PRÉFACE.

Eſtimant nous avoir occupé récemment avec quelque ſuccès de l'antique problème de la quadrature du cercle, le plus célèbre de tous aux yeux même de ceux qui n'entendent pas les Mathématiques, et ayant obtenu quelques choſes meilleures, à ce que nous croyons, que ce qui a été trouvé juſqu' ici, nous les voulons communiquer aux Géomètres avec leurs démonſtrations. Car nous jugeons que non ſeulement elles ſeront utiles à leurs études, mais auſſi que, par leur nouveauté même, elles ſerviront d'aiguillon à la recherche de choſes cachées pour ceux qui conſidéreront que même ſur un champ, où tous ont travaillé depuis longtemps avec le plus grand effort, il reſtait encore à conquérir à la diligence des prix de quelque valeur. Pluſieurs, il eſt vrai, ont tâché précédemment de s'attribuer la gloire de l'invention de la Quadrature et ont produit de temps en temps diverſes réflexions où le vrai et le faux ſe trouvaient mélangés. Mais nous ſavons que toutes ces choſes ont été ou renverſées ou mépriſées par de plus compétents et que juſqu' ici, de tout ce qui pourrait ſervir de baſe pour trouver la dimenſion du cercle, rien n'a été accepté que cette ſeule vérité, que le cercle eſt plus grand que le polygone qui lui eſt inſcrit et plus petit que le polygone circonſcrit. Mais nous, nous énonçons une détermination plus approchée et démontrons, que *ſi l'on prend deux polygones, moyens proportionnels entre l'inſcrit et le circonſcrit et qui leur ſont ſemblables, le périmètre du plus petit d'entr' eux eſt plus grand que la circonférence du cercle, et que l'autre polygone excède l'aire du cercle dans la même proportion* [1]). Et quoique parmi les propoſitions que nous allons démontrer celle-ci paraiſſe la plus difficile et particulièrement digne de contemplation, il y en a cependant d'autres, qui non ſeulement ſont plus préciſes [2]), mais qui dans leur uſage ſe montreront plus propres; leſquelles toutefois nous ne paſſerons pas en revue dans cette préface, parce que dans la ſuite elles pourront être mieux compriſes. Mais il pourra être à propos d'expoſer brièvement ce qu'elles contribuent à l'étude de la Géométrie, parce qu'elles ſe recommandent par leur utilité non négligeable. Ainſi donc, comme nous avons inſtitué une double manière de traiter notre ſujet, d'abord en donnant ce dont la démonſtration eſt compriſe dans les éléments ordinaires de la Géométrie, enſuite en employant auſſi la conſidération

PRÆFATIO.

Circa antiquum Tetragoniſmi problema, quo vel apud Mathematum ignaros nihil eſt celebrius, recens operæ pretium nos feciſſe rati, & quædam hactenus compertis meliora ut putamus conſecuti, Geometris ea demonſtrata impertiri volumus. Namque & ſtudiis eorum profutura arbitramur, & novitate ipſâ ad rerum abditarum inveſtigationem incitamento futura, reputantibus in eo quoque argumento, ubi omnes pridem ſummâ contentione verſati ſint, aliqua ſuperfuiſſe haud indigna diligentiæ præmia. Plurimi quidem antehac inventæ Quadraturæ gloriam ſibi aſſerere conati ſunt, variaque ſubinde commenta protulere, falſis vera miſcentes. Verum à peritioribus omnia vel everſa fuiſſe vel contempta ſcimus, neque aliud adhuc receptum, quo omnis circuli dimenſio niteretur, præter unum illud, majorem eſſe eum inſcripto ſibi polygono, circumſcripto minorem. Nos autem propiorem determinationem nunc exhibemus oſtendimuſque, quod duobus ſumptis polygonis proportione mediis inter inſcriptum circumſcriptumque ipſis ſimile, minoris eorum perimeter circumferentiâ circuli major exiſtit, reliquum vero polygonum eâdem proportione circuli aream exuperat [1]). *Et hoc quidem ut inter ea quæ demonſtraturi ſumus & difficillimum & contemplatione præcipuè dignum videatur, alia tamen ſunt non accuratiore modò* [2])*, ſed quæ & uſu magis probentur; quæ ſanè hic in anteceſſum non recenſebimus, quippe in ſequentibus rectius percipienda. Breviter tamen quid ſtudiis Geometriæ conferant expoſuiſſe proderit, cum non minimam habeant utilitatis commendationem. Cum igitur duplicem propoſiti tractationem inſtituerimus, primùm ea tradendo quorum demonſtratio conſuetis Geometriæ elementis contenta eſt, deinde centrorum gravitatis quoque conſiderationem adhibendo:*

---

[1]) Voir le „Theor. XI. Prop. XIV", p. 151 du Tome préſent. Il est vrai que, dans l'énoncé du théorème cité, on ne trouve pas indiqué *l'égalité* des deux proportions, c'est-à-dire, du rapport du périmètre du moindre des deux polygones à la circonférence du cercle et de celui de l'aire du plus grand à celle du cercle; toutefois cette égalité est exprimée plus loin, vers la fin de la démonstration (p. 155), par la phrase: „Ex aequali igitur, erit polygonum Y ad circulum BD sicut X ad circumferentiam BD".

[2]) Comparez les notes 13 et 17 aux pp. 96 et 97 du Tome présent.

des centres de gravité: on trouvera dans la première partie expliqué comment on peut conſtruire non ſeulement une droite égale à la circonférence entière [3]) mais auſſi celle qui eſt égale à un arc donné quelconque [4]), en ramenant la ſolution à des conſtructions mécaniques, de manière qu'elle ne ſe trouve en défaut même dans les plus ſubtiles de ces conſtructions. Comment auſſi le rapport de la périphérie au diamètre, qu' Archimède déduiſit des polygones de 96 côtés, peut être vérifié par les calculateurs au moyen du dodécagone ſeulement [5]). Mais tandis que ceux qui ſuivent l'ancienne voie trouveront par le polygone de 10800 côtés à peine les limites 62831852 et 62831855 parties dont le diamètre en contient 20000000, ils verront que par notre Méthode il vient 62831853071795 84, 62831853071795 89 [6]); et que l'on obtient toujours le nombre double de chiffres vrais, quel que ſoit le nombre de côtés du polygone employé. Et nous avons reconnu que cela eſt ainſi pour une raiſon certaine [7]) de même auſſi que le carré d'un nombre quelconque ſe compoſe ordinairement d'un nombre de chiffres double de celui de la racine. Mais une propriété des centres de gravité rend le calcul encore plus compendieux, et par elle nous ſemblons en quelque ſorte avoir approché plus près à la perfection de ce problème irréſoluble. En effet, pour établir les limites de la périphérie, obtenues par Archimède, nous n'avons beſoin que de connaître le côté du triangle inſcrit [8]). Mais du polygone de ſoixante côtés nous démontrons [9]) qu'elle eſt contenue entre 31415926538 et 31415926533, en attribuant au diamétre 10000000000 parties, tandis que la méthode uſuelle produit à peine les nombres 3145 et 3140. De manière que le nombre de chiffres vrais eſt maintenant le triple et plus, de même que le double par la méthode précédente; et cela continue ainſi toujours, tout comme on remarque que dans les grands nombres le cube contient trois fois autant de chiffres que ſa racine [7]). De ſorte que ſi dorénavant il y en a qui définiſſent fauſſement la grandeur de la circonférence du cercle, ils ne ſeront plus réfutés par des polygones à côtés nombreux, mais par un calcul bref et nullement compliqué, qu'ils ne pourront plus facilement accuſer d'erreur, comme ils ſont preſque habitués juſqu' ici. De plus, ſi dans la Table des cordes, dont chacun ſait combien il importe qu'elle ſoit corrigée, des erreurs ont été faites pendant ſa compoſition ou ſe ſont gliſſées venant d'ailleurs, il ne ſera pas difficile de les corriger au moyen de notre méthode, puiſque maintenant on peut trouver d'une autre manière au moyen des inſcrites dans le cercle, la longueur des arcs ſouſtendus. Et même à ceux qui manquent de tout aide des Tables nous montrons de quelle manière ils peuvent déduire des côtés donnés les angles des triangles [10]), de façon que l'écart de la valeur vraie ne ſoit jamais de deux ſecondes, et ſouvent même pas d'une tierce. Et nous avons la confiance que cela ſera conſidéré comme

[3]) Voir le „Problema II. Prop. XI", p. 143 du Tome présent.
[4]) Voir le „Problema III. Prop. XII", p. 147.

