III.[1]

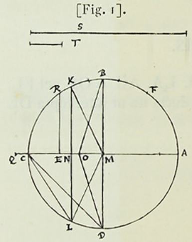
1652.

Ult. Jan. 1652.

Sphaeram in data ratione plano ſecare, [2]) *per triſectionem anguli* [3]).

Eſto ſphaera cujus centrum M, diameter CA. et data ſit proportio S majoris ad T minorem.

[Fig. 1].



Secetur ſphaera plano ſecundum AC diametrum eaque ſectio ſit circulus ABCD. Porro dividatur AC in E, ut ſit ſicut S ad T ita EA ad EC, et ſit ER perpendicularis ipſi AC. Sumatur autem arcui CR aequalis arcus AF, et ei quae ſubtendit tertiam partem arcus RF ponatur aequalis MN, quam manifeſtum eſt minorem fore quam ME. Denique per N punctum ducatur planum quod diametro AC ſit ad angulos rectos. Dico hoc ſphaeram ſic ſecare ut portio KAL eam habet rationem ad KCL portionem quam S ad T. [4])

Ducatur enim BMD parallela KL, et jungantur CD, CL et KM, ML. Ipſi vero EM ſit aequalis EQ, et duplae EN aequalis MO, et jungantur OB, OD.

[1]) La pièce se trouve aux pages 184—186 du manuscrit N°. 12.

[2]) Le problème est identique avec celui de la pièce N°. I.

[3]) On retrouvera la construction et la démonstration qui vont suivre, dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" de 1654 au „Problema I"; mais sous une rédaction assez différente et même avec des modifications dans la construction.

[4]) Une construction modifiée fut communiquée à Kinner à Löwenthurm dans une lettre du 9 août 1653 (p. 239 du T. I). Celui-ci en loua l'élégance et la simplicité dans ses lettres du

Quia autem EN eſt exceſſus ipſius EM ſupra NM, manifeſtum eſt, id quo dupla EM hoc eſt quo QM excedit duplam NM aequari duplae EN hoc eſt ipſi OM. Itaque dupla NM addita ad OM aequatur ipſi QM, ac proinde erit dupla NM aequalis OQ. Ergo duae ſimul OQ et NM aequales triplae NM. Sed eadem OQ, NM ſimul aequales ſunt duabus QM, ON. Itaque et tripla NM aequalis duabus QM, ON.

Eſt autem NM aequalis ei quae ſubtenſa eſt tertiae parti arcus RF. at verò QM, cum ſit dupla EM, aequatur ei quae totum RF arcum ſubtendit. Itaque tres ſimul quae tertias partes ſubtendunt arcus RF aequantur ſubtenſae totius arcus et ipſi NO. Sicut igitur quadratum radij MK ad qu. ejus quae tertiam partem ſubtendit arcus RF, hoc eſt, ad qu. MN ita eſt ipſa NM ad NO longitudine. hoc enim poſtea oſtendetur. [5]) Quare et per converſionem rationis ut qu. KM ad qu. KN ita NM ad MO. Ut autem qu. KM hoc eſt qu. BM ad qu. KN ita eſt circulus circa diametrum BD ad circulum cujus KL diameter. Ergo quoque ille circulus ad hunc erit ut NM ad MO, ac proinde aequalis conus BOD cono KML, quia eorum baſes et altitudines reciprocantur [6]). Conus autem BOD eſt ad ſemiſphaeram BCD, hoc eſt, ad conum baſin habentem circulum circa diametrum BD et altitudine duplam MC, [7]) ut MO ad duplam MC, quoniam eadem baſi inſiſtunt. Itaque et conus KML erit ad semiſphaeram BCD ut MO ad duplam MC. Porro autem eſt ſemiſphaera eadem ad ſectorem ſolidum MKCL ut ſuperficies ſphaerica illius ad hujus ſuperficiem [8]) id eſt ut MC ad NC [9]), quare et per converſionem

28 août 1653 et du 28 février 1654; voir les pp. 241 et 270 du T. I. Pour se convaincre de l'identité essentielle des deux constructions il suffit de calculer la corde de l'arc qui est divisé en trois parties égales. On trouvera dans les deux cas: $\frac{S-T}{S+T}$. AC.

[5]) Voir, plus loin dans cette même pièce, le théorème que nous avons cursivé. En effet, il est clair que $NO = 3\,MN - RF$ est égal à la ligne du theorème „ad quam subtensa tertiae partis eam habet rationem quam quadratum semidiametri ad quadratum ipsius tertiae arcus parti subtensae."

[6]) Huygens ajoute en marge „15. 12. Elem." Consultez la note 10 de la pièce N°. I, p. 11 du Tome présent.

[7]) Huygens ajoute „32. l. 1. Archim. de Sphaer. et Cylind." Quaelibet sphaera quadrupla est eius coni, qui quidem conus habuerit basim aequalem circulo in sphaera maximo altitudinem uero aequalem semidiametro sphaerae." (p. 32 de l'édition de Bâle; Heiberg, T. I, p. 141, où elle porte le numéro 34).

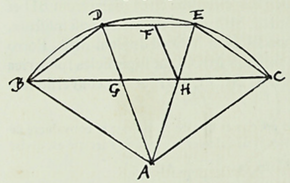
[8]) Huygens ajoute „42. 1. Arch. de Sphaer. et Cylin." Voir la note 11, p. 11 du Tome présent.

[9]) Huygens ajoute „3. 2. Arch. de Sph. et Cylind." „Datam sphaeram sic secare plana superficie, ut portionum superficies inter se similem cuicumque proportioni datae retineant proportionem" (p. 45 de l'édition de Bâle, Heiberg, T. I, p. 207). On n'y trouve pas expressément la proposition en question; mais elle se déduit facilement de celle citée dans la note 12 de la pièce N°. I, p. 11 du Tome présent, et le même raisonnement, dont on a besoin alors, est suivi dans le texte de la Prop. 3, Libr. 2 mentionnée.

rationis et invertendo, erit pars ſemiſphaerae, quae remanet dempto ſectore KMLC, ad ipſam ſemiſphaeram, ut NM ad MC, ſive ut dupla NM quae eſt OQ ad duplam MC. Verum oſtenſum fuit eſſe conum KML ad eandem ſemiſphaeram, ut OM ad duplam MC. Itaque tota pars ſolida KLDB erit ad ſemiſphaeram BCD ut tota QM ad duplam MC [10]) ſive ut EM ad MC. Quare invertendo rurſus et per converſionem rationis erit ſemiſphaera dicta ad portionem KLC ut MC ad CE: Et proinde ſphaera tota ad KLC portionem ut AC ad CE. Et dividendo, portio KAL ad portionem KCL ut AE ad EC, hoc eſt ut S ad T. Quod erat oſtendendum.

Circumferentiae arcu qui dimidia circumferentia minor ſit in tria aequa ſecto; tres ſimul rectae quae aequalibus partibus ſubtenduntur, aequales ſunt ei quae toti arcui ſubtenditur una cum ea linea ad quam ſubtenſa tertiae partis eam habet rationem quam quadratum ſemidiametri ad quadratum ipſius tertiae arcus parti ſubtenſae.

