XIV. [1])

1652.

15 Sept. 1652.

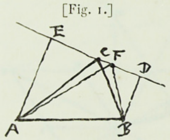
DE MAXIMIS ET MINIMIS.

[Première Partie.]

Oſtenditur quae ratio ſit regulae Fermattij, cujus exempla inferius à Schotenio aſſcripta ſunt, [2]) *dein alia docetur brevior.* [3])

Eſto data poſitione recta ED et puncta A, B: oporteatque invenire in ED punctum C, unde ductis CA, CB, quadrata earum ſimul ſumpta ſint minima quae eſſe poſſint. [4]) Sit AE ∞ a, BD ∞ b (hae autem perpendiculares intelliguntur ad ED quae ſit c). Secundum Fermattij regulam ponitur primum EC ſi velimus ∞ x unde ſumma quadratorum AC, CB invenitur $aa + 2xx - 2cx + cc + bb$. Deinde pro eâdem EC ponitur $x+y$, indeque inventâ rurſus ſummâ quadr.orum AC, CB $aa + 2xx + 2yy +$

[Fig. 1.]



[1]) La pièce, que nous avons divisée en trois parties, se trouve aux pages 217—225 du manuscrit N°. 12. La *première* partie contient une exposition de la méthode „De maximis et minimis" de Fermat, suivie d'une autre méthode, inventée à cette occasion: la *seconde* une modification, apportée par Huygens à la méthode de Fermat, avec application à un problème suggéré par la pièce N°. VIII; la *troisième* la démonstration d'une construction simple par laquelle Huygens avait résolu le problème en question.

[2]) Consultez sur la méthode de Fermat et sur les exemples de van Schooten, qui se trouvent aux pages 284—287 du manuscrit N°. 12, la page 19 du Tome XI.

[3]) Il s'agit de la méthode dont l'exposition commence avec le second alinéa de la page suivante; mais voyez plus loin la note 13.

[4]) On retrouvera le même exemple dans la „Demonstratio regulae de maximis et minimis", cité dans la note 1 de la Lettre N°. 2435 (p. 95 du T. IX),

$+ 4xy - 2cy - 2cx + cc + bb$, horum aequatio inſtituitur ubi aequalibus ablatis utrimque fit $2yy + 4xy \infty 2cy$. Tum per y dividitur fitque $2y + 4x \infty 2c$. Denique termini in quibus y reperitur rejiciuntur ut hic $2y$, et reſtat $4x \infty 2c$ et $x \infty \frac{1}{2}c$. Horum ratio ut intelligatur oportet quantitatem y ab initio alicujus magnitudinis lineam denotare ut CF; Illud enim revera quaeritur, nimirum EC exiſtente ∞ x quanta debeat eſſe CF, ut ductis FA, FB, harum duarum quadrata aequentur quadratis CA et CB. Semper quippe ubi maximum vel minimum quaeritur, utrimque caſus aequalitatis exiſtit. Itaque quum in aequatione inveniatur $-4x + 2c \infty 2y$ vel $c - 2x \infty y$ hoc ſignificat, ſi x, EC, pro determinatae magnitudinis linea ſumatur tum CF, y, fore $c - 2x$, vel ſi certa ſtatuatur CF, y differentia nempe duarum EC, EF, tum EC, x fore $\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}y$. Patet autem, quanto minor ſtatuetur y, tanto minus differre x ab $\frac{1}{2}c$ quare ſi aequalis nihilo ſit y, erit x aequalis $\frac{1}{2}c$. Hincque manifeſtum eſt, quod ſi EC ponatur $\infty \frac{1}{2}$ ED et ducantur CA, CB harum quadrata minima erunt quae eſſe poſſunt, tunc enim caſus aequalitatis nullus eſſe poterit, et ponendo CF quamlibet exiguam ſi major ſit quam nihil, erunt quadrata FA, FB majora quam CA, CB. [5])

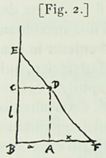
Illud autem quod modo dictum eſt conſiderans, quod nempe ubi de maximis vel minimis inquiritur, ſemper utrimque aequalitatis caſus exiſtit, alium quoque modum ad ea determinanda inveni. Animadverti enim, quod ſi problema de maximo vel minimo determinando propoſitum, ſic reſolvatur quaſi non maximum vel minimum ſed dato aequale quaeramus, tum ſemper aequatio invenietur in qua radix quaeſita habebit duos valores, quorum uterque propoſito ſatisfaciet, qui quidem diverſi erunt; at quanto minus inter ſe differunt, tanto propius ad caſum determinationis accedunt, ita ut ubi alter alteri aequalis exiſtit ibi ſit determinatio minimi vel maximi. Ubi igitur quaerendo dato aequale, ut dixi, ad aequationum perveneris, et volueris ex ea maximum vel minimum reperire, ita ipſam expendes tanquam duos valores habentem, ſibi mutuo aequales. itaque ſcibis ſingulos ejus terminos cum ſingulis terminis alius aequationis comparari poſſe quae oritur ex multiplicatione radicis quaeſitae, multatae quantitate ſibi aequali, in ſeipſam. quod productum ſi non tot habet dimenſiones quot aequatio propoſita, rurſus ducendum erit in aliam quantitatem quae deficientes alteri dimenſiones contineat, ſuppleatque; ſecundum ea quae docet Carteſius lib. 2. Geom. ubi tangentes invenire docet. [6]) Hoc pacto ſi punctum C quaeſiverimus in exemplo praecedente,

[5]) Huygens ajoute en marge: „Ponendo y pro differentia radicum, ita ut certam lineam significet, quaeritur quanta futura sit radix minor, ut aequalia sint quadata AC, CB quadratis AF, FB." Il s'agit ici des deux racines qu'on obtient en égalant l'expression $aa + 2xx - 2cx + cc + bb$ à une constante.

[6]) La méthode de Descartes, pour trouver les conditions sous lesquelles une équation algébrique quelconque possède deux racines égales, est exposée aux pages 418—423 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery; où on lit: „De plus, il faut considerer que, lorsqu'il y a deux

oportet inventam ſummam quadratorum AC, CB, aequare certo ſpatio dd, quaſi propoſitum habeamus invenire punctum unde ductis CA, CB, quadrata earum ſpatio alicui dd aequalia habeantur. Itaque ſcribe $aa + 2xx - 2cx + cc + bb \infty dd$, vel $xx - cx + \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc - \frac{1}{2}dd + \frac{1}{2}bb \infty 0$. Poſtea aliam aequationem finge ponendo $x \infty e$, et $x - e \infty 0$, quod ductum in ſeipſum faciet $xx - 2ex + ee \infty 0$. Si itaque praecedens aequatio minimi determinationem continet, debet habere x duos valores aequales, ideoque ſingulos ejus aequationis terminos ſingulis terminis poſterioris aequare licet. Primus utrimque eſt plane idem, itaque ſecundus comparetur faciendo $-cx \infty -2ex$ unde invenitur $e \infty \frac{1}{2}c$ hoc eſt $x \infty \frac{1}{2}c$. Quod inveniendum erat. Caeterum comparando terminos poſtremos $\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc - \frac{1}{2}dd \infty ee$, invenietur quantitas $dd \infty aa + cc - 2ee + bb$ hoc eſt, $dd \infty aa + bb + \frac{1}{2}cc$; nam $-2ee$ eſt $-\frac{1}{2}cc$, quoniam inventum fuit $\frac{1}{2}c \infty e$. Et hoc quidem determinationem exhibet in caſu quo datum foret problema ut dato aequale quaeratur, deberet enim dd non minus dari quam $aa + bb + \frac{1}{2}cc$; ſed cum maximum vel minimum quaeritur ſufficit inveniſſe quocunque modo quantitatem x; et quoniam dd tunc tantum imaginarium eſt, oportet invenire x aequalem quantitati cognitae quae non admixtum habeat d, quod ſemper fieri poteſt. [7]) Rationem autem comparationis aequationum mox oſtendam, ubi exemplum cubicae aequationis explicavero.

[Fig. 2.]



Sint lineae angulum rectum continentes BE, BF et datum intra angulum punctum D, oporteatque ducere EDF rectam omnium breviſſimam. [8]) Ductis perpendicularibus DC, DA datae ſunt BC ∞b et BA ∞a. Sit autem AF ∞x ergo quoniam AF ad AD ut DC ad CE erit haec $\infty \frac{ab}{x}$ et tota BE $\infty b + \frac{ab}{x}$; cujus quadratum $\frac{bbxx + 2ab^2x + aabb}{xx}$ addatur ad quadratum BF $aa + 2ax + xx$ ſumma eſt

racines esgales en vne equation, elle a necessairement la mesme forme que si on multiplie, par soy mesme, la quantité qu'on y suppose estre inconnuë, moins la quantité connuë qui luy est égale; & qu'après cela, si cette derniere somme n'a pas tant de dimensions que la precedente, on la multiplie par vne autre somme qui en ait autant qu'il luy en manque: affin qu'il puisse y auoir separement equation entre chascun des termes de l'vne & chascun des termes de l'autre."

Ainsi, pour traiter une équation de la sixième dimension, c'est-a-dire du sixième degré, Descartes égale identiquement le premier membre de l'équation à l'expression: $(yy - 2ey + ee)(y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4)$.

[7]) Huygens ajoute en marge: „aliquando ex aequatione quadrata, etiam tertius terminus comparari debet ipsi ee, nempe si in secundo termino quantitas d habebitur."