in prioribus quidem illud explicatum reperietur, quomodo non tantum circumferentiæ toti [3])*, ſed & arcui cuilibet dato recta linea æqualis invenienda ſit* [4])*; expeditâ ratione ad Mechanicas conſtructiones, quæque vel ſubtiliſſimas earum minimè fruſtretur. Quomodo item numeros excercentibus peripheriæ ad diametrum ratio, quam Archimedes ex polygonis laterum* 96 *eruit, per dodecagona ſola comprobari queat* [5])*. Ex polygonis autem laterum* 10800*, cum iis qui veterem inſiſtunt viam vix hi peripheriæ termini exiſtant* 62831852 & 62831855*, ad diametrum partium* 20000000*, noſtrâ Methodo iſti prodiiſſe cernentur*, 62831853071795 84, 62831853071795 89 [6])*; ſemperque duplicem obtineri verorum characterum numerum, quacunque laterum multitudine polygona adhibeantur. Quod quidem certâ ratione contingere* [7]) *perſpeximus ſicuti & quadratum cujuſque numeri bis totidem quot latus characteribus plerumque conſtituitur. At majora etiam compendia centrorum gravitatis proprietas ſubminiſtrat, & propius quodammodo ad perfectionem inſuperabilis problematis per hæc acceſſiſſe videmur. Certè ad Archimedeos peripheriæ limites conſtituendos, ſolo nunc inſcripti trigoni cognito latere indigemus* [8])*. E ſexagintangulo autem inter hoſce eam contineri probamus* [9]) 31415926538 & 31415926533*, poſitâ diametro partium* 10000000000*, cum ſolitâ methodo vix iſti producantur* 3145, 3140*. Adeo ut triplus jam & ultra ſit verarum hic notarum numerus, ſicut per præcedentia duplus; & perpetuo quidem ſucceſſu, haud aliter quam in majoribus numeris cubum ſui lateris triplum eſſe animadvertitur* [7])*. Ergo poſthac ſi qui falsò circumferentiæ magnitudinem definient, per numeroſa polygona non refutabuntur, ſed calculo brevi miniméque intricato, quemque erroris inſimulare, quod hactenus ferè ſoliti ſunt, haud facile poſſint. Ad hæc ſi quid in ſubtenſarum Canone, quem emendatum haberi quantum referat omnes ſciunt, in eo contexendo ſi quid erit admiſſum aut aliunde perverſum irrepſerit, non difficile erit horum ope reſtituere, cum aliâ nunc ratione ex inſcriptis in circulo longitudinem arcuum quibus ſubtenduntur invenire liceat. Quinimo & omni Canonum auxilio deſtitutis oſtendimus, quo pacto ex lateribus triangulorum datis angulos eorum inveſtigare queant* [10])*, ut nunquam duorum ſecundorum ſcrupulorum ſit à vero diſſenſus, ſæpe ne unius quidem tertii. Et hæc quidem non levia commoda viſum iri confidimus. Comperimus autem & Renatum*

[5]) Comparez le „Problema I. Prop. X", p. 139.
[6]) Comparez la dernière partie (p. 143) de la proposition citée dans la note précédente.
[7]) Voir la note 15, p. 142 du Tome présent.
[8]) Comparez les p. 173—177 du Tome présent.
[9]) Comparez la p. 179.
[10]) Le sujet n'est pas traité expressément dans l'ouvrage présent; mais on peut le rattacher facilement au dernier alinéa de la page 179. En effet, par le calcul de la hauteur du triangle on trouve aisément la corde qui appartient au double de chacun de ses angles; ensuite cet alinéa apprend à determiner les arcs soustendus par ces cordes, d'où l'on peut déduire, en se servant du nombre π, les grandeurs des angles cherchés. Voir encore le dernier alinéa, p. 163 de la démonstration du „Theorema XIII", où sont mentionnés les travaux de Snellius sur ce même sujet.

un avantage non léger. Mais nous avons reconnu que René Defcartes, dont les inventions ont illuftré non feulement la Philofophie univerfelle mais furtout les Mathématiques, a mis par écrit quelques chofes qui fe rapportent à ce fujet [11]). On dit qu' après fa mort elles ont été trouvées dans fes notices, et jufqu' ici nous n'avons pu favoir par quelle méthode et avec quel fuccès il y a mis la main. Mais de Willebrord Snellius, le favant géomètre, nous avons le Cyclometricus [12]), écrit laborieux et entièrement confacré à cette matière. Et il aurait paru mériter de grandes louanges, s'il eût pu démontrer les deux théorèmes principaux [13]) fur lefquels, comme fur des fondements, tout cet ouvrage eft conftruit. Mais ce qu'il y veut avoir admis comme démonftrations ne prouve nullement ce qui eft propofé: toutefois ces deux théorèmes, comme nous le montrerons d'une manière évidente pour chacun d'eux, contiennent une vérité importante. Et nous avons jugé qu'ils devraient être inférés à bon droit dans ce qui fuit, parce que leurs caufes dépendent de nos inventions.

[11]) Sous la date du 31 déc. 1653, Constantijn Huygens, père, écrivit à la Princesse Élizabeth: „Monsieur Chanut, qui possede tous les papiers du defunct [M. Descartes], & prétend d'en faire imprimer quelques Lettres d'eslite, desire feuilleter le tout aueq mond[t] Archimede pour veoir ce qu'il y a encor de Philosophique ou de Mathematique, dont on pourroit faire part au publiq, n'y ayant point de brouillon de ceste merueilleuse main, à mon aduis, qui ne le merite".

Or, Chanut, qui avait recueilli ces papiers à Stockholm lors du décès de Descartes, était alors ambassadeur de France à la Haye. Mais il semble qu'il n'a pas donné suite à son intention de les montrer à Christiaan Huygens avant de les envoyer en France, où il les confia aux soins de Clerselier.

Toutefois Christiaan Huygens a pu prendre connaissance de l'inventaire, dressé à Stockholm, des manuscrits de Descartes, dont une copie était dans la possession de son père. On y lit sous la lettre B:

„Un Registre relié, & couvert de parchemin, ... Le second feuillet porte en teste: Ex quantitate linearum, quae in dato circulo inscriptae sunt, quantitatem circumferentiae, cui datae lineae subtenduntur, cognoscere".

La pièce qui avait ce titre fut publiée en 1701 dans l'ouvrage: „R. Des-Cartes Opuscula

Cartefium, cujus viri inventis cum Philofophia univerfa tum Mathefis plurimum illuftrata eft, nonnulla quæ huc fpectent fcriptis mandaffe [11]). *Ea verò defuncto ipfo in commentariis reperta feruntur, neque adhuc refcire potuimus quâ induftriâ aut eventu hifce manum admoverit. Willebrordi autem Snellii geometræ eruditi Cyclometricus* [12]) *extat, multo labore confcriptus, quique omnis in his eft. Atque ille non exiguam laudem promeritus videretur, fi præcipua duo theoremata, quibus omne id opus velut fundamentis fuperftructum eft, demonftrare potuiffet* [13]). *Sed quas ibi pro demonftrationibus haberi poftulat, propofitum minimè comprobant: ipfa verò theoremata, ficut in utroque evidenti ratione nos oftendimus, præclaram continent veritatem. Et ea quidem fequentibus meritò inferenda putavimus, quod caufæ eorum à noftris pendeant inventis.*

posthuma, physica & mathematica. Amstelodami, ex typographiâ P. & J. Blaeu, MDCCI". On la trouve dans l'édition récente des „Œuvres de Descartes" d'Adam et Tannery aux pages 285—289 du T. X.

Elle contient un tableau des valeurs irrationnelles des cordes dérivant des côtés du carré, du triangle équilateral, du pentagone et du pentadécagone réguliers.

En outre, on trouve dans cette même publication de 1701 un article, qui donne, sous la suscription: „Circuli quadratio", une construction ingénieuse par laquelle on peut approcher indéfiniment à la longueur du diamètre d'un cercle dont la circonférence est donnée; voir les p. 304—305 du T. X de l'édition d'Adam et Tannery.

Pour plus de détails on peut encore consulter de cette même édition les pp. 1—5, 279—284 du T. X.

[12]) Consultez, sur Snellius et sur l'ouvrage cité, les notes 5 et 6, p. 94 du Tome présent.

[13]) Voir, sur ces théorèmes, la note 8, p. 95 du Tome présent et les pp. 157 et 159 du même Tome.

CHRISTIAAN HUYGENS, FILS DE CONSTANTIN.

SUR

L'INVENTION DE LA GRANDEUR DU CERCLE.

Théorème I. Proposition I.