[Fig. 2.]



Arcus Sectoris ABC in tria aequa diviſus ſit punctis D et E, ſubtendanturque partibus rectae BD, DE, EC, et toti arcui linea BC.

Dico tres ſimul BD, DE, EC aequari ſubtenſae BC una cum ea ad quam DE eam habeat rationem quam quadratum AE ad ED quadratum.

Ductis enim AD, AE, quae ipſam BC ſecant in G et H, ducatur HF parallela AD. Conſtat ergo ſimiles eſſe triangulos ACE, CEH; quare ut AE ad EC ita erit EC ad EH. Itaque proportio AE ad EH duplicata eſt ejus quae AE ad EC, ac proinde eadem quae quadrati AE ad qu. EC vel qu. ED. Sicut autem AE ad EH ita eſt DE ad EF, ergo quoque ut qu. AE ad qu. ED ita DE ad EF. DF autem aequalis GH. Itaque cum BD ſit aequalis ipſi BG, et CE ipſi CH, et DE duabus GH et FE; apparet tres ſimul BD, DE, EC aequari toti BC ſimul et FE, ad quam DE oſtenſa eſt eam habere rationem quam AE qu. ad qu. ED.

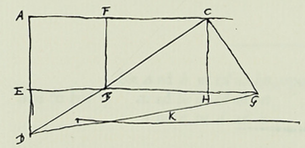
[10]) Huygens ajoute „24. 5. Elem." Voir sur cette proposition la note 28 de la page 312 du T. XI et la note 13, p. 11 du Tome présent. C'est encore ici la seconde partie de la proposition qu'on doit appliquer.

IV. [1])

[1652]. [2])

Dato quadrato AB cujus duo latera AF, AE producta ſint et data linea K, ponere huic aequalem lineam inter productas AC, AD quae tranſeat per punctum B. Oportet autem K non minorem eſſe dupla diagonali quadrati quod datur. [3])

[Fig 1.]



Factum ſit, et ſit ex hijpot. aptata DBC aequalis ipſi K. Ducatur ipſi DC, CG ad angulos rectos occurrens productae EB in G, et jungatur DG.

Similia autem ſunt △.ª EBD, HCG, et latus EB aequale CH, ergo et DB aequale CG, et ED ipſi HG. Quadrata autem DC, CG aequalia ſunt qu.° DG, quoniam angulus ad C rectus. Sed eidem quadrato DG aequantur qu.ª duo GE, ED, ergo qu. DC una cum qu. CG, hoc eſt qu.ª DC, DB, aequalia quadratis DE, EG, quare auferendo utrinque qu. DE, erit qu. DC una cum qu.° EB, aequale qu.° EG. Datur autem quadr. DC aequale qu.° ex K, et datum quoque est qu. EB. Itaque et ſumma utriuſque dabitur. Datum igitur quoque qu. EG quare et ipſa EG data erit. unde et BG data. Angulus autem BCG rectus eſt, ideoque punctum C erit ad circuli circumferentiam cujus diameter BG. Sed idem punctum eſt etiam ad lineam rectam AC, quae poſitione data eſt, et circulus quoque poſitione datus

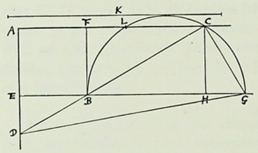
[1]) La pièce se trouve à la page 187 du manuscrit N°. 12.

[2]) Le lieu que la pièce occupe dans le manuscrit, immédiatement après la pièce N°. III, ne laisse aucun doute sur cette date.

[3]) On retrouve le même problème avec la même construction et démonstration, mais sous des rédactions différentes, dans une lettre à van Schooten du 23 octobre 1653 (voir les pages 250 et 251 du T I) et dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" de 1654 au

quoniam diameter BG poſitione data eſt. Ergo et punctum C poſitione datum erit, dictae videlicet circumferentiae et rectae AC interſectio.

[Fig. 2.]



Componetur vero hoc modo. Quadratis ex K et ex AE ſit aequale quadratum ex EG. et ſuper BG diametro ſcribatur ſemicirculus BCG, ſecans rectam AF productam in L et C; et ducatur CBD vel ex L quoque. dico ÇD aequalem eſſe dictae K lineae.

Et demonſtratio ex Reſolutione manifeſta eſt. Quod autem ſemicirculus rectam AC ſecabit hinc manifeſtum fiet. Etenim quia K major ponitur dupla diagonali qu.i AB, erit ejus qu. majus octo quadratis ex EB, itaque qu. ex EG majus novem qu.is ex EB. Quare EG major tripla EB et conſequenter dimidia BG ſive radius deſcripti ſemicirc. major quam EB vel BF. Unde neceſſario circumf. ſecat AC.

„Probl. V". Comparez encore les pages 226—228 du Tome XI où un problème analogue est traité. Les pièces N°. VI, VII, IX et XIII, qui suivent, traitent les problèmes plus généraux qu'on obtient en remplaçant le carré AFBE par un losange. Sur l'origine de ces problèmes on peut consulter la note 2 de la page 239 du Tome XI. Pappus lui-même s'est borné à résoudre celui qu'on trouve à la page 226 du Tome cité. Ghetaldi les a traités tous dans l'ouvrage cité en premier lieu dans la note 5 de la page 126 du T. VIII.

V. [1]

1652.

8 Febr. 1652.

Sit b ad a ut cc ad ad, oportet oſtendere eſſe b ad c ut c ad d.

$acc \infty abd$ [2])
cb ad ca ut cc ad ad
b ad c ut c ad d

Dicendum. Ratio b ad a componitur ex ratione b ad c et c ad a. Ratio autem quadr.i cc ad rectang. ad componitur ex ration. c ad d et c ad a. Ergo ablata utrinque ratione c ad a, erit ratio b ad c eadem quae c ad d.

Sit a ad b ut cd ad bn, oportet oſtend. a ad c ut d ad n.

$abn \infty bcd$ [3])
ac ad bc ut cd ad bn
a ad c ut d ad n

Ratio a ad b compon. ex rat. a ad c et c ad b. Ratio vero $\square$i cd ad $\square$ bn comp. ex ration. d ad n et c ad b. Ablata igitur communi rati.e c ad b, erit eadem ratio a ad c quae d ad n.

[1]) Le but de Huygens, en composant cette pièce curieuse, empruntée aux pages 279—281 du manuscrit N°. 12, doit avoir été de se faciliter la rédaction des démonstrations géométriques à la mode des anciens, dont il accompagna ses théorèmes et constructions, trouvées sans doute, pour la plupart, par l'analyse. La pièce rappelle l'ouvrage posthume de Van Schooten „Tractatus de Concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraïco" de 1661 (voir la note 1, p. 41 du T. III) dans lequel, pour montrer que la méthode synthétique de démontrer est contenue implicitement dans l'Analyse, il apprend à déduire systématiquement de cette dernière les compositions et démonstrations purement géométriques et synthétiques. Ajoutons qu' on trouve une application des algorithmes de la pièce présente dans la pièce N°. XVI, p. 72 du Tome présent.

