}r : \cos 15° = r \sin 30° : \cos 15° = 2r \sin 15° = a_{12}$.

[19]) Soit M le centre du cercle, alors, puisque EDF est 30°, il est évident que GH est un des côtés du dodécagone circonscrit à un cercle dont le rayon égale DM et dont D est le centre.

[20]) Lisez *9*.

Aliter.

Eſto datus circulus cujus BC diameter. Dividatur ſemicircumferentia BC bifariam in D. reliqua verò trifariam in E & F. Et jungantur DE, DF, quæ ſecent diametrum in G & H. Erit trianguli GDH latus alterum unà cum baſi GH quadrante BD exiguo majus, neque enim excedet $\frac{1}{5000}$ diametri BC. Sciendum eſt enim fieri DG vel DH duobus inſcripti dodecagoni lateribus æquales [18]). GH autem lateri dodecagoni circumſcripti [19]). Unde quidem junctas DG & GH majores eſſe conſtat quadrante BD. Nam quia per 8. [20]) huj. octo latera dodecagoni circulo inſcripti cum quatuor lateribus circumſcripti majora ſunt peripheriâ totâ, ideo ſumptâ omnium quartâ parte erunt quoque duo latera inſcripti cum latere uno circumſcripti majora peripheriæ quadrante. Porro quoniam latus inſcripti dodecagoni minus eſt quam partium 51764 qualium BC 200000: erunt latera duo, hoc eſt, GD, minor quam 103528. Circumſcripti autem dodecagoni latus minus eſt partibus 53590, ipſa nimirum GH. Itaque junctæ unà DG, GH efficiunt minus quam 157118. At quadrantem BD conſtat ex præcedentibus majorem eſſe quam 157079. Ergo differentia minor eſt quam partium 39, cum 40 demum efficiant $\frac{1}{5000}$ diametri BC.



[Fig. 10.]

Aliter [21]).

Tribus ſemidiametris addatur $\frac{1}{10}$ lateris inſcripti quadrati; compoſita ſemicircumferentiæ æquabitur tam propè, ut non $\frac{1}{10800}$ [22]) diametri brevior ſit. Latus quadrati eſt majus quam partium 141421 qualium radius 100000, unde quod dictum eſt facile demonſtratur.

Vel potius ſex ſemidiametris addatur $\frac{1}{5}$ dicti lateris quadrati inſcripti ut habeatur recta æqualis peripheriæ toti.

---

[21]) Tout ce second „Aliter" ne se trouvait pas dans le texte; Huygens l'a ajouté à la plume dans son exemplaire à une date qui nous est inconnue.

[22]) Lisez $\frac{1}{11000}$. La différence est sensiblement la $\frac{1}{11700}$ ième partie du diamètre.

Problème III. Prop. XII.

Prendre une droite égale à un arc donné quelconque.

Soit donné un arc de circonférence CD, d'abord plus petit qu'un quadrant, dont il s'agiſſe de trouver une droite qui lui eſt égale. Diviſons l'arc CD en deux parties égales en E, et ſuppoſons que la droite FG ſoit égale à la corde ſous-tendue CD. Et ſoit FH égale à la ſomme des deux cordes CE, ED, qui ſous-tendent les moitiés des arcs. Et à cette FH ajoutons HI, le tiers de l'excès GH. La droite entière FI ſera preſque égale à l'arc CD: de manière que, en y ajoutant une petite partie, dont elle en contient 1200, elle ſera plus grande, même ſi l'arc CD eſt donné égal à un quadrant. Mais dans les arcs plus petits la différence ſera plus petite. Car ſi l'arc donné n'eſt pas plus grand que le ſextant de la périphérie, la ligne trouvée différera moins de $\frac{1}{8000}$ de ſa grandeur de la vraie longueur de l'arc. Or, que les droites trouvées de cette façon ſont plus petites que les arcs, cela réſulte du thèorème 7 de cet ouvrage. Mais nous allons démontrer ce qui en eſt de la grandeur de la différence.

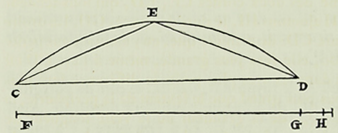
Ainſi, poſant d'abord l'arc CD égal à un quadrant de la périphérie, la droite CD, ou FG, ſera le côté du carré inſcrit dans le cercle, et plus petit par conséquent que 141422 parties, dont le rayon du cercle en a 100000. Mais CE ou ED eſt le côté de l'octogone inſcrit, et par ſuite plus grande que 76536. Mais FH eſt égale au double de ED. Cette droite eſt donc ſupérieure à 153072. De ſorte que l'excès GH eſt plus grand que 11650. Et le tiers HI de cet excès eſt plus grand que 3883. Par conſéquent la droite FI toute entière eſt ſupérieure à 156955. Mais l'arc CD, étant ſuppoſé égal à un quadrant, eſt plus petit que 157080. La droite FI s'écarte donc de cet arc de moins de 125 parties, dont elle en a elle-même 156955. Cela fait donc moins que $\frac{1}{1200}$ de la droite FI elle-même.

Mais ſi l'arc CD eſt un ſextant de la périphérie, la droite CD, ou FG, eſt le côté de l'hexagone inſcrit, et ſe compoſe donc de 10000 parties, et CE ou ED eſt le côté du dodécagone, et eſt donc plus grand que $5176\frac{3}{8}$, dont le double FH eſt ſupérieur à $10352\frac{3}{4}$. Il s'enſuit que GH eſt plus grande que $352\frac{3}{4}$, et HI plus grande que $117\frac{7}{12}$. De ſorte que la droite FI toute entière eſt plus grande que $10470\frac{1}{3}$. Mais l'arc CD, un ſextant de la périphérie, eſt plus petit que 10472. Il manque donc à la ligne FI un nombre de ces mêmes parties plus petit que $1\frac{2}{3}$. Ce qui ne fait pas $\frac{1}{8000}$ de FI. Enſuite, ſi l'on donne un arc plus grand qu'un quadrant, on le diviſera en 4 parties égales, ou en 6, ou en un nombre plus grand encore, ſuivant que nous voulons faire uſage d'une dimenſion plus préciſe; mais en nombre pair: et à l'enſemble des cordes qui ſous-tendent ces parties on ajoutera le tiers de la quantité dont elles ſurpaſſent la ſomme de celles qui ſous-tendent des arcs doubles. De cette manière, en effet, on compoſera la longueur de l'arc entier.

Problema III. Prop. XII.

Dato arcui cuicunque rectam æqualem ſumere.

Eſto datus circumferentiæ arcus CD, primùm quadrante minor, cui rectam æqualem ſumere oporteat. Dividatur arcus CD bifariam in E, ſitque ſubtenſæ CD æqualis recta FG. Duabus verò CE, ED, quæ ſubtendunt arcus dimidios, æqualis FH. Et ipſi FH jungatur HI triens exceſſus GH. Erit tota FI arcui CD æqualis ferè: adeò ut unâ ſui particulâ, qualium 1200 continet, aucta, major futura ſit, etiamſi arcus CD quadranti æqualis detur. In minoribus autem arcubus minor erit differentia. Nam ſi fuerit datus non major peripheriæ ſextante, linea inventa minus quam $\frac{1}{8000}$ ſui parte à vera arcus longitudine deficiet. Et minores quidem eſſe arcubus rectas eo modo inventas conſtat ex Theoremata 7. huj. De quantitate autem differentiæ eſt oſtendendum.



[Fig. 11.]

Primùm itaque ponendo arcum CD quadranti peripheriæ æqualem, erit CD recta, hoc eſt, FG, latus quadrati circulo inſcripti, & minor proinde quam partium 141422, qualium radius circuli 100000. CE autem vel ED latus inſcripti octogoni, ideoque major quam 76536. Eſt autem duplæ ED æqualis FH. Ergo hæc major quam 153072. Quare exceſſus GH major quam 11650: Et hujus triens HI major quam 3883. Ideoque tota FI major quam 156955. Arcus autem CD cum quadranti æqualis ponitur minor eſt quam 157080. Itaque minus ab hoc diſcrepat recta FI quam partibus 125, qualium ipſa eſt 156955. Quæ utique minus efficiunt quam $\frac{1}{1200}$ ipſius FI.