Si dans un ſegment de cercle, moindre que la moitié du cercle [1]), *on inſcrit le plus grand triangle poſſible, et pareillement des triangles dans les ſegments reſtants, le triangle décrit en premier lieu ſera moindre que le quadruple de la ſomme des deux décrits dans les ſegments reſtants.*

Soit ABC le ſegment de cercle, moindre que la moitié du cercle [1]), dont le diamètre eſt BD, et le plus grand triangle inſcrit ABC, c'est-à-dire ayant la même baſe et la même hauteur que le ſegment. Et ſoient inſcrits de même dans les ſegment reſtants les plus grands triangles poſſibles AEB, BFC. Je dis que le triangle ABC eſt moindre que le quadruple de la ſomme des deux triangles AEB, BFC. Tirons la droite EF, qui coupe le diamètre du ſegment en G. Puis donc que l'arc AB eſt diviſé en deux parties égales au point E, EA et EB ſeront chacune plus grande que la moitié de AB. Par ſuite le carré de AB ſera moindre que le quadruple du carré de EB ou de EA. Mais, comme le carré de AB eſt au carré de EB, ainſi eſt la longueur de DB à celle de BG, parce que le carré de AB eſt égal au rectangle conſtruit ſur DB et le diamètre du cercle entier, et le carré de EB égal au rectangle conſtruit ſur le même diamètre et la droite BG. BD eſt donc moindre que le quadruple de BG. Mais AC eſt également moindre que le double de EF parce que celle-ci eſt égale à AB. Il paraît donc que le triangle ABC eſt moindre que l'octuple du triangle EBF. Mais à ce dernier triangle eſt égal chacun des deux AEB, BFC. Par conſéquent ABC ſera moindre que le quadruple de la ſomme de ces deux derniers triangles. Ce qu'il fallait démontrer.

[1]) Voir les „Errata", p. 215; mais la restriction n'est pas nécessaire, le théorème et la démonstration restant valables dans le cas où le segment excède un demi-cercle.

CHRISTIANI HUGENII, CONST. F.

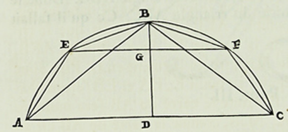
DE

CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA.

Theorema I. Propositio I.

Si Circuli portioni ſemicirculo minori [1]), *triangulum maximum inſcribatur, & portionibus reliquis triangula ſimiliter inſcribantur, erit triangulum primo deſcriptum duorum ſimul quæ in portionibus reliquis deſcripta ſunt minus quam quadruplam.*

Eſto circuli portio ABC ſemicirculo minor [1]), cujus diameter BD; maximum autem inſcriptum ſit triangulum ABC, hoc eſt, quod baſin & altitudinem habeat cum portione eandem. Et reliquis duabus portionibus inſcribantur triangula item maxima AEB, BFC. Dico triangulum ABC minus eſſe quam quadruplum triangulorum AEB, BFC ſimul ſumptorum. Jungatur enim EF, quæ ſecet diametrum portionis in puncto G. Quoniam igitur arcus AB bifariam dividitur in E puncto, erit utraque harum EA, EB, major dimidiâ AB. Quamobrem quadratum AB minus erit quam quadruplum quadrati EB vel EA. Sicut autem quadratum AB ad quadr. EB, ita eſt DB ad BG longitudine; quia quadratum quidem AB æquale eſt rectangulo quod à DB & circuli totius diametro continetur, quadratum verò EB æquale rectangulo ſub eadem diametro & recta BG. Minor igitur eſt BD quam quadrupla BG. Sed & AC minor eſt quam dupla EF, quoniam hæc ipſi AB æquatur. Ergo patet triangulum ABC minus eſſe quam octuplum trianguli EBF. Huic autem triangulo æquantur ſingula AEB, BFC. Ergo utriuſque ſimul triangulum ABC minus erit quam quadruplum. Quod erat oſtendendum.



[Fig. 1.]

Théor. II. Prop. II.

Soient donnés un ſegment moindre que la moitié du cercle, et ſur ſa baſe un triangle dont les côtés ſont tangents au ſegment; ſoit tirée de plus une droite tangente au ſegment dans ſon ſommet: cette droite coupera du triangle nommé un triangle plus grand que la moitié du plus grand triangle que l'on puiſſe inſcrire dans le ſegment.

Soit ABC le ſegment de cercle, moindre qu'un demi-cercle, B ſon ſommet. Et AE, CE les deux tangentes aux extrémités de la baſe, leſquelles ſe rencontrent en E; elles ſe rencontreront parce que le ſegment eſt moindre qu'un demi-cercle. Soit tirée de plus FG, tangente au ſommet B et joignons AB, BC. Il faut donc montrer que le triangle FEG eſt plus grand que la moitié du triangle ABC. Il eſt certain que les triangles AEC, FEG, de même que AFB, BGC ſont iſocèles et que FG eſt diviſée par B en deux parties égales. Or, la ſomme de FE et EG eſt plus grande que FG; donc EF eſt plus grande que FB, ou plus grande que FA. La droite entière AE eſt donc moindre que le double de FE. Par conséquent le triangle FEG ſera plus grand que le quart du triangle AEC. Mais comme FA à AE, ainſi eſt la hauteur du triangle ABC à la hauteur du triangle AEC et la baſe de ces deux triangles eſt la même AC. Donc, comme FA eſt moindre que la moitié de AE, le triangle ABC ſera moindre que la moitié du triangle AEC. Mais le triangle FEG était plus grand que le quart du triangle AEC. Donc le triangle FEG eſt plus grand que la moitié du triangle ABC. Ce qu'il fallait démontrer.

Théor. III. Prop. III.

Tout ſegment de cercle, moindre que la moitié du cercle[1]*) eſt au plus grand triangle inſcrit dans un rapport plus grand que quatre à trois.*

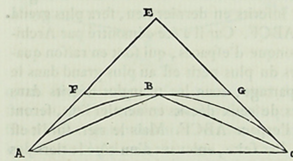
Soit un ſegment de cercle [Fig. 3], moindre qu'un demi-cercle [1]), dans lequel eſt inſcrit le plus grand triangle poſſible ABC. Je dis que ce ſegment eſt au dit triangle dans un rapport plus grand que quatre à trois. Inſcrivons, en effet, dans les deux ſegments reſtants les triangles les plus grands ADB, BEC. Le triangle ABC eſt ainſi plus petit que le quadruple de ceux-ci enſemble*: et pour cette raiſon on peut ajouter au triangle ABC un certain eſpace, qui, joint à lui, ſoit encore plus petit que le quadruple de la ſomme des triangles ADB, BEC. Soit donc ajouté

* *d'après* 1. *ici.*

Theor. II. Prop. II.

Si fuerit circuli portio ſemicirculo minor, & ſuper eadem baſi triangulum, cujus latera portionem contingant; ducatur autem quæ contingat portionem in vertice: Hæc à triangulo dicto triangulum abſcindet majus dimidio maximi trianguli intra portionem deſcripti.

Eſto circuli portio ſemicirculo minor ABC, cujus vertex B. Et contingant portionem ad terminos baſis rectæ AE, CE, quæ conveniant in E: convenient enim quia portio ſemicirculo minor eſt.



[Fig. 2.]

Porro ducatur FG, quæ contingat ipſam in vertice B; & jungantur AB, BC. Oſtendendum eſt itaque, triangulum FEG majus eſſe dimidio trianguli ABC. Conſtat triangula AEC, FEG, item AFB, BGC æquicruria eſſe, dividique FG ad B bifariam. Utraque autem ſimul FE, EG, major eſt quam FG; ergo EF major quam FB, vel quam FA. Tota igitur AE minor quam dupla FE. Quare triangulum FEG majus erit quarta parte trianguli AEC. Sicut autem FA ad AE, ita eſt altitudo trianguli ABC ad altitudinem trianguli AEC, & baſis utrique eadem AC. Ergo, quum FA ſit minor quam ſubdupla totius AE, erit triangulum ABC minus dimidio triangulo AEC. Hujus verò quarta parte majus erat triangulum FEG. Ergo triangulum FEG majus dimidio trianguli ABC. Quod oſtendendum fuit.

Theor. III. Prop. III.

Omnis circuli portio ſemicirculo minor [1]), *ad maximum triangulum inſcriptum majorem rationem habet quam ſeſquitertiam.*

Eſto Circuli portio [Fig. 3] ſemicirculo minor [1]), cui maximum ſit inſcriptum triangulum ABC. Dico portionem ad dictum triangulum majorem rationem habere quam quatuor ad tria. Inſcribantur enim & reliquis portionibus duabus maxima triangula ADB, BEC. Itaque minus eſt triangulum ABC quam illorum ſimul quadruplum*: ac proinde ſpatium aliquod adjungi poteſt triangulo ABC, quod una cum ipſo minus etiam ſit quam quadruplum dictorum ſimul triangulorum ADB, BEC.