[8]) Ce problème s'est présenté à Huygens à propos de la „determinatio" du problème, traité dans

$$\frac{bbxx + 2abbx + aabb + aaxx + 2ax^3 + x^4}{xx} \infty dd \text{ qu. EF},$$

imaginari enim oportet lineam EF datae d aequalem inveniendam eſſe. itaque erit

$$\begin{aligned} x^4 + 2ax^3 &+ aaxx + 2abbx + aabb \infty 0 \\ &+ bbxx \\ &- ddxx \end{aligned}$$

Formetur porro alià aequatio quarum haec comparetur. Sit $x \infty e$ vel $x - e \infty 0$ quod in ſe ductum dat $xx - 2ex + ee \infty 0$ caeterum quoniam duae hic dimenſiones deſunt per aliam quantitatem multiplicetur quae ſecundum Carteſium erit $xx + fx + hh$

$$\begin{aligned} \text{fitque } x^4 &+ fx^3 + hhxx + eefx + eehh \infty 0 \\ &- 2ex^3 + eexx - 2ehhx \\ &\qquad\quad - 2efxx \end{aligned}$$

Comparetur terminus ſecundus hujus aequationis cum ſecundo praecedentis ergo $f - 2e \infty 2a$ et $f \infty 2a + 2e$. Porro ultimus cum ultimo ergo $eehh \infty aabb$ et $hh \infty \frac{aabb}{ee}$. nunc denique penultimus cum penultimo aequationis prioris: nam tertius cum tertio comparandus hic non eſt, quoniam habet quantitatem imaginariam d. Ergo $eef - 2ehh \infty 2abb$. vel ponendo pro f et hh, ea quibus aequalia inventa ſunt erit

$$2aee + 2e^3 - \frac{2aabb}{e} \infty 2abb$$

$e^4 + ae^3 \infty abbe + aabb$ quod utrimque dividitur per $e + a$ et fit $e^3 \infty abb$ vel $x^3 \infty abb$ nam x erat ∞e. Debet itaque AF eſſe una e medijs proportionalibus inter BA et BC, ut fiat FDE omnium breviſſima quae per punctum D ducuntur inter lineas BF, BE.

ad comparationes aequationum quod attinet, apparet equidem quam eae rationem habeant in aequationibus quae quadratum non excedunt, ut in priori horum

la pièce N°. VIII. Comparez la p. 40 du Tome présent à commencer par les mots: „Determinatio autem problematis solida est," etc.

Ajoutons qu'en 1657 Huygens posa le même problème à De Sluse dans sa lettre du 27 juillet (p. 41 du T. II). De Sluse ne manqua pas de reconnaître l'identité du problème avec celui de trouver les deux moyennes proportionelles entre les lignes AB et BC et de le résoudre au moyen de l'artifice indiqué par Héron et que nous avons mentionné dans la note 10, p. 40 du Tome présent. Voir la réponse de De Sluse du 31 juillet 1657 (p. 43 du T. II).

exemplorum. Nam in quacunque aequatione quadrata, ſi ſciam radicem habere duos valores aequales, poſſum ſingulos eorum invenire per ejusmodi comparationem; ſic poſito

$$\begin{aligned} xx - ax &+ ac \text{ aequale nihilo,} \\ - bx &+ bc \\ - cx & \end{aligned}$$

ſi conſtet x valere duas quantitates aequales comparo $a + b + c$ cum $2e$ nempe ſecundum terminum cum ſecundo meae aequationis quam formavi $xx - 2ex + ee$. fitque $e \infty \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ itaque valor uterque radicis x eſt $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$. Quod ſi invenire velim ex qua multiplicatione propoſita aequatio ſit orta, comparo porro ultimos terminos $ee \infty ac + bc$, ſeu quoniam e erat inventum $\infty \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$, fiet

$$ac + bc \infty \frac{aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc}{4}$$

$$aa + 2ab - 2ac - 2bc + bb + cc \infty 0.$$

quare ejus radix $a + b - c \infty 0$; $a + b \infty c$ unde e quae erat $\infty \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ erit nunc $\infty a + b$ vel ∞c nam haec ſunt aequalia. itaque orta eſt aequatio propoſita ex multiplicatione $x - a - b \infty 0$ per $x - c \infty 0$, ſuntque valores duo aequales radicis x, c et $a + b$. Omnes aequationes quadratae productae ſunt hoc modo ex multiplicatione radicis in ſe ipſam multatae quantitatibus ſibi aequalibus, ideoque non mirum, quod ubi duae iſtae quantitates aequales ſunt, ſecundus terminus aequetur $- 2ex$ hoc eſt $- 2xx$ nam idem eſt ac ſi $x - x$ multiplicatum ſit in $x - x$. quod vero $x - e$ ponitur $\infty 0$ adſcita litera $e \infty x$, hoc fit ut terminorum ordo cum diſtinctione habeatur.

Porro in cubicis et quadratoquadraticis alijsque aequationibus, talem formare oportet aequationem, ut totidem dimenſiones et conſequenter tot valores diverſos habeat x quot ſunt in illa aequatione cui comparari eam neceſſe eſt. Ut in exemplo horum poſteriori, primum quidem formo aequationem quadratam $xx - 2ex + ee$, quae duos valores habet eosque aequales; at quoniam hanc quadratoquadraticae conferre nequeo, ducenda eſt porro in aliam aequationem quadratam, cujus quidem radicis valores ijdem ſupponuntur cum duobus valoribus radicis aequationis primariae quos habebat praeter duos aequales. nam non aliter termini ſinguli unius aequationis aequari poſſunt ſingulis terminis alterius niſi radix illius omnes eosdem habeat valores aequationis hujus. quod autem ibi multiplicavi per $xx + fx + hh$, ſciendum eſt hanc eſſe quadratam aequationem in qua x habet duos valores licet falſi ſint, nempe $- \frac{1}{2}f + \sqrt{\frac{1}{4}ff - hh}$ et $- \frac{1}{2}f - \sqrt{\frac{1}{4}ff - hh}$. Hi itaque valores x aequales ſupponuntur duobus iſtis quos habebat x in primaria aequatione praeter duos inter ſe aequales. quare ducto $xx - fx + hh \infty 0$

in $xx - 2ex + e^2 \infty 0$ recte aequatio inde producta cum priori ſecundum ſingulos terminos confertur, eo quod ſinguli quatuor valores radicis in una ſingulis in altera aequales ſupponantur; ex iſto autem ſuppoſito, omnia conſequenter inveniuntur quae requiruntur ut quod ſuppoſitum eſt verum eſſe poſſit, itaque primum invenitur $f \infty 2a + 2e$ et $hh \infty \frac{aabb}{ee}$ deinde e^3 ſeu $x^3 \infty abb$.

Nihil autem intereſt quae ſigna + et − ſint in $xx + fx + hh$ quae quantitas ducta eſt in $xx - 2ex + ee$ ſupplendi dimenſiones gratia. quia poſtmodum quantitates f et hh rurſus eliminantur.

Potuiſſet etiam loco aequationis $xx + fx + hh \infty 0$ aliae ſumi ut $xx - fx - hx + fh \infty 0$, orta ex $x - f \infty 0$ per $x - h \infty 0$; item $xx. fx. fh$, et quaelibet praeter has, dummodo praeter x duas alias literas habeant, ductaque in $xx - 2ex + ee$, omnes dimenſiones forment quae ſunt in aequatione prima. Sed omnium commodiſſime ſumitur $xx. fx. hh$, quod Carteſius praeſcribit[9]). Sciendum autem eſt, nihil eſſe aliud, tangentem quaerere ſecundum ipſius methodum [10]) quam ex certo puncto ducere lineam rectam breviſſimam earum quae poſſunt, lineae curvae occurrentem. Et licet aliquando hoc ſit ſolidum, [11]) et tangentem tamen ad datum in curva punctum ducere planum ſit, utrumque ea ratione ſimul conſtruere diſcimus et discernitur ſimul quodnam è duobus ſolidum quodve planum ſit. Illud modo obſervandum eſt, quae quantitas duos diverſos valores habere poſſit, cum problema ita reſolvitur ut non breviſſimam, ſed certae lineae aequalem ducere quaeramus.

[Seconde Partie.] [12])

Methodus autem Fermatij in ſolidis problematibus plerisque et praecipue ad tan-

[9]) Au lieu cité dans la note 6, Descartes n'emploie que le signe + dans le facteur en question; mais il remarque à propos de ces signes: „Mesme il est a remarquer, touchant la derniere somme,... $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$, que les signes, + & —, y peuuent estre supposés tels qu'on veut, sans que la ligne v" [qu'il s'agit de déterminer en égalant les coefficients des deux équations] „se trouve diverse pour cela, comme vous pourrés aysement voir par experience: car, s'il falloit que ie m'arestasse a demonstrer tous les theoresmes dont ie fais quelque mention, ie serois contraint d'escrire vn volume beaucoup plus gros que ie ne desire".

[10]) On sait que Descartes remplace la recherche de la tangente à un point donné C d'une courbe, dont l'équation est connue, par celle de la normale. Pour trouver cette dernière il cherche sur l'axe des coordonées un point P situé de telle manière que le cercle, décrit avec le rayon CP du point P comme centre, touche la courbe donnée au point C, ce qui exige que l'équation, qui sert à determiner les intersections du cercle avec la courbe, possède deux racines égales. Comparez les pages 413—419 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery.

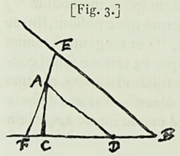
[11]) Comparez p. e. le § 7, p. 32 et 33 du T. XI.

