VIII.[1]

1652.

14 Febr. 1652.

Pappus in principio libri 7.[i] ubi de Inclinationibus, problema univerſale refert. [2]) Duabus lineis poſitione datis inter ipſas ponere rectam lineam magnitudine datam, quae ad datum punctum pertineat. Quod quidem problema ſolidum eſt niſi cum ductis ex puncto dato parallelis ad datas lineas poſitione, quadratum vel rhombus conſtituitur. Quos caſus jam expoſuimus, [3]) et quomodo optimè conſtruantur docuimus. Cum verò ſolidum eſt, unam quidem problematis partem reſolvit Pappus prop.[e] 31 libri 4.[i] [4]) ubi angulum trifariam ſecare docet. [5]) aliorum tamen inventa proponens. [6]) Quamquam autem parallelogrammum rectan-

[1]) Dans cette pièce, empruntée aux pages 197—199 du manuscrit N°. 12, Huygens reprend (voir les pièces N°. II et N°. VI, pp. 13 et 26) le problème solide de mener par un point donné B [Fig. 1] une droite sur laquelle les côtés d'un angle donné CNA découpent un segment RD de longueur donnée. Cette fois il traite le cas où le point donné se trouve à l'intérieur de l'angle donné et le résoud à l'aide d'une hyperbole, coupée par un cercle. Ensuite il s'occupe de la „determinatio" du problème, c'est-à-dire, de la détermination des conditions sous lesquelles la solution est possible; ce qui amène un autre problème solide: celui de trouver la longueur minimale du segment découpé RD.

[2]) Voir la note 2, p. 239 du Tome XI. Dans l'édition de Hultsch on trouve le passage en question au T. II, p. 670—671.

[3]) Voir les pièces N°. IV (p. 19), VI (p. 26) et VII (p. 32).

[4]) Consultez la note 9, p. 228 du Tome XI. Chez Hultsch on trouve la proposition indiquée au T. I, p. 272—275.

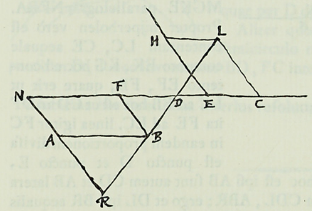
[5]) Voir la „Prop. 32" où Pappus applique la construction de la proposition 31 mentionnée à la trisection de l'angle (p. 62 recto et verso de l'édition de Commandin; Hultsch T. I, p. 274—277).

[6]) Allusion aux phrases suivantes qui précédent chez Pappus les „Prop. 31 et 32": „antiqui Geometrae problema jam dictum in angulo," [la trisection de l'angle] „quod natura solidum est, per plana inquirentes invenire non potuerunt. nondum enim ipsis cognitae erant coni

gulam conſtituat, eâdem tamen ratione ope hijperboles componitur, etiamſi rectangulam non ſit. [7]) Nunc autem eum caſum pertractabimus cum punctum intra angulum datum eſt, nam et is ope hijperboles expediri poteſt. Sed et aliam pro rhombo conſtructionem hinc deducemus. [8])

Eſto angulus N et intra ipſum detur punctum B, oporteatque ducere RBD datae lineae aequalem. Factum jam ſit, et ducantur BA, BF parallelae ipſis NF, NA, et poſita FE ipſi FN aequali, ſit quoque EH parallela NA. Producatur autem RD et ut ipſi RD aequalis BL et ducantur LH, LC ipſis quoque NF, NA parallelae.

[Fig. 1.]



Similia igitur conſtat fieri △[la] LDC, RBA. Sed latus LD aequale eſt lateri RB, quoniam tota BL toti DR aequalis: Itaque et LC aequalis ipſi AR, et CD aequalis ipſi AB ſeu NF, hoc eſt, ipſi FE. et ablata communi DE, erit EC aequalis DF. Ut autem DF ad FB ita eſt BA ad AR. Ergo quum ipſi FD ſit aequalis EC et ipſi AR aequ. LC hoc eſt HE erit quoque ut EC ad FB ita BA ad HE. quare contentum EC, HE aequale contento FB, BA. Eſt itaque punctum L ad hijperbolen ſed et ad circuli circumferentiam, nam datum eſt B punctum, et data BL aequalis ipſi RD. datum igitur eſt poſitione punctum L; dataque propterea etiam linea LB quare et DBR poſitione data erit, nam cum illa coincidit.

Componetur autem hoc modo. Ductâ EH ut in reſolutione dictum eſt, jungatur BE [Fig. 2], eaque producatur et ſit ipſi EB aequalis EG. Dein per punctum G, circa aſymptotos EH, EK deſcribatur hijperbole LG. Centro autem B et ſemidiametro BL quae aequalis ſit lineae datae, deſcribatur circumferentia LO. quae ſi hijperbolen non attingit, problema conſtrui non poterit, quod data linea ſit aequo brevior.

Si vero contingat circumferentia LO hijperbolen LG, erit linea data omnium quae problema efficere poſſunt breviſſima ſin denique circumferentia hijperbolen

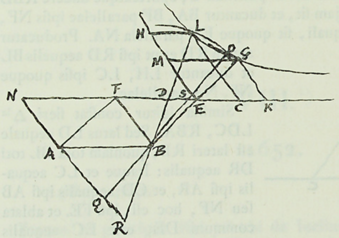
sectiones, & ob eam causam hesitarunt. Postea uero angulum tripartito diuiserunt ex conicis, ad inuentionem infrascripta inclinatione" [la prop. 31] „utentes". (Commandin, p. 61 recto; Hultsch, T. I, p. 273).

[7]) En effet, le raisonnement de Pappus, reproduit dans la note 9, p. 228 du Tome XI, reste valable quand on remplace, dans la figure 1 de la page 226, les rectangles ABCD et AK par des parallélogrammes. Seulement l'hyperbole décrite par le point K ne sera plus équilatère.

[8]) Voir pour la solution en question la pièce N°. IX, qui suit.

fecet, ut hìc in punctis L et O, ducantur inde rectae LBR, OBQ, dico partes earum interceptas DR, SQ problema efficere, hoc est aequales esse ipsi BL, seu lineae datae.

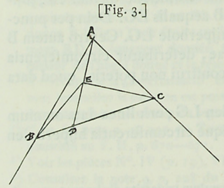
[Fig. 2.]



Ducantur enim HL, LC ipsis EK, EH parallelae, sicut et GM, GK. Quia igitur EG ipsi EB hoc est ipsi FA aequalis est, manifestum quoque aequale esse et simile parallelogr. MGKE parallelogr. NFBA. Propter hyperbolen verò est contentum LC, CE aequale contento EK, KG hoc est contento EF, FB, quare erit ut LC ad FB hoc est ut CD ad DF ita FE ad EC. linea igitur FC in eandem proportionem divisa est puncto D et puncto E, ideoque erit CD ipsi FE aequalis hoc est ipsi AB sunt autem CD et AB latera similiter posita similium triangulorum CDL, ABR; ergo et DL ipsi BR aequalis erit, et tota BL aequalis DR. sed BL aequalis est lineae datae. Itaque factum est quod proponebatur. Eâdem ratione potest ostendi QS ipsi BO seu BL aequalis.