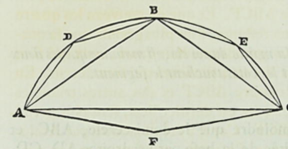
* *per* 1. *huj.*

pour ce motif le triangle AFC, tel que tout l'eſpace ABCF ſoit moindre que le quadruple des triangles ADB, BEC. Et figurons nous qu' enſuite des triangles maxima ſoient inſcrits dans les ſegments reſtants; et ainſi toujours dans les ſegments reſtants, juſqu' à ce que les ſegments dans leſquels on a inſcrit en dernier lieu ſoient enſemble plus petits que le triangle ACF, car cela peut ſe faire [2]). Ainſi auſſi les triangles inſcrits en dernier lieu ſeront enſemble moindres que le triangle ACF. Mais puiſque les deux triangles ADB, BEC ſont enſemble plus grands que la quatrième partie de l'eſpace ABCF. Et que de nouveau les quatre triangles, qui ſont inſcrits dans les ſegments reſtants, ſont plus grands que la quatrième partie de ceux-là. Et de même plus grands que leur quart, ceux qui ſont inſcrits enſuite; et ainſi continuellement, s'il y en a pluſieurs qui ſont décrits. En conſéquence l'eſpace compoſé du quadrilatère ABCF et des autres triangles inſcrits, et du tiers de ceux qui ſeront inſcrits en dernier lieu, ſera plus grand que les quatre tiers de ce quadrilatère ABCF. Car il a été démontré par Archimède [3]) que ſi l'on a un nombre quelconque d'eſpaces, qui ſont en raiſon quadruple, l'enſemble de tous avec le tiers du plus petit eſt au plus grand dans le rapport de quatre à trois. Ainſi, par partage, tous les triangles décrits dans les ſegments ADB, BEC, avec le tiers de ceux décrits en dernier lieu, ſeront plus grands que la troiſième partie de l'eſpace ABCF. Mais le tiers ſuſdit eſt moindre que le tiers du triangle ACF. Par ſuite, enlevant d'un côté le tiers des triangles décrits en dernier lieu; et retranchant d'autre part de l'eſpace ABCF le triangle AFC, tous les triangles décrits dans les ſegments ADB, BEC ſeront
* 33.5. *Élem.* [4]) plus grands que le tiers du triangle ABC *. Donc, par compoſition, toute la figure rectiligne inſcrite dans le ſegment ABC eſt plus grande que les quatre tiers du triangle ABC, et à plus forte raiſon le ſegment lui-même. Ce qu'il fallait démontrer.

[2]) On peut consulter à cet égard la démonstration de la Prop. 2 du Livre 12 des „Elementa" d'Euclide.

[3]) Voici la Prop. 23 de son ouvrage „Quadratura parabolae": „Si magnitudines quotcunque consequenter in proportione quadrupla disponantur, hae magnitudines simul omnes cum

Eſto itaque eâ ratione adjectum triangulum AFC, ut totum ſpatium ABCF minus ſit quam quadruplum triangulorum ADB, BEC. Et porro in reſiduis portionibus maxima triangula inſcribi intelligantur; itemque in reſiduis ſemper, donec portiones quibus poſtremùm inſcribentur ſimul minores ſint triangulo ACF, hoc enim fieri poteſt [2]). Itaque & triangula poſtremùm inſcripta ſimul triangulo ACF minora erunt. Quia autem ſpatii ABCF quarta parte majora ſunt duo ſimul triangula ADB, BEC. Rurſuſque quarta horum parte majora triangula quatuor, quæ portionibus reliquis inſcribuntur. Et horum quartâ majora ſimiliter, quæ deinceps: atque ita continuè, ſi plura fuerint deſcripta. Erit propterea ſpatium ex quadrilatero ABCF & cæteris inſcriptis triangulis, & triente eorum, quæ poſtremo inſcripta erunt, compoſitum, majus quam ſeſquitertium ipſius quadrilateri ABCF. Hoc enim ab Archimede demonſtratum eſt [3]), quod ſi fuerint ſpatia quotcunque in ratione quadrupla, ea omnia ſimul cum triente minimi ad maximum rationem habebunt ſeſquitertiam. Dividendo itaque, triangula omnia intra portiones ADB, BEC deſcripta cum triente poſtremo deſcriptorum majora erunt tertia parte ſpatii ABCF. Sed triens dictus minor eſt triente trianguli ACF. Igitur dempto illinc triente poſtremò inſcriptorum; à ſpatio autem ABCF ablato triangulo AFC, erunt triangula omnia intra portiones ADB, BEC deſcripta, majora triente trianguli ABC*. Quare * 33.5. *Elem.* [4])
componendo, tota figura rectilinea portioni ABC inſcripta major quam ſeſquitertia trianguli ABC, multoque magis portio ipſa. Quod erat demonſtrandum.



[Fig. 3.]

tertia parte minimae illarum, sunt sesquitertiae magnitudini illarum maximae"; p. 154 de l'édition de Basle (Heiberg, T. II, p. 347).

Voir sur ces éditions des Œuvres d'Archimède la note 3, p. 274 du Tome XI.

[4]) „Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum". Voir p. 526 de l'édition, citée dans la note 10, p. 97 du T. XI, des „Elementa" d'Euclide, par Clavius.

Théor. IV. Prop. IV.

Tout ſegment de cercle, plus petit que la moitié du cercle, eſt moindre que les deux tiers du triangle qui a la même baſe et dont les côtés touchent le ſegment.

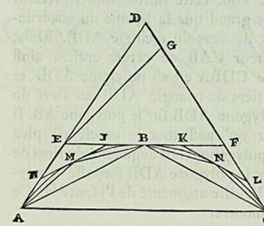
Soit donné un ſegment de cercle, moindre que le demi-cercle, ABC, et ſuppoſons qu'il ſoit touché aux extrémités de la baſe par les droites AD, CD, qui ſe rencontrent au point D. Je dis que le ſegment ABC eſt moindre que les deux tiers du triangle ADC. Menons en effet EF, qui touche le ſegment au ſommet B, et inſcrivons le triangle maximum ABC. Comme alors le triangle EDF eſt plus grand que la moitié du triangle ABC*, il eſt évident que l'on peut découper de celui-là une partie telle, que le reſte ſoit pourtant encore plus grand que la moitié du dit triangle ABC. Soit donc découpé, conformément à cela, le triangle EDG. Et menons enſuite les droites HI, KL, qui touchent les ſegments reſtants AMB, BNC en leurs ſommets, et inſcrivons dans ces mêmes ſegments les triangles les plus grands. Et figurons-nous enſuite que la même choſe ſoit faite ſur les ſegments reſtants, juſqu'a ce qu'enfin les ſegments reſtants ſoient enſemble plus petites que le double du triangle EDG. Il y aura donc alors une certaine figure rectiligne inſcrite dans le ſegment et une autre qui lui eſt circonſcrite. Et puiſque le triangle EGF eſt plus grand que la moitié du triangle ABC, et qu'à leur tour les triangles HEI, KFL ſont plus grands que les moitiés des triangles AMB, BNC; et que cela a lieu pour le même motif pour les autres ſegments, ſavoir, que les triangles conſtruits au-deſſus des ſommets des ſegments ſont plus grands que les moitiés de ceux qui ſont décrits dans les ſegments mêmes: il eſt clair que tous les triangles ſitués en dehors du ſegment, même ſans le triangle EGD, ſont enſemble plus grands que les moitiés de tous les triangles décrits dans les ſegments. Mais le triangle EGD eſt auſſi plus grand que la moitié des ſegments reſtants mentionnés. Par conſéquent le triangle EDF, avec les autres triangles qui ſont en dehors du ſegment, ſera plus grand que la moitié de tout le ſegment ABC. Donc à plus forte raiſon l'eſpace compris entre les droites AD, DC et l'arc ABC ſera plus grand que la moitié du ſegment ABC. Et ainſi le triangle ADC eſt plus grand que une et demie fois le ſegment ABC. Ce qu'il fallait démontrer.

* *d'après 2. ici.*

Theor. IV. Prop. IV.

Omnis circuli portio ſemicirculo minor, minor eſt duabus tertiis trianguli eandem cum ipſa baſin habentis, & latera portionem contingentia.