[12]) L'état du manuscrit fait présumer que la seconde et la troisième partie n'ont été ajoutées à la première qu'après un certain laps de temps; la seconde probablement avant et la troisième,

gentes inveniendas facilior eſt atque expeditior, ſi ſic ea utamur ut jam dicetur. [13])

Poſtquam quaeſtionem ſic reſolventes quaſi dato aequale quaeratur ad aequationem pervenimus, oportet ut illud ſuppoſitum datum unam aequationis partem faciat, quod plerumque ſpontè contingit. Deinde oportet ponere $x+y$ vel $x-y \infty x$; ſed commodius $x+y \infty x$ ponetur. et in omnibus quantitatibus aequatîonis ubi habetur x, ſcribendum eſt $x+y$, ita ut quaecunque quantitates per x multiplicatae vel diviſae ſint multiplicentur per $x+y$ vel dividantur. atque idem obſervandum in omnibus poteſtatibus x, ut ſcilicet pro xx et x^3 et x^4 &c. ſubſtituantur quadrata, cubi, quadratoquadrata ab $x+y$. Neque tamen integras poteſtates ab $x+y$ ſcribere eſt opus, ſed partes omnes earum omitti poſſunt in quibus plura quam unum y continentur. [14]) Ita ex quadratoquadr.° ab $x+y$, nihil aliud ſumendum quam x^4+4x^3y. ex cubo nihil niſi x^3+3xxy; ex quadrato $xx+2xy$. ſed et x^4, x^3, et xx, ex hiſce omitti ſic poſſunt, ut pro ſcriptis habeantur, et deletis contra terminos omnes aequationis primae. Nam quae ſcimus deletum iri ea ſcribi non eſt neceſſe.

[Fig. 3.]



Eſto datus angulus EBF, et intra ipſum A punctum. Oporteatque ducere EAF breviſſimam quae per punctum A intra datum angulum duci poſſit. [15])

Sit AD parallel. EB, et AC perpend. ad BF. Et lineae datae vocentur $a \infty$ BD; $b \infty$ DA; $c \infty$ DC et ponatur quoque EF $\infty\, d$ quaſi data eſſet. ſitque DF $\infty\, x$, quaeſita.

$$\mathrm{BF}\,(x+a)\ \text{ad FE}\,(d)\ \text{ut DF}\,(x)\ \text{ad FA}\left(\frac{dx}{x+a}\right)$$

$$12.2.\text{Eucl.}^{16)}\ \text{q.AD}(bb)+\text{q.DF}(xx)-\text{q.FA}\left(\frac{ddxx}{xx+2ax+aa}\right)\infty\, 2\,\square\,\text{FDC}(2cx)$$

$$\frac{\begin{array}{lllll} x^4 & +\,2ax^3 & +\,aaxx & +\,2abbx & +\,aabb \\ & -\,2c & +\,bb & -\,2aac & \\ & & -\,4ac & & \end{array}}{xx} \infty\, dd$$

qui est écrite sur une feuille détachée, insérée au manuscrit, après le 22 déc. 1652; date de la pièce qui suit dans le manuscrit et qu'on retrouvera dans le Tome qui contiendra les travaux de dioptrique.

[13]) Il nous semble probable que Huygens, en composant cette seconde partie, est revenu sur l'opinion qu'il avait exprimée dans la suscription de la première, savoir, que la méthode alternative, qu'il a développée dans cette première partie, serait plus brève que celle fondée sur la règle de Fermat.

[14]) Comparez la note 11 p. 48 du T. XI.

[15]) Voir la note 8. Maintenant il s'agit de la „determinatio" dans le cas le plus général du problème de la pièce N°. VIII.

[16]) Voir la note 15, p. 29 du Tome présent.

Sit jam $x+y \infty x$ et ſubrogetur ubique ejus quantitas, in quantum opus erit, fit aequatio comparanda cum priori.

$$\frac{\begin{array}{lllll} x^4 & +\,2ax^3 & +\,aaxx & +\,2abbx & +\,aabb \\ & -\,2c & +\,bb & -\,2aac & +\,2abby \\ & +\,4y & -\,4ac & +\,2aay & -\,2aacy \\ & & +\,6ay & +\,2bby & \\ & & -\,6cy & -\,8acy & \end{array}}{xx+2xy} \infty\, dd$$

adaequantur [17])

Poſt alternas per denominatores multiplicationes aequaliumque ablationem fit

$$\begin{array}{llll} 2x^5 & +\,2ax^4 & +\,2aacxx & -\,2aab^2x \infty 0 \\ & -\,2c & -\,2abb & \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} x^4 & +\,ax^3 & +\,aacx & -\,aabb \infty 0 \\ & -\,c & -\,abb & \end{array}$$

Quando c eſſet ∞ o hoc eſt angulus EBF rectus, aequatio dividi poſſet per $x+a$, fieritque $x^3 - abb \infty 0$ ſicut antea quoque inventum eſt. [18])

Quando autem $a \infty b$; dividi poteſt per $x-a$, ideoque tum $x \infty a$ et tum planum eſt problema.

[Troisième Partie.]

Problematis hujus conſtructio ſuperius allata [19]) *hic demonſtranda eſt, erat autem hujuſmodi.*

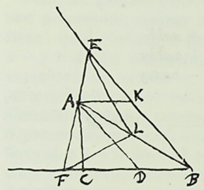
Juncta AB [Fig. 4.] dividatur biſariam in L; poſitâque regula ad punctum

[17]) C'est-à-dire les deux valeurs obtenues pour *dd*.

[18]) Voir la *première partie* à la page 63. Plus tard, Huygens s'est aperçu que la division par $x+a$ se pouvait accomplir également au cas général. Ainsi à côté de la dernière équation biquadratique du texte, il écrivit: „dividi potest per $a+x$" et à l'autre côté le résultat de la division, c'est-à-dire: „$x^3 - cxx + acx - abb \infty 0$"

[19]) Voir la pièce N°. VIII, p. 40 du Tome présent, ligne 7 d'en bas, à commencer par les mots: „Etenim dato intra angulum BAC puncto D," etc.

[Fig. 4.]



A, ea tam diu moveatur donec positionem habeat FE, faciens LE, LF inter se aequales, fietque EF omnium brevissima quae per punctum A intra angulum EBF duci possunt. Idem quoque factum fuit supra per intersectionem hyperboles et circuli, [20]) sed utrimque eadem est ratio.

Ducantur AD, AK parallelae EB, BF, et AC perpendicularis in FB. et nomina linearum serventur quae posita fuere.[21]) Ergo existentibus FL, LE inter se aequalibus ostendendum est

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + aacx - aabb \infty 0\ ^{22)} \\ - cx^3 - abbx \end{aligned}$$

Quia in triangulo AEB ducta est EL ad mediam basin AB erunt quadrata AE et EB dupla simul quadratorum AL et LE, similiterque in triangulo AFB erunt quadrata AF, FB simul dupla quadratorum AL, LF. Ergo si qu.LF aequale qu.° LE, erunt qu.ª AF, FB simul aequalia qu.^{is} AE, EB.

p. 12.2. Elem. [16])

$$\text{q. AF} \infty bb + xx - 2cx$$

$$\text{q. DF}(xx) \text{ ad q. AF } (bb + xx - 2cx) \text{ ut q. AK}(aa) \text{ ad q. AE}\left(\frac{aabb + aaxx - 2aacx}{xx}\right)$$

$$\text{q. FB} \infty aa + xx + 2ax$$

$$\text{q. DF}(xx) \text{ ad q. DA}(bb) \text{ ut q. FB}(aa + xx + 2ax) \text{ ad q. BE}\left(\frac{bbaa + 2abbx + bbxx}{xx}\right)$$

$$\text{q. AF} + \text{q.FB} \quad bb + aa + 2xx + 2ax - 2cx \infty$$

$$\infty \frac{aaxx + bbxx - 2aacx + 2abbx + 2aabb}{xx} \quad \text{q. AE} + \text{q. BE.}$$

$$x^4 + ax^3 - cx^3 \infty abbx - aacx + aabb$$

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + aacx - aabb \infty 0 \\ - cx^3 - abbx \end{aligned}$$

$$\text{div. per } x + a \qquad x^3 - cxx + acx - abb \infty 0\ ^{23)}$$

[20]) Voir la page 41 du Tome présent à commencer par les mots; „Aliter quoque ijsdem positis," etc.
[21]) Voir la *seconde partie* à la page 66.
[22]) C'est l'équation finale de la *seconde partie*.
[23]) Cette dernière ligne a été ajoutée après coup. Comparez la note 18.

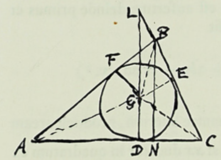
XV.[1])

1653.

22 Jan. 1653.

Inventio regulae qua utimur ad inveniendam ex lateribus aream trianguli.

Sit triangulum ABC cujus data sint latera, et oporteat aream invenire. Ponatur intra triangulum circulus descriptus GDFE, et ductae ex centro G ad latera perpendiculares GD, GE, GF quas constat esse aequales, ideoque cum triangulum ABC sit aequale tribus triangulis AGC, CGB, BGA, erit idem aequale triangulo cujus basis aequalis tribus AB, BC, CA et altitudo GD. Igitur quaerenda est GD.