Determinatio autem problematis solida est, nam solâ quidem regulâ et circino inveniri nequit omnium brevissima per punctum B ducta intra angulum N. Qui si rectus est, adeo ut parallelogr. NB sit rectangulum, tum eodem modo brevissima per punctum B ducetur, quo duae mediae proportionales inveniuntur inter lineas FN, NA. [9]) Sicut Hero vel Nicomedes. [10]) Sed Heronis quidem inventum etiam ad angulos non rectos hic extendi potest. Etenim dato intra angulum BAC [Fig. 3] puncto D, si oporteat brevissimam ducere omnium quae per idem punctum intra eundem angulum duci possunt; jungatur DA. et in duo aequalia dividatur puncto E. Tum applicetur regula puncto D, eaque moveatur donec reperiantur EB, EC aequales, quod circino saepius

[Fig. 3.]

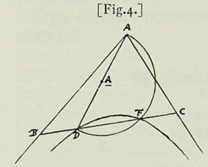


[9]) Voir la pièce N°. XIV aux pages 62—63, où Huygens démontre que la droite EF de la figure de la page 62 citée sera minimale, quand on a $AF^3 = BA \times BC^2$.

[10]) Consultez pour la construction de Nicomède, la „Compositio Nicomedis," p. 15 de la pièce N°. II. En effet, la droite KE de la figure 2 de cette p. 15, n'est autre, pour le point

tentando facile assequemur, et jungatur BC, Eritque haec omnium brevissima: [11]) atque hac quidem ratione determinari problema potest.

[Fig. 4.]



Aliter quoque iisdem positis omnium brevissima ducetur, hoc modo.

Per D punctum, circa asymptotos AB, AC describatur hyperbole DF. et super AD semicirculus, qui ubi hyperbolen secabit in F, inde ducatur FD et producatur utrimque, atque haec propositum efficiet, eritque BDC omnium brevissima, quae per D duci possunt. [12])

Aliter quoque, non descriptâ hyperbolâ, sed semicirculo tantum, moveatur regula secundum punctum D, donec inveniantur BD, FC inter se aequales.

Problema hoc de minima inferius resolutum vide, et calculo demonstratum. [13])

H, que la droite cherchée de longueur minimale. Dans la construction de Héron, où il s'agit de même de trouver les deux moyennes proportionnelles entre les côtés GL et LA (voir toujours la figure de la p. 15) d'un rectangle donné, la droite LH est divisée en deux parties égales par le point I et la droite EK est supposée construite de manière qu'on ait IK = IE; alors, comme dans la construction de Nicomède, on aura GL : AE = AE : GK = GK : LA, et la droite KE sera donc identique à la droite cherchée. (On trouve cette construction de Héron p. 6 recto et verso de l'édition de Commandin des „Collectiones mathematicae" de Pappus; Hultsch, T. I, p. 62—65).

[11]) Voir, pour la démonstration, la troisième partie de la pièce N°. XIV, p. 67.

[12]) Pour déduire cette nouvelle construction de celle de la figure 3, abaissons dans cette dernière figure sur BC les perpendiculaires EE_1 et AA_1. Alors on aura $BE_1 = E_1C$, $DE_1 = E_1A_1$ et par suite $BD = A_1C$; donc le point A_1, correspondant au point F de la figure 4, se trouvera à la fois sur le cercle décrit sur AD comme diamètre et sur l'hyperbole passant par D et ayant BA et AC pour asymptotes.

D'ailleurs les méthodes modernes conduisent aisément à ce même résultat. En tournant le segment BC autour du point D (Fig. 4) d'un angle infinitésimal ε et en égalant à zéro l'accroissement $(DC \operatorname{cotg} C - BD \operatorname{cotg} B)\varepsilon$, on trouve; $BD : DC = \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C = \frac{AC}{\cos B} : \frac{AB}{\cos C} = AC \cos C : AB \cos B = CF : FB$, où F est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur BC; ainsi le segment BC doit être divisé par les points D et F dans un même rapport, d'où il suit: BD = FC.

[13]) Voir la seconde et la troisième partie de la pièce N°. XIV, p. 65—68. La phrase a été ajoutée plus tard.

IX.[1]

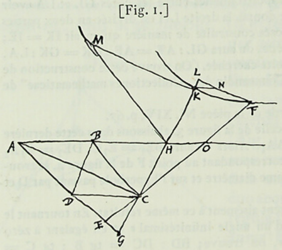
1652.

17 Febr. 1652.

Rhombo dato ABCD productisque ejus lateribus, oporteat ducere ECO aequalem datae lineae.

Factum sit et sit ipsi EO aequalis CF. Itaque erit punctum F ad hijperbolen, quae invenietur ut supra,[2]) ductis nimirum diametris AC, BD, et GCHK parallelâ DB et HK ipsi BD aequali, et HM parallela BC; erit quaesita hijperbole quae per K describitur circa asymptotos HM, HO. et quoniam HK nunc bifariam dividit angulum MHO, erit KL axis hijperboles, CK latus transversum. Sit KM ipsi CK ad angulos rectos, eritque KM aequalis AC. Vocetur AC seu KM a. DB seu HK, b. EO, seu CF, c. ductâque FL ipsi HK ad angulos rectos, fit KL ∞ x.

[Fig. 1.]



KM potest quartam figurae partem

[1]) La pièce se trouve aux pages 200—201 du manuscrit N°. 12. Elle contient une autre solution, préparée par la pièce précédente N°. VIII, du problème de la pièce N°. VII.

[2]) Voir le second et le troisième alinéa de la pièce précédente.

quae continetur lateri transverso CK et latere recto.[3]) itaque HK ad KM ut KM ad $\frac{1}{2}$ lat. rectum. Quare ut HK ad $\frac{1}{2}$ l. rectum, seu ut CK ad lat. rectum ita HK qu. ad KM qu. hoc est ita bb ad aa.