Si verò ſextans peripheriæ ſit arcus CD, erit recta CD, hoc eſt, FG, latus hexagoni inſcripti, ideoque partium 10000, & CE vel ED latus dodecagoni, ac proinde major quam $5176\frac{3}{8}$. cujus dupla FH major quam $10352\frac{3}{4}$. unde GH major quam $352\frac{3}{4}$; & HI major quam $117\frac{7}{12}$. Tota igitur FI major quam $10470\frac{1}{3}$. Arcus autem CD, ſextans peripheriæ, minor eſt quam 10472. Ergo deficiunt lineæ FI partium earundem pauciores quam $1\frac{2}{3}$. Quæ non æquant $\frac{1}{8000}$ FI. Porro cum arcus quadrante major datus erit, dividendus eſt in partes æquales 4 vel 6 vel plures, prout accuratiori dimenſione uti voluerimus; ſed numero pares: Earumque partium ſubtenſis ſimul ſumptis adjungendus eſt triens exceſſus quo ipſæ ſuperant aggregatum earum quæ arcubus duplis ſubtenduntur. Ita namque com-

Ou bien, pour la même raiſon, on aura la même choſe, en cherchant la longueur de l'arc reſtant à la demi-circonférence ou l'excès ſur celle-ci, ou la longueur de celui qui reſte à la circonférence entière, ſi l'arc donné était plus grand que les trois quarts d'une circonférence; et cette longueur serait ajoutée ou enlevée à la moitié ou à la totalité de la longueur de la circonférence, que nous avons appris à trouver ci-devant.

Théor. X. Prop. XIII.

Le côté d'un polygone équilatéral inſcrit dans un cercle eſt moyen proportionnel entre le côté du polygone ſemblable circonſcrit, et la moitié du côté du polygone inſcrit dont le nombre des côtés eſt la moitié [23]).

Dans un cercle dont le centre eſt A, le rayon AB, ſoit BC le côté du polygone inſcrit, et DE le côté, parallèle à ce BC, du polygone circonſcrit ſemblable. Ainſi la droite AB prolongée paſſe par D, et AC par E. Et ſi l'on mène CF à angles droits ſur AB, cette droite ſera le demi-côté du polygone inſcrit, dont le nombre des côtés eſt la moitié. Il s'agit donc de prouver, que BC eſt moyenne proportionnelle entre ED et CF. Menons AG, qui diviſe ED en deux parties égales; elle ſera auſſi le demi-diamètre du cercle et égale à AB. Et puiſqu'on a DA à AB, c'eſt-à-dire DA à AG, comme ED eſt à CB, mais BC à CF, comme DA à AG, à cauſe des triangles ſemblables DAG, BCF; on a par conſéquent que CB eſt à CF comme ED eſt à CB; ce qu'il fallait démontrer.

Lemme [24]).

Soit la ligne BC diviſée en deux parties égales en R, et en parties inégales en F, et ſoit FC le plus grand ſegment; et faiſons BO égale à la ſomme de BC et CF,

[Fig. 13.]

mais BM égale à la ſomme de BC et CR. Je dis que le rapport de RB à BF eſt plus grand que la troiſième puiſſance de celui de OB à BM. Prenons en effet chacun des deux ſegments ML, LP égal à OM. Alors puiſque MO eſt égale à RF, (car cela ſe comprend par la conſtruction) PO ſera le triple de FR. Mais auſſi BM eſt le triple de BR. Donc, comme BR à BM ainſi FR eſt à PO. Et, en permutant, BM à PO comme BR à FR. Mais BO eſt plus grand que BM. Donc le rapport de BO à OP ſera plus grand que celui de BR à RF et par

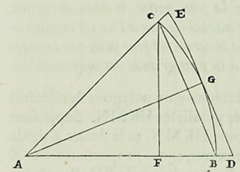
[23]) On a donc encore, en employant les notations de la note 7, p. 94: $p_{2n}^2 = p_n P_{2n}$. Consultez, sur la connection de ce théorème avec la „Prop. IX" de Snellius, la même note 7, p. 94.

ponetur longitudo arcus totius. Vel hac etiam ratione eadem habebitur, ſi arcus reliqui ad ſemicircumferentiam longitudo inveniatur aut ſupra eandem exceſſus, aut reliqui ad circumferentiam totam, ſi dodrante major fuerit datus; eaque longitudo adjungatur vel auferatur à dimidiæ vel totius circumferentiæ longitudine, quam antea invenire docuimus.

Theor. X. Prop. XIII.

Latus Polygoni æquilateri circulo inſcripti, proportione medium eſt inter latus polygoni ſimilis circumſcripti, & dimidium latus polygoni inſcripti ſubduplo laterum numero [23]).

In circulo cujus centrum A, radius AB, ſit latus inſcripti polygoni æquilateri BC; & latus circumſcripti ſimilis polygoni DE ipſi BC parallelum. Ergo producta AB tranſibit per D, & AC per E. Et ſi ducatur CF ipſi AB ad angulos rectos, ea erit dimidium latus polygoni inſcripti ſubduplo numero laterum. Itaque oſtendendum eſt, BC mediam eſſe proportione inter ED & CF. Ducatur AG, quæ dividat ED bifariam, itaque erit ipſa quoque circuli ſemidiameter & æqualis AB. Et quoniam eſt ut ED ad CB, ſic DA ad AB, hoc eſt, DA ad AG; ſicut autem DA ad AG, ita BC ad CF, propter triangulos ſimiles DAG, BCF. Erit proinde ut ED ad CB, ita quoque CB ad CF. Quod erat demonſtrandum.



[Fig. 12.]

Lemma [24]).

Eſto linea BC [Fig. 13] diviſa æqualiter in R; & inæqualiter in F, ſitque ſegmentum majus FC; & fiat BO æqualis utrique ſimul BC, CF; BM verò utrique BC, CR. Dico majorem eſſe rationem RB ad BF, quam triplicatam ejus, quam habet OB ad BM. Sumatur enim ipſi OM æqualis utraque harum ML, LP. Quoniam igitur MO ipſi RF æquales eſt, (nam hoc ex conſtructione intelligitur) erit PO tripla ipſius FR. Sed & BM tripla eſt BR. Ergo ut BR ad BM, ita FR ad PO. Et permutando ut BR ad FR, ſic BM ad PO. Major autem eſt BO quam BM. Ergo major erit ratio BO ad OP, quam BR ad RF: & per converſionem rationis

[24]) Ce „lemma" doit servir à préparer le théorème qui suit, auquel Huygens attacha tant d'intérêt; voir la note 17, p. 97 du Tome présent.

En posant $BR = a$, $RF = x$, le lemme nous apprend que pour $x < a$ on a: $\frac{a}{a-x} > \left(\frac{3a+x}{3a}\right)^3$, ou, si l'on veut, $\frac{1}{1-\zeta} > (1 + \frac{1}{3}\zeta)^3$, où $\zeta < 1$.

converfion des rapports, le rapport de OB à BP fera moindre que celui de RB à BF [25]). Enfuite, puifque OM et ML font égales, le rapport de BO à OM fera plus grand que BM à ML, et, par converfion des rapports, le rapport OB à BM fera plus petit que MB à BL. On prouvera encore de même que le rapport MB à BL est plus petit que LB à BP. De forte qu' à plus forte raifon la troifième puiffance du rapport de OB à BM fera plus petit que celui qui eft compofé des rapports OB à BM, BM à BL, et BL à BP, c'eft-à-dire que le rapport OB à BP. Mais RB à BF était plus grand que OB à BP. Donc, à plus forte raifon, le rapport RB à BF fera plus grand que la troifième puiffance du rapport OB à BM. Ce qu'il s'agiffait d'établir.

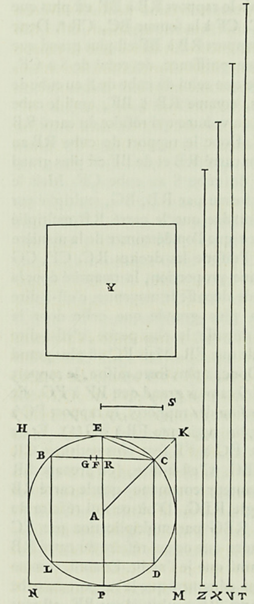
Théor. XI. Prop. XIV.

Toute circonférence de cercle eft moindre que la plus petite de deux moyennes proportionnelles entre les périmètres de polygones femblables, dont l'un eft régulièrement infcrit dans le cercle, l'autre circonfcrit. Et le cercle eft plus petit que le polygone femblable à ceux-là, dont le contour eft égal à la plus grande des moyennes [26]).