Sit AB $\infty\, a$, BC $\infty\, b$, CA $\infty\, c$ et DC $\infty\, y$. Ergo et CE $\infty\, y$. Ergo BE sive BF $\infty\, b - y$, et proinde AF $\infty\, a - b + y$.

$$\text{AF } a - b + y \infty c - y \text{ AD.}$$

$$\text{DC} \quad y \infty \frac{c + b - a}{2}.$$

Sit nunc GD $\infty\, x$ et ducatur BN perpend. ad AC et producantur CB, DG donec occurrant sibi mutuo in L. Per 13. lib. 1.[2]) Elem. est CN $\infty \frac{cc + bb - aa}{2c}$. haec vocetur e: et propter $\triangle^{la}$ similia erit

[1]) La pièce occupe les pages 235 et 236 du manuscrit N°. 12. Elle contient une déduction de la formule de Héron.
[2]) Lisez „per 13. lib. 2." et consultez la note 18, p. 30 du Tome présent.

$$\text{q. CN } (ee) \text{ ad q. NB } (bb - ee) \text{ ut q. CD } (yy) \text{ ad q. DL } \frac{bbyy - eeyy}{ee}$$

item

$$\left.\begin{array}{r} \text{CN } (e) \text{ ad CB } (b) \text{ ut EG } (x) \text{ ad } \frac{bx}{e} \text{ GL} \\ x \text{ GD} \end{array}\right\} \text{a[dde]}$$

$$\frac{bx + ex}{e} \text{ DL}$$

$$\text{q. DL} \quad \frac{bbxx + 2bexx + eexx}{ee} \infty \frac{bbyy - eeyy}{ee} \text{ qu. DL}$$

$$xx \infty \frac{bbyy - eeyy}{bb + 2be + ee} \infty \frac{byy - eyy}{b + e}$$

$$\underset{\displaystyle\frac{bb + 2bc + cc - aa}{2c}}{(b+e)} \text{ ad } \underset{\displaystyle\frac{aa - bb + 2bc - cc}{2c}}{(b-e)} \text{ ut } \underset{\displaystyle\frac{bb + 2bc + cc - 2ac - 2ab + aa}{4}}{(yy)} \text{ ad } xx$$

denominator primi et fecundi termini quia idem eft aufertur; deinde primus et tertius terminus dividi poffunt per $b + c - a$. Et fit

$$b + c + a \text{ ad } \frac{b + c - a}{4} \text{ ut } aa - bb + 2bc - cc \text{ ad } xx. \text{ [3)]}$$

Quia vero GD, x, ducta in $\frac{a + b + c}{2}$ dimidium summae laterum, producit aream trianguli ABC, apparet eandem quoque provenire si xx duçatur in quadratum ex $\frac{a + b + c}{2}$, et ex producto radix extrahatur. Sed xx eft illud quod oritur ex producto terminorum tertij et fecundi, ultimo pofitorum, divifo per primum qui eft $a + b + c$. Ergo quoniam hoc multiplicari rurfus deberet per qu. ex $\frac{a + b + c}{2}$ apparet tantum opus effe ut fecundus terminus in tertium ducatur et hoc productum rurfus in $\frac{a + b + c}{4}$, atque ex ultimo producto radix eliciatur: Atque hanc fore aream trianguli quaefitam.

Oportet igitur multiplicare $aa - bb + 2bc - cc$ per $\frac{b + c - a}{4}$ et horum pro-

[3)] Huygens annota en marge: „Theorema ad inveniendum femidiametrum circuli in triangulo."

ductum per $\frac{a + b + c}{4}$. Hoc autem idem eft ac fi haec tria multiplicentur, nempe $\frac{aa - bb + 2bc - cc}{4}$ et $\frac{b + c - a}{2}$ et $\frac{a + b + c}{2}$. Sed $\frac{aa - bb + 2bc - cc}{4}$ oritur ex multiplicatione $\frac{a - b + c}{2}$ in $\frac{a - c + b}{2}$. Itaque haec quatuor multiplicanda funt, videlicet, $\frac{a - b + c}{2}$ et $\frac{a - c + b}{2}$ et $\frac{b + c - a}{2}$ et $\frac{a + b + c}{2}$, et producti radix erit area trianguli ABC. Tres autem priores termini inveniuntur fi ex dimidio fummae laterum fingula latera auferantur, eftque quartus terminus ipfa medietas fummae laterum.

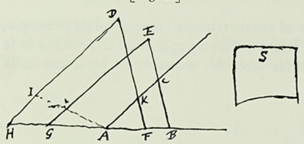
Igitur hinc regula manifefta fit quae ad aream trianguli inveniendam praecipit, ut ex dimidia fumma laterum fingula latera auferantur; et haec tria refidua in fe mutuo ducantur et in dimidium fummae laterum, atque ut ex producto radix eliciatur.

XVI.[1]

1653.

19 Aug. 1653.

[Fig. 1.]



Dato positione angulo CAB et punctis extra ipsum D et E, propositum sit abscindere duabus inde eductis parallelis spatium KCBF aequale dato quadrato S.

Producatur BA et ducantur DH, EG parallelae CA, vocetur AG, a. GE, b. AH, c. HD, d. et quaeratur AF ∞ x facto autem triangulo IHA ∞ $\square$ S vocetur IH, q.

$$\text{FH } (x+c) \text{ ad HD } (d) \text{ ut FA } (x) \text{ ad } \left.\begin{array}{r} \dfrac{dx}{x+c}\ \text{AK} \\ x\ \text{AF} \end{array}\right\} \text{m[ult.]}$$

$$\frac{dxx}{x+c} \square\ \text{KAF}$$

$$\text{DH } (d) \text{ ad HF } (x+c) \text{ ut EG } b \text{ ad } \left.\begin{array}{r} \dfrac{bx+bc}{d}\ \text{GB} \\ a\ \ \text{AG} \end{array}\right\} \text{f[ubt].}$$

$$\frac{bx+bc}{d} - a \quad \text{AB}$$

$$\text{sit } b \text{ ad } a \text{ ut } d \text{ ad } e \text{ ergo } \frac{eb}{d} \infty\ a \text{ ergo } \frac{bx+bc-eb}{d} \quad \text{AB}$$

[1]) La pièce est empruntée aux pages 237—240 du manuscrit N°. 12. Elle contient la solution d'un problème plan, menant à une équation quadratique. Dans l'analyse, par laquelle Huygens débute, il se sert d'expressions, comme dxx et $bb\,(xx+2rx+rr)$ de trois ou quatre dimensions. Puisque de telles expressions ne peuvent être tolérées dans les démonstrations à la mode des anciens, il montre ensuite de quelle manière on peut réussir à les éviter. Enfin il prépare, à la façon indiquée dans la Pièce N°. V (p. 25 du Tome présent), une „Compositio" et une „Demonstratio", capable d'être rédigée facilement en n'employant d'autres notions que les conceptions purement géométriques, admises par les anciens.

$$\left.\begin{array}{r} \text{sit } c - e \infty\ r \text{ ergo } \dfrac{bx+br}{d}\ \text{AB} \\ \text{FH } (x+c) \text{ ad HD } (d) \text{ ut AB } \dfrac{bx+br}{d} \text{ ad } \dfrac{bx+br}{x+c}\ \text{AC} \end{array}\right\} \text{m[ult.]}$$

$$\frac{bb \text{ in } (xx+2rx+rr)}{dx+dc}\ \text{▱ CAB}^{2)}$$

$$\text{sit } \frac{bb}{d} \infty\ l \quad \left.\begin{array}{r} \dfrac{l \text{ in } (xx+2rx+rr)}{x+c}\ \text{▱ CAB} \\ \dfrac{dxx}{x+c}\ \text{▱ KAF} \end{array}\right\} \text{f[ubt].}$$

$$cq\ \text{▱ IHA} \infty\ 2 \text{ ⏢ CKFB } \frac{l \text{ in } (xx+2rx+rr) - dxx}{x+c}$$

$$\frac{dxx}{x+c} \text{ eſt } \frac{\frac{dlxx}{l}}{x+c} \text{ ergo } cq \infty \frac{l \text{ in} \left(xx+2rx+rr-\frac{dxx}{l}\right)}{x+c}$$

$$\text{ergo } x+c \text{ ad } l \text{ ut } xx+2rx+rr-\frac{dxx}{l} \text{ ad } cq.$$

Id quod hic fecimus semper agendum est ut aequatio sit ejusmodi quae in proportionem resolvi possit, idque sine solidorum mentione.

Proportio autem semel ordinata retinenda est, aut si nonnunquam ad aequalitatem redigatur, rursus repetenda, donec ad simplissimos terminos deveniatur, ex quibus x innotescat.

Verùm quia demonstrationis inveniendae gratia hujusmodi analysis instituta est, oportet ut operatio omnis quae aequationem praecessit argumentationis formam accipiat. Etenim postquam repetendo analyseos vestigia demonstratum erit quod

$$x+c \text{ ad } l \text{ ut } xx+2rx+rr-\frac{dxx}{l} \text{ ad } cq,$$

oportebit ex ista quae aequationem praecessit argumentatione ostendere quod

$$x+c \text{ ad } l \text{ ut } xx+2rx+rr-\frac{dxx}{l} \text{ ad ⏢ CKFB } 2$$

Itaque resolutione continua opus est hujusmodi:

Factum ponatur, et sint constructa quae superius diximus. Porro autem ut b ad a ita sit d at e, ergo d ad b ut e ad a

sed d ad b ut $x+c$ ad GB

ergo $x+c$ ad GB ut e ad a

et $x+c-e$ ad e ut AB ad a

[2]) Ici et dans la suite les aires des parallélogrammes indiqués et du trapèze CKFB ne sont pas égales mais proportionnelles aux expressions algébriques qui les accompagnent.

et $x + c - e$ ad AB ut e ad a

ergo $x + c - e$ ad AB ut d ad b

ſed AB ad AC ut $x + c$ ad d

per pr. pert. [3]) ergo $x + c - e$ ad AC ut $x + c$ ad b

$c - e \infty r$ $\quad x + r$ ad AC ut $x + c$ ad b

ſed $x + r$ ad AB ut d ad b

ergo ratio comp.ª ex $x + r$ ad AC et $x + r$ ad AB, hoc eſt Q. $x + r$ [4]) ad $\square$ CAB eadem eſt compoſitae ex $x + c$ ad b et d ad b. Sit autem ut d ad b ita b ad l ergo Q $x + r$ ad $\square$ CAB ut $x + c$ ad l. (nam ratio compoſita ex $x + c$ ad b et b ad l eadem eſt quae $x + c$ ad l.)