Ergo dicemus porro per 21. lib. Con.[4]) CK ad latus rectum ut ▭ CLK ad □ LF

$$bb \text{ ad } aa \text{ ut } 2bx + xx \text{ ad } \frac{2baax + aaxx}{bb} \;\square\, \text{LF}$$

$$\text{s[ubtr.]} \left\{ \begin{array}{l} \square\, \text{CF}\; cc \\ \square\, \text{CL}\; 4bb + 4bx + xx \end{array} \right.$$

$$\text{fit } \square\, \text{LF}\; cc - 4bb - 4bx - xx \infty \frac{2baax + aaxx}{bb}$$

$$xx \infty \frac{-2a^2bx - 4b^3x + bbcc - 4b^4}{aa + bb}$$

fiat ut CH (b) ad HA ($\sqrt{aa + bb}$) ita LK (x) ad KN[5]) $\left(\frac{x\sqrt{aa+bb}}{b}\right) \infty$ $\infty\, y$ ergo $x \infty \frac{by}{\sqrt{aa + bb}}$ hoc vero ponendo pro x fit

$$yy \infty \frac{-2aa - 4bb}{\sqrt{aa + bb}}\, y + cc - 4bb$$

Unde constructio quae sequitur.

[3]) Voir la note 51 de la page 114 du Tome XI. La „figura," dont il est question, est le rectangle construit sur le diamètre CK et le „latus rectum."

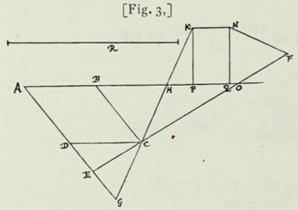
[4]) Voir la note 12 de la page 300 du Tome XI.

[5]) Cette droite KN est supposée parallèle à AB.

COMPOSITIO.

Ponatur ipſi BA aequalis BH et ducatur GCH, et producatur ut ſit HK aequalis HC. ex K ducatur KP ipſi AH ad angulos rectos. et ponatur AQ quae poſſit quadr. AP unà cum differentia quadratorum ex R et GH, debet autem R non minor data eſſe quam HG. Porro perfecto rectangulo PN, ducatur NF[6]) ipſi GK ad angulos rectos, et ex C ponatur CF ipſi R datae aequalis, et producatur uſque in E. dico partem ejus interceptam OE datae R aequalem eſſe.

[Fig. 3.]



Optimam constructionem hujus vide inferius. [7])

---

[6]) Posant $\frac{a^2+2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{a^2+b^2} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \mathrm{AH}+\mathrm{HP} = \mathrm{AP} = p$, l'équation quadratique du texte peut s'écrire : $y^2 + 2py = c^2 - 4b^2$. On a donc $y = -p + \sqrt{p^2+c^2-4b}$; où c est égale à la longueur donnée R ; donc $\sqrt{p^2+c^2-4b^2} = \mathrm{AQ}$ par construction et $y = \mathrm{AQ} - \mathrm{AP} = \mathrm{PQ} = \mathrm{KN}$; mais cet y représente le segment KN de la Fig. 1 et puisque, par construction, les points K des deux figures sont identiques, il en est de même des points N, des droites NF et des points F. Inutile de dire que la racine $y = -p - \sqrt{p^2+c^2-4b^2}$ amène les droites, passant par C, desquelles des segments de la longueur donnée sont découpés par les côtés des angles extérieurs du losange, au sommet A ; mais il semble bien que Huygens ne s'est jamais aperçu que les quatre droites, menées par le sommet d'un losange, de telle manière que les côtés des angles extérieurs et de l'angle intérieur, qui appartiennent au sommet opposé, en découpent des segments de même longueur, ne sont que les quatre solutions d'un seul et même problème.

[7]) Voir la seconde partie de la pièce N°. XIII, p. 58. La phrase a été ajoutée plus tard.

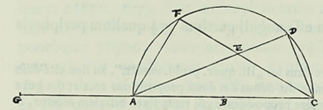
X.[1])

1652.

Kal. Mart 1652.

Cubum invenire dati cubi duplum.

Sit datus cubus cujus latus AB. Radio AB ſemicirculus deſcribatur AFDC, et poſitâ AF aequali ipſi AB jungatur FC. deinde ſecundum A punctum regula moveatur inter F et C donec inveniatur FE abſciſſa aequalis ſubtenſae DC. quod quidem ponatur factum eſſe, et regulam habere poſitionem AED, ut ſit FE ipſi DC aequalis. Dico cubum ex AE duplum eſſe cubi ex AB.



Producatur enim CA et ſit AG ipſi AE aequalis. Propter triangulos ſimiles igitur eſt EC ad CD hoc eſt EF, ut EA ad AF. Et componendo CF ad FE ut utraque ſimul EA, AF, hoc eſt, GB ad AF, et permutando CF ad GB ut FE ad AF. Quare ut CF quadratum ad quadr. GB ita quadr. EF ad qu. FA. Et componendo ut quadrata ex CF et ex GB ad qu. ex GB, ita quadrata EF et FA, hoc eſt, quadratum EA ad qu. AF. Quadrata autem ex CF et GB ſimul aequalia ſunt rectangulo GCA et qu.° ex AG : Quadratum enim GB aequale eſt rectangulo

---

[1]) La pièce a été empruntée aux pages 203—206 du manuscrit N°. 12. Elle contient une solution exacte du problème de la duplication du cube ; supposant qu'il soit possible de construire la figure du texte, où AF = AB, de telle manière qu'on ait EF = DC. En outre elle donne une solution approximative du même problème. Ces solutions ont été reproduites, sous une autre rédaction, dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" de 1654, comme „Problema II".

CGA et quadr.° AB ſeu AF (10.2.). [2]) quare addito utrinque qu° FC, erunt quadrata GB, FC ſimul aequalia rectangulo CGA una cum quadratis AF,FC, hoc eſt unà cum quadrato AC. Eſtque rectangulum CGA cum qu.° AC aequale rectang.° GCA cum qu.° GA. Itaque et quadrata GB, FC ſimul aequalia rectangulo GCA cum qu.° GA, ſicut diximus.

Ut igitur rectang. GCA cum qua. AG ad qu. GB ita eſt qu. EA ad qu. AF, hoc eſt, ita qua. GA ad qu. AB. Et permutando, ut rectang. GCA cum qu.° AG ad qu. AG ita qu. GB ad qu. AB. Et dividendo, ut rectang. GCA ad qu. AG ita qu. GB dempto qu.° AB hoc eſt rectang. CGA ad qu. AB. Et permutando rurſus ut ▭ GCA ad ▭ CGA, hoc eſt ut AÇ ad AG ita qu. AG ad qu. AB. Quare cubus ex AG ſeu AE duplus erit cubi AB. Quod erat dem. [3])

Lineam verò AD ita ducere ut ſit DC ſubtenſa aequalis abſciſſae EF, atque adeo cubum duplicare vel cuicunque ſolido dato aliud ſimile duplum conſtituere, eâ poterimus ratione quam deinceps trademus; [4]) quâ quidem problema quod naturâ ſolidum eſt per plana ſolutum videri poſſet, ni demonſtratio contrarium evinceret.

Etenim poſitâ ſicut ante AF aequali AB, Hoc eſt poſito arcu AF triente peripheriae AFDC : Si porro arcus CD ſtatuatur ejuſdem peripheriae quadrans, junganturque FC, DA dico cubum ex AE majorem quidem fore cubo duplo ex AB. at ſi pars biſmilleſima ex AE recidatur, reſidui cubum minorem fore duplo cubi AB.