Soit un cercle BD, dont le centre eft A. Infcrivons-y un polygone équilatéral BCDL, et circonfcrivons-en un femblable à côtés parallèles HKMN. Suppofons que la droite T eft égale au périmètre du polygone HKMN, et la droite Z égale au périmètre de BCDL. Et foient entre Z et T deux moyennes proportionnelles X et V, dont X eft la plus petite. Je dis que la circonférence du cercle BD eft moindre que la droite X. Et fi l'on fait un polygone Y, dont le périmètre eft égal à la droite V, mais qui eft femblable au polygone BCDL ou HKMN, je dis que le cercle BD eft plus petit que le polygone Y. Menons en effet le diamètre PE du cercle, qui divife en deux parties égales les côtés parallèles BC, HK des polygones infcrit et circonfcrit, en R et E; E fera ainfi le point de contact du côté HK, et BC fera coupé en R à angles droits. Menons auffi du centre la droite ACK, qui divife en deux parties égales les angles C et K des deux polygones, car il eft avéré que cela fe fait par la même droite, et joignons CE. Mais prenons CF égale à CE, et foit CG une troifième proportionnelle à ces deux droites CR, CF. Alors, comme CE ou CF eft le côté d'un polygone infcrit, CG fera le côté du polygone femblable
* d'après 13. ici. circonfcrit*. Et par fuite les deux tiers de CF avec letiers de CG feront enfemble
* d'après 9. ici. plus grands que l'arc EC*. Mais foit la droite S égale aux deux tiers de CF avec le tiers de CG. Cette droite fera donc plus grande que l'arc EC.

Et puifque CR eft à CF comme CF eft à CG, on aura auffi que le double de CR ajouté à CF eft au triple de CR, c'eft-à-dire que la fomme de BC et CF eft à la fomme de BC et CR, comme le double de CF avec CG eft au triple de CF: ou, en prenant les tiers de ces grandeurs, comme $\frac{2}{3}$ CF avec $\frac{1}{3}$ CG eft à CF, c'eft-à-dire comme S eft à CF. Donc auffi la troifième puiffance du rapport qui exifte

minor OB ad BP, quam RB ad BF [25]). Porro quoniam æquales funt OM, ML, major erit ratio BO ad OM, quam BM ad ML: & per converfionem rationis minor OB ad BM, quam MB ad BL. Eodem modo minor adhuc oftendetur ratio MB ad BL, quam LB ad BP. Itaque omnino ratio triplicata ejus quam habet OB ad BM minor erit quam compofita ex rationibus OB ad BM, BM ad BL, & BL ad BP, hoc eft, quam ratio OB ad BP. Major autem erat RB ad BF, quam OB ad BP. Ergo omnino major erit ratio RB ad BF, quam triplicata rationis OB ad BM. Quod erat propofitum.



[Fig. 14.]

Theor. XI. Prop. XIV.

Omnis circuli circumferentia minor eft minore duarum mediarum proportionalium inter perimetros polygonorum fimilium, quorum alterum ordinate circulo infcriptum fit, alterum circumfcriptum. Et circulus minor eft polygono iftis fimili cujus ambitus majori mediarum æquetur [26]).

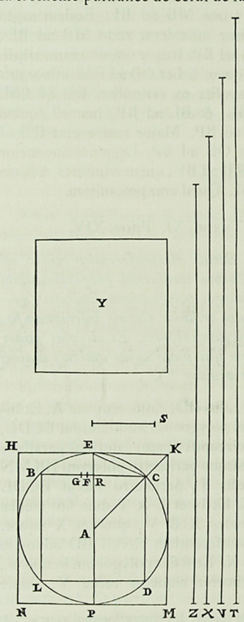
Efto circulus BD, cujus centrum A. Et infcribatur ei polygonum æquilaterum BCDL, fimileque circumfcribatur lateribus parallelis HKMN. Sitque perimetro polygoni HKMN æqualis recta T, perimetro autem BCDL æqualis Z. Et inter Z & T duæ fint mediæ proportionales X & V, quarum X minor. Dico circumferentiam circuli BD minorem effe rectâ X. Et fi fiat polygonum in quo Y, cujus perimeter æquetur rectæ V, fimile

[25]) Huygens, ici et plus loin, emploie un théorème de la théorie des proportions qui pour $a > b$, $c > d$ permet de conclure de l'inégalité $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ à celle-ci: $\frac{a}{a-b} < \frac{c}{c-d}$.

[26]) Consultez, sur la première partie de ce théorème, la p. 97 du Tome présent. La démonstration de cette partie revient à l'application de l'égalité $P_{2n} p_n = p_{2n}^2$ et des inégalités $2\pi < \frac{2}{3} p_{2n} + \frac{1}{3} P_{2n}$ et $\frac{p_n}{2p_n - p_{2n}} > \left(\frac{2p_n + p_{2n}}{3p_n}\right)^3$, prouvées au Théorème IX et au Lemme qui précède ici, et ensuite à la démonstration de l'inégalité $(2p_n - P_{2n}) p_{2n} < p_n (2p_n - p_{2n})$ (c'est-à-

entre la ſomme des deux droites BC, CF et la ſomme de BC et CR eſt égale à la troiſième puiſſance du rapport de S à CF. Mais le rapport RB à BF eſt plus que la troiſième puiſſance de celui de la ſomme BC, CF à la ſomme BC, CR *. Donc le même rapport RB à BF eſt plus grand que la troiſième puiſſance de celui de S à CF, c'eſt-à-dire que celui du cube de S au cube de CF. Mais, comme RB à BF, ainſi le cube de RB eſt au volume qui réſulte du carré RB et de BF. Donc le rapport du cube RB au produit du carré RB et de BF eſt plus grand que celui du cube S au cube CF. Mais le rectangle formé par RB, BG, multiplié par FC eſt moindre que le carré RB multiplié par BF; ce que l'on démontre de la manière ſuivante. Puiſque les droites RC, CF, CG forment une proportion, la quantité dont la plus grande dépaſſe la moyenne, c'eſt-à-dire FG, ſera plus grande que celle dont la moyenne dépaſſe la plus petite, c'eſt-à-dire plus grande que FR. Mais FC eſt plus grand que FB. Donc, à plus forte raiſon, le rapport CF à FR ſera plus grand que BF à FG. Et par converſion des rapports, le rapport FC à CR ſera plus petit que FB à BG [25]). Et en permutant FC à FB ſera plus petit que CR ou RB à BG. C'eſt-à-dire, (en prenant BR pour la hauteur commune) que le carré RB au rectangle RBG. D'où ce qui réſulte du rectangle RBG par multiplication par FC ſera moindre que ce qui réſulte du carré RB par FB, ainſi que je l'ai dit. Et ainſi, comme nous avons démontré que le rapport du cube RB au carré RB multiplié par BF, eſt plus grand que le rapport du cube S au cube CF; à plus forte raiſon le rapport du cube RB au ſolide formé par le rectangle RBG et FC ſera plus grand que celui du cube S au cube CF. Et en permutant, le rapport du cube RB au cube S ſera plus grand que celui du rectangle RGB multiplié par FC au cube CF; c'eſt-à-dire, du rectangle RBG au carré CF. Mais le carré CF eſt égal au rectangle GCR, c'eſt-à-dire le rectangle formé par GC et RB, parce que les droites CR, CF et CG forment une proportion. Par ſuite le rapport du cube

* d'après le lemme qui précède.



[Fig. 14.]

autem ſit polygono BCDL aut HKMN; Dico circulum BN minorem haberi polygono Y. Ducatur enim diameter circuli PE, quæ dividat bifariam latera parallela BC, HK, inſcripti circumſcriptique polygoni in R & E; erit autem E punctum contactus lateris HK, & BC ſecabitur in R ad angulos rectos. Ducatur etiam ex centro recta ACK, quæ utriuſque polygoni angulos C & K bifariam ſecet, nam hoc ab eadem recta fieri conſtat; & jungatur CE. Ipſi autem CE ponatur æqualis CF; ſitque duabus his CR, CF tertia proportionalis CG. Ergo qualis polygoni inſcripti latus eſt CE ſive CF, talis circumſcripti latus erit CG *. Ideoque duæ tertiæ CF cum triente CG ſimul majores erunt arcu EC*. Sit autem duabus tertiis CF cum triente CG æqualis recta S. Ergo & hæc major erit arcu EC.

*per. 13. huj.

*per. 9. huj.