Eſto circuli portio ſemicirculo minor ABC, & contingant ipſam ad terminos baſis rectæ AD, CD, quæ conveniant in puncto D. Dico Portionem ABC minorem eſſe duabus tertiis trianguli ADC. Ducatur enim EF quæ portionem contingat in vertice B, & inſcribatur ipſi triangulum maximum ABC. Quum igitur triangulum EDF majus ſit dimidio trianguli ABC*. manifeſtum eſt ab illo partem abſcindi poſſe, ita ut reliquum tamen majus ſit dimidio dicti ABC trianguli. Sit igitur hoc pacto abſciſſum triangulum EDG. Et ducantur porro rectæ HI, KL, quæ portiones reliquas AMB, BNC in verticibus ſuis contingant, ipſiſque portionibus triangula maxima inſcribantur. Idemque prorſus circa reliquas portiones fieri intelligatur, donec tandem portiones reſiduæ ſimul minores ſint quam duplum trianguli EDG. Erit igitur inſcripta portioni figura quædam rectilinea, atque alia circumſcripta. Et quoniam triangulum EGF majus eſt dimidio trianguli ABC; & rurſus triangula HEI, KFL, majora quam dimidia triangulorum AMB, BNC; idque eadem ſemper ratione in reliquis locum habet, ut triangula ſuper portionem verticibus conſtituta, eorum quæ intra portiones ipſas deſcripta ſunt, majora ſint quam ſubdupla: apparet triangula omnia extra portionem poſita etiam abſque triangulo EGD majora ſimul eſſe quam dimidia triangulorum omnium intra portionem deſcriptorum. Atqui ſegmentorum in portione reliquorum triangulum quoque EGD majus eſt quam ſubduplum. Ergo triangulum EDF ſimul cum reliquis triangulis, quæ ſunt extra portionem, majus erit dimidio portionis totius ABC. Quare multo magis ſpatium à rectis AD, DC & arcu ABC comprehenſum majus erit portionis ABC dimidio. Ac proinde triangulum ADC majus quam portionis ABC ſeſquialterum. Quod erat demonſtrandum.



[Fig. 4.]

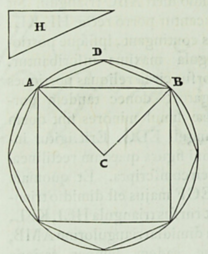
* *per 2. huj.*

Théor. V. Prop. V.

Tout cercle eſt plus grand qu'un polygone à côtés égaux, qui lui eſt inſcrit, plus le tiers de la quantité dont ce polygone en ſurpaſſe un autre polygone inſcrit d'un nombre de côtés réduit à la moitié[5]).

Soit un cercle à centre C; et que lui ſoit inſcrit un polygone équilatéral, dont un des côtés ſoit AB. Et ſoit inſcrit de même un autre polygone, dont AB ſouſtend les deux côtés AD, DB. Ce dernier polygone eſt alors plus grand que le premier. Suppoſons que le tiers de l'excès ſoit égal à l'eſpace H. Je dis que le cercle eſt plus grand que le polygone ADB avec l'eſpace H. Traçons en effet à partir du centre les droites CA, CB. Comme alors le ſegment de cercle ADB eſt plus grand que les quatre tiers du triangle ADB qui lui eſt inſcrit*, les ſegments AD, DB feront enſemble plus grands que le tiers du triangle ADB. Pour cette raiſon auſſi le ſecteur CAB ſera plus grand que la ſomme du quadrilatère CADB et du tiers du triangle ADB. Mais, comme le ſecteur CAB au cercle entier, ainſi le quadrilatère CDBA eſt au polygone ADB, et ainſi auſſi le tiers du triangle ADB au tiers de l'excès du polygone ADB ſur le polygone AB. Il eſt donc clair qu' auſſi tout le cercle eſt plus grand que le polygone ADB augmenté du tiers de la quantité dont le polygone ADB ſurpaſſe le polygone AB, c'eſt-à-dire augmenté de l'eſpace H. Ce qu'il fallait démontrer.

* *d'après* 3. *ici.*



[Fig. 5.]

5) Soit donc s_n l'aire du polygone à n côtés, inscrit dans un cercle dont le rayon est égal à l'unité; on a alors d'après le théorème présent:

$$\pi > s_{2n} + \tfrac{1}{3}(s_{2n} - s_n).$$

Introduisant ensuite, au lieu des aires des polygones leurs périmètres p, on trouve à l'aide de la relation $s_{2n} = \frac{1}{2} p_n$, la formule:

$$2\pi > p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n),$$

Theor. V. Prop. V.

Omnis circulus major eſt polygono æqualium laterum ſibi inſcripto & triente exceſſus quo id polygonum ſuperat aliud inſcriptum ſubduplo laterum numero[5]).

Eſto circulus centro C [Fig. 5]; ſitque ipſi inſcriptum polygonum æqualium laterum, quorum unum ſit AB. Atque alterum item polygonum ſit inſcriptum, cujus bina latera AD, DB, ſubtendat AB. Hoc igitur priore polygono majus eſt. Sit autem exceſſus trienti æquale H ſpatium. Dico circulum majorem eſſe polygono ADB una cum ſpatio H. Ducantur enim ex centro rectæ CA, CB. Quoniam igitur portio circuli ADB major eſt quam ſeſquitertia trianguli ADB ſibi inſcripti*; erunt portiones AD, DB, ſimul majores triente trianguli ADB. Quamobrem & ſector CAB major erit utriſque ſimul quadrilatero CADB & triente trianguli ADB. Sicut autem ſector CAB ad circulum totum, ita eſt quadrilaterum CDBA ad polygonum ADB, & ita quoque triens trianguli ADB ad trientem exceſſus polygoni ADB ſupra polygonum AB. Ergo manifeſtum eſt circulum quoque totum majorem fore polygono ADB unà cum triente exceſſus quo polygonum ADB ſuperat polygonum AB, hoc eſt, unà cum ſpatio H. Quod erat demonſtrandum.

* *per.* 3. *huj.*

qu'on peut comparer à la suite que nous avons déduite dans la note 7, p. 94 du Tome présent. On voit d'ailleurs qu' ici et dans le théorème suivant Huygens a atteint, pour ainsi dire d'un seul coup, une approximation qu'on ne pourrait certainement améliorer sans la rendre plus compliquée, et qui est du même ordre que celle, bien moins simple, de Snellius, que nous avons mentionnée dans la note 8, p. 95.

Théor. VI. Prop. VI.

Tout cercle eſt plus petit que les deux tiers du polygone à côtés égaux qui lui eſt circonſcrit, plus le tiers du polygone ſemblable inſcrit [6]).

Soit donné un cercle dont le centre eſt A, et inſcrivons-y un polygone équilatéral, dont un des côtés ſoit BC; et circonſcrivons-y un autre ſemblable FEG, dont les côtés touchent le cercle aux ſommets des angles du premier polygone. Je dis que le cercle eſt plus petit que les deux tiers du polygone FEG, augmentés du tiers du polygone BC. Menons en effet à partir du centre les droites AB, AC. Comme alors le triangle BEC repoſe ſur la baſe du ſegment BDC et que ſes côtés touchent le ſegment, ce ſegment ſera moindre que les deux tiers du triangle BEC *. Ainſi lorſqu'on ajoute au triangle ABC deux tiers du triangle BEC, c'eſt-à-dire, deux tiers de l'excès du quadrilatère ABEC ſur le triangle ABC, l'eſpace formé par les deux ſera plus grand que le ſecteur de cercle ABC. Mais il revient au même, que l'on ajoute au triangle ABC les deux tiers du dit excès, ou que l'on ajoute les deux tiers du quadrilatère ABEC, et que l'on enlève par contre les deux tiers du triangle ABC: mais par ceci on obtient les deux tiers du quadrilatère ABEC avec le tiers du triangle ABC. Il paraît donc que le ſecteur ABC eſt moindre que les deux tiers du quadrilatère ABEC augmentés du tiers du triangle ABC. Par conſéquent, tout étant pris autant de fois que le ſecteur ABC eſt contenu dans le cercle, le cercle tout entier ſera plus petit que les deux tiers du polygone circonſcrit FEG et le tiers de l'inſcrit BC. Ce qu'il fallait démontrer.

* *d'après 4. ici.*

---

6) On a donc

$$\pi < \tfrac{2}{3} S_n + \tfrac{1}{3} s_n,$$

où S_n et s_n repréſentent les aires des polygones circonscrit et inscrit au cercle dont le rayon est l'unité.

On en déduit aisément, en employant les relations $S_n = \tfrac{1}{2} P_n$ et $s_{2n} = \tfrac{1}{2} p_n$,

$$2\pi < \tfrac{2}{3} P_{2n} + \tfrac{1}{3} p_n,$$

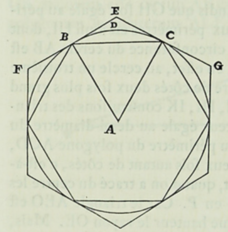
où P_n et p_n désignent respectivement les périmètres des mêmes polygones.

Ensuite, afin de pouvoir comparer cette formule à la suite (1) de la note 7, p. 94, nous

Theor. VI. Prop. VI.

Omnis circulus minor eſt duabus tertiis polygoni æqualium laterum ſibi circumſcripti & triente polygoni ſimilis inſcripti [6]).