Manifeſtum enim eſt AE ſecantem eſſe anguli partium $37\frac{1}{2}$ qualium peripheria

---

[2]) Lisez (6.2. Elem.), comme on le trouve dans les „Ill. quor. probl. constr.", au lieu cité dans la note précédente. C'est la ressemblance du début des deux propositions 10.2 et 6.2 qui a causé l'erreur. Voici d'ailleurs cette dernière proposition : „Si recta linea bifariam secetur, & illi recta quaedam linea in rectum adiiciatur : Rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato ex dimidia, aequale est quadrato à linea quae tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto." (Clavius, p. 178.)

[3]) A cause de la forme que Huygens a cru devoir donner à cette démonstration, elle semble plus compliquée qu'elle ne l'est réellement. De la similitude des triangles DEC et FEA Huygens déduit la proportion : $(EC + CD)^2 : (EA + AF)^2 = CD^2 : AF^2$; mais puisqu'on a par construction $DC = EF$ et $AF = AB$, on trouve, en posant $AB = r$, $AE = b$, $(EC + CD)^2 = CF^2 = AC^2 - AF^2 = 3r^2$; $CD^2 = EF^2 = b^2 - r^2$. La proportion peut dont s'écrire :

$$3r^2 : (b + r)^2 = (b^2 - r^2) : r^2$$

d'où l'on déduit successivement en appliquant, à l'exemple de Huygens, les propriétés bien connues des proportions :

$$4r^2 + 2br + b^2 : (b + r)^2 = b^2 : r^2$$
$$4r^2 + 2br : b^2 + 2br = b^2 : r^2$$
$$2r \quad : \quad b \quad = b^2 : r^2.$$
$$b^3 = 2r^3.$$

[4]) Voir la construction approximative, qui va suivre.

AFDC 180 continet. nam AF arcus eſt partium 60, et CD partium 45; itaque FD, 75. at angulus FAD ſubduplus eſt ejus qui ad centrum, itaque FAD angulus eſt partium $37\frac{1}{2}$. ubi dicebamus. [5]) AF autem aequalis eſt ipſi AB radio; qui ſtatuatur partium 100000. ad demonſtrationem vero hiſce duobus theorematibus opus habebimus quorum poſterius eſt Pellij. [6])

Theor. 1. *Si cujuslibet arcus, qui minor ſit 45 partibus, tangentis quadratum auferatur à quadrato radij; reſiduum dividatur per tangentis ejusdem duplum, orietur tangens complimenti arcus illius dupli.* [7]) Vel sic. *Duplum tangentis eſt ad ſummam tangentis et radij, ſicut eorundem differentia ad tangentem complementi arcus prioris dupli.*

Theor. 2. *Si tangens cujuſlibet arcus minoris 45 partium, ducatur in duplum quadratum radij. Productum dividatur per differentiam quadratorum radij et tangentis, orietur tangens arcus dupli* [8])

Eſto itaque arcus alicujus ignoti tangens 26800; invenietur per theor. ſecundum arcus dupli tangens 57747 &c. Sed haec major eſt tangente 30 gr. nam tangens 30 gr. eſt ad radium potentia ut 1 ad 3, et longitudine ut 57735 ad 100000. Itaque arcus duplus ignoti arcus major eſt quam 30 gr. ac proinde arcus cujus tangens 26800, major quam 15 gr.

Eſto denuò alterius alicujus arcus tangens 76700, Erit per Theor. noſtrum, tangens complimenti arcus iſtius dupli 26839. Haec autem tangens major eſt quam 26800. Ergo dictum complimentum apparet majus eſſe quam 15 gr. Atque ideo arcus iſte cujus dupli complementum erat, id eſt, arcus cujus tangens ponebatur 76700, minor erat quam $37\frac{1}{2}$ gr. nam bis $37\frac{1}{2}$ hoc eſt 75 gr. una cum gr. 15 quadrantem circuli explent. Itaque 76700 minor eſt tangente $37\frac{1}{2}$ gr. hoc eſt minor linea FE, nam haec tangens eſt $37\frac{1}{2}$ gr. Quadratum igitur ex AF quae eſt 100000 una cum qu.° ex 76700 ſimul minora ſunt qu.° ex AE. Illis autem duobus ſimul quadratis adhuc minus eſt quadr. ex 126000; itaque

---

[5]) Huygens a biffé toute la partie de la pièce qui suit; ce qu'il fit probablement lorsqu'il prépara en 1654 la publication des „Illustrium quorundam problematum constructiones". Ajoutant alors en marge le mot „Puerilia", il remplaça toute cette partie par la seule phrase : Ergo AE ex tab. sin. 126047. Unde propositum facile comprobatur." Comparez les „Ill. quor. probl. constr." au „Problema II."

Toutefois, nonobstant l'annotation de Huygens, nous n'avons pas supprimé cette partie du texte parce qu'il nous semblait curieux de montrer jusqu'à quel point Huygens, à cette époque, croyait devoir se conformer à la manière de démontrer des anciens, même dans une matière qui s'y prêtait fort peu; déguisant ainsi entièrement la marche qu'il avait suivie pour arriver à ses résultats.

[6]) Voir, sur Pell, la note 2, p. 14 du T. I. Il s'agit ici du théorème principal de l'ouvrage cité dans la note 5, p. 176 du T. I. On le rencontre la première fois à la page 13 de cet ouvrage.

[7]) En notation moderne; $\cot 2\alpha = (1 - \tan^2\alpha) : 2\tan\alpha$.

[8]) $2\tan\alpha : (1 - \tan^2\alpha) = \tan 2\alpha$.

126000 omnino minus erit quam AE. atqui cubus ex 126000 qui eſt 2000376000000 major eſt duplo cubo ex AF ſeu ex 100000. Igitur multo magis cubus ex AE major erit duplo cubo ex AF ſeu ex AB. quod erat primum.

Nunc autem oſtendemus, lineam AE diminutam parte ſui biſmilleſima, producere cubum minorem duplo cubo ex AB.

Sit tangens alicujus arcus 26790. Invenietur per Theorema 2dum tangens arcus dupli 57722 &c. Haec autem minor eſt tangente gr. 30, quam ſuprà diximus eſſe 57735. Ergo arcus cujus tangens ponebatur 26790 minor eſt quam 15 gr.