Et quoniam ſe habet CR ad CF, ut CF ad CG; erit quoque dupla CR una cum CF ad triplam CR, hoc eſt, utraque ſimul BC, CF ad utramque BC, CR, ut dupla CF una cum CG ad triplam CF: vel ſumptis horum trientibus, ut $\frac{2}{3}$ CF unà cum $\frac{1}{3}$ CG ad CF, hoc eſt, ut S ad CF. Quare etiam triplicata ratio ejus quam habet utraque ſimul BC, CF ad utramque BC, CR eadem erit triplicatæ rationi S ad CF. Major autem eſt ratio RB ad BF quàm triplicata ejus, quam habet utraque ſimul BC, CF ad utramque BC, CR*. Ergo major eadem ratio RB ad BF quam triplicata ejus quam habet S ad CF, hoc eſt, quam cubi S ad cubum CF. Sicut autem RB ad BF, ita eſt cubus RB ad id quod fit ex quadrato RB in BF. Ergo major quoque ratio cubi RB ad quadratum RB in BF, quam cubi S ad cubum CF. Quadrato autem RB in BF minus eſt rectangulum ſub RB, BG, in FC; quod ſic oſtenditur. Quia enim proportionales ſunt RC, CF, CG, Erit id quo major mediam excedit, hoc eſt, FG major quam quo media minimam, hoc eſt, quam FR. Major autem eſt FC quam FB. Ergo omnino major erit ratio CF ad FR, quam BF ad FG. Et per converſionem rationis, minor ratio FC ad CR, quam FB ad BG [25]). Et permutando minor FC ad FB, quam CR ſeu RB ad BG: hoc eſt, (ſumptâ communi altitudine BR) quam quadrati RB ad rectangulum RBG. Unde quod fit ex rectangulo RBG in FC minus erit quam quod ex quadrato RB in FB, uti dictum fuit. Quum itaque major oſtenſa fuerit ratio cubi RB ad quadratum RB in BF, quam cubi S ad cubum CF; omnino

*per lemma praec.

dire BG. CF < RB. BF) et de l'égalité $(2p_n - P_{2n}) : P_{2n} = p_n : P_n$ ou $2p_n - P_{2n} = p_{2n}^2 : P_n$ (c'est-à-dire BG : GC = RC : EK). A l'aide de ces formules le théorème en question se démontre ainsi:

$$2\pi < \frac{2}{3} p_{2n} + \frac{1}{3} P_{2n} = \frac{p_{2n}(2p_n + p_{2n})}{3p_n} < p_{2n} \sqrt[3]{\frac{p_n}{2p_n - p_{2n}}} < \sqrt[3]{\frac{\frac{2}{n} p_{2n}^2}{2p_n - P_{2n}}} = \sqrt[3]{p_n^2 P_n}.$$

C'est ici la seule fois que Huygens emploie une relation (p. 155, l. 7) qui équivaut à la relation importante $2p_n - P_{2n} = p_{2n}^2 : P_n$.

Quant à la seconde partie du théorème, elle amène l'inégalité $\pi < \left(\frac{\sqrt[3]{p_{2n} P_{2n}^2}}{P_{2n}}\right)^2 S_{2n}$, qui, à l'aide la relation $S_{2n} = \frac{1}{2} P_{2n}$, se réduit, elle aussi, à celle-ci: $2\pi < \sqrt[3]{p_{2n}^2 P_{2n}}$; voir encore la première page de la préface et surtout la note 1, p. 115 du Tome présent.

RB au cube S ſera plus grand que celui du rectangle RBG au rectangle formé par GC, RB; c'eſt-à-dire, que BG à GC. Mais, comme BG eſt à GC, ainſi RC eſt EK. En effet, puiſque CR eſt à CG comme le carré ſur CR au carré ſur CF ou au carré ſur CE, et que d'autre part le carré ſur CR, eſt au carré ſur CE comme PR au diamètre PE; pour cette raiſon on aura CR à CG comme PR à PE. D'où le double de CR, c'eſt-à-dire CB, eſt à CG comme le double de PR eſt à PE, c'eſt-à-dire comme PR eſt à PA. Et, par partage, BG eſt à GC comme RA à AP, ou AE, c'eſt-à-dire, comme RC à EK, ce que nous diſions. Et ainſi le rapport du cube RB au cube S, c'eſt-à-dire, le rapport RB à S élevé à la troiſième puiſſance, eſt plus grand que celui de RC à EK. Mais nous avons montré que S eſt plus grand que l'arc EC. Donc à plus forte raiſon la troiſième puiſſance du rapport RB ou RC à une droite égale à l'arc EC ſera plus grand que celui de RC à EK. Mais, comme RC à l'arc EC, ainſi le périmètre du polygone BCDL, c'eſt-à-dire, la ligne Z, eſt a la circonférence du cercle BD; et comme RC à EK, ainſi le périmètre du polygone BCDL eſt au périmètre du polygone HKMN, c'eſt-à-dire, ainſi Z eſt à T. Donc la troiſième puiſſance du rapport de Z à la circonférence entière BD ſera auſſi plus grande que celui de Z à T. Mais la troiſième puiſſance du rapport de Z à X eſt égale au rapport de Z à T. Et ainſi le rapport de ce Z à la dite circonférence eſt plus grand que celui de Z à X. Et par conſéquent la circonférence eſt plus petite que la droite X. Ce qu'il fallait démontrer.

Mais on doit ſavoir que cette droite X eſt plus petite que les deux tiers de Z avec le tiers de T, c'eſt-à-dire, plus petite que les deux tiers du périmètre du polygone inſcrit augmentés du tiers du circonſcrit; la circonférence du cercle étant d'ailleurs plus petite que cela, d'après ce qui précède [27]). Car $\frac{2}{3}$ Z avec $\frac{1}{3}$ T eſt égal à la plus petite des moyennes proportionnelles ſuivant une proportion arithmétique, laquelle eſt plus grande que la plus petite des moyennes proportionnelles ſuivant une proportion géométrique. Mais nous allons encore démontrer du polygone Y qu'il eſt plus grand que le cercle BD. Or, comme le rapport du polygone Y au polygone ſembable HKMN eſt le carré de celui du périmètre au périmètre, et que le périmètre du polygone Y eſt égal à la droite V, et le périmètre HKMN égal à T, le rapport du polygone Y au polygone HKMN ſera donc le carré de celui de V à T, c'eſt-à-dire, égal à celui de X à T. Mais, comme le polygone HKMN eſt au cercle BD, ainſi le périmètre de ce polygone, c'eſt-à-dire, la ligne T, eſt à la circonférence du cercle BD; parce que le polygone eſt égal au triangle ayant une baſe égale à ſon périmètre et comme hauteur le rayon AE, tandis que le cercle eſt égal à un triangle de même hauteur et dont la baſe eſt égale à la circonférence. Il réſulte donc, en combinant ces proportions, que le polygone Y ſera au cercle BD comme X eſt à la circonférence BD [28]). Mais nous avons montré que X eſt plus grand que la circonférence BD. Donc le polygone Y ſera auſſi plus grand que le cercle BD. Ce qu'il fallait démontrer.

quoque major erit ratio cubi RB ad ſolidum ſub rectangulo RBG in FC, quam cubi S ad cubum CF. Et permutando major ratio cubi RB ad cubum S, quam rectanguli RBG in FC ad cubum CF; hoc eſt, quam rectanguli RBG ad quadratum CF. Eſt autem quadrato CF æquale rectangulum GCR, hoc eſt, rectangulum ſub GC, RB, quia proportionales ſunt CR, CF, CG. Itaque major erit ratio cubi RB ad cubum S, quam rectanguli RBG ad rectangulum ſub GC, RB, hoc eſt, quam BG ad GC. Sicut autem BG ad GC, ita RC ad EK. Quia enim eſt CR ad CG, ut quadratum CR ad quadratum CF ſeu quadratum CE: ut autem quadratum CR ad quadratum CE, ita eſt PR ad PE diametrum: Erit idcirco CR ad CG, ut PR ad PE. Unde dupla CR, hoc eſt, CB ad CG, ut dupla PR ad PE, hoc eſt, ut PR ad PA. Et dividendo, BG ad GC, ut RA ad AP, ſeu AE, hoc eſt, ut RC ad EK, quod dicebamus. Itaque major quoque ratio cubi RB ad cubum S, hoc eſt, ratio triplicata RB ad S, quam RC ad EK. Eſt autem S major oſtenſa arcu EC. Ergo omnino major erit ratio triplicata RB ſeu RC ad æqualem arcui EC, quam RC ad EK. Sicut autem RC ad arcum EC, ita eſt perimeter polygoni BCDL, hoc eſt, linea Z ad circumferentiam circuli BD; Et ſicut RC ad EK, ita perimeter polygoni BCDL ad perimetrum polygoni HKMN, hoc eſt, ita Z ad T. Ergo major quoque triplicata ratio Z ad circumferentiam totam BD, quam Z ad T. Ratio autem triplicata Z ad X eadem eſt rationi Z ad T. Itaque major eſt ratio ipſius Z ad dictam circumferentiam, quam Z ad X. Ac proinde circumferentia minor quam recta X. Quod erat demonſtrandum.