[2]) Les facteurs a des deux termes de cette égalité ont été biffés. Huygens ajouta encore ici en marge: „vel bd ad ad ut cc ad ad; ergo $bd \infty cc$; ergo b ad c ut c ad d."

[3]) Les facteurs b ont été biffés.

vel ſic. Ratio a ad b comp. ex rat. a ad d et d ad b. Ratio autem $\Box$ cd ad $\Box$ bn comp. ex rat.^{s} c ad n et d ad b. Ergo ablata communi rat.^{e} d ad b, Erit eadem ratio a ad d quae c ad n et permutando.

Sit $\frac{ab}{c} \infty d + \frac{ef}{g}$ oportet oſtendere c ad g ut ab ad $dg + ef$.

Dem. c eſt ad a ut b ad $d + \frac{ef}{g}$ quae vocetur h, ergo $\Box$ $ab \infty \Box$ ch. Eſt autem $\Box$ ch ad $\Box^{a}$ $dg + ef$ hoc eſt ad $\Box$ hg ut c ad g. Ergo et $\Box$ ab ad $\Box$ hg hoc eſt ad $\Box^{a}$ $dg + ef$ ut c ad g.

Eſto ar ad bc ut c ad q. Oportet oſtendere, ar ad cc ut b ad q.

$\frac{bcc}{ar} \infty q.$

Dicendum. ar ad bc ut c ad q. Verum bc ad cc ut b ad c. Ergo ex aequali in proportione perturbata erit ar ad cc ut b ad q. per 23. lib. 5. Elem. [4]

Eſto no ad pq ut r ad s. Oſtendendum ſit, n ad p ut rq ad so. Hoc eſt, ſit ratio compoſita ex ratione n ad p et ex o ad q eadem quae r ad s, et oporteat oſtendere rationem n ad p eandem eſſe cum ea quae componitur ex ratione r ad s et ex q ad o. Dicendum; quia ratio compoſita ex n ad p et o ad q eadem eſt quae r ad s, addita utrimque ratione q ad o, erit compoſita ex rationibus n ad p, o ad q, et q ad o, hoc eſt ratio n ad p eadem quae compoſita ex rat. r ad s et q ad o.

Hyp. n eſt ad r ut c ad p. Itemque q ad r ut c ad s. Oſtendendum quod n ad q ut s ad p.

Quia n ad r ut c ad p, erit $\Box$ np aequal. $\Box^{o}$ rc. Sed eidem $\Box^{o}$ rc aequale eſt $\Box$ qs, quia q ad r ut c ad s. Ergo $\Box$ np aequale $\Box$ qs, Ideoque n ad q ut s ad p.

---

[4]) Voir la note 22, p. 304 du Tome XI.

Aliter. Ratio n ad q componitur ex ratione n ad r et r ad q. quarum r ad q eadem cum ratione s ad c, altera vero n ad r eadam quae c ad p. Ergo n ad q rationem habet compoſitam ex ratione s ad c et c ad p, hoc eſt rationem s ad p.

Aliter optimè. Quia n ad r ut c ad p erit invertendo r ad n ut p ad c, verum q eſt ad r ut c ad s. Ergo ex aequo in proportione perturbata [4]) erit q ad n ut p ad s.

Hijp. e ad b ut c ad n. Item a ad b ut c ad l. Et e ad l ut a ad p. Oſtendendum quod $n \infty p$.

Quia e ad b ut c ad n, erit invertendo b ad e ut n ad c. Sed a eſt ad b ut c at l, ergo ex aequo in proportione perturbata [4]) erit a ad e ut n ad l. Sed et a ad e ut p ad l quia erat e ad l ut a ad p. Igitur n ad l ut p ad l quare $n \infty p$.

2 Nov. v.
1652.

Hypoth. $a - \frac{ax}{e}$ ad $\frac{cx}{e}$ ut a ad b Oſtendendum $c + b$ ad b ut e ad x.

perm. et per conv. rat. contr. $\frac{ax}{e}$ ad a ut $b - \frac{cx}{e}$ ad b

sed e ad a ut x ad $\frac{ax}{e}$

ideoque $\frac{ax}{e}$ ad a ut x ad e

ergo x ad e ut $b - \frac{cx}{e}$ ad b

per conv. rat. cont. $e - x$ ad e ut $\frac{cx}{e}$ ad b

ſed e ad c ut x ad $\frac{cx}{e}$

ergo ex aeq. in prop. perturb. $e - x$ ad c ut x ad b

et permt. et comp. e ad x ut $c + b$ ad b

aliter brevius. Sicut $a - \frac{ax}{e}$ ad a ita poteſt oſtendi eſſe $e - x$ ad e. atque erit continuo

$e - x$ ad e ut $\frac{cx}{e}$ ad b

Quod autem ut $a - \frac{ax}{e}$ ad a ita ſit $e - x$ ad e ſic oſtenditur.

e eſt ad x ut a ad $\frac{ax}{e}$

ergo dividendo, e ad $e - x$ ut a ad $a - \frac{ax}{e}$, et invertendo.

8 Nov. 1652.

$bd - bx - xx + dx \infty ax$

x ad $d - x$ ut $b + x$ ad a

x ad d ut $b + x$ ad $a + b + x$

$b + x$ ad x ut $a + b + x$ ad d

$b + x$ ad b ut $a + b + x$ ad $a + b - d + x$

b ad $a + b - d + x$ ut x ad d

Quoniam ductis in ſeſe medijs et extremis non ultra quadratum seu planum aſcenditur, poteſt reſolutio ad finem perduci [5]) per ſolas proportiones, ut hic factum apparet.

$a - x$ ad d ut $xx - bb$ ad $cx - qq$

$xx - bb \infty a - x$ in $\frac{cx}{d} - \frac{qq}{d}$ lineae deſignandam

$$xx + \frac{cxx}{d} - \frac{acx}{d} - \frac{qqx}{d} \infty bb - \frac{aqq}{d} \text{ ſit } \frac{ac + qq}{d} \infty p$$

[5]) Huygens n'achève pas complètement la construction, puisqu' ici, et aussi dans le paragraphe qui suit, il s'arrête après avoir réduit le problème à celui de construire la ligne x, déterminée par une proportion $b:(x \pm p) = x:d$. Si c'était son but, comme nous le supposons, de montrer que les problèmes plans peuvent être résolus sans sortir des proportionnalités, c'est-à-dire sans résoudre explicitement une équation quadratique, il aurait pu introduire la longueur q, définie par la proportion $b:q = q:d$, réduire la proportion donnée a la forme: $x:q = q:x \pm p$ et citer enfin la „Prop. XII. Data media trium proportionalium & differentia extremarum, invenire extremas", qu'on trouve dans l'ouvrage de Viète: „Effectionum geometricarum Canonica recensio." (Voir la p. 233 de l'ouvrage cité dans la note 31, p. 10 du T. I). Il nous semble, en effet, que pour expliquer la portée de la dernière partie de la pièce présente, on doit sous-entendre quelque chose de cette nature.