Rurſus alterius alicujus arcus ſit tangens 76737; Ergo per theorema 1mum erit tangens complimenti arcus iſtius dupli 26789 &c. Haec verò tangens minor eſt quam 26790. Ergo cum 26790 oſtenſa fuerit minor tangente gr. 15, erit omninò 26789 minor quoque tangente gr. 15. Itaque cujus arcus tangens erat 76737, ejus arcus dupli complimentum minus eſt quam 15 gr. Ideoque dictus arcus duplus major eſt quam 75 gr. et ipſe arcus cujus tangens 76737, major quam $37\frac{1}{2}$ gr. Eſt autem FE tangens $37\frac{1}{2}$ gr. Ergo FE minor quam 76737. Quadratum igitur ex AF et ex 76737, ſimul majora erunt quadrato ex AE.

Dictis autem quadratis duobus majus eſt quadratum quod fit ex 126050; Itaque 126050 omnino majus erit quam AE. Cubus autem ex 125990 minor eſt duplo cubo AB. Major igitur eſt ratio 126050 ad 125990 quam ipſius AE ad latus cubi qui duplus ſit cubi ex AB. Sed ratione 126050 ad 125990 ſeu 12605 ad 12599 adhuc major eſt ratio 2000 ad 1999. Itaque ratio AE ad dicti cubi dupli latus multo minor eſt ratione 2000 ad 1999. Si igitur AE diviſa ſit in partes aequas biſmille; unâ earum demptâ, reliqui cubus minor erit duplo cubo ex. AB. quod erat oſtendendum.

2 mart. 1652.

Subtenſa arcus aequalis arcubus AF et DC, eſt latus cubi ſubdupli ejus qui ex AC. [9])

[9]) La remarque a été ajoutée plus tard. Il s'agit naturellement de la solution exacte. Appliquant la formule bien connue:

$$2 \text{ corde } (AF + DC) = \text{corde } AF . \sqrt{4 - (\text{corde } DC)^2} + \text{corde } DC . \sqrt{4 - (\text{corde } AF)^2}$$

qu'on déduit du théorème de Ptolemée, on trouve, d'après les calculs de la note 3, qu'elle exige:

$$2\sqrt[3]{4} = \sqrt{5 - \sqrt[3]{4}} + \sqrt{3(\sqrt[3]{4} - 1)};$$

c'est-à-dire: $$\left\{2\sqrt[3]{4} - \sqrt{5 - \sqrt[3]{4}}\right\}^2 = 3(\sqrt[3]{4} - 1);$$

ou bien: $$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 1 = \sqrt{5 - \sqrt[3]{4}};$$

ce qu'on vérifie aisément en élevant au carré.

La remarque est donc juste.

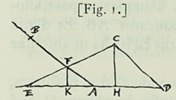
XI.[1])

1652.

9 Mart. 1652.

Datis poſitione duabus lineis angulum comprehendentibus AB, AE, et puncto extra angulum C: ducere CFE ita ut comprehensa FE ſit aequalis absciſſae FB ad datum punctum B in linea AB.

[Fig. 1.]



Ducatur CD parallela BA et occurrat productæ EA in D. Dantur igitur AD et DC. Sed et perpendicularis CH data erit quoniam datus angulus EAB vel ADC. Ducatur FK ipſi EA ſimiliter perpendicularis.

Sit AB $\infty\, a$; AD $\infty\, b$; DC $\infty\, c$; DH $\infty\, d$; AE $\infty\, x$.

ED $(x + b)$ ad DC (c) ut EA (x) ad AF $\left(\frac{cx}{x+b}\right)$; ergo $a - \frac{cx}{x+b} \infty$ EF vel BF. q.EF $aa - \frac{2acx}{x+b} + \frac{ccxx}{xx + 2bx + bb}$.

ED $(b + x)$ ad DH (d) ut EA (x) ad AK $\left(\frac{dx}{b+x}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} xx \text{ q.EA} \\ \frac{ccxx}{xx + 2bx + bb} \text{ q.AF} \end{array}\right| \text{ad[de]}$$

[1]) La pièce est empruntée aux pages 207—209 du manuscrit N°. 12. Elle contient deux solutions du problème des deux moyennes proportionnelles avec l'analyse qui a conduit à ces solutions, lesquelles ont été reproduites avec des changements de rédaction plus ou moins importantes dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" de 1654 au „Probl. III. Datis duabus rectis duas medias proportionales invenire."

$$\left.\begin{array}{l} xx + \dfrac{ccxx}{xx + 2bx + bb} \square \mathrm{EA} + \mathrm{q.AF} \\ aa - \dfrac{2acx}{x+b} + \dfrac{ccxx}{xx + 2bx + bb} \mathrm{q.EF} \end{array}\right| \text{Subtr.}$$

$$\mathrm{AK.}\ 13.2^{\mathrm{di}}\ ^{2})\ \frac{xx - aa + \dfrac{2acx}{x+b}}{2x} \infty \frac{dx}{b+x} \mathrm{AK}$$

$$x^3 + bxx - aax + 2acx - baa \infty 2dxx$$

$$\left.\begin{array}{r} x^3 + b \\ -2d \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} xx + 2ac \\ -aa \end{array}\right| x - baa \infty 0$$

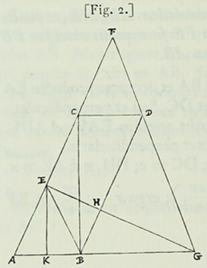
Si ponatur $b \infty 2d$ et $a \infty 2c$ erit $x^3 \infty baa$ hoc est, erit AB et AD inter, una duarum mediarum proportionalium AE.

Hinc inventae sunt constructiones duae sequentes.

10 mart.

Duas medias proportionales invenire inter datas lineas.

[Fig. 2.]



Sint datae duae AB et AC, quae sic disponantur ut angulus CBA sit rectus. Compleatur parallelogrammum ABDC, et producatur AB. Et divisa AC per medium in E, ducatur EHG ita ut abscissae HD sit aequalis HG.

Hoc autem vel sepius tentando assequi possumus, vel ope Hyperboles sicut infra docebimus [3]) Sed factum jam ponatur, et ducatur GDF occurrens productae AC in F. Dico duarum CA, AB medias esse proportionales BG et FC. [4]) Jungatur enim EB et sit EK [5]) ipsi AB ad angulos rectos. Quia igitur BE aequalis EA, erit quoque BK aequalis

[2]) Voir la note 18, p. 30 du Tome présent.

[3]) Voici cette construction telle qu'on la déduit de celle qu'on trouve dans le second alinéa qui suit dans la présente pièce l'en tête „Aliter". Imaginons sur le segment FG un point N, tel qu'on ait GN = FD, alors ce point se trouve en premier lieu sur l'hyperbole qui passe par le point D et qui a AB et AC pour asymptotes, et en second lieu (puisqu'on a EG = EF aussi bien que HG = HD) sur le cercle qui passe par D et qui a E pour centre. On peut donc construire le point N, mener par N et D la droite FG, et tirer enfin EG.

[4]) On remarquera que cette seconde des deux moyennes proportionnelles ne s'est pas présentée dans l'analyse.