Itaque $x + c$ ad l ut Q. $x + r$ ad ▱ CAB $\quad \alpha$ [5]).

Fiat jam ut l ad d ita xx ad $\frac{dxx}{l}$ deſignandum $\frac{dx}{l}$. [6]) Reductio ▱ KAF; eſt autem d ad $x + c$ ut ▱ KAF ad xx.

per perturb. [3]) ergo $x + c$ ad l ut $\frac{dxx}{l}$ ad ▱ KAF

α. [7]) ergo $x + c$ ad l ut Q$\overline{x + r} - \frac{dxx}{l}$ ad ▱ CAB $-$ ▱ KAF ſeu ▱ IHA (qc)

Æquatio ſuperius exhibita. [8])

Sit l ad q ut c ad p ergo $lp \infty qc$

ergo $x + c$ ad l ut Q. $\overline{x + r} - \frac{dxx}{l}$ ad lp

sed ut $x + c$ ad l ita $px + pc$ ad lp

ergo $xx + 2rx + rr - \frac{dxx}{l} \infty px + pc$

$xx + 2rx - px - \frac{dxx}{l} \infty pc - rr \qquad$ Sit $pc - rr \infty ss$

$xx + 2rx - px - \frac{dxx}{l} \infty ss$

3) Consultez sur l'opération; „ex aequali in proportione perturbata", la note 22, p. 304 du T. XI.
4) Lisez: $(x + r)^2$.
5) L'α est un signe de renvoi, voir la note 7.
6) C'est-à-dire en introduisant, pour le besoin de la rédaction à la mode des anciens, une ligne inconnue égale à $\frac{dx}{l}$. En effet, dans la Fig. 2 cette ligne est représentée par AN; voir la note 11.
7) Le signe de renvoi α veut dire que la proportion qui va suivre, se déduit de celle qui précède immédiatement, combinée avec celle marquée, quelques lignes plus haut, avec le signe α.
8) Voir les proportions de la page précédente qui commencent avec „$x + c$ ad l."

ergo x ad s ut s ad $x + 2r - p - \frac{dx}{l}$

sed ut s ad $x + 2r - p - \frac{dx}{l}$ ita ls ad $lx - dx + 2rl - pl$

ergo x ad s ut ls ad $lx - dx + 2rl - pl$

sit $l - d$ ad l ut $2r - p$ ad m $\quad$ ergo $lm - dm \infty 2rl - pl$

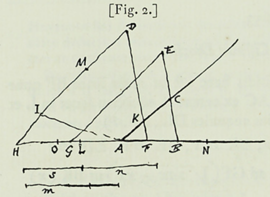
ergo x ad s ut ls ad $lx - dx - lm - dm$

sit $l - d$ ad l ut s ad n $\quad$ ergo $ln - dn \infty ls$

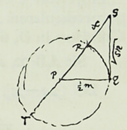
ergo x ad s ut $ln - dn$ ad $lx - dx + lm - dm$

ergo x ad s ut n ad $x + m$ et $xx + mx \infty sn$ quod componitur ſecundum regulam aequationum quadraticarum [9])

[Fig. 2.]



[Fig. 3.]



e. HL [10])

l. HM [10])

$\frac{dx}{l}$. AN [11])

p. HO [12])

r. LA [13])

Hinc demonſtratio facile conſcribetur per regreſſum, cujus hoc ſit initium; [14]) Rect. TSR [Fig. 3] aequale eſt quadrato SQ, hoc eſt $\square^o sn$,

ergo RS, x ad s ut n ad $x + m$, ST.

Sed ut n ad $(x + m)$ ita $nl - nd$ ad $xl - xd + lm - dm$

ergo x ad s ut $nl - nd$ ad $xl - xd + lm - dm$

&c.

9) Voir la figure 3.
10) On a $e = ad : b = AG \times HD : GE$; $l = b^2 : d = GE^2 : HD$. Ces constructions ne sont pas indiquées dans la figure.
11) Cette ligne AN ne peut pas être construite pour le moment. Elle n'est introduite que pour le besoin de la rédaction. Voir la note 6.
12) On a $p = qc : l = HI \times HA : HM$. Cette ligne se construit facilement en tirant IO parallèle à MA.
13) En effet $r = c - e = HA - HL$. Ajoutons que les lignes s, m, n, qu'on trouve représentées en bas de la figure 2, ont été définies par les égalités $ss = pc - rr$; $m = (2r - p)\, l : (l - d)$; $n = ls : (l - d)$.
14) Comparez la note 5, p. 24, dernier alinéa.

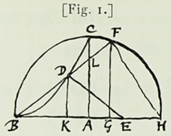
XVII. [1]

1653.

1ª Sept. 1653.

Inventio tangentis in Cissoide Dioclis.

[Fig. 1.]



Proprietas Cissoidis haec est ut ducta linea BF quae perpendicularem AC ex centro A eductam secet in L et Cissoidem in D, sint aequales DL, LF. [2])

Sit AB ∞ a, BK ∞ x, BE ∞ v, ED ∞ s

BG $(2a-x)$ ad GF$\left(\sqrt{2ax-xx}\right)$ ut BK (x)

ad $x\dfrac{\sqrt{2ax-xx}}{2a-x}$ KD

$$\left.\begin{array}{l}\text{ergo } \dfrac{x^3}{2a-x}\ \text{qu.KD} \\ vv-2vx+xx\ \text{q.KE}\end{array}\right\}\ \text{a[dde]}$$

$$\frac{x^3}{2a-x}+vv-2vx+xx\ \infty\ ss\ ^{3)}\ \text{q. DE}$$

[1]) La pièce se trouve à la page 241 du manuscrit N°. 12. Elle contient la détermination de la tangente à la cissoïde d'après la méthode de Descartes, décrite dans la note 10, p. 65 du Tome présent.

[2]) Cette propriété est une conséquence presque immédiate de la définition de la cissoïde, qu'on trouve dans les Commentaires d'Eutocius sur l'ouvrage „De sphaera et cylindro" d'Archimède. Voir T. III, p. 80—83 de l'édition de Heiberg, citée p. 50 du T. XI; p. 17—18 de l'édition de Bâle, citée p. 274 du même Tome.

[3]) Dans le texte, qui va suivre, la méthode de Descartes est employée jusqu'au bout. C'est-à-dire l'équation en x en tête de la page suivante, qu'on écrirait maintenant:

$$x^2-\frac{v^2-s^2+4av}{2(a+v)}x+\frac{a(v^2-s^2)}{a+v}=0$$

est identifiée terme pour terme avec l'équation $x^2-2ex+e^2=0$.

Or, dans un petit manuscrit qui a appartenu à son frère Philippe, décédé en mai 1657,

$$\frac{\begin{array}{l}xx-vvx+2avv-2ass\\ \quad +ssx\\ \quad -4avx\end{array}}{2a+2v}\ \infty\ 0$$

Sit $x\ \infty\ e$ $\quad xx-2ex+ee\ \infty\ 0$

Comparatio ultimi term. [4]) $\dfrac{2avv-2ass}{2a+2v}\ \infty\ ee$

$$\text{a[dde]}\ ^{5)}\left|\begin{array}{l}vv-ee-\dfrac{vee}{a}\ \infty\ ss\\ -vv-4av\end{array}\right.$$

Huygens a fait des notices et des calculs qui datent de 1657. On y rencontre à la page 31 une autre déduction de la relation qui doit exister entre x et v, basée sur la condition que ss doit être un minimum pour v constant, x variable.

De cette déduction il résulte qu'alors Huygens avait déjà apporté une nouvelle simplification à la méthode, employée p. 66—67 du Tome présent, pour trouver la valeur minimale ou maximale d'une fraction $\varphi(x):\psi(x)$; cette simplification consiste, en notation moderne, à poser:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{y\varphi'(x)}{y\psi'(x)}$$

où y représente un petit accroissement de la variable x.

Voici, en effet, cette déduction:

$$„\frac{x^3}{2a-x}+vv-2vx+xx\ \infty\ ss$$

$$\frac{2avv-xvv-4avx+2vxx+2axx}{2a-x}\ \infty\ ss\ \infty\ \frac{-yvv-4avy+4vxy+4axy}{-y}$$

$$-2avv+xvv+4avx-2vxx-2axx\ \infty\ -2avv-8aav+8avx+8aax+$$
$$+vvx+4avx-4vxx-4axx$$

$$8aav-8avx+2axx\ \infty\ 8aax-2vxx$$

$$4aav-4avx+vxx\ \infty\ 4aax-axx$$

$$v\ \infty\ \frac{4aax-axx}{4aa-4ax+xx}\text{"}$$

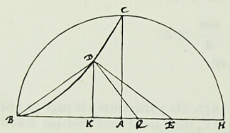
[4]) Comparez la note 6, p. 61 du Tome présent.

[5]) Le second terme de l'équation originale étant $\left(\dfrac{-vv+ss-4av}{2a+2v}\right)x$, Huygens additionne $-vv-4av$ à la valeur de ss calculée d'après la formule précédente, pour égaler ensuite le coefficient obtenu à $-2e$.

$$\text{Comp. fecund. term. } \frac{-ee-\frac{vee}{a}-4av}{2a+2v} \infty -2e$$

$$v \infty \frac{4aae-aee}{4aa-4ae+ee}$$

[Fig. 2.]



CONSTRUCTIO.

Jungatur BD [Fig. 2] et fint perpendiculares DK et DQ fuper AB et BD, eritque BQ $\frac{4aae-2aee}{4aa-4ae+ee}$.[6]) Porro ut KH ad HA ita fit KQ ad QE, eritque QE $\frac{aee}{4aa-4ae+ee}$ quae addita ad BQ facit BE $\infty \frac{4aae-aee}{4aa-4ae+ee}$ ut oportebat.