Eſto circulus cujus centrum A, & inſcribatur ipſi polygonum lateribus æqualibus, quorum unum ſit BC; & aliud ſimile circumſcribatur FEG, cujus latera circulum contingant ad occurſum angulorum polygoni prioris. Dico circulum minorem eſſe duabus tertiis polygoni FEG ſimul cum triente polygoni BC. Ducantur namque ex centro rectæ AB, AC. Igitur quoniam ſuper baſi portionis BDC conſiſtit triangulum BEC, cujus latera portionem contingunt, erit ipſa minor duabus tertiis trianguli BEC*. Itaque ſi triangulo ABC addantur duæ tertiæ trianguli BEC, hoc eſt, duæ tertiæ exceſſus quadrilateri ABEC ſupra triangulum ABC, ex utriſque compoſitum ſpatium majus erit ſectore circuli ABC. Idem eſt autem, ſive triangulo ABC addantur duæ tertiæ exceſſus dicti, ſive addantur duæ tertiæ quadrilateri ABEC, contraque auferantur duæ tertiæ trianguli ABC: hinc autem fiunt duæ tertiæ quadrilateri ABEC cum triente trianguli ABC. Ergo apparet ſectorem ABC minorem eſſe duabus tertiis quadrilateri ABEC & triente trianguli ABC. Quare ſumptis omnibus quoties ſector ABC circulo continetur, totus quoque circulus minor erit duabus tertiis polygoni circumſcripti FEG & triente inſcripti BC. Quod erat oſtendendum.



[Fig. 6.]

* *per. 4. huj.*

---

remplaçons P_{2n} par $p_{2n}^2 : p_n = p_{2n} + (p_{2n} - p_n) . \frac{p_{2n}}{p_n} = p_{2n} + (p_{2n} - p_n) \left\{ 1 + \frac{p_{2n} - p_n}{p_n} \right\} =$

$= p_{2n} + (p_{2n} - p_n) + \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} . \frac{p_{2n}}{p_n} = p_{2n} + (p_{2n} - p_n) + \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_n p_{2n}}.$

De cette façon on arrive à la formule

$$2\pi < p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \tfrac{2}{3} \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \left[\tfrac{2}{3} \frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_n p_{2n}} \right],$$

mentionnée dans la note 22, p. 98 et qui montre que l'approximation est du même ordre que celle qui est obtenue par le théorème précédent, dont celui-ci forme la contrepartie.

Théor. VII. Prop. VII.

Toute circonférence de cercle eſt plus grande que le périmètre du polygone à côtés égaux qui lui eſt inſcrit, plus le tiers de la quantité dont ce même périmètre ſurpaſſe le périmètre d'un autre polygone inſcrit duquel le nombre des côtés eſt la moitié[7]).

Soit donné un cercle AB, à centre O, auquel eſt inſcrit un polygone equilatéral ACD, et un autre, d'un nombre de côtés double AECBDF. Soit encore la droite GI égale au périmètre du polygone AECBDF, tandis que GH ſoit égale au périmètre du polygone ACD. La différence des deux périmètres eſt ainſi HI, dont le tiers IK ſoit ajouté à GI même. Je dis que la circonférence du cercle AB eſt plus grande que la droite GK entière. Inſcrivons, en effet, au cercle un troiſième polygone équilatère ALEMC, qui ait un nombre de côtés deux fois plus grand que le polygone AECBDF. Et ſur les lignes GH, HI, IK conſtruiſons des triangles dont le ſommet commun ſoit N, et la hauteur égale au demi-diamètre du cercle AB. Alors, puiſque la baſe GH eſt égale au périmètre du polygone ACD, le triangle GNH ſera égal au polygone qui a deux fois autant de côtés, c'eſt-à-dire, au polygone AECBDF. C'eſt ce qui paraît, quand on a tracé du centre les droites OA et OE, dont la dernière coupe AC en P. Car le triangle AEO eſt égal à un triangle ayant comme baſe AP et comme hauteur le rayon OE. Mais, la quantième partie le triangle AEO eſt du polygone AECBDF, la même partie eſt la droite AP du périmètre ACD. Ainſi le polygone AECBDF ſera égal au triangle dont la baſe eſt égale au périmètre ACD, et la hauteur au rayon EO; c'eſt-à-dire au triangle GNH. Pour la même raiſon, puiſque la baſe GI eſt égale au périmètre du polygone AECBDF et que la hauteur du triangle GNI eſt égale au rayon du cercle, le triangle GNI ſera égal au polygone ALEMC. Par ſuite, le triangle HNI eſt égal à l'excès du polygone ALEMC ſur le polygone AECBDF. Mais le triangle INK eſt par conſtruction le tiers du triangle HNI. Il ſera donc égal au tiers du dit excès. Ainſi tout le triangle GNK ſera moindre que le
* d'après 5. ici. cercle AB*. Mais la hauteur du triangle eſt égale au demi-diamètre du cercle. Il eſt donc évident que la droite GK eſt moindre que toute la circonférence du cercle. Ce qu'il fallait démontrer.

Par là il eſt clair que, ſi des quatre tiers des côtés d'un polygone inſcrit au cercle on retranche le tiers des côtés d'un autre polygone inſcrit, d'un nombre de côtés égal à la moitié, le reſte eſt plus petit que la circonférence. Car il revient au même, ſoit qu'on ajoute au plus grand périmètre $\frac{1}{3}$ de la quantité dont il ſurpaſſe

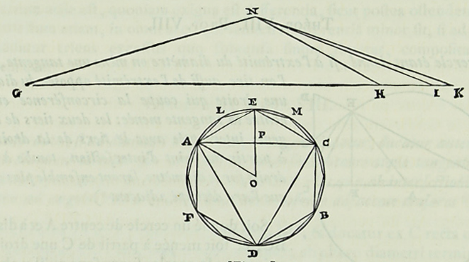
---

[7]) Voir la seconde formule de la note 5.

Theor. VII. Prop. VII.

Omnis circuli circumferentia major eſt perimetro polygoni æqualium laterum ſibi inſcripti, & triente exceſſus quo perimeter eadem ſuperat perimetrum alterius polygoni inſcripti ſubduplo laterum numero[7]).

Eſto circulus AB, centro O, cui inſcribatur polygonum æquilaterum ACD, atque alterum duplo laterum numero AECBDF. Sitque recta GI æqualis perimetro polygoni AECBDF, GH vero æqualis perimetro polygoni ACD. Exceſſus igitur perimetrorum eſt HI; cujus triens IK adjiciatur ipſi GI. Dico totâ GK majorem eſſe circuli AB circumferentiam. Inſcribatur enim circulo tertium polygonum æquilaterum ALEMC, quod ſit duplo numero laterum polygoni



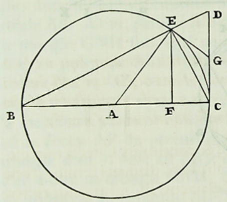
[Fig. 7.]

AECBDF. Et ſuper lineis GH, HI, IK, triangula conſtituantur quorum communis vertex N, altitudo autem æqualis ſemidiametro circuli AB. Igitur quoniam GH baſis æqualis eſt perimetro polygoni ACD, erit triangulum GNH æquale polygono cui bis totidem ſunt latera, hoc eſt, polygono AECBDF. Hoc enim patet, ductis ex centro rectis OA & OE, quarum hæc ſecet AC in P. Nam triangulum quidem AEO æquale eſt triangulo baſin habenti AP & altitudinem radii OE. Quanta autem pars eſt triangulum AEO polygoni AECBDF, eadem eſt recta AP perimetri ACD. Itaque polygonum AECBDF æquabitur triangulo cujus baſis æqualis perimetro ACD, altitudo autem radio EO: hoc eſt, triangulo GNH. Eâdem ratione, quoniam baſis GI eſt æqualis polygoni AECBDF perimetro, & altitudo trianguli GNI æqualis radio circuli, erit triangulum GNI æquale polygono ALEMC. Itaque triangulum HNI æquale exceſſui polygoni ALEMC ſupra polygonum AECBDF. Trianguli autem HNI ſubtriplum eſt ex conſtr. triangulum INK. Ergo hoc æquale erit dicti exceſſus trienti. Quare totum trian le plus petit périmètre, ſoit qu'on ajoute $\frac{1}{3}$ du plus grand périmètre et que par contre on enlève $\frac{1}{3}$ du plus petit périmètre. Mais par là on obtient les quatre tiers du plus grand périmètre moins le tiers du plus petit. Ainſi, lorſque de ſeize côtés du dodécagone inſcrit on déduit deux côtés de l'hexagone inſcrit, c'eſt-à-dire le diamètre du cercle, la longueur reſtante ſera moindre que la circonférence du cercle, ou bien, ſi l'on retranche le rayon de huit côtés du dodécagone, le reſte ſera moindre que la moitié de la circonférence. Or, ceci eſt utile pour une conſtruction mécanique, parce que la différence eſt petite, ainſi que je le montrerai plus loin [8]).