Comparez encore à cet effet la pièce N°. XVI, déjà citée dans la note 1 où, par une série de proportions, analogues à celles du texte, la construction d'un problème plan est réduite à celle de la ligne x, donnée par la proportion $x:s = n:x + m$. Alors Huygens fait suivre une construction bien connue par laquelle il résoud l'équation $xx + xm = ns$; mais dans la démonstration qu'il ajoute, cette construction amène immédiatement la proportion $x:s = n:x + m$, d'où il s'ensuit qu'on peut fonder ces sortes de démonstrations sur les seules proportions.

$xx + \frac{cxx}{d} - px \infty nn$

x ad n ut n ad $x + \frac{cx}{d} - p$

x ad n ut nd ad $dx + cx - dp$

Sit $d + c$ ad d ut p ad q. Ergo $dp \infty dq + cq$

x ad n ut nd ad $dx + cx - dq - cq$

Sit $d + c$ ad d ut n ad f ergo $dn \infty fd + fc$

Et x ad n ut $fd + fc$ ad $dx + cx - dq - cq$

x ad n ut f ad $x - q$.

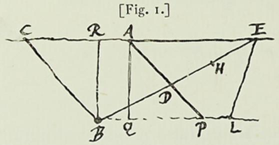
VI. [1])

[1652].

9 Febr. 1652.

Dato angulo EAD et puncto extra ipsum B, ducere inde rectam BDE ut DE sit aequalis datae.

[Fig. 1.]



Sit EA producta et occurrat ei BC parallela AD. et BR ducatur ad eandem perpendicularis. Sitque CA $\infty\ a$; ÇB $\infty\ b$; [2]) DE $\infty\ c$; CR $\infty\ d$; BE $\infty\ x$. BD $(x - c)$ ad BE (x) ut CA (a) ad CE $\left(\frac{ax}{x-c}\right)$ ergo Δ^{i} CBE latus BC $\infty\ b$, latus BE $\infty\ x$, et CE ∞

[1]) La pièce occupe les pages 188—191 du manuscrit N°. 12. Huygens y reprend le problème de la pièce N°. II (p. 13); mais, en choisissant une autre inconnue, il arrive à une équation biquadratique différente. Il la transforme en faisant disparaître le terme avec le cube de l'inconnue, puis il examine le cas particulier où le terme du premier degré s'annule, et où, par suite, le problème devient plan. De cette manière il retrouve le problème traité par lui en 1650 (voir la page 239 du Tome XI), qu'il emprunta alors à l'aperçu, donné par Pappus, de l'ouvrage „De inclinationibus" d'Apollonius (voir la note 2 de la même page 239). Il en obtient une solution bien plus élégante qu'on retrouve avec une légère modification dans sa lettre à van Schooten du 23 oct. 1653 (p. 247 du T. I) et dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" de 1654 (Probl. VI). Comparez encore la note 10 de la pièce présente.

[2]) Les données ont évidemment été choisies de manière à mener facilement au cas où le parallelogramme CP est un losange; auquel cas le problème se réduit à un problème plan, comme Pappus l'avait remarqué dans le passage cité dans la note 2 de la page 239 du T. XI.

$\infty\ \frac{ax}{x-c}$ unde additis qu.^{is} BC, CE, ablatoque hinc qu.° BE, relinquoque diviſo per duplam CE orietur ſegmentum baſis CR

$$\frac{\dfrac{aaxx}{xx - 2cx + cc} + bb - xx}{\dfrac{2ax}{x-c}} \infty\ d \text{ CR}$$

et tandem $x^4 - 2cx^3 \left.\begin{array}{l} -aa \\ -bb \\ +cc \\ +2ad \end{array}\right\} xx \left.\begin{array}{l} +2bbc \\ -2acd \end{array}\right\} x - bbcc \infty 0$ et ſublato ſecundo termino, ponendo nimirum $y + \frac{1}{2}c \infty x$ erit poſt inſtitutam operationem

$$y^4 \infty \left.\begin{array}{l} +\frac{1}{2}cc \\ +aa \\ +bb \\ -2ad \end{array}\right\} yy \left.\begin{array}{l} -bbc \\ +aac \end{array}\right\} y \left.\begin{array}{l} -\frac{1}{16}cc \\ +\frac{1}{2}ad \\ +\frac{1}{4}aa \\ +\frac{1}{4}bb \end{array}\right\} cc$$

apparet hinc quod ſi $bb \infty aa$ evaneſcat affectio ſub y, quodque propterea ſit futura aequatio quadrata, cum autem $a \infty b$ tum AB rhombus eſt, et mutatis ubique b in a erit hujuſmodi aequatio

$$y^4 \infty \left.\begin{array}{l} +\frac{1}{2}cc \\ +2aa \\ -2ad \end{array}\right\} yy \left.\begin{array}{l} -\frac{1}{16}cc \\ +\frac{1}{2}ad \\ +\frac{1}{2}aa \end{array}\right\} cc$$ unde invenitur

$$yy \infty aa - ad + \tfrac{1}{4}cc + \sqrt{aacc + a^4 - 2a^3d + aadd}\ ^{3)}$$

ſive

$$yy \infty aa - ad + \tfrac{1}{4}cc + a\sqrt{cc + aa - 2ad + dd}.$$

Dividatur DE bifarium in H ergo BH eſt y. [4]) Et ducatur EL quae faciat angulum BEL aequalem angulo BPA. erunt jam anguli ELP et EDP duobus rectis aequales, [5]) et puncta ideo D, P, L, E, in circulo [6]) et rectang. LBP aequ.

[3]) Comme on le voit, la seconde racine n'est pas discutée. Toutefois elle peut prendre une valeur positive. Elle mène alors aux solutions où le segment DE $= c$ se trouve a l'intérieur de l'angle CAP.

[4]) Puisqu'on a posé $y + \frac{1}{2}c = x$ et que BE $= x$, HE $= \frac{1}{2}c$.

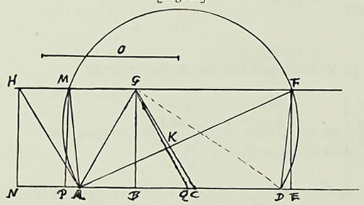
[5]) Puisqu'il en est de même par construction des angles LPA et BEL.

[6]) Ce cercle une fois tracé, Huygens, pour obtenir sa nouvelle construction, n'a plus qu'à inter-

▭° EBD. Subtrahe jam qu. DH ∞ $\frac{1}{4}cc$ ex qu.° BH ∞ $aa - ad + \frac{1}{4}cc + a\sqrt{cc+aa-2ad+dd}$ erit reliquum $\square$ BD + 2 ▭ BDH, quae simul aequalia ▭° EBD ergo ▭ EBD seu LBP ∞ $aa - ad + a\sqrt{cc + aa - 2ad + dd}$. aufer qu. BP ∞ aa fit ▭ LP B ∞ $a\sqrt{cc + aa - 2ad + dd} - ad$. divide per BP ∞ ∞ a fit PL ∞ $\sqrt{cc+aa-2ad+dd} - d$ fit AQ parall. RB ergo PQ ∞ d, [7]) adde PQ erit QL ∞ $\sqrt{cc + aa - 2ad + dd}$. hoc est QLq. ∞ $\square$ DE data una cum qu. BQ nam hoc est $a - d$.