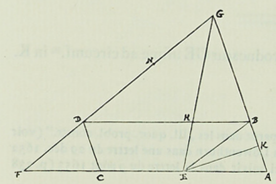
[5]) La partie du texte que nous venons de reproduire sous la date du 10 mars constitue la rédaction primitive de la solution du problème, où on reconnaît encore aisément les résultats de l'analyse algébrique qui précède. Seulement la notation est changée; l'angle donné BAE de la

KA. Quum itaque AB in aequalia dividatur ad K, et adjecta sit ipsi linea BG, erit rectang. AGB cum quadrato ex KB aequale qu° ex KG; [6]) et addendo utrinque quadr. KE, erit rectang. AGB una cum quadratis BK, KE, hoc est una cum quadrato BE, aequale quadratis GK et KE, hoc est quadrato EG. Similiter quia AC in aequalia dividitur in E et adjecta est linea CF, erit rectang. AFC cum qu.° EC aequale qu.° EF. Quadratum autem EF aequale est qu.° EG; (quia et DH ipsi HG aequalis, et similia sunt triangula DHG et FEG) [7]) Erit ergo rectangulum AFC cum qu.° CE aequale rectangulo AGB cum quadrato BE. Atqui quadr. BE aequale est EC quadrato; et reliquum igitur rectangulum AFC rectangulo AGB aequale erit. Quare sicut FA ad AG ita BG ad CF. ut autem FA ad AG ita est DB ad BG, et ita quoque FC ad CD. Igitur ut DB hoc est AC ad BG ita BG ad FC et FC ad CD hoc est AB. Itaque inter AC ut AB duae inventae sunt mediae BG, FC. quod erat faciendum.

Fig. 1 se retrouve, tourné à droite, dans la Fig. 2 sous la notation DBG et la construction débute par le triangle rectangle qu'on obtiendrait dans la Fig. 1 en érigeant en A une perpendiculaire qu'on prolongerait jusqu'à ce qu'elle coupe le prolongement de CD et dont l'hypoténuse égalerait AB, puisque AB $= a = 2c = 2$ CD et AD $= b = 2d = 2$HD.

Or, le même jour, Huygens a remanié cette partie du texte. Partant de la remarque que l'égalité de HG et HD entraîne celle de EG et EF, il a modifié la construction de manière à produire la même figure par d'autres moyens et dans une autre disposition. C'est cette seconde rédaction, dans laquelle on ne peut presque plus retrouver les résultats de l'analyse, qui a passé avec des modifications légères dans les „Ill. quor. probl. constr." Elle est comme il suit:

„10 mart. 1652. *Duas medias proportionales invenire inter duas lineas.*



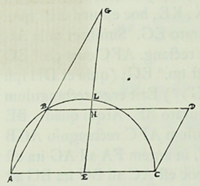
Sit major datarum AC, per medium divisa in E, minor autem sit AB, quae sic constituatur ut triangulum EAB habeat crura aequalia AE, EB. Et compleatur parallelogrammum CABD. Et producantur AC, AB. Tum applicetur regula ad punctum D, et moveatur, quousque positionem habeat GF, abscindens nimirum EF aequalem EG lineae quae ex E ad alteram intersectionem ducitur. Hoc autem vel sepius tentando assequemur, vel ope Hyperboles ut postea ostendetur. [Voir la seconde solution qui va suivre dans le texte sous l'en-tête „Aliter."]

Dico inter AC, AB medias duas inventas esse BG, CF. Sit enim EK ipsi AB ad angulos rectos." etc. [voir ce qui suit dans le texte].

[6]) C'est-à-dire AG $\times$ GB $+$ KB^2 $=$ KG^2.

[7]) Les mots entre parenthèses ont été biffés puisqu'ils devenaient superflus dans la nouvelle rédaction que nous avons reproduite dans la note 5 et d'après laquelle on avait par construction EF = EG.

[Fig. 3.]



Aliter. [8])

Super majori datarum AC [Fig. 3.] ſemicirculus [9]) deſcribatur, et ponatur AB minori datarum aequalis, et compleatur parallelogrammum AD; productâque AB, ducatur ex centro E recta EHG, eâ ratione ut ipſi HG ſit aequalis HD; ſecet autem circumferentiam in L. Dico duabus AC, AB medias proportionales inventas eſſe BG, GL. Cujus quidem demonſtratio ex praecedenti manifeſta eſt. Namque in priori figura [10]) ſi aequales EF, EG, erunt propter triangula ſimilia etiam HD, HG aequales; et contra. Ex quo manifeſtum eſt utroque modo lineam BG eandem reperiri. Porro FC differentiam fuiſſe conſtat linearum EF, EC, hoc eſt duarum EG, EC: atque ea hìc eſt LG. Subjicitur autem et alia demonſtratio. [11])

Quod autem dictum eſt in priori conſtructione, lineam FDG [12]) ope hyperboles duci poſſe, ut EF, EG ſint aequales, hinc conſtabit. Si namque ſumatur GN ipſi FD aequalis, manifeſtum eſt punctum N fore ad hyperbolen quae diſcribitur per D punctum, circa aſymptotos AF, AG. Verum idem punctum N eſt quoque ad circuli circumferentiam quae deſcribitur centro E, radio ED. Itaque datum eſt poſitione punctum N. Et D datum eſt: Ergo et linea FG quae per utrumque ducitur poſitione datur. Et Compoſitio manifeſta eſt.

Perficiatur circulus ALCK [Fig. 4], et producatur GE uſque ad circumf.^{m} in K.

[8]) La construction qui va suivre, en outre qu'elle parut dans les „Ill. quor. probl. constr." (voir la note 1), fut communiquée à G. A. Kinner à Löwenthurn dans une lettre du 29 déc. 1652 (p. 212 du T. I) sans démonstration; celle-ci suivit dans la lettre du 9 août 1653 (p. 238 du T. I).

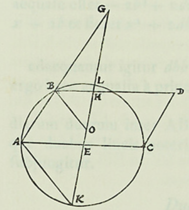
[9]) Pour comprendre comment Huygens a obtenu cette nouvelle construction on doit comparer cette figure avec celle de la note 5. On verra alors qu'il ne s'agit que d'un nouveau remaniement de la construction de cette note.

[10]) La figure de la note 5.

[11]) Cette phrase et la nouvelle démonstration mentionnée qui commence avec le mot: „Perficiatur," furent ajoutées le 5 juin 1652 (voir la date, à la page qui suit, au bas du texte). Ce fut cette démonstration qui passa dans les „Ill. quor. probl. construct.," et qui fut communiquée à Kinner à Löwenthurn.

[12]) Voir toujours la figure de la note 5.

[Fig, 4.]