Sciendum eſt autem ipſam X minorem eſſe duabus tertiis Z & triente T: hoc eſt, duabus tertiis perimetri polygoni inſcripti & triente circumſcripti, quibus alioqui minorem eſſe circuli circumferentiam conſtat ex præcedentibus [27]). Nam $\frac{2}{3}$ Z cum $\frac{1}{3}$ T æquantur minori duarum mediarum ſecundùm Arithmeticam proportionem, quæ major eſt minore mediarum ſecundum proportionem Geometricam. Jam verò & de polygono Y demonſtrabimus, ipſum videlicet circulo BD majus eſſe. Quia enim polygonum Y habet ad polygonum ſimile HKMN rationem duplicatam ejus quam perimeter ad perimetrum: perimeter autem polygoni Y æquatur rectæ V, & perim. HKMN ipſi T. habebit proinde polygon. Y ad polyg. HKMN rationem duplicatam ejus quam V ad T, hoc eſt, eam quam X ad T. Sicut autem polygonum HKMN ad circulum BD, ita eſt perimeter ipſius polygoni, hoc eſt, linea T ad circuli BD circumferentiam; quoniam polygonum æquale eſt triangulo baſin habenti perimetro ſuæ æqualem & altitudinem radii AE, circulus autem æqualis ejuſdem altitudinis triangulo cujus baſis circumferentiæ æquetur. Ex æquali igitur, erit polygonum Y ad circulum BD ſicut X ad circumferentiam BD [28]). Eſt autem X major oſtenſa quam BD circumferentia. Ergo & polygonum Y majus erit circulo BD. Quod erat demonſtrandum.

[27]) D'après la „Prop. IX", p. 137, déjà citée plus haut.
[28]) Comparez la note 1, p. 115 du Tome préſent.

Par là eſt manifeſte l'erreur d'Oronce Fine[29]) qui prétendit que le quadrant d'un cercle eſt égal au plus petit des deux moyennes proportionnelles entre les côtés du carré inſcrit et du carré circonſcrit, et que le cercle eſt égal au carré formé au moyen du plus grand.

Théor. XII. Propos. XV.

Si entre le prolongement du diamètre d'un cercle et la circonférence on place une droite égale au rayon, et que cette droite prolongée coupe le cercle et rencontre la droite touchant le cercle à l'autre extrémité du diamètre: cette droite découpera de la tangente une partie plus grande que l'arc adjacent découpé[30]).

Soit décrit le cercle à centre C, dont le diamètre eſt AB. Prolongeons celui-ci du côté de A et plaçons entre lui et la circonférence une droite ED égale au rayon. Et ſuppoſons que cette droite prolongée coupe la circonférence en F, et rencontre en G la tangente, ſavoir celle qui touche le cercle à l'extrémité B du diamètre. Je dis que la tangente BG eſt plus grande que l'arc BF. Menons en effet par le centre la droite HL parallèle à EG, qui rencontre la circonférence aux points H et M, et la tangente BG en L. Et joignons DH, qui coupe le diamètre en K. Alors les triangles EDK, CHK ſont ſemblables, parce qu'ils ont les angles en K égaux, et l'angle E égal à l'angle C. Mais le côté ED eſt encore égal au côté HC, et ces côtés ſont ſous-tendus par des angles égaux. Par conſéquent le côté DK eſt auſſi égal au côté KH. Pour cette raiſon CA coupe DH en deux parties égales, et de même l'arc DAH. L'arc DH, ou l'arc FM qui lui eſt égal, eſt donc le double de l'arc AH. Mais l'arc MB eſt égal à l'arc AH. Donc l'arc FB ſera le

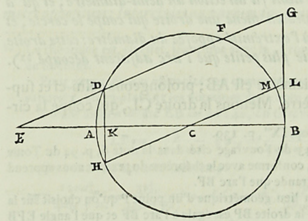
[29]) Oronce Fine, fils du médecin François Fine, naquit en 1494 à Briançon en Dauphiné. Il mourut le 8 octobre 1555 à Paris, où il jouissait d'une grande réputation comme professeur de mathématiques; réputation qui n'est pas confirmée par les ouvrages qu'il laissait. Il s'agit ici de l'ouvrage: „Orontii Finaei Delphinatis, Regii Mathematicarum Lutetiæ Professoris, Quadratura Circuli, tandem inuenta & clarissimè demonstrata. De circuli mensura & ratione circumferentiae ad diametrum, Demonstrationes duae. De multangularum omnium & regularium figurarum descriptione, Liber hactenus desideratus. De inuenienda longitudinis locorum differentia, aliter quàm per Lunares eclipses, etiam dato quouis tempore, Liber admodùm singularis. Planisphaerium geographicum, quo tum longitudinis atque latitudinis differentiae, tum directae locorum deprehenduntur elongationes. Lutetiae Parisiorum, Apud Simonem Colinaeum. 1544." in Folio. Toutefois dans l'exemplaire qui nous a été prêté par la Bibliothèque de l'Université de Paris à la Sorbonne, on ne trouve (à la p. 13) que le second des deux théorèmes mentionnés par Huygens, c'est-à-dire, celui qui se rapporte à l'aire du cercle; mais il faut bien que dans d'autres exemplaires ou dans une autre édition le premier théorème a été ajouté. En effet, dans la réfutation par Nonius de l'ouvrage cité, laquelle parut en 1546 sous le titre: „De Erratis Orontii Finaei Regii Mathematicarum Lutetiae Professoris". on lit à la page 28: „His in hunc modum constructis ait Orontius quadratum *bf*, aequari inprimis ipsi dato circulo *ah*,... praeterea quadratum *cg*, eidem circulo *ah* esse isoperimetrum," où les

Ex his manifeſtus eſt Orontii Finei[29]) error, qui circumferentiæ quadrantem æqualem minori duarum proportione mediarum inter inſcripti & circumſcripti quadrati latera prodidit, circulum vero æqualem quadrato quod fieret à majori.

Theor. XII. Propos. XV.

Si inter productam circuli diametrum & circumferentiam recta aptetur radio æqualis, & producta circulum ſecet, occurratque tangenti circulum ad alterum diametri terminum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abſciſſo majorem[30]).

Eſto deſcriptus circulus centro C, cujus diameter AB. Hæc autem producatur verſus A, interque ipſam & circumferentiam ponatur ED recta radio AC æqualis. Quæ producta ſecet circumferentiam in F, occuratque tangenti in G, ei nimirum quæ circulum contingit ad diametri terminum B. Dico tangentem BG majorem eſſe arcu BF. Ducatur enim per centrum recta HL parallela EG, quæ circumferentiæ occurrat in punctis H, M: tangenti verò BG in L. Et jungatur DH, quæ diametrum ſecet in K. Similes itaque ſunt trianguli EDK, CHK, quoniam angulos ad K æquales habent, & angulum E æqualem angulo C. Sed & latus ED æquale eſt lateri HC, ſuntque hæc latera æqualibus angulis ſubtenſa. Ergo æquale etiam latus DK lateri KH. Itaque CA ſecat bifariam ipſam DH, itemque arcum DAH. Arcus igitur DH ſive huic æqualis FM duplus eſt ad arcum AH. Ipſi autem AH æqualis eſt arcus MB. Igitur arcus FB triplus erit



[Fig. 15.]

carrés *bf* et *cg* sont les moyens proportionnels entre les carrés circonscrit et inscrit du cercle *ah*. D'ailleurs ce n'est pas là ni la première, ni la dernière fausse quadrature dont Oronce Fine se rendit responsable. On en recontre une autre au fol. 90 de son „Protomathesis" de 1532 et de nombreuses, différentes entre elles et d'avec celles signalées ici par Huygens, dans l'ouvrage posthume: „De rebus mathematicis, hactenus desideratis, Libri IIII. Quibus inter caetera, Circuli quadratura Centum modis, & suprà, per eundem Orontium recenter excogitatis, demonstratur. Lutetiae Parisiorum, M.D.LVI. Ex officina Michaëlis Vascosani."

[30]) Le théorème, identique avec la „Prop. XXIX" de Snellius, ne diffère pas essentiellement du „Theor. IX. Prop. IX", p. 137 du Tome présent, auquel la démonstration le ramène. Il s'exprime donc par les deux premières formules de la note 10, p. 136.

triple de l'arc AH. Puis, comme HK eſt le ſinus de l'arc HA et que LB eſt égal à la tangente de cet arc, les deux tiers de HK et le tiers de LB ſeront enſemble plus grands que l'arc AH*. De ſorte que ſi l'on prend le triple de tout, le double de HK, c'eſt-à-dire, HD ou GL, enſemble avec LB ſera plus grand que le triple de l'arc AH, c'eſt-à-dire que l'arc FB. Il paraît donc que la droite GB toute entière eſt plus grande que l'arc FB.