Nota aliquam differentiam hic inveniri cum tam exigua datur DE vel tam acutus angulus APB ut L cadat inter B et P.

[Fig. 2.]



Compositio erit hujusmodi, Sit datus rhombus HGCA [Fig. 2] et linea o. *Cadat GB perpendicularis in AC. Et sumatur BD quae possit duo simul quadrata, ex* o *et ex AB.* [8]) Tum super AD describatur circumferentiae pars quae sit capax anguli GHA. et ad intersectionem F ducatur AF, dico KF ipsi o aequalem esse. [9])

Jungantur [10]) enim AM, FD et ducantur HN, MP, FE parallelae GB.

---

préter geométriquement la formule algébrique qui précède; mais on peut se demander d'où la pensée lui est venue d'introduire ce cercle, ou, ce qui revient au même, de tirer la droite auxiliaire LE? Il nous semble probable qu'ayant calculé $y^2 = BH^2$, Huygens a remarqué qu'il connaissait aussi $BD \times BE = y^2 - \frac{1}{4}c^2$; donc, faisant passer un cercle par les points D, E et P, le point d'intersection L de ce cercle avec BP était connu; puisqu'on a $BP \times BL = BD \times \times BE$. Mais, de plus, l'angle DEL était le supplément de l'angle APL qui lui est opposé dans le quadrilatère inscrit DPLE. Il était donc connu, et on pourrait trouver le point E en menant par les points connus B et L un arc de cercle contenant l'angle BEL = ACB. Il ne s'agissait donc plus que de calculer PL et d'en déduire une construction élégante et simple du point L.

7) Puisque PQ = CR = d.

8) Huygens a souligné les phrases cursivées et il a ajouté en marge: „vel sit qu^is^ ex o et AG aequale qu. GD"; c'est la modification adoptée également dans la lettre à van Schooten et dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones." Voir la note 1.

9) On reconnaîtra la construction, annoncée dans la note 6, du point L de la Fig. 1; en effet, les points A, H, G, C, B et D de la Fig. 2 correspondent aux points B, C, A, P, Q et L de la Fig 1.

10) Comme on le verra dans la suite, la démonstration, qui va suivre, a besoin d'être suppléée sur quelques points. Aussi Huygens n'en a pas considéré la rédaction comme définitive. Au dernier alinéa il indique un changement radical qu'il y voudrait apporter; mais, de plus, on

Quod verò circumferentia secabit rectam HF sic fiet manifestum.

Sit BQ ∞ BA et jungatur GQ, itemque GA. Itaque trianguli GAQ duo anguli A et Q inter se aequales sunt et singuli angulo A vel G trianguli HAG, quare similia erunt △^a^ HAG, GAQ et angulus AGQ aequ. angulo AHG. Si itaque super AQ describeretur circumferentia similis circumf.^ae^ AMFD [11]) ea per G transiret et tangeret rectam HF; sed quoniam qu. ex BD aequale est quadratis ex AB seu BQ et ex o, erit BD major BQ, et AD major AQ, ergo necessario circumferentia AMFD secabit rectam HF.

Porro quia ang. FDA aequ. angulo AKC (nam uterque addito FKC aequatur 2 rectis [12])) distantque tantum inter se lineae HF, AE quantum HA, GC, erit ideo FD ∞ AK. Sed et MA ∞ FD ergo MA quoque ∞ AK, et △ AMH idem cum △° AKC [13]) utraque vero similia △^lo^ ADF. Ergo ut HM ad MA, hoc est ut NP ad FD ita FD ad DA. Quare contentum sub NP, AD aequ. qu. DF; et addito utrinque ▭° PAD seu ADE, erit ▭ NAD aeq. qu. FD et ▭° ADE.

Et sumptis omnium duplis erit duplum ▭ NAD aequ. duplo qu. FD et duplo ▭ ADE. Et addito communi qu. AD erit geminum ▭ NAD + qu. AD hoc est geminum ▭ sub BC, AD + q. AD (nam BC ∞ AD [14])) aequale duplo qu. FD + q. AD + 2 ▭ ADE. Sed haec simul aequantur qu. AF + qu FD, (nam duplum ▭ ADE + qu. AD + qu. DF aequantur qu. AF [15])) Ergo duplum ▭ sub BC, AD + q. AD aequale qu.° AF + q. FD, hoc est, qu.° AF + q. AK, nam diximus FD AK esse aequales inter se. ▭ verò sub CB, AD una cum ▭ BAD aequatur ▭° CAD, et dupla duplo; ergo si à qu. AD + duplo ▭ sub BC, AD, auferatur duplum ▭ CAD, relinquetur qu. AD cum defectu dupli ▭ BAD. Duplo autem ▭° CAD aequale est duplum ▭ KAF, quia puncta KCDF sunt in circuli ejusdem circumferentia. et erat qu. AF + qu. AK aequale qu. AD +

---

trouve dans le manuscrit N°. 12, aux pages 245 et 246, une rédaction nouvelle, datée du 19 octobre 1653, qui a passé, avec des modifications très peu importantes, dans les „Ill. quor. probl. constr." au „Probl. VI" et pour laquelle nous renvoyons à cet ouvrage de 1654, que nous reproduisons plus loin dans ce Tome.

11) C'est-à-dire, contenant le même angle.

12) Puisque les points K, F, D, C, correspondants aux points D, E, L, P de la Fig. 1, se trouvent sur une même circonférence de cercle; ce qui se démontre facilement en remarquant que par construction $\angle AFD = \angle GHA = \angle ACG = 180° - \angle GCD$.

13) Puisqu'on a non seulement MA = AK et $\angle AKC = \angle ADF = \angle MAD = \angle HMA$; mais encore $\angle AHM = \angle ACK$.

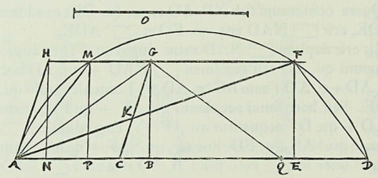
14) Lisez AN.

15) Huygens ajoute en marge: 12.2 Elem. „In amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quae fiunt à lateribus obtusum angulum comprehentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quae sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum". (Clavius, p. 192).

+ 2 □ ſub BC, AD. Ergo ablato duplo □ KAF à qu. AF + q. AK hoc eſt ablato □ AKF [16]) + q. AK à qu. AF, reſtabit qu. KF aequale qu. AD minus 2 □ BAD, ſeu minus 2 □ ABD et 2 q. AB; quare addito utrimque quadrato AB, erit qu. KF + qu. AB aequale qu. AD minus 2 □ ABD minus qu. AB: hoc eſt qu° BD. Sed eidem qu.° BD eſſet aequale ex conſtr. qu. ex *o* + q. AB. Ergo haec duo quoque aequalia qu.^{is} duobus KF et AB; et ablato communi AB q. erit qu. ex *o* aequ. q. KF. quod erat demonſtrandum. Poteſt autem angulus FDA vel rectus vel acutus fieri in quibus caſibus vel facilior vel non multum à praecedenti differens dem.° obtinebit.