Et jungatur AK, eique parallela ducatur BO. Itaque ſimiles ſunt trianguli AEK, BHO; et quia AE aequalis EK, etiam BH, HO aequales erunt. Sed et HG, HD inter ſe aequales ſunt; igitur tota OG aequalis BD, hoc eſt diametri AC vel LK. Et ablatâ communi LO, relinquuntur aequales inter ſe GL, OK. Eſt autem rectangulum KGL aequale rectang.° AGB, ideoque ut KG ad GA ita eſt BG ad GL. Sed ut KG ad GA ita propter triang.^{os} ſimiles eſt quoque OG ad GB, et ita reliqua OK hoc eſt LG ad BA. Ergo ut OG hoc eſt AC adGB ita BG ad GL et LG ad AB. Quod erat demonſtrandum.

5 Jun. 1652. [13])

[13]) La date se rapporte au dernier alinéa. Comparez la note 11.

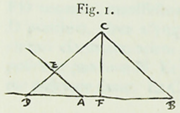
XII. [1]

1652.

16 Mart. 1652.

Datis positione lineis AD, AE angulum comprehendentibus, et puncto extra angulum, C. Ducere CED rectam, et facere AD ipsi CE aequalem.

Fig. 1.



Factum jam sit, et ducatur CB parallela EA. et sit CF ipsi DB ad angulos rectos.

Vocetur AB b; BC c; BF d; DA x.

BA (b) ad BD $(b+x)$ ut CE ∞ AD (x) ad CD $\left(x + \frac{xx}{b}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} bb + 2bx + xx \text{ q. DB} \\ cc \text{ q. BC} \end{array}\right\} \text{a[dde]}$$

$$\left.\begin{array}{l} bb + 2bx + xx + cc \\ xx + \frac{2x^3}{b} + \frac{x^4}{bb} \text{ q.CD} \end{array}\right\} \text{s[ubtr].} \qquad \left.\begin{array}{r} b + x \text{ DB} \\ 2d \text{ 2FB} \end{array}\right\} \text{m.}$$

$$bb + 2bx + cc - \frac{2x^3}{b} - \frac{x^4}{bb} \infty 2db + 2dx \quad 2\square \text{ DBF}$$

$$x^4 + 2bx^3 + \left.\begin{array}{r} 2dbb \\ -2b^3 \end{array}\right\} x \left.\begin{array}{r} + 2db \\ - cc \\ - bb \end{array}\right\} bb \infty 0.$$

[1]) La pièce occupe les pages 210 et 211 du manuscrit N°. 12. Elle contient une troisième solution du problème des deux moyennes proportionnelles avec l'analyse qui l'a amenée. Cette solution a été reproduite, avec de légères modifications, dans les „Ill. quor. prob. constr." de 1654, comme la troisième et dernière solution du „Probl. III. Datis duabus rectis duas medias invenire."

Si $dbb - \frac{1}{2}ccb - \frac{1}{2}b^3$ quod id est quod in quantitate cognita ductum est in $2b$, aequale esset $-2b^3 + 2dbb$, quod in x ductum est; tota aequatio dividi posset per $x + 2b$ et fieret $x^3 + 2dbb - 2b^3 \infty 0$ et $x^3 \infty \left.\begin{array}{r} +2b \\ -2d \end{array}\right\} bb$

adaequantur igitur $dbb - \frac{1}{2}ccb - \frac{1}{2}b^3 \infty -2b^3 + 2dbb$ fit $cc \infty 3bb - 2db$. Si ergo haec aequalia à principio ponantur, erit $x^3 \infty \left.\begin{array}{r} +2b \\ -2d \end{array}\right\} bb$ unde erit DA una mediarum duarum inter AB et duplam AF. Nam dupla AF est $2b - 2d$. Datis itaque duabus lineis poterimus duas medias proportionales invenire eo modo qui subjungitur.

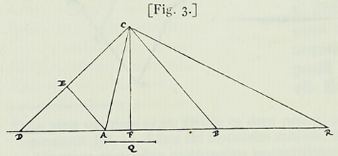
Duas medias proportionales invenire.

Sint datae AB et Q quibus duas medias invenire opus sit. Dimidiae Q ponatur aequalis AF, et sit BR aequalis AB. Et ex F erigatur perpendicularis FC, et ipsi RA aequalis ponatur RC, et jungatur BC, [2]) eique parallela ducatur AE. Et applicatâ regula ad punctum C, moveatur ea quousque positionem habeat CD, faciens AD aequalem CE.

Dico inter AB et Q duas medias inventas esse CE, ED. [3])

Jungatur enim CA. Igitur quia aequales sunt RA, RC et angulus CFA rectus, erit RA ad AC ut AC ad duplam AF, hoc est Q. ac proinde quadratum CA aequale contento RA, Q. quadratum autem CA cum qu.° AD et duplo $\square$° DAF hoc est rectang.° DA, Q aequatur qu.° DC (12. 2. El.) [4]) Igitur qu. DC aequabitur qu.° DA una cum rectangulis DA, Q; AR, Q; hoc est una cum contento DR, Q. Quadratum vero DA aequale est qu.° EC; igitur ab aequalibus aequalia auferendo erit contentum DR, Q aequale differentiae qu.orum

[Fig. 3.]



[2]) L'analyse qui précède, exige qu'on ait $c^2 = 3b^2 - 2db$; c'est-à-dire $BC^2 = 3AB^2 - 2BF.AB$. Or d'après la construction indiquée on a, en effet, $BC^2 = CR^2 - BR^2 - 2BF.BR = 4AB^2 - AB^2 - 2BF.AB = 3AB^2 - 2BF.AB$.

[3]) Ici, comme dans la pièce précédente (voir la note 4, p. 50), la seconde moyenne proportionnelle ne s'est pas présentée pendant le traitement analytique du problème; mais elle a été cherchée et découverte après coup.

[4]) Voir la note 15, p. 29 du Tome présent.

DC, CE. Quia autem DB et DC lineae ſimiliter dividuntur in punctis A et E, eſt quadr. DB ad qu. AB ut qu. DC ad qu. CE; et dividendo et convertendo igitur qu. AB ad differentiam qu.orum DB, AB ut qu. EC ad differentiam qu.orum DC, CE; et permutando. Eſt autem differ.a qu.orum DB, BA aequalis rectangulo RDA, nam hoc duobus ▭is DAB et qu.o AD aequale est: Et dictum eſt differentiam qu.orum DC, CE aequari contento DR, Q. Itaque quadr. AB eſt ad EC qu. ut ▭ RDA ad contentum RD, Q, hoc eſt ut AD ad Q. Ut autem qu. AB ad qu. EC ita eſt AB ad ED longitudine: nam BA eſt ad AD, hoc eſt, CE, ut CE ad ED. Igitur ut AB ad ED ita eſt AD ad Q. Et permutando, ut AB ad AD ita ED ad Q. Atqui ut AB ad AD hoc eſt CE, ita diximus eſſe CE ad ED. Ergo ut AB ad CE ita CE ad ED et ED ad Q. Quod erat oſtendendum.