* *d'après 9. ici*[31]).

Ce théorème eſt le ſecond des deux ſur leſquels eſt baſée toute la Cyclométrie de Willebrord Snellius, et que lui-même voulait paraître avoir démontré, au moyen d'un raiſonnement qui contient une pure pétition de principe[32]). Mais nous démontrerons auſſi l'autre théorème, parce qu'il eſt ſurtout utile et fort digne d'être conſidéré.

Théor. XIII. Propos. XVI.

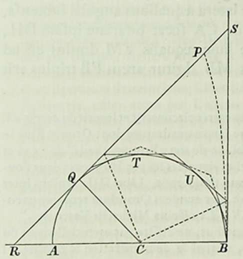
Si au diamètre d'un cercle on ajoute dans ſa direction un demi-diamètre, et qu' à partir de l'extrémité de la droite ajoutée on mène une droite qui coupe le cercle, et rencontre la droite qui touche le cercle à l'extrémité oppoſée du diamètre: cette droite interceptera ſur la tangente une partie plus petite que l'arc adjacent découpé[33]).

Soit un cercle [Fig. 16], dont le diamètre eſt AB; prolongeons celui-ci et ſuppoſons que AC eſt égal au demi-diamètre. Menons la droite CL, qui coupe la cir-

[31]) Voir le dernier alinéa du „Theor. IX. Prop. IX", p. 139.

[32]) Il s'agit de la „Propositio XXIX", p. 43 de l'ouvrage cité dans la note 6, p. 94 du Tome présent, laquelle proposition est, en effet, conforme avec le théorème du texte et nous apprend que la droite GB de la figure 15 est plus grande que l'arc BF.

Pour le montrer Snellius s'occupe du lieu géométrique d'un point P qu'on choisit sur la droite EG de la figure 15 de manière que la droite BP est égale à l'arc BF et que l'angle EPB est un angle aigu. Or, Snellius prétend que ce lieu, qui évidemment doit passer par le point B se trouvera entièrement à gauche de la tangente BG, auquel cas on aura BP < BG. Mais pour prouver cette assertion, il se borne à montrer que dans le cas particulier, où la droite EG touche le cercle, le point P se trouve en effet à gauche de la tangente. Ainsi le lieu cherché se compose d'une courbe qui de ce point P doit s'étendre au point B et il y a donc bien une certaine probabilité, mais aucune certitude, qu'elle restera en entier à gauche de la droite BG.



Quant au cas particulier que nous venons de mentionner, Snellius le traite dans sa „Propositio XXVI", p. 40 de son ouvrage. Soit alors, dans la figure ci-jointe, Q le point dans lequel D et F de la figure 15 se sont rencontrés. L'arc QTUB est donc, puisque QR = CQ, la $\frac{3}{8}$ième partie de la circonférence du cercle et, comme la figure le montre, elle est plus petite que six des côtés d'un polygone circonscrit à seize côtés. Snellius n'a donc qu'à prouver que BS est plus grand que ces six côtés; ce qu'il a fait en effet.

ad arcum AH. Porrò quoniam HK ſinus eſt arcus HA, ejuſdemque tangenti æquatur LB, Erunt duæ tertiæ HK & triens LB ſimul majores arcu AH*. Quare ſumptis omnium triplis erit dupla HK, hoc eſt, HD ſive GL unà cum LB major arcu AH triplo, hoc eſt, arcu FB. Apparet igitur totam GB arcu FB majorem eſſe.

* *per. 9. huj.*[31])

Hoc Theorema alterum eſt ex iis quibus Cyclometria Willebrordi Snellii tota innititur, quæque demonſtraſſe ipſe videri voluit, argumentatione uſus quæ meram quæſiti petitionem continet[32]). Sed & alterum ſubjungemus, quod utile eſt imprimus & contemplatione digniſſimum.

Theor. XIII. Propos. XVI.

Si diametro circuli ſemidiameter in directum adjiciatur, & ab adjectæ termino recta ducatur quæ circulum ſecet, occuratque tangenti circulum ad terminum diametri oppoſitum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abſciſſo minorem[33]).

[33]) Le théorème est, en effet, identique avec la „Proposition XXVIII", p. 42, du „Cyclometricus" de Snellius.

Pour juger de son efficacité, en comparaison avec les théorèmes de Huygens, il nous faut supposer, en employant les notations de la note 10, p. 136, qu'on a EG (Fig. 16) $= \frac{1}{2} a_{2n}$.

Posant alors $\alpha =$ arc EB $= 2\pi : 4n$, on trouve facilement:

$$LB = \frac{3}{2+\cos\alpha} \cdot \tfrac{1}{2} a_{2n} = \frac{3\sin\alpha}{4\sin\alpha + \sin 2\alpha} \cdot a_{2n} = \frac{3a_{2n}^2}{4a_{2n} + a_n}.$$

On a donc, d'après le théorème:

$$2\pi > \frac{12na_{2n}^2}{4a_{2n}+a_n} = \frac{3p_{2n}^2}{2p_{2n}+p_n} = p_{2n} + (p_{2n}-p_n)\cdot\frac{p_{2n}}{2p_{2n}+p_n} = p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n}-p_n)\cdot\frac{3p_{2n}}{2p_{2n}+p_n} =$$

$$= p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n}-p_n)\left\{1 + \frac{p_{2n}-p_n}{2p_{2n}+p_n}\right\} = p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n}-p_n) + \tfrac{1}{9}\frac{(p_{2n}-p_n)^2}{p_{2n}} \cdot \frac{3p_{2n}}{2p_{2n}+p_n} =$$

$$= p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n}-p_n) + \tfrac{1}{9}\frac{(p_{2n}-p_n)^2}{p_{2n}} + \left[\frac{(p_{2n}-p_n)^3}{9p_{2n}(2p_{2n}+p_n)}\right].$$

Comme on le voit, cette limite est du même ordre que celle, bien plus simple, indiquée par les „Theor. V et VII", pp. 129 et 133 du Tome présent.

Quant à la démonstration que Snellius prétendait avoir donnée, elle souffre du même défaut que celle de sa „Propositio XXIX" (voir la note précédente). Cette fois encore il s'agit d'un lieu géométrique, c'est-à-dire, de celui décrit par un point P choisi sur la droite CL (Fig. 16) de manière qu'on ait BP = arc EB et que l'angle CPB soit un angle aigu. Dans le cas particulier où CL touche le cercle il est clair qu'on aura EL = EB = BL; donc BP = arc EB sera plus grand que BL et le point P devra se trouver à droite de la tangente LB. De là Snellius se hasarde à conclure que toute la courbe, qui constitue le lieu géométrique cherché et qui doit nécessairement passer par le point B, sera située à droite de la tangente BL; auquel cas on doit avoir, en effet, arc. BE = BP > BL.

Or, pour faire voir combien cette conclusion est fallacieuse, il suffit de remarquer que si l'on place le point C un peu plus près du point A, une partie de la courbe se trouvera, dans le voisinage du point B, à gauche de BL; comme cela résulte aisément de la considération de la note 37, qui suit.

conférence pour la ſeconde fois en E; et ſuppoſons qu'elle rencontre en L la tangente qui touche le cercle à l'extrémité du diamètre B. Je dis que la longueur interceptée BL eſt plus petite que l'arc BE. Joignons en effet AE, EB; puis, ayant porté AH égal à AE, menons HE et prolongeons cette droite, qui rencontre la tangente en K. Enfin menons EG à angles droits ſur le diamètre AB, et ED perpendiculaire à la tangente BL. Puiſque le triangle HAE eſt ainſi iſoſcèle, les angles H et HEA ſeront égaux entr'eux. Mais comme l'angle AEB eſt droit, les deux angles HEA et KEB ſeront auſſi égaux enſemble à un angle droit. Mais les deux angles H et HKB valent auſſi un angle droit, parce que dans le triangle HKB l'angle B eſt droit. Donc enlevant de part et d'autre deux quantités égales, ici l'angle H, là l'angle HEA, il reſte que les angles KEB, HKB ſont égaux entr'eux. Le triangle KBE eſt donc iſoſcèle, et ſes côtés EB, BK ſont égaux. Mais BD eſt égal à EG. Donc DK eſt la différence, dont BE dépaſſe EG. Enſuite, puiſque AG eſt à AE comme AE à AB, les deux droites AG et AB vaudront
25.5. Élem.[34]) enſemble plus que le double de AE. Ainſi AE, c'eſt-à-dire, AH, eſt moindre que la moitié de la ſomme des deux droites AG, AB, c'eſt-à-dire, moindre que CA, augmenté de la moitié de AG. Par ſuite, ſi l'on retranche de part et d'autre CA, CH ſera plus petit que la moitié de AG. Mais CA eſt plus grand que la moitié de AG. Donc, ſi l'on ajoute AC à AG, la ligne CG toute entière ſera plus grande que le triple de CH. Mais, comme HG à GE, ainſi ED eſt à DK, et comme GE à GC, ainſi LD eſt à DE; on aura donc par la règle de la proportion dérangée [35]) que LD eſt à DK, comme HG eſt à GC. Et par converſion des rapports et par partage, DK eſt à KL comme GC eſt à CH. Donc auſſi DK eſt plus grand que le triple de KL. Mais DK était l'excès de EB ſur EG. Donc KL eſt plus petit que le tiers du dit excès. Or, KB eſt égal à cette corde EB. Donc KB avec KL, c'eſt-
* d'après 7. ici [36]). à-dire toute la droite LB eſt à plus forte raiſon moindre que l'arc BE*. Ce qu'il fallait démontrer.