Alter caſus cum angulus rhombi C obtuſus eſt, eandem habet compoſitionem. Et demonſtrationem quoque parum diverſam, quae erit hujusmodi, mutatis tantum ſignis affectionis ubi opus erit.

[Fig. 3.]



Primum quidem ſicut modo oſtenditur id quod ſub NP, AD [Fig. 3] continetur aequari quadrato DF. [17]) unde detrahendo utrumque à rectang. PAD vel ADE, erit □ NAD ∞ □ ADE — q. FD; et ſumptis omnium duplis, duplum □ NAD ∞ 2 □ ADE — duplo q.° FD. et utrumque abſtrahendo à qu.° AD, erit qu. AD — duplo □ NAD ∞ qu. AD + duplo q.° FD — 2 □ ADE; ſed haec ſimul aequantur qu.^{is} ex AF et FD, (nam qu.^{a}. ſimul AD, DF — 2 □ ADE aequalia ſunt qu.° AF per. 13. 2^{i} Elem. [18]) Ergo qu. AD minus duplo □ NAD aequale eſt qu.^{is} AF et FD, hoc eſt, qu.^{is} AF et AK, nam FD ∞ AK oſtenſa eſt. [19]) detrahendo igitur aequalia ab aequalibus, hoc eſt illinc auferendo 2 □ CAD, hinc vero duplum □ KAD [20]) (haec enim aequalia inter ſe, quoniam puncta D, C, K, F in ejuſdem circuli circumſerentia) erunt etiam reſidua aequalia. Sed à qu°. AD — 2 □ NAD ſeu — 2 □ CB, AD, ſi auferatur inſuper 2 □ CAD, relinquetur qu. AD — 2 □ BAD. At à qu.^{is} FA, et AK auferendo 2 □ KAF, relinquetur qu. KF. Itaque qu. KF aequale qu.° AD — 2 □ BAD, hoc eſt qu.° AD — 2 □ ABD — 2 q. AB. quare addendo utrinque qu. AB erit qu. KF + qu. AB ∞ qu. AD — 2 □ ABD — qu. AB; Sed hoc reſiduum eſt aeq. qu.° BD. ergo qu. KF + qu. AB ∞ qu. BD, hoc eſt qu.° ex *o* et qu. AB. Itaque auferendo commune qu. AB, erit qu. KF. aequ. q.° ex *o*. quod erat oſtend.

[16]) Lisez : 2 □ AKF.

[17]) Voir le troisième alinéa de la page précédente vers la fin.

[18]) „In oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente minus est quadratis, quae fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso, & ab vno laterum, quae sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum." (Clavius, p. 198).

[19]) Voir l'alinéa cité dans la note 17.

[20]) Lisez KAF.

Haec autem proponentur melius eo modo quo problematis partem alteram trademus, [21]) Primum videlicet tale theorema demonſtrando.

Si ſit rhombus HACG et ex angulo A ducatur AKF ad productum latus HF, et FD faciens angulum AFD aequalem angulo H, et GB perpendicularis ipſi AD. dico quadrata ex KF et ex AB quadrato BD aequalia eſſe.

Hoc primum demonſtrare oportuit, dein Reſolutionem Compoſitionemque et demonſtrationem problematis ſubjicere quae breves erunt. et ſchema habebunt minus implicitum. quod et Pappus in prop.^{c} 72. lib. 7, rectè obſervavit. [22])

[21]) Voir la pièce N°. VII, qui suit.

[22]) En effet, au lieu cité, p. 206 verso de l'édition de Commandin citée p. 259 du T II, note 3 (Hultsch, T. II, p. 783), Pappus dans la démonstration de la construction correspondante, où le losange est remplacé par un carré (voir cette construction à la page 227 du Tome XI), fait appel à un lemme qui, avec les notations de la figure 3 de la page 228 du T. XI, et après y avoir tiré la droite HS, se lit comme il suit dans la traduction latine de Commandin : „Sit quadratum BD, & ducatur BGH, atque ipsi ad rectos angulos HS. Dico quadrata ex CD GH quadrato ex CS aequalia esse." Et ce théorème est démontré par Pappus dans la „Prop. 71. lib. 7," p. 206 recto de l'édition de Commandin (Hultsch, T. II, p. 780—783).

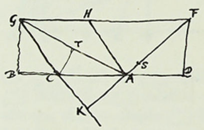
VII. [1])

1652.

11 Febr. 1652.

dato rhombo GHAC productisque lateribus GH, GC, oportet ducere KAF aequalem datae. [2])

[Fig. 1.]



Factum fit et dividatur KF bifariam in S. et ducatur GA diameter. Sitque GH, GC $\infty\ a$. GA $\infty\ b$. KF $\infty\ c$. AS $\infty\ x$. [3])

$$\mathrm{KA}\,(\tfrac{1}{2}c-x) \text{ — } \mathrm{AC}\,(a) \text{ —— } \mathrm{KF}(c) \text{ — } \mathrm{FG}\left(\frac{ac}{\frac{1}{2}c-x}\right)$$

$$\mathrm{AF}\,(\tfrac{1}{2}c+x) \text{ — } \mathrm{AH}\,(a) \text{ —— } \mathrm{KF}(c) \text{ — } \mathrm{KG}\left(\frac{ac}{\frac{1}{2}c+x}\right)$$

$$\text{a[dde]}\left|\begin{array}{ll} \square\,\mathrm{KAF} & \tfrac{1}{4}cc-xx \\ \square\,\mathrm{GA} & bb \end{array}\right.$$

$$\tfrac{1}{4}cc-xx+bb\ \infty\ {}^{4)}\ \square\,\mathrm{KGF}\ \frac{aacc}{\tfrac{1}{4}cc-xx}\ {}^{5)}$$

[1]) La pièce occupe les pages 192—196 du manuscrit N°. 12.
[2]) Comparez le problème analogue de la pièce N°. VI.
[3]) Huygens profite de l'expérience qu'il a obtenue dans la pièce précédente pour choisir l'inconnue dès l'abord de telle manière qu'elle amènera une équation où le terme avec le cube de l'inconnue a disparu. En effet, l'AS $\infty\ x$ est analogue à la BH $\infty\ y$ de la pièce précédente.
[4]) Puisque GA est la bisectrice de l'angle CGH et qu'on a alors, d'après un théorème bien connu, KG × GF = KA × AF + GA².

$$\tfrac{1}{16}c^4-\tfrac{1}{2}ccxx+x^4-bbxx+\tfrac{1}{4}ccbb\ \infty\ aacc$$

$$x^4\ \infty\ \left.\begin{array}{r}\tfrac{1}{2}cc\\ +bb\end{array}\right\}xx\ \left.\begin{array}{l}+\ aa\\ -\ \tfrac{1}{4}bb\\ -\ \tfrac{1}{16}cc\end{array}\right\}cc \qquad \text{quadrata aequatio.}$$

q.AS $\;xx\ \infty\ \tfrac{1}{4}cc+\tfrac{1}{2}bb-a\sqrt{cc+\frac{\frac{1}{4}b^4}{aa}}$ substrahe ex quadrato SF $\infty\ \tfrac{1}{4}cc$ restat $-\tfrac{1}{2}bb+a\sqrt{cc+\frac{\frac{1}{4}b^4}{aa}}\ \infty\ \square$ KAF.