NB. BQ $\frac{4aae-2aee}{4aa-4ae+ee}$ eft idem q[uo]d $\frac{2ae}{2a-e}$. $4aa-4ae+ee$ eft qu. KH.

Trianguli BFH,[7]) BDQ[8]) funt fimiles. Unde proportionales GB, BH : KB, BQ. Item HK, KB, KQ.

[6]) On a $BQ = BD^2 : BK = \left(e^2+\frac{e^3}{2a-e}\right) : e = \frac{2ae}{2a-e} = \frac{4aae-2aee}{4aa-4ae+ee}$.
[7]) Voir la Fig. 1.
[8]) Voir la Fig. 2.

XVIII.[1])

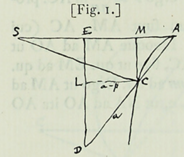
1653.

1 Sept. 1653.

Inventio tangentis in Conchoide 2.da[2])

Proprietas hujufce Conchoidis haec eft. ut ductâ ex puncto A recta AD ufque ad lineam ED, quae AD Conchoidem fecet in C, fit femper CD aequalis perpendiculari AE.

[Fig. 1.]



Sit AE $\infty\ a$ ergo et CD $\infty\ a$

AM $\infty\ p$ et $\infty\ p+y$

AS $\infty\ v$

SC $\infty\ s$

q.LC $(aa-2ap+pp)$ ad q.LD $(2ap-pp)$ ut q.AM (pp) ad

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2ap^3-p^4}{aa-2ap+pp}\ \text{q.MC} \\ vv-2pv+pp\ \text{q.MS} \end{array}\right\} \text{a[dde].}$$

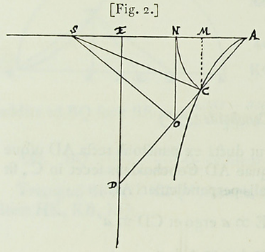
[1]) La pièce est empruntée à la page 242 du manuscrit N°. 12. Huygens, pour trouver la tangente demandée, y emploie la méthode de Descartes, exposée dans la note 10, p. 65 du Tome présent, jusqu'au moment où il s'agit de déterminer la condition sous laquelle le cercle décrit de S comme centre avec le rayon SC touche à la courbe donnée. Alors, profitant de la remarque (voir p. 65 du Tome présent) que SC doit être la distance minimale de S à la courbe, Huygens va appliquer la méthode de Fermat, telle qu'il l'a simplifiée dans la seconde partie de la Pièce N° XIV, p. 65—67 du Tome présent.
[2]) Il s'agit de la seconde branche de la conchoïde de Nicomède au cas particulier où le segment de longueur donnée est égale à la distance du pôle à la base.

$$\text{q.SC}\quad vv - 2pv + \frac{aapp}{aa - 2ap + pp} \infty\, vv - 2vp - 2vy + $$
$$+ \frac{aapp + 2aapy}{aa - 2ap - 2ay + pp + 2py}\ \text{q.SC}\ ^{3)}$$

$$\text{quadrato quadr.}\ \frac{a^4p - a^3pp}{a^4 - 4a^3p + 6aapp - 4ap^3 + p^4} \infty\, v \quad \text{ſit EM}\ a - p \infty n$$

$$\frac{a^3p}{n^3} \infty\, v$$

[Fig. 2.]



CONSTRUCTIO.

Ducatur ACD, et ponatur AN ∞ AC, et ſit NO parall. ED, et OS perpend. ad AO. Juncta SC occurret Conchoidi ad angulos rectos.

NB. AC eſt $\frac{ap}{n}$ ergo $v \infty \frac{aa}{nn}$ in AC. proportionales autem ſunt AM, AC (cui aequ. AN) AO. Ideoque AM ad AO ut qu. AM ad qu. AC, ſive ut qu. EM ad qu. CD, hoc eſt ut nn ad aa. Ergo ut AM ad AO ita AC ad v. Quare permutando ut AM ad AC h. e. ut NA ad AO ita AO ad v, hoc est AS.

---

3) La valeur de SC^2, pour $AM = p$, étant trouvée, Huygens écrit à côté celle qu'on obtient pour $AM = p + y$ et égale les deux valeurs, ce qui permet de calculer la valeur cherchée de $v = AS$.

Ajoutons que sur une feuille séparée la méthode de Descartes est poursuivie jusqu' à la fin, c'est-à-dire, en se servant de l'artifice exposé dans la note 6, p. 61 du Tome présent. Sur cette feuille, écrite d'une autre main, Huygens a annoté „Berkelij." Sans doute il s'agit de Abraham van Berckel, mentionné dans la note 2, p. 242 du T. I, qui, d'après la lettre N°. 163 de la même page, s'intéressait à des problèmes mathématiques.

XIX. [1]

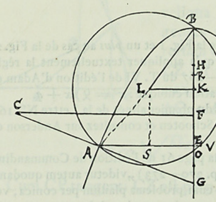
1653.

Problema. 17 Sept. 1653.

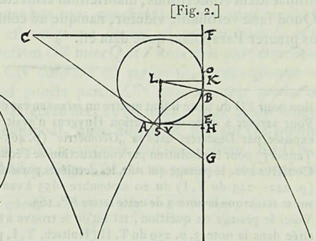
Data parabola et puncto extra ipſam, ducere ex eo rectam lineam quae parabolam ſecet ad angulos rectos.

Eſto data Parabola AB [Fig. 1, 2], punctumque C extra ipſam. Factum jam ſit quod proponitur, ut nempe CAG ſecet parabolam ad ang. rectos, ergo ducta

[Fig. 1.]



[Fig. 2.]



perpend.^i AE erit EG dimidio lateri recto aequalis; ducatur autem et CF ad axem perpend. et ſit BF, a. CF, b, latus rectum r. et AE, x. ergo BE $\frac{xx}{r}$, et FG $\left(\frac{xx}{r} + \frac{1}{2}r \,\natural\,^{2)}\, a\right)$ ad FC (b) ut GE $(\frac{1}{2}r)$ ad EA (x).

$$\frac{x^3}{r} + \tfrac{1}{2}rx \,\natural\, ax \infty \tfrac{1}{2}br$$

---

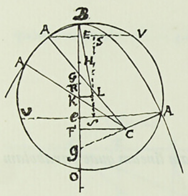
1) La pièce, empruntée à la p. 240 du manuscrit N°. 12, traite le même problème devant lequel Huygens s'était arrêté, il y avait huit ans, après avoir constaté qu' il menait à une équation cubique; voir les p. 32 et 33 du T. XI.

2) Ce signe indique qu'on doit intercaler + ou — selon les circonstances. Ainsi, dans l'expres-

$x^3 \infty - \frac{1}{2}rrx \pm rax + \frac{1}{2}brr$ et ſumendo r per unit.

$x^3 \infty - \frac{1}{2}rx \pm ax + \frac{1}{2}b.$

[Fig. 3.]



CONSTRUCTIO. Sit poſita BH [Fig. 1, 2] aequalis $\frac{1}{2}$ lateris recti, et diviſâ FH per medium in K ponatur KL perpend.[is] axi et aequalis $\frac{1}{4}$ FC: et centro L, ſemidiametro LB deſcribatur circulus qui ſecet parabolam in A, et ducatur CA; haec ſecabit parabolam ad angulos rectos. [3])

Puncto intra Parabolam dato eadem eſt Constructio [Fig. 3].

Poteſt autem circulus ſecare parabolam in uno duobus aut tribus punctis, quae omnia problemati ſatisfacient.

Alexander Anderſonus hoc Problema ſolidum eſſe ſcribit. [4]) Attamen ſi hoc idem eſt propter cujus conſtructionem Apollonius à Pappo reprehenditur, [5]) ut exiſtimat idem Anderſonus, manifeſtum erit veteres pro plano habuiſſe.

Quod ſane veroſimile videtur, namque ad conſtructionem Coni ſectione non eſt opus praeter Parabolam quae data eſt. [6])

---

sion pour FG du texte il faut mettre un *minus* au cas de la Fig. 1 et un *plus* au cas de la Fig. 2.

[3]) Pour arriver à cette construction Huygens n'avait qu'à appliquer textuellement la règle exposée par Descartes dans sa „Géométrie" (p. 465—467 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery) pour la résolution par construction de l'équation cubique: $x^3 = \pm px + q$.

[4]) Conférez avec le passage qui suit, les dernières phrases du premier alinéa de la Lettre N°. 163 (p. 242—243 du T. I) du 20 septembre 1653 à van Schooten et consultez sur Anderson et sur sa remarque la note 3 de cette lettre N°. 163.

[5]) Voici le passage en question, tel qu'on le trouve à la page 61 de l'édition de Commandin, citée dans la note 3, p. 259 du T. II (Hultsch, T. I, p. 270—273) „videtur autem quodammodo peccatum non paruum esse apud Geometras, cum problema planum per conica, vel linearia ab aliquo inuenitur. & ut summatim dicam, cum ex improprio soluitur genere, quale est in quinto libro conicorum Apollonii problema in parabola: & in libro de lineis spiralibus Archimedis: assumpta solida inclinatione in circulo. fieri enim potest, ut nullo vtentes solido problema ab ipso descriptum inueniamus."

[6]) Le même manuscrit N°. 12, d'où nous avons emprunté la pièce présente, contient encore, aux pages 252 et 253, sous l'inscription: „Problema Apollonij Perg. ex libro 5 Conic. resolutum supra" une solution et démonstration purement géométrique du même problême. Elles sont datées du 31 janvier 1655. On les rencontre avec des variantes peu importantes dans la pièce N°. 365, p. 533—534 du T. I et encore sur une feuille détachée qui fait partie des „Chartae mathematicae". La construction, qu' on y trouve exposée, est identique avec celle de la pièce présente.