Mais, en conſidération du théorème précédent, il eſt clair qu'il n'eſt pas poſſible de prendre ſur le prolongement du diamètre BA un autre point, qui ſoit moins diſtant du cercle que le point C et qui peut ſervir à la même propriété, ſavoir qu' en traçant CL on obtienne une tangente interceptée BL toujours plus petite que l'arc découpé BE [37]).

---

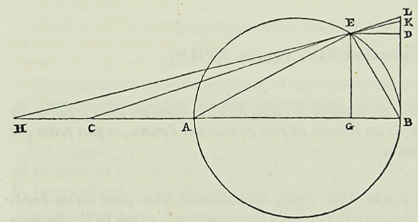
34) Si quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt." (Clavius, p. 518).

35) Voir la note 22, p. 304 du Tome XI.

36) Voir le dernier alinéa de la démonstration du „Theor. VII", p. 135 du Tome préſent.

37) Soit, en effet, dans la figure 15, E un point choisi sur le prolongement de AB de manière que AE soit un peu plus petit que le rayon du cercle. Alors on peut tirer une droite ED égale à ce rayon, qui sera l'équivalent de la droite CL de la figure 16. Ainsi LB de cette dernière figure sera alors identique avec GB de la figure 15; mais on sait que, dans cette figure 15, GB est plus grand que l'arc FB; donc il en sera de même avec LB de la figure 16, c'est-à-dire,

Eſto circulus, cujus diameter AB; quæ producatur, & ſit AC ſemidiametro æqualis. Et ducatur recta CL, quæ circumferentiam ſecundò ſecet in E; occurratque tangenti in L, ei nimirum quæ circulum contingit in termino diametri B. Dico interceptam BL arcu BE minorem eſſe. Jungantur enim AE, EB, poſitâque AH ipſi AE æquali ducatur HE & producatur, occurratque tangenti in K. Denique ſit



[Fig. 16.]

EG diametro AB ad angulos rectos, ED verò tangenti BL. Quoniam igitur iſoſceles eſt triangulus HAE, erunt anguli inter ſe æquales H & HEA. Quia autem angulus AEB rectus eſt, etiam recto æquales erunt duo ſimul HEA, KEB. Verùm duo quoque iſti H & HKB uni recto æquantur, quoniam in triangulo HKB rectus eſt angulus B. Ergo demptis utrimque æqualibus, hinc nimirum angulo H, inde angulo HEA, relinquentur inter ſe æquales anguli KEB, HKB. Triangulus igitur iſoſceles eſt KBE, ejuſque latera æqualia EB, BK. Eſt autem BD æqualis EG. Ergo DK differentia eſt quâ BE excedit EG. Porrò quoniam eſt AG ad AE, ut AE ad AB, erunt duæ ſimul AG, AB majores duplâ AE*. Ideo- *25.5. Elem.[34])
que AE, hoc eſt, AH minor quam dimidia utriuſque ſimul AG, AB; hoc eſt, minor quam CA cum dimidia AG. Quare ablatâ utrimque CA, erit CH minor dimidiâ AG. CA verò dimidiâ AG major eſt. Ergo ſi addatur AC ad AG, erit tota CG major quam tripla ipſius CH. Quia autem ut HG ad GE, ita eſt ED ad DK; ut autem GE ad GC, ita LD ad DE: Erit ex æquo in proportione turbata [35]) ut HG ad GC, ita LD ad DK. Et per converſionem rationis & dividendo, ut GC ad CH, ita DK ad KL. Ergo etiam DK major quam tripla KL. Erat autem DK exceſſus ipſius EB ſupra EG. Ergo KL minor eſt triente dicti exceſſus. KB autem æqualis eſt ipſi EB ſubtenſæ. Ergo KB unà cum KL, hoc eſt, tota LB omnino minor erit arcu BE*. Quod erat demonſtrandum. *per. 7. huj.[36])

Perpenſo autem Theoremate præcedenti, liquet non poſſe ſumi punctum aliud in producta BA diametro, quod minus à circulo diſtet quam punctum C, eandemque ſervet proprietatem, ut nimirum ductâ CL fiat tangens intercepta BL ſemper minor arcu abſciſſo BE [37]).

---

cette droite pourra surpasser l'arc EB, aussitôt que le point C est choisi sur AB à droite de sa position actuelle.

Puis l'uſage de ce théorème eſt multiple, tant pour trouver les angles de triangles dont les côtés ſont donnés, et ſela ſans le ſecours de tables, que pour trouver les côtés quand les angles ſont donnés, ou encore pour déterminer la corde d'un arc de périphérie quelconque. Toutes ces queſtions ont été traitées aſſidûment et à fond par Snellius dans ſa Cyclométrie [38]).

Théorème XIV. Propos. XVII [39]).

Le centre de gravité d'un ſegment de cercle diviſe le diamètre de ce ſegment, de telle manière que la partie au ſommet eſt plus grande que l'autre, et plus petite que une et demie fois cette autre.

Soit un ſegment de cercle ABC (mais ſuppoſons-le plus petit qu'un demi-cercle, parce que les autres ne ſatiſfont pas à la propoſition), et ſoit BD le diamètre du ſegment, qui eſt partagé en deux parties égales en E. Nous avons ainſi à démontrer d'abord que le centre de gravité du ſegment AB ſe trouve à partir du ſommet B au-delà du point E; car nous avons montré ailleurs [40]) qu'il eſt ſitué ſur le diamètre. Menons par E une droite parallèle à la baſe, qui rencontre de part et d'autre le cercle aux points F et G. Par ces points menons KI, HL, perpendiculaires à la baſe AC; ces droites forment, avec celle qui touche le ſegment au ſommet, le rectangle KL. Puiſque le ſegment eſt moindre qu'un demi-cercle, il eſt certain que la moitié FL du dit rectangle eſt contenue dans la figure AFGC, qui contient en outre les eſpaces AFI et LGC, mais que l'autre moitié KG du rectangle KL embraſſe le ſegment FBG, enſemble avec les eſpaces FBK, BGH. Comme ces eſpaces ſont tout entiers au-deſſus de la droite FG, leur centre de gravité commun ſera ſitué auſſi au-deſſus de cette même droite. Mais le point E ſur cette droite eſt le centre de gravité de tout le rectangle KL. Donc le centre de gravité de l'eſpace reſtant BFILG ſera ſous la droite FG. Mais auſſi le centre de gravité commun des eſpaces AFI, LGC eſt au-deſſous de la même droite FG. Par conſéquent, le centre de gravité de la grandeur formée par ces eſpaces et le dit eſpace BFILGB, c'eſt-à-dire, du ſegment ABC lui-même, doit néceſſairement être trouvé au-deſſous de la ligne FG, et par ſuite au-deſſous du point E.

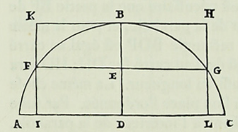
38) Voir dans l'„Appendicula, et Cyclometrices usus" les problèmes V („Datis trianguli rectanguli lateribus ejus angulos invenire") et VI („Datis trianguli rectanguli angulis oppositorum laterum rationem invenire"), p. 95—102 de l'ouvrage, cité dans la note 6, p. 94 du Tome présent; et de même aux p. 76—83 de cet ouvrage la „Propositio XXXVIII: Datae

Porrò uſus hujus Theorematis multiplex eſt, cum in inveniendis triangulorum angulis quorum cognita ſint latera, idque citra tabularum opem, tum ut latera ex angulis datis inveniantur, vel cuilibet peripheriæ arcui ſubtenſa aſſignetur. Quæ omnia à Snellio in Cyclometricis diligenter pertractata ſunt [38]).

Theorema XIV. Propos. XVII [39]).