Sit ducta FD, faciens angulum AFD aequalem angulo ACK [6]) et consequenter $\triangle^{\text{los}}$ similes CAK, FAD. ergo $\square$ CAD ∞ $\square$ KAF. applicando itaque $\square$ KAF ad CA $\infty\ a$ fit AD $\infty\ -\tfrac{1}{2}\frac{bb}{a}+\sqrt{cc+\frac{\frac{1}{4}b^4}{aa}}$. Sit GB perp. in AC et

[5]) Huygens ajoute ici sur une bande de papier attachée à la page:

$$\overset{p}{\vdash\!\!\text{————————————}\!\!\dashv}$$

$$\text{„}\tfrac{1}{4}cc-xx \text{ —— } aa \text{ ———— } cc \text{ —— } \tfrac{1}{4}cc-xx+bb$$

applicentur omnia ad a hoc est fit $\frac{\frac{1}{4}cc-xx}{a}\ \infty\ q$ (AD). $\frac{cc}{a}\ \infty\ p$. $\frac{bb}{a}\ \infty\ d$ (2AB)

$$\text{ergo}\quad q \text{ —— } a \text{ ———— } p \text{ —— } q+d$$

$$qq+qd\ \infty\ ap \text{ sive } cc \text{ adde } \tfrac{1}{4}dd$$

$$qq+qd+\tfrac{1}{4}dd\ \infty\ cc+\tfrac{1}{4}dd$$

$$q+\tfrac{1}{2}d\ \infty\ \sqrt{cc+\tfrac{1}{4}dd}\text{"}$$

et de même, sur le revers de la bande:

„melius.

$$\tfrac{1}{4}cc-xx \text{ —— } aa \text{ ———— } cc \text{ —— } \tfrac{1}{4}cc-xx+bb$$

Sit $\frac{\frac{1}{4}cc-xx}{a}\ \infty\ q$ (AD). $\frac{bb}{a}\ \infty\ d$ (2 AB) sive $ad\ \infty\ bb$

$$\text{ergo}\quad q \text{ —— } a \text{ ———— } cc \text{ —— } qa+da$$

$$\text{Sed}\quad q \text{ —— } a \text{ ———— } qq+qd \text{ —— } qa+da$$

$$\text{Ergo}\quad cc\ \infty\ qq+qd\text{"}$$

Il nous semble que ces variantes ont le but d'éviter l'introduction de l'équation biquadratique. Et la seconde est préférée à la première parce qu'elle ne nécessite pas d'introduire la longueur p, qui ne correspond avec aucune des lignes de la figure.
[6]) Par analogie avec la droite EL de la Fig. 1, p. 26. Voir sur cette droite EL la note 6, p. 27.

CT in GA. Ergo ſimilia triangula CAT, GAB ſed CA eſt a, AT $\frac{1}{2}b$, AG b, ergo AB $\frac{1}{2}\frac{bb}{a}$. ergo cum AD ſit $\sqrt{cc + \frac{1}{4}\frac{b^4}{aa}} - \frac{1}{2}\frac{bb}{a}$, additâ AB ∞ $\frac{1}{2}\frac{bb}{a}$, erit DB ∞ ∞ $\sqrt{cc + \frac{1}{4}\frac{b^4}{aa}}$, hoc eſt DB qu. ∞ □ KF datae una cum qu.° AB.

Unde talis invenitur problematis conſtructio. *Oportet demiſſâ perpendiculari GB facere BD quae poſſit quadr. lineae datae una cum qu. ex AB. tum ſuper AD, describere circumferentiae partem quae capiat angulum aequalem angulo CGH. Ea enim ſecabit rectam GH productam in F, unde ducta FAK aequabitur datae lineae. Sed et in alio puncto ſecabit eandem GF inter H et F, cujus ope interſectionis problema itidem abſolvetur.* [7])

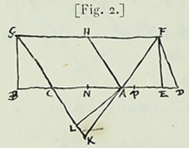
THEOREMA. [8]) [1.]

Sit rhombus GCHA et ducatur KHF [9]) *occurrens productis rhombi lateribus utrinque. et ducatur FD quae faciat angulum AFD aequalem CGH, et ſit GB perpendicularis ſuper AC.*

dico quadrata ex KF et AB aequari qu.° ex BD.

Sit enim AL ſuper GK ad angulos rectos ducta et FE ſuper BD. et ponatur AP quidem aequalis ED; AN vero ipſi CB.

[Fig. 2.]



Quia igitur ſimiles ſunt trianguli GBC, ACL, et latus GC aequale AC lateri, erit quoque CL aequale CB hoc eſt AN. Rurſus quoniam ſimilia ſunt △^{la} CAK, FAD, habent enim angulum ad A aequalem et eſt angulo ACK ex conſtr. aequalis angulus AFD, erit et angulus AKC aequ. ang.° ADF. anguli autem ALK, FED ſunt recti, itaque ſimilia quoque triangula ſunt ALK, FED. ſed FE eſt aequ. AL ergo et AK aequ. FD et LK aequalis ED hoc eſt AP. itaque tota NP etiam aequalis CK. Propter ſimilia verò triangula, eſt AD ad DF ut AK ad KC. ſed AK aequalis eſt FD et KC aequalis NP. Itaque AD ad DF ut DF ad NP, ideoque contentum ſub AD, NP aequale qu.° FD et auferendo utrinque ▭ DA, AP vel AD, DE erit ▭ NAD aequale qu.° FD — ▭ ADE. Et ſumptis omnium duplis, duplum ▭ NAD ∞ duplum qu. DF — 2 ▭ ADE et addito communi qu° AD, erit duplum

[7]) On retrouve cette construction avec une légère modification dans la lettre à van Schooten du 23 oct. 1653 (p. 248—249 du T. I) et dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones” de 1654 (Problema VII, première solution); voir la note 14.

[8]) Comparez les trois derniers alinéas de la pièce précédente, p. 31 du Tome présent.

[9]) Lisez KAF.