Il eſt clair auſſi que, pour tout arc qui eſt moindre que la demi-circonférence, ſi à la corde ſous-tendue on ajoute le tiers de la quantité dont la corde excède le ſinus, la ligne compoſée eſt plus petite que l'arc.

Théor. VIII. Prop. VIII.

Un cercle étant donné, ſi à l'extrémité du diamètre on mène une tangente, et que l'on tire auſſi de l'extrémité opposée du diamètre une droite qui coupe la circonférence et rencontre la tangente menée: les deux tiers de la tangente interceptée avec le tiers de la droite qui, à partir du point d'interſection, tombe à angles droits ſur le diamètre, ſeront enſemble plus grands que l'arc découpé adjacent [9]).



[Fig. 8.]

Soit donné un cercle de centre A et à diamètre BC; et ſoit menée à partir de C une droite CD qui touche le cercle: ſuppoſons qu'il y aboutiſſe une droite BD, tirée à partir de l'autre extrémité du diamètre, et qu'elle coupe la circonférence en E: et ſoit EF perpendiculaire au diamètre BC. Je dis que les deux tiers de la tangente interceptée CD, enſemble avec le tiers de cette droite EF, ſont plus grands que l'arc EC. Joignons en effet AE, EC; et menons une tangente au cercle au point E, qui rencontre la tangente CD en G. Ainſi GE ſera égal à GC, et auſſi à DG; car ſi avec G comme centre on décrit une circonférence qui paſſe par les points C, E, elle paſſera auſſi par le point D, puiſque l'angle CED eſt droit. Or nous avons montré ci-deſſus, que les deux tiers du quadrilatére AEGC, enſemble avec le tiers du triangle AEC, ſont plus grands que le ſecteur AEC *. *d'après 6. ici.* Et le quadrilatère AEGC eſt égal au triangle ayant comme baſe le double de CG,

[8]) Voir le „Problema II. Prop. XI", p. 143 du Tome présent.

[9]) Le but de ce théorème est surtout de préparer celui qui suit. Toutefois il est clair qu'il mène plus directement au suivant: *Toute circonférence de cercle est plus petite que les deux tiers du*

gulum GNK minus erit circulo AB*. Altitudo autem trianguli æqualis eſt circuli **per.5.huj.* ſemidiametro. Ergo evidens eſt rectam GK totâ circuli circumferentiâ minorem eſſe. Quod erat oſtendendum.

Hinc manifeſtum eſt, ſi à ſeſquitertio laterum polygoni circulo inſcripti auferatur triens laterum polygoni alterius inſcripti ſubduplo laterum numero, reliquum circumferentiâ minus eſſe. Idem enim eſt, ſive perimetro majori addatur $\frac{1}{3}$ exceſſus quo ipſa ſuperat perimetrum minorem, ſive addatur $\frac{1}{3}$ perimetri majoris contraque auferatur $\frac{1}{3}$ perimetri minoris. Hinc autem fit ſeſquitertium majoris perimetri minùs triente minoris. Quare ſi à ſexdecim inſcripti dodecagoni lateribus duo latera inſcripti hexagoni, hoc eſt, diameter circuli deducatur, reliqua circuli circumferentiâ minor erit aut ſi ab octo dodecagoni lateribus radius deducatur, reliqua minor erit circumferentiæ ſemiſſe. Hoc autem ad conſtructionem mechanicam utile eſt, quoniam exigua eſt differentia, ſicut poſtea oſtendetur [8]).

Manifeſtum etiam, in omni arcu qui ſemicircumferentiâ minor ſit, ſi ad ſubtenſam addatur triens exceſſus quo ſubtenſa ſinum ſuperat, compoſitam arcu minorem eſſe.

Theor. VIII. Prop. VIII.

Circulo dato, ſi ad diametri terminum contingens ducatur, ducatur autem & ab oppoſito diametri termino quæ circumferentiam ſecet occurratque tangenti ductæ: erunt interceptæ tangentis duæ tertiæ cum triente ejus quæ ab interſectionis puncto diametro ad angulos rectos incidet, ſimul arcu abſciſſo adjacente majores [9]).

Eſto circulus [Fig. 8] centro A, diametro BC; & ducatur ex C recta quæ circulum contingat CD: huic autem occurrat ducta ab altero diametri termino recta BD, quæ circumferentiam ſecet in E: ſitque EF diametro BC ad angulos rectos. Dico tangentis interceptæ CD duas tertias ſimul cum triente ipſius EF, arcu EC majores eſſe. Jungantur enim AE, EC; & ducatur tangens circulum in E puncto, quæ tangenti CD occurrat in G. Erit igitur GE ipſi GC æqualis, itemque DG; nam ſi centro G circumferentia deſcribatur quæ tranſeat per puncta C, E, eadem tranſibit quoque per D punctum, quoniam angulus CED rectus eſt. Oſtenſum autem fuit ſuprà, duas tertias quadrilateri AEGC unà cum triente trianguli AEC ſimul majores eſſe ſectore AEC*. Eſtque quadrilaterum AEGC æquale triangulo **per.6.huj.* baſin habenti duplam CG, hoc eſt, CD: & altitudinem CA, triangulum verò

périmètre d'un polygone à côtés égaux, qui lui est circonscrit, plus le tiers du périmètre du polygone inscrit dont le nombre des côtés est la moitié.

Mais il est probable que ce théorème, qu'on trouve exprimé par la seconde formule de la note 6 et qui est donc l'équivalent du „Theor. VI", a été considéré par Huygens comme moins élégant et moins pratique que le „Theor. IX", qu'il fait suivre, et dont, de plus, l'approximation est un peu meilleure.

c'eſt-à-dire, CD, et comme hauteur CA: mais le triangle AEC eſt égal au triangle ayant une baſe égale à cette EF et la dite hauteur AC. Ainſi il eſt clair que les deux tiers du quadrilatère AEGC, augmentés du tiers du triangle AEC, ſont égaux au triangle qui a pour baſe une droite compoſée des deux tiers de CD et du tiers de EF, et dont la hauteur eſt le rayon AC. C'eſt pourquoi auſſi le triangle ſera plus grand que le ſecteur AEC. Il réſulte de là que ſa baſe, c'eſt-à-dire, la droite formée des deux tiers de CD et du tiers de EF, eſt plus grande que l'arc CE. Ce qu'il fallait démontrer.

Théor. IX. Prop. IX.

Toute circonférence de cercle eſt plus petite que les deux tiers du périmètre d'un polygone à côtés égaux qui lui eſt inſcrit plus le tiers du périmètre du polygone ſemblable circonſcrit [10]).

Soit donné un cercle dont le centre eſt A; et inſcrivons-y un polygone équilatéral, dont le côté eſt CD: et circonſcrivons-y un autre ſemblable, à côtés parallèles à ceux du premier, deſquels un ſoit EF. Je dis que la circonférence de tout le cercle eſt plus petite que les deux tiers du contour du polygone CD plus le tiers du contour du polygone EF. Menons en effet le diamètre du cercle BG, qui diviſe à la fois au milieu le côté CD du polygone inſcrit en H et le côté EF du circonſcrit en G (car évidemment G eſt le point de contact du côté EF). Et prenons HL égal à HG et joignons AC, BC et prolongeons-les; et ſuppoſons que BC rencontre le côté EF en K, tandis que la droite AC prolongée atteint en E l'angle du polygone circonſcrit. Puiſque ainſi HL eſt égal à HG, BL ſera le double de AH: et par conſéquent comme GA à AH ainſi GB eſt à BL. Mais le rapport de HB à BL eſt plus grand que celui de GB à BH; puiſque les trois lignes GB, HB, LB s'excèdent mutuellement de la même quantité. Et ainſi le rapport de GB à BL, c'eſt-à-dire, de GA à AH, ſera plus grand que le

---

[10]) A l'aide des notations de la note 6, p. 130, le théorème s'exprime par la formule:

$$2\pi < \tfrac{1}{3} P_n + \tfrac{2}{3} p_n,$$

qu'on peut écrire:

$$2\pi < \tfrac{1}{3} P_{2n} + \tfrac{2}{3} p_{2n} = p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \tfrac{1}{3}\frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \left[\tfrac{1}{3}\frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_n\, p_{2n}}\right].$$

Pour arriver à ce théorème, en partant de celui que nous avons énoncé dans la note précédente, il suffira de prouver qu'on a:

$$\tfrac{1}{3} P_n + \tfrac{2}{3} p_n > \tfrac{2}{3} P_{2n} + \tfrac{1}{3} p_n,$$

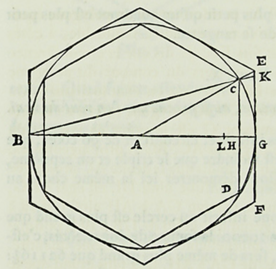
ou bien, en introduisant les côtés A_n et a_n des polygones circonscrits et inscrits,

$$\tfrac{1}{3} A_n + \tfrac{2}{3} a_n > \tfrac{4}{3} A_{2n} + \tfrac{1}{3} a_n,$$

AEC æquale triangulo baſin ipſi EF æqualem habenti & altitudinem dictam AC. Itaque apparet duas tertias quadrilateri AEGC ſimul cum triente trianguli AEC æquari triangulo qui baſin habeat compoſitam ex duabus tertiis CD & triente EF, altitudinum verò radii AC. Quare ejuſmodi quoque triangulum majus erit ſectore AEC. Unde liquet baſin ipſius, hoc eſt, compoſitam ex duabus tertiis ipſius CD & triente ipſius EF, majorem eſſe arcu CE. Quod erat demonſtrandum.