19 Mart. 1652. [5]

[5]) La date se rapporte, d'après une légère différence dans l'écriture, à la démonstration géométrique à commencer par le mot „jungatur."

XIII. [1]

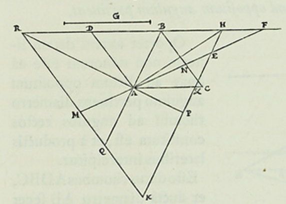
[1652].

[Première partie.] [2]

16 Aug. 1652.

Rhombo dato, et uno latere producto, aptare ſub angulo exteriori lineam magnitudine datam quae ad oppoſitum angulum pertineat.

[Fig. 1.]



Sit datus rhombus ADBC, cujus productum latus DB. Et data ſit linea G. Oportet ducere rectam ANF, ut pars intercepta NF ſit datae G aequalis.

Ducatur diameter AB, et quadratis ex G et AB ſit aequale quadratum AH, et ducatur HE ipſi BA parallela. et AE ipſi G ponatur aequalis, eademque producatur ad F. Dico NF datae lineae G aequalem eſſe. Quod autem ad HE poni poteſt AE aequalis G hinc manifeſtum eſt. Etenim quadratum AH majus eſt

[1]) La pièce que nous avons divisée en deux parties, est empruntée aux pages 213—215 du manuscrit N°. 12. Elle a été reproduite sous une rédaction légèrement modifiée dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" de 1654 à la suite des „Probl. VI et VII" et sous l'en-tête „Utrumque praecedentium Aliter"; et de même dans une lettre à van Schooten du 10 déc. 1653 (p. 256—257 du T. I). L'analyse nous manque, mais il nous semble probable que la construction présente a résulté d'un remaniement de celle trouvée en 1650; voir la page 241 du Tome XI. En effet, la droite HE est identique avec la droite LM de la figure de la page citée. On le vérifie en prolongeant LM jusqu'à ce qu'elle coupe AD en un point S et en calculant $BS^2 = BD^2 + DS^2 + 2DS.\,BF$, où $DS = BL = KL - BK = \sqrt{BE^2 + BF^2} - BF$. Alors on trouvera $BS^2 = BD^2 + BE^2$; donc BS est égal à la droite AH de la figure présente.

[2]) Voir, pour d'autres solutions du même problème, la pièce N°. VIII des „Travaux" de 1650 (p. 239 du Tome XI), la pièce N°. VI de 1652 (p. 26 du Tome présent) et la note 10 de cette pièce N°. VI.

quadratis AX et XH quum ſit angulus AXH obtuſus. ſed idem qu. AH. aequale ponitur qu.is AB ſeu HX et G. itaque qu. G ſeu AE majus eſt quadr.° AX. unde apparet interſectionem E accidere inter puncta H et X. Producatur BD et ponatur ipſi aequalis DR. et ſit RK parallela DA vel BC, eique occurrant productae FA, BA, HE, in punctis M, Q, K. Et jungatur RA, et producatur ad P.

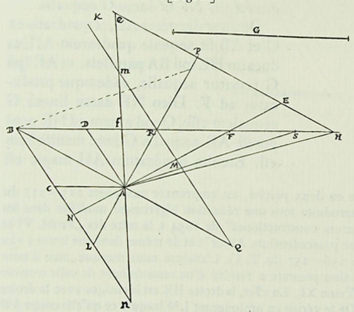
Quoniam igitur DR aequalis eſt DB et RQK parallela DA, erit et MA aequalis AN, et QA aequalis AB, angulus autem BAR rectus quum ſit in ſemic.lo quare et anguli ad P, nam BQ, HEK parallelae ſunt : et erit HP aequalis PK.

Eſt itaque qu. AH aequale qu.° AE una cum rectangulo HEK. ſed idem qu. AH aequale eſt qu.is ex AE et AB : itaque qu. AB aequale eſt ei quod ſub KE, EH. quare KE ad AB ut AB ad EH; verum ut KE ad AB ſeu QA ita eſt EM ad MA, et ut AB ad EH ita eſt AF ad FE, igitur EM ad MA ut AF ad FE, et EA ad AM ut EA ad EF. Itaque aequalis eſt EF ipſi AM, quare et ipſi AN. ideoque et FN ipſi AE hoc eſt datae G. quod erat demonſtrandum.

[SECONDE PARTIE.] 3)

Rhombo dato et duobus contiguis lateribus productis, aptare ſub angulo interiori rectam magnitudine datam quae ad oppoſitum angulum pertineat.

[Fig. 2.]



Oportet autem datam lineam non minorem eſſe eâ quae ad dictum oppoſitum angulum pertinens diametro rhombi ad angulos rectos conſtituta eſt, et à productis lateribus intercipitur.

Eſto datus rhombus ADBC, et ductâ diametro AB ſecet eam ad angulos rectos linea RL occurrens utrinque productis lateribus BD, BC. Data autem ſit, ipſâ RL non minor, G recta, cui aequalem ponere oporteat FAN.

In ſchemate adjecto ſicuti propoſitum eſt, eadem conſtructio eſt et demonſtratio, quae in caſu praecedenti. 4)

3) Voir, pour d'autres solutions du problème, la pièce N°. VII (p. 32) du 11 février 1652; la note 16 de cette pièce N°. VII, et la pièce N°. IX (p. 42) du 17 février 1652.

4) Voir la première partie de la pièce présente.

Illud autem hic aliter oſtendendum eſt, quod ad lineam HE poni poteſt AE ipſi G aequalis. ſit RS aequalis RB et jungatur AS. Quoniam igitur in triangulo BAS à vertice ad mediam baſin ducta eſt AR, erunt quadrata BR et RA, ſimul ſumpta, hoc eſt qu. BA cum duplo qu.° AR, ſubdupla quadratorum BA, AS. itaque qu. AB bis ſumptum cum quadruplo qu.i AR, hoc eſt cum qu.° RL, aequatur qu.is BA, AS. quare ablato utrimque qu.° BA, erit qu. AS aequ. quadratis BA et RL, ac proinde minus quam quadr. AH. Eſt igitur AS minor quam AH; ſed major est quam AR: itaque punctum S cadit inter R et H. ergo RH major quam RS vel RB. et quum propter triangulos ſimiles, ſit RH ad HP ut RB ad BA, erit quoque HP major quam BA, et quadr. HP majus quadr.° AB. at qu. HP cum qu.° PA aequatur qu.is BA et G; ergo quum qu. HP ſit majus quam qu. AB, erit invicem PA qu. minus quam qu. G. patet itaque quod ſi centro A circumferentia deſcribatur ſemidiametro AE aequali G, ea lineam HE in duobus punctis ſecabit. 5)

5) C'est-à-dire aux points E et *e* de la figure; lesquels amènent les solutions FN et *fn*.