Plus tard Huygens s'est occupé du problème plus général de mener d'un point donné les normales à une conique quelconque.

XX. [1])

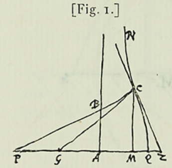
1653.

25. Sept. 1653.

In Conchoide Nicomedis invenire flectionis punctum.

Eſt Conchoides QCN. polus G, Aſymptotus AB. Et ponatur inventum jam eſſe flexus punctum quod ſit C. et ducatur tangens CZ. Igitur quoniam pars conchoidis CQ eſt cava verſus G, neceſſe eſt tangentes omnes ad puncta inter C et Q, ſecare rectam GZ inter Q et Z item quia pars conchoidis reliqua CN convexa eſt verſus G, omnes quoque tangentes ad puncta partis CN quantumlibet productae, rectam GZ ſecare neceſſe eſt inter A et Z. Igitur tangens CZ eſt ejusmodi, quae abſcindat AZ aut GZ omnium maximam quae a tangente abſcindi poſſunt. Sit GA, b. AQ, c. AM, y. Ergo CM erit ex proprietate Conchoides

[Fig. 1.]



$$CM \infty \sqrt{\frac{bbcc + 2bccy - bbyy - 2by^3 - y^4 + ccyy}{yy}}$$

Cum CP tangenti CZ eſt perp. eſt

$$PM\left(\frac{y^4 + by^3 + bccy + bbcc}{y^3}\right)^{2)} \text{ ad CM ut haec eadem CM}$$

$$\text{ad MZ } \frac{bbccy + 2bccyy - bby^3 - 2by^4 - y^5 + ccy^3}{bbcc + bccy + by^3 + y^4}$$

---

[1]) La pièce est empruntée aux pages 243—243*b* du manuscrit N°. 12. La construction qu'elle amène se retrouve avec des modifications de rédaction et des additions dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" de 1654 comme „Probl. VIII", et de même dans une lettre à Van Schooten du 23 octobre 1653, reproduite avec sa minute aux pages 243—246 du T. I.

[2]) Huygens ajoute en marge à ce propos „Vide infra ubi tangens conchoidis à Schote-

adde MA $\quad y$ ſub eodem denomin.

$$\text{AZ} \quad \frac{2bbccy + 3bccyy - bby^3 - by^4 + ccy^3}{bbcc + bccy + by^3 + by^4}$$

Poteſt numerator et denominator dividi per $b + y$

$$\text{AZ} \ \frac{2bccy + ccyy - by^3}{bcc + y^3} \infty \frac{2bccy + 2bccz + ccyy - 2ccyz - by^3 - 3byyz}{bcc + y^3 + yyz} \ \text{AZ}$$

Scriptis nempe ſcribendis ſecundum regulam de maximis et min. ponendo AM $\infty\, y + z$. [3])

$$6bccy^3z + 3ccy^4z - 3by^5z \infty 2bbc^4z + 2bccy^3z + 2bc^4yz + 2ccy^4z - 3bbccyyz - 3by^5z$$

$$y^4 + 4by^3 + 3bbyy - 2bccy - 2bbcc \infty 0 \quad \text{div. per } b + y$$

$y^3 + 3byy - 2bcc \infty 0$. Auferatur ſecund. term. pon.do $q \infty y + b$ [4]) ſive GM; hoc eſt $q - b \infty y$ fit

$$q^3 - 3bbq + 2b^3 - 2bcc \infty 0$$

$$q^3 \infty 3bbq + 2bcc - 2b^3$$

ſumptaque b pro unit.

$$q^3 \infty 3bq + \frac{2cc}{b} - 2b. \quad q \text{ eſt GM.}$$

Si $b \infty c$ erit $q^3 \infty 3b^2q$. $qq \infty 3bb$. Planum.
Item ſi $cc \infty 2bb$ erit $q \infty 2b$.

CONSTRUCTIO. [5])

Sicut GA ad AQ [Fig. 2 et 3] ita ſit AQ ad AE et ponatur ipſi GE aequalis GF. Porro ſit GR parall. AB et aequalis duplae AG, et deſcribatur parabola ver-

nio inventa est". Consultez la page 18 du T. XI, où la valeur de AP, trouvée par van Schooten, est indiquée.

[3]) Il s'agit de la méthode exposée au debut de la seconde partie du N°. XIV, p. 65—66 du Tome présent.

[4]) Comparez au Livre III de la „Géométrie" de Descartes l'article: „Comment ou peut oster le second terme d'vne Equation", p. 449—450 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery.

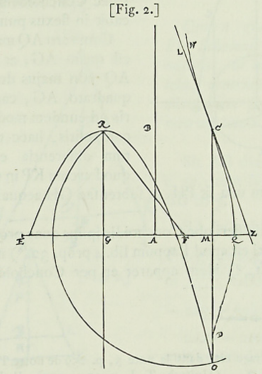
[5]) L'équation cubique en q une fois trouvée, Huygens, pour arriver à la construction qui va suivre, n'avait qu'à se servir de la règle donnée par Descartes au Livre III de sa „Géométrie" (p. 464—467 de l'édition d'Adam et Tannery) pour construire à l'aide d'un cercle et d'une parabole les racines des équations cubiques et biquadratiques; en s'appliquant toutefois à réduire autant que possible le nombre des lignes à tirer. A cet effet Huygens fait correspondre les points G et R de ses figures avec les points D et A de celle de Descartes. Ensuite il con-

tice R, latere recto aequali GA quae ſit RO. Centro vero F radio FR circumferentia deſcribatur parabolam ſecans in O et ducatur OC parallela AB, donec Conchoidi occurrat in C. Eritque C punctum inflexionis quaeſitum.

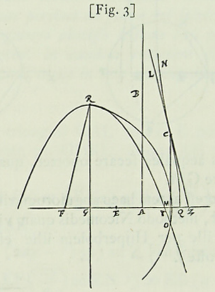
Eſtque notatum dignum quod (ſi) ad punctum C tangens (ducatur ZCL, illa ſimul quoque ſecabit conchoidem in puncto C). [6])

Haec eſt Conſtructio univerſalis. At quando AQ minor eſt quam AG per triſectionem anguli ſemper abſolvi poteſt. Item cum AQ major quidem eſt quam AG ſed qu. AQ non majus duplo qu.° AG. [7])

[Fig. 2.]



[Fig. 3]



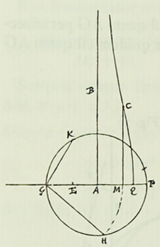
ſtruit le point E, correspondant au point E de Descartes qui est, chez Descartes, le centre du cercle qui va couper la parabole ayant R pour sommet et pour paramètre l'unité $b = \text{GA}$; mais avant de tirer le cercle Huygens transporte son centre au point F situé symmétriquement à l'autre côté de l'axe RG. De cette façon la droite OM, qui détermine la racine GM de l'équation cubique, peut servir en même temps à découper sur la conchoïde le point d'inflexion cherché. Remarquons encore que Huygens ne semble pas avoir tâché d'interpréter la présence, dans le cas de la Fig. 3 d'un second et d'un troisième point d'intersection du cercle et de la parabole dont l'un est situé entre R et O et l'autre à gauche de la droite RG. Évidemment le second point d'intersection correspond aux points d'inflexion de de la seconde branche de la conchoïde et le troisième à des points d'inflexion imaginaires.

[6]) Les mots entre parenthèses ont été biffés depuis et remplacés par „duci nequit", ce qui témoigne d'une autre conception de la notion de tangente.

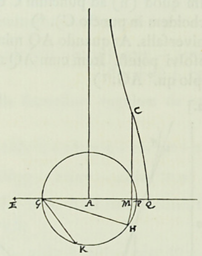
[7]) Les constructions qui vont suivre sont des applications directes des règles données par Descartes au Livre III de sa Géométrie (p. 472—474 de l'édition d'Adam et Tannery) et ces règles mêmes conduisent à la distinction des deux cas.

Si igitur AQ minor fuerit quam AG haec erit Conſtructio quae ſequit. Centro A, radio AG (Fig. 4) circulus deſcribatur KPG. inque eo accommodetur GK aequalis duplae GE inventae ut prius, et rectae GH quae ſubtendit $\frac{1}{3}$ arcus KPG aequalis ſumatur GM, et ducatur MC parallela AB. Haec Conchoidem ſecabit in flexus puncto.

[Fig. 4.]



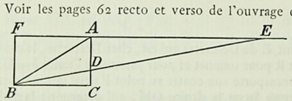
[Fig. 5.]



Cum vero AQ major eſt quam AG, at qu. AQ non majus duplo quadrato AG, caeteris ad eundem modum compoſitis, haec tantum differentia erit, quod arcum KP in tres partes aequales ſecare oportet, quarum una ſit PH, et ſubtenſae GH aequalem ſumere GM.

(Poteſt autem haec angulorum triſectio fieri ope Conchoidis ipſius quae propoſita eſt, methodo Nicomedis quam videri eſt apud Pappum lib. 4 prop. 32.[8]) nam quod ille per Hijperbolem illic efficit, [9]) idem apparet et per Conchoidem fieri poſſe). [10])

[8]) Voir les pages 62 recto et verso de l'ouvrage cité dans la note 3, p. 259 de notre T. II. (Hultsch, T. I, p. 274—277). Il s'agit de la construction bien connue par laquelle on obtient la trisection de l'angle ABC en tirant la droite BDE de manière qu'on ait DE = 2 BA.



[9]) Dans la proposition précédente sur laquelle on peut consulter la note 9, p. 228 du T. XI.