Theor. IX. Prop. IX.

Omnis circuli circumferentia minor eſt duabus tertiis perimetri polygoni æqualium laterum ſibi inſcripti & triente perimetri polygoni ſimilis circumſcripti [10]).



[Fig. 9.]

Eſto Circulus cujus A centrum; & inſcribatur ei polygonum æquilaterum, cujus latus CD: ſimileque aliud circumſcribatur lateribus ad priora parallelis, quorum unum ſit EF. Dico circuli totius circumferentiam minorem eſſe duabus tertiis ambitus polygoni CD & triente ambitus polygoni EF. Ducatur namque diameter circuli BG, quæ ſimul inſcripti polygoni latus CD medium dividat in H, & circumſcripti latus EF in G, (conſtat autem G fore punctum contactus lateris EF,) Et ponatur HL æqualis ipſi HG, & jungantur AC, BC & producantur, occurratque BC lateri EF in K, producta autem AC incidet in E angulum polygoni circumſcripti. Quoniam igitur HL æqualis HG, erit BL dupla ipſius AH: Ideoque ut GA ad AL, ita GB ad BL. Major autem eſt ratio HB ad BL, quam GB ad BH; quoniam hæ tres ſeſe æqualiter excedunt GB, HB, LB. Itaque major erit ratio GB ad BL, hoc eſt, GA ad AH, quam duplicata rationis GB ad BH. Sicut autem GA ad

---

c'est-à-dire, $A_n + a_n > 4\, A_{2n}$, ou enfin (voir la figure 9) EG + CH > 2 KG; puisque $EG = \tfrac{1}{2} A_n$; $CH = \tfrac{1}{2} a_n$; KG = DC de la fig. 8 $= A_{2n}$.

C'est là, en effet, le but des considérations géométriques qui vont suivre, et qui auraient pu être beaucoup abrégées à l'aide de la remarque que nous ferons dans la note 11.

carré du rapport de GB à BH. Or, comme GA à AH, ainſi EG eſt à CH; et comme GB à BH, ainſi KG eſt à CH. Par conſéquent, le rapport de EG à CH ſera plus grand que le carré de celui de KG à CH. Pour cette raiſon le rapport de EG à KG eſt plus grand que celui de KG à CH. Par ſuite les deux lignes EG, CH ſont certainement enſemble plus grandes que le double de KG [11]). Et en prenant les tiers de toutes les lignes, les tiers des deux EG et CH ſeront enſemble plus grands que les deux tiers de KG. Pour cette raiſon, ſi l'on ajoute de part et d'autre le tiers de CH, le tiers de EG avec les deux tiers de CH ſera plus grand que les deux tiers de KG avec le tiers de CH. Mais l'arc CG eſt encore plus petit que ceux-ci *. Donc, les deux tiers de CH, enſemble avec le tiers de EG, ſont à plus forte raiſon plus grands que ce même arc CG. Si donc nous prenons toutes les grandeurs autant de fois que l'arc CG eſt contenu dans la circonférence entière, les deux tiers du périmètre du polygone CD, plus le tiers du périmètre du polygone EF, feront auſſi plus grands que la circonférence du cercle entier. Ce qu'il fallait démontrer.

* d'après ce qui précède.

Ainſi donc, tout arc de circonférence plus petit qu'un quadrant eſt plus petit que les deux tiers de ſon ſinus plus le tiers de ſa tangente.

Problème I. Prop. X.

Trouver le rapport de la périphérie au diamètre, auſſi proche que l'on veut du vrai.

Archimède prouva [12]), par les polygones inſcrit et circonſcrit de 96 côtés, que le rapport de la périphérie au diamètre eſt moindre que le triple et un ſeptième, mais plus grande que $3\frac{10}{71}$. Mais nous allons démontrer ici la même choſe au moyen du dodécagone.

En effet, puiſque le côté du dodécagone inſcrit au cercle eſt plus grand que $5176\frac{3}{8}$ des parties dont le rayon en contient 10000: la ſomme de douze côtés, c'eſt-à-dire, le périmètre du dodécagone inſcrit, ſera de même plus grand que $62116\frac{1}{2}$: mais le périmètre de l'hexagone inſcrit eſt le ſextuple du rayon, et ſe compoſe par conſéquent de 60000 parties. Ainſi donc le périmètre du dodécagone excède le périmètre de l'hexagone de plus que $2116\frac{1}{2}$ parties. Le tiers de l'excès ſera donc plus grand que $705\frac{1}{2}$. De ſorte que le périmètre du dodécagone, enſemble avec le tiers de la quantité dont il excède le périmètre de l'hexagone, ſera plus grand que la ſomme de $62116\frac{1}{2}$ et $705\frac{1}{2}$ parties, c'eſt-à-dire, que 62822 parties. Et par conſéquent la périphérie du cercle ſera à plus forte raiſon plus grande que cela *. Mais le rapport de 62822 à 20000, la longueur du diamètre, eſt plus

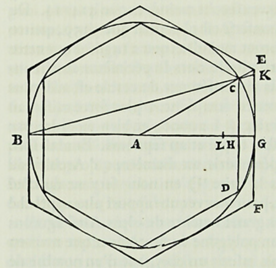
* d'après 7. ici.

[11]) Ce résultat aurait pu être atteint bien plus facilement en abaissant une perpendiculaire CM sur EG. Alors CK est la bissectrice de l'angle ECM et on a par suite EK > KM, c'est-à-dire: EG — KG > KG — CH; donc EG + CH > 2 KG.

[12]) Au lieu cité dans la note 1, p. 93 du Tome présent.

AH, ita eſt EG ad CH; & ſicut GB ad BH, ita KG ad CH. Ergo major erit ratio EG ad CH, quàm duplicata ejus, quam habet KG ad CH. Quare major ratio EG ad KG, quam KG ad CH. Ideoque duæ ſimul EG, CH omnino majores duplâ KG [11]). Et ſumptis omnium trientibus, erunt trientes utriuſque EG & CH ſimul majores duabus tertiis KG. Quamobrem addito utrimque ipſius CH triente, erit triens EG cum duabus tertiis CH, major duabus tertiis KG cum triente CH. Hiſce verò minor etiam eſt arcus CG *. Igitur duæ tertiæ CH ſimul cum triente ipſius EG majores omnino ſunt eodem arcu CG. Unde ſumptis omnibus toties quoties arcus CG circumferentiâ totâ continetur, erunt quoque duæ tertiæ perimetri polygoni CD, cum triente perimetri polygoni EF, majores circuli totius circumferentiâ. Quod fuerat oſtendendum.

* per præced.



[Fig. 9.]

Omnis igitur circumferentiæ arcus quadrante minor, minor eſt ſinus ſui beſſe & tangentis triente.

Problema I. Prop. X.

Peripheriæ ad diametrum rationem invenire quamlibet veræ propinquam.

Minorem eſſe peripheriæ ad diametrum rationem quam triplam ſeſquiſeptimam: majorem verò quam $3\frac{10}{71}$, Archimedes oſtendit [12]) inſcripto circumſcriptoque 96 laterum polygono. Idem verò hic per dodecagona demonſtrabimus.

Quia enim latus inſcripti circulo dodecagoni majus eſt partibus $5176\frac{3}{8}$, qualium radius continet 10000: duodecim latera proinde, hoc eſt, perimeter inſcripti dodecagoni major erit quam $62116\frac{1}{2}$: perimeter autem hexagoni inſcripti eſt radii ſextupla, ideoque partium 60000. Igitur dodecagoni perimeter perimetrum hexagoni excedit ampliùs quam partibus $2116\frac{1}{2}$. Quare triens exceſſus major erit quam $705\frac{1}{2}$. Igitur dodecagoni perimeter unà cum triente exceſſus, quo perimetrum hexagoni ſuperat, major erit aggregato partium $62116\frac{1}{2}$ & $705\frac{1}{2}$, hoc eſt, partibus 62822. Atque hiſce proinde omninò major erit circuli peripheria*. Eſt autem major ratio 62822 ad 20000, longitudinem diametri,

* per. 7. huj.