Portionis circuli centrum gravitatis diametrum portionis ita dividit, ut pars quæ ad verticem reliquâ major ſit, minor autem quam ejuſdem ſeſquialtera.

Eſto circuli portio ABC, (ponatur autem ſemicirculo minor, quoniam cæteræ ad propoſitum non faciunt) & diameter portionis ſit BD, quæ biſariam ſecetur in E. Itaque oſtendendum eſt primò centrum gravitatis portionis AB diſtare à vertice B ultra punctum E; nam, quod in diametro ſitum ſit, alibi oſtendimus [40]). Ducatur per E recta baſi parallela, quæ utrimque circumferentiæ occurrat in punctis F & G. Per quæ ducantur KI, HL baſi AC ad angulos rectos, atque hæ cum ea, quæ portionem in vertice contingit, conſtituant rectangulum KL. Quoniam igitur portio ſemicirculo minor eſt, conſtat rectanguli dicti dimidium FL contineri intra ſegmentum AFGC, atque inſuper ſpatia quædam AFI, LGC. Alterum verò rectanguli KL ſemiſſem KG complecti ſegmentum FBG unà cum ſpatiis FBK, BGH. Quæ ſpatia quum ſint tota ſupra rectam FG, etiam centrum commune gravitatis eorum ſupra eandem ſitum erit. Eſt autem E punctum in ipſa FG centrum grav. totius rectanguli KL. Igitur ſpatii reliqui BFILGB centrum grav. erit infra rectam FG. Sed & ſpatiorum AFI, LGC commune gravitatis centrum eſt infra eandem FG. Ergo magnitudinis ex ſpatiis hiſce & dicto ſpatio BFILGB compoſitæ, quæ eſt portio ipſa ABÇ, centrum gravitatis infra lineam FG reperiri neceſſe eſt, ideoque infra E punctum.



[Fig. 17.]

cuicunque peripheriæ inscriptam veræ tam propinquam in numeris exhibere, quam erit ratio diametri ad suam peripheriam data".

39) Consultez, sur la partie de l'ouvrage présent qui commence avec cette proposition, les p. 97 et 98 de „l'Avertissement".

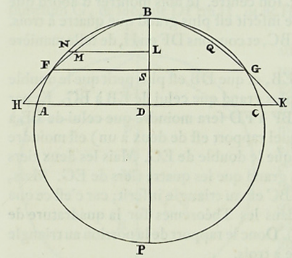
40) Voir le „Theorema IV" des „Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro", p. 295 du Tome XI.

Suppoſons maintenant que le même diamètre ſoit diviſé en S [Fig. 18], de telle manière que BS ſoit une et demie fois le reſte SD. Je dis que le centre de gravité du ſegment ABC eſt moins diſtant du ſommet que le point S. Soit, en effet, BDP le diamètre du cercle entier, et menons par S une droite parallèle à la baſe, qui rencontre la circonférence en F et G. Et imaginons une parabole dont le ſommet eſt B, l'axe BD, et le paramètre égal à SP. Et qu'elle rencontre la baſe du ſegment en H et K. Puiſqu' alors le carré ſur FS eſt égal au rectangle BSP, c'eſt-à-dire, à celui formé par BS et le paramètre de la parabole, celle-ci paſſera par le point F et de même par G. Mais les parties BF, BG de la ligne parabolique tomberont à l'intérieur de la circonférence, et les autres FH, GK lui feront extérieures. Car cela ſe démontre en menant une ordonnée NL entre B et S, qui rencontre la circonférence en N, et la parabole en M. Or, puiſque le carré ſur NL eſt égal au rectangle BLP, tandis que le carré ſur ML l'eſt au rectangle formé par les lignes BL, SP; et que le rectangle BLP eſt plus grand que celui formé par BL, SP: le carré ſur NL ſera plus grand que le carré ſur ML, et la ligne NL plus grande que la ligne ML. Et la même choſe arrive quel que ſoit le point entre B et S ou l'on applique l'ordonnée. Par conſéquent, il eſt néceſſaire que la partie BF de la circonférence ſoit toute entière à l'extérieur de la parabole, et pour la même raiſon la partie BG. D'autre part, puiſque le rectangle BDP eſt égal au carré ſur DA, et que le rectangle formé par BD, SP eſt égal au carré ſur DH; HD ſera plus grand que AD quant aux carrés, donc auſſi en longueur. La même choſe arrivera quel que ſoit l'endroit entre S et D où l'on place l'ordonnée. Par ſuite les parties FA et GC de la circonférence tombent à l'intérieur de la parabole. On obtient ainſi certains eſpaces FNBM et BQG, ainſi que d'autres HFA, GCK. Comme les derniers de ces eſpaces ſont tout entiers au-deſſous de la ligne FG, leur centre de gravité commun eſt auſſi au-deſſous de cette droite. Mais le centre de gravité du ſegment parabolique HBK eſt dans cette droite FG, ſavoir au point S*. Donc le centre de gravité de la partie reſtante AFMBQGC ſera au-deſſus de la droite FG. Mais il eſt clair que le centre de gravité des eſpaces FMBN, BQG eſt également ſitué au-deſſus d'elle puiſque ces eſpaces ſont tout entiers au-deſſus de cette droite FG. Donc on trouvera auſſi au-deſſus de la ligne FG le centre de gravité de l'eſpace formé par ces deux et AFMBQGC, c'eſt-à-dire du ſegment de cercle ABC; et comme ce centre eſt ſur le diamètre BD, il ſera moins diſtant du ſommet B que le point S. Ce qu'il fallait démontrer.

* 8. *livre 2. Archim. de Aequipond.* 41)

41) Voici cette Propoſition telle qu'on la trouve p. 138 de l'édition de Bâle, mentionnée dans la note 3, p. 274 du T. XI: „Cuiuscunque portionis à recta linea & rectanguli coni sectione comprehensae, centrum grauitatis dividit diametrum portionis, ita ut pars eius ad verticem terminata, sit ad partem eam sequialtera, quae ad basim portionis terminatur". (Heiberg, T. II, p. 213).

Idem verò diameter BD ſecetur nunc in S [Fig. 18], ita ut BS ſit ſeſquialtera reliquæ SD. Dico centrum grav. portionis ABC minus diſtare à vertice B quam punctum S. Sit enim BDP totius circuli diameter. & ducatur per S recta baſi parallela quæ circumferentiæ occurrat in F & G. Et parabole intelligatur cujus vertex B, axis BD, rectum verò latus æquale SP. Et occurrat baſi portionis in H & K. Quoniam igitur quadratum FS æquale eſt rectangulo BSP, hoc eſt, ei quod ſub BS & latere recto parabolæ continetur, tranſibit ea per F punctum, itemque per G. Partes autem lineæ parabolicæ BF, BG intra circumferentiam cadent, ſed reliquæ FH, GK erunt exteriores. Hoc enim oſtenditur ductâ inter B & S ordinatim applicatâ NL, quæ circumferentiæ occurrat in N, parabolæ autem in M. Nam quia quadratum NL æquale eſt rectangulo BLP, quadratum verò ML rectangulo contento lineis BL, SP: rectangulum autem BLP majus eo quod ſub BL, SP continetur: erit quadratum NL majus quadrato ML, & NL linea major quam ML. Idem autem continget ubicunque inter B & S aliqua ordinatim applicabitur. Igitur partem circumferentiæ BF totam extra parabolam ferri neceſſe eſt, eâdemque ratione partem BG. Rurſus quia rectangulum BDP æquale eſt quadrato DA; rectangulum verò ſub BD, SP contentum quadrato DH; erit HD major quam AD potentiâ, ideoque & longitudine. Idemque eveniet ubicunque inter S, D, ordinatim aliqua applicabitur. Quare partes circumferentiæ FA, itemque GC intra parabolam cadent. Fiunt igitur ſpatia quædam FNBM, & BQG, itemque alia HFA, GCK. Quorum hæc cum tota ſint infra lineam FG, etiam centrum commune gravitatis eorum infra eandem erit. At parabolicæ portionis HBK centrum grav. eſt in ipſa FG, nimirum S punctum*. Ergo partis reliquæ AFMBQGC centrum grav. erit ſupra rectam FG. Sed ſupra hanc ſitum quoque apparet centrum grav. ſpatiorum FMBN, BQG, quum tota ſint ſupra ipſam FG. Ergo & ſpatii ex hiſce duobus & AFMBQGC compoſiti, hoc eſt, portionis circuli ABC centrum grav. ſupra lineam FG reperietur: quumque ſit in BD diametro, minus aberit à vertice B quam punctum S. Quod erat oſtendendum.



[Fig. 18.]

* 8. *lib. 2. Archim. de Æquipond.* 41)