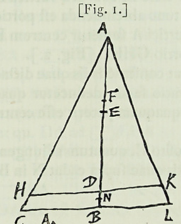
[10]) Cette remarque, que nous avons mise entre parenthèses, a été biffée depuis. Elle se retrouve dans la lettre à van Schooten du 23 octobre 1653 (p. 246 du T. I); mais elle manque dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" de 1654. Dans l'intervalle Huygens doit donc s'être aperçu que le problème de la trisection d'un angle donné à l'aide d'une conchoïde, *donnée d'avance*, est d'une autre nature que celui d'obtenir cette trisection par une conchoïde dont le choix est adapté à l'angle donné. Le premier problème est exécutable, du moins sous de certaines conditions, comme cela ressort indirectement d'une pièce de 1659 que nous donnerons comme Appendice IV aux „Illustrium quorundam problematum constructiones" (voir la note 4 de cet Appendice) mais nous n'avons aucune preuve que Huygens s'est occupé de ce problème.

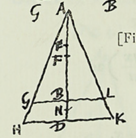
XXI. [1])

1653.

25 Nov. 1653.

[Fig. 1.]





[Fig. 2.]

Centra gravitatis invenire ſecundum methodum Fr. Schotenij quae pertinet ad plana vel ſolida ejus naturae, ut in ſegmento abſciſſo ſectione baſi parallela, centrum grav. in eandem rationem dividat diametrum ſegmenti, atque in tota magnitudine diametrum totam.

Sit AB diam. trianguli GAL ∞ a et E ponatur c. gr. item N centr. gr. GHKL. Sitque AE ∞ x; BD ∞ y.

BA (a) ad DB (y) ut AE (x) ad EF $\left(\frac{xy}{a}\right)$ ergo F c. gr. triang. HAK.

ut ⏢ GHKL ($2ay -$ [2]) yy) ad △ HAK ($aa -$ [2]) $- 2ay + yy$) ita EF $\left(\frac{xy}{a}\right)$ ad EN [3]) ∞ EB ($a - x$)

$2aay - 2axy \infty axy$; haec tantum ſcribere opus quia cetera delenda forent.

[1]) Dans la pièce qui suit et que nous avons empruntée aux pages 249—251 du manuscrit N°. 12, Huygens détermine le centre de gravité du triangle à l'aide d'une méthode qui lui fut communiquée par van Schooten et qui lui semble avoir frappé comme ingénieuse. Plus tard, en 1657, van Schooten publia cette méthode dans son „Exercitationum mathematicarum Liber V. Continens Sectiones triginta miscellaneas," p. 458—459 (voir l'ouvrage cité dans la note 3, p. 184 du T. I). Il l'y applique à la parabole en supposant connu déjà le centre de gravité du triangle.

Ajoutons que, dans sa lettre du 10 décembre 1653 à van Schooten (p. 254—256 du T. I.), Huygens revient sur la même méthode pour en donner une autre application.

[2]) Après coup Huygens remplaça ces minus par le signe ⚲ qu'il emploie pour indiquer qu'on doit choisir + ou — d'après les circonstances. En même temps il a ajouté la Fig. 2 qui se rapporte au cas où l'on prend le signe +.

D'ailleurs les expressions $2ay$ ⚲ yy et aa ⚲ $2ay + yy$ n'indiquent pas les aires des figures GHKL et HAK mais elles leur sont proportionelles.

[3]) Cette proportion se déduit du théorème d'Archimède qui sera cité plus bas.

$$2a - 2x \infty x$$
$$2a \infty 3x$$
$$\tfrac{2}{3}a \infty x \text{ AE ut oportebat.}$$

Ratio methodi [4]) eſt haec. Quoties enim E non eſt ipſum gravitatis centrum poſſibile eſt tam exiguum abſcindere [Fig. 1) vel adjungere [Fig. 2] fruſtum GHKL, ut diviſa DA in F ſimiliter ac BA in E, faciendoque ut FE ad EN eandem habeat rationem quam fruſtum GHKL ad △ HAK, cadat N non inter D et B ubi debebat ſecundum 8.m Aequipond.m Archim. 2.di [5]) (fuiſſet enim ex conſtr. N centrum gr. GHKL) ſed extra eam, et quidem ab E ultra B, cum E à vertice A magis remotum erit quam verum grav. centrum: et tunc abſcindenda eſt portio GHKL [Fig. 1]. Sed ab E citra B cum propius vertici A ſumetur centrum E quam verum grav. centrum: et tunc adjungenda eſt portio GHKL [Fig. 2.].

Quin et ea ratione detrahi vel addi poteſt GHKL ut conſtructis ijs quae dictae ſunt, incidat N in B. quod cum fiet, inde demonſtratio facile deducetur quae deducat ad abſurdum. Nam cum N incidet in B nequaquam poterit eſſe centr. gr. HGKL.

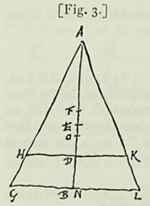
Ut igitur demonſtratio habeatur, quaerendum eſt poſito E, quantum adjungendum vel auferendum ſit fruſtum GHKL, ut conſtructis quae ſupra cadat N in B. Idque eo qui ſequitur modo.

Sit AD ∞ q. quae quaeritur [Fig. 3.].

$$\text{Et erat BA} \infty a, \text{ AE} \infty x. \text{ Ergo } \frac{qx}{a} \infty \text{ AF}$$

$$\triangle \text{GAL } (aa) \text{ ad } \triangle \text{ HAK } (qq) \text{ ut NF} \infty \text{BF} \left(a - \frac{qx}{a}\right) \text{ ad}$$

[Fig. 3.]



$$\text{NE} \infty \text{BE } (a - x) \text{ per 8.2. Aeq. [5])}$$

$$aa - qq \text{ ad } qq \text{ ut } x - \frac{qx}{a} \text{ ad } a - x.$$

$$aa - qq \text{ ad } qq \text{ ut } ax - qx \text{ ad } aa - ax$$

$$a + q \text{ ad } x \text{ ut } qq \text{ ad } aa - ax$$

$$aa + aq \text{ ad } ax \text{ ut } qq \text{ ad } aa - ax$$

$$aa + aq \text{ ad } qq \text{ ut } x \text{ ad } a - x$$

Si E centrum gr. dicatur trianguli GAL poſita licet AE majore primum quam

[4]) Au lieu cité dans la note 1, van Schooten a cru pouvoir se dispenser de démonstrations faites, comme celle qui va suivre, à la mode des anciens.

[5]) Consultez sur ce théorème la note 6, p. 295 du Tome XI.

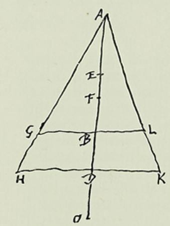
$\tfrac{2}{3}$ AB: Sit punctum D ita collocatum ut ſicut BE ad EA ita ſit qu. DA ad qu. AB + + $\square$ BAD, (quod eſt ſecundum analyſin explicatam,) et ducatur HDK parall. GL. erit autem DA minor quam BA, quod ſic oſtenditur.

Sit duabus BA, AD tertia proportionalis AO, ſeu potius ſit AO quae cum AB comprehendat rectang. aequale qu° AD.

Eſt igitur $\square$ BA, AO ad qu. AB + $\square$ BA, AD hoc eſt AO ad utramque ſimul BA, AD, ut BE ad EA; ſed quia AE major p[o]n[i]tur quam $\tfrac{2}{3}$ BA erit ratio BE ad EA minor quam ſubdupla. Ergo et AO ad BA + AD minor quam ſubdupla: unde liquet quod AO eſt minor ex tribus proportionalibus BA, DA, OA. Ergo BA major quam DA.

Porro autem quoniam eſt qu. DA ad qu. BA + $\square$ BAD ut BE ad EA, h. e. ut $\square$ EBA ad $\square$ EAB, et permutando erit qu. DA ad $\square$ EBA ut qu. BA + $\square$ BAD ad $\square$ EAB, h. e. ut BA + AD ad EA. h. e. ut $\square$ BAD + + q. AD ad $\square$ EAD, quia verò ut q. BA + $\square$ BAD ad $\square$ EAB ita eſt $\square$ BAD + q. AD ad $\square$ EAD erit etiam ut q. BA + $\square$ BAD ad $\square$ EAB ita (aufer.° 3m à primo et 4m a 2do) qu. BA − q. AD ad $\square$ EA, BD. Ergo quoque ut qu. DA ad $\square$ EBA ita q. BA − q. DA ad $\square$ EA, BD. h. e. ad $\square$ BAE − − $\square$ DAE. h. e. ad $\square$ BAE − $\square$ BAF, (namque eſt BA ad DA ut AE ad AF.) h. e. ad $\square$ BA, EF et permut.° ut qu. DA ad q. BA − q. DA ita $\square$ EBA ad $\square$ BA, EF h. e. ita EB ad EF, et invert.° Verum ut q. BA − q. DA ad qu. DA ita eſt fruſtum GK ad triang. HAK; Ergo fruſtum GK ad triang. HAK ut FE ad EB. Eſt autem ſecundum ea quae poſita fuere E centrum grav. triang.i GAL, et F centr. grav. triang. HAK, Ergo per 8.2i Æqui. Archim. erit in B centr. gr. fruſti GK, quod fieri non poteſt.

[Fig. 4.]



Rurſus ſi AE minor dicatur quam $\tfrac{2}{3}$ AB, et E [Fig. 4] gr. centr. triang. GL, poſitâ DA ut prius, oſtendetur DA major quam BA. Et rurſus per ſimilem demonſtr.m erit in B centr. gr. fruſti GK, quod abſurdum.

Non eſt igitur AE neque major neque minor quam $\tfrac{2}{3}$ AB, ſi E futurum eſt triang.i GAL centr. gr. Ergo centrum grav. apparet ita dividere BA ut pars ad verticem ſit ſubſeſquialtera totius, ſive dupla reliquae ad baſin.