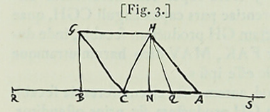
▭ NAD hoc eſt duplum ▭ BC, AD + qu. AD ∞ 2 qu. FD + qu. AD — — 2 ▭ ADE; ſed haec aequalia ſunt qu.^{is} ex AF et FD (nam qu.^{a} ex FD et DA — — 2 ▭ ADE aequantur qu.° AF [10])). Itaque 2 ▭ BC, AD + qu. AD ∞ qu^{is} ex AF et FD, hoc eſt qu^{is} ex AF et AK, nam AK ipſi FD aequalis oſtenſa eſt. Additis itaque aequalibus ad aequalia, hoc eſt addendo illic 2 ▭ CAD hinc vero 2 ▭ KAF (ſunt autem haec aequalia, quoniam propter △^{a} ſim. eſt CA ad AK ut FA ad AD) erunt etiam ſummae aequales. Sed addendo ad 2 ▭ BC, AD + qu. AD, duplam ▭ CAD fit 2 ▭ BAD + qu. AD. at qu.^{is} ex FA et AK addendo duplum ▭ KAF fit qu. KF; ergo qu. KF aequale 2 ▭ BAD + qu. AD. additoque utrinque qu. BA, erit qu. KF + qu. BA aequale qu°. BD. quod erat oſtendendum.

Poteſt autem rurſus angulus FDA rectus vel obtuſus eſſe, prout fuerit angulus FKC. ijſque caſibus non multum diverſa demonſtratione idem oſtendetur facilius quidem multò ſi angulus FDA rectus fuerit.

THEOREMA. 2. [11])

Sit rurſus rhombus GCAH, cujus ducatur diameter HC, et in productum latus AC cadat perpendicularis GB, porro ſit HQ poſita aequalis HC, et ponatur BS quae poſſit quadratum ex BA una cum quadruplo qu.^{i} ex CH. Dico AS ipſi CQ aequalem eſſe.

[Fig. 3.]



Sit enim HN ipſi CQ ad ang. rectos. quia igitur CHQ eſt triangulum iſoſceles erit CQ bifariam diviſa in N. Ponatur BR ipſi BN aequalis, eritque jam utraque harum aequalis ipſi GH hoc eſt CA. Quia verò ſunt ſimilia triangula CGH, CHQ, nam angulis GCH, GHC aequales ſunt ſinguli HCQ, HQC; erit QC ad CH ut CH ad CG, et qu. CH aequale ▭ ſub GC, CQ hoc eſt ▭ ſub BN, CQ, hoc eſt duplo ▭° BNQ, hoc eſt ▭° RNQ, ſeu RNC.

Eſt autem qu. BA hoc eſt qu. RC una cum duplo ▭° RCQ + qu. CQ aequale quadrato RQ. Sed duplum ▭ RCQ + qu. CQ aequatur quadruplo ▭° RNC, nam ▭ RCQ aequatur duplo ▭ RCN, et qu^{m}. CQ quatuor qu.^{is} CN. Itaque addito ad qu. BA quadruplo ▭ RNC hoc eſt 4 qu.^{is} CH erunt ea ſimul aequalia qu.° RQ; ſed ijſdem aequale poſitum eſt qu. BS, ergo BS q. ipſi RQ

[10]) Huygens ajoute en marge „12.2. Elem.” Voir la note 15, p. 29.

[11]) Le théorème sert à préparer la démonstration de ce qu'on appelait la „Determinatio” (voir p. e. l'avant-dernier alinéa de la page 231 du Tome XI), laquelle, dans le problème présent, exige que la ligne donnée o (voir la figure 4) soit plus grande que le double de HC; puisque sans cela la construction devient impossible.

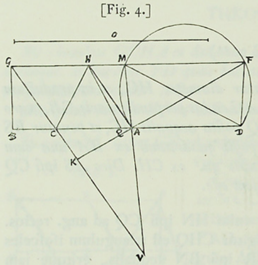
qu.° aequale: et BS ipſi RQ. Quare ablata communi BQ erit QS aequalis RB hoc eſt ipſi CA; et rurſus communi ablata QA, erit AS aequalis CQ; quod erat demonſtrandum.

Problema. [12])

Rhombo dato et duobus lateribus contiguis productis, aptare ſub eorum angulo interiori magnitudine datam rectam lineam quae ad oppoſitum angulum pertineat. debet autem data linea non minor eſſe duplâ diametro, quae alios duos rhombi angulos jungit.

Eſto Rhombus GHAC [Fig. 4] [13]), et producta ejus latera GH, GC; data autem ſit linea *o*, quae major ſit dupla diametro HC, nam ſi aequalis eſt duplae HC conſtructio problematis manifeſta eſt. Sit itaque major et oporteat ducere KAF ipſi *o* aequalem.

[Fig. 4.]



Sit GB ipſi AC ad angulos rectos et qu.is ex BA, et ex o ſit aequale ex BD quadratum. [14]) Dein ſuper AD deſcribatur circumferentiae pars capax anguli CGH, quae ubi rectam GH productam ſecabit, inde ducantur FAK, MAV dico harum utramque aequale eſſe ipſi *o*.

Quod autem dicta circumferentia ſecabit rectam GH productam ſic prius oſtenditur. Sit HQ ipſi HC aequalis. Quia igitur qu. ex BD aequale eſt qu.is ex *o* et BA; quorum qu. *o* majus eſt 4 quis ex CH, erit ideo AD major quam CQ. hoc enim in praec. Theor. oſtenſum fuit. Sed et triangulum CHQ ex eodem theoremate conſtat ſimilem eſſe triang. CGH, et iſoſcelem. Itaque ſi ſuper CQ circumferentiae pars deſcripta intelligatur, capax anguli CGH, ea tranſibit per H, atque ibidem continget rectam GH, ſimilis autem erit circumferentiae quae ſuper AD deſcripta fuit, nam illa quoque capit angulum aequalem ipſi CGH. Ergo quum ſit AD major quam CQ, manifeſtum eſt circumferentiam AMFD ſecare debere rectam GHF.

[12]) Après avoir préparé la solution par les théorèmes qui précèdent, Huygens reprend le problème formulé au début de la pièce en y ajoutant la „Determinatio."

[13]) Le manuscrit contient une cinquième figure qui se distingue de la quatrième en ce que l'angle CAH y est l'angle obtus du losange. Le texte se rapporte à la fois aux deux figures.

[14]) Huygens a souligné cette phrase et il a ajouté en marge: „Vel potius sit qu.is ex *o* et HC aequale quadratum ex GD." C'est la modification adoptée dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" et dans la lettre à van Schooten; voir la note 7.

Porro autem ductis MD, FD, conſtat quidem angulos AFD, AMD ſingulos aequari angulo CGH. Quapropter erunt qu.a ex KF et AB ſimul aequalia qu.° BD; [15]) ſed huic etiam aequalia ſunt ex conſtr.e qu.a ex *o* et ex AB. Ergo quae eidem aequalia etiam aequalia inter ſe. Et ablato communi quadrato ex AB erit qu. KF aequale qu.° ex *o* et KF ipſi *o*. Eadem ratione et qu. MV quadrato ex *o* aequale erit. Quod demonſtrandum erat. [16])

[15]) Voir le théorème I de la pièce présente.

[16]) Une autre démonstration se rencontre plus loin dans le manuscrit N°. 12, aux pages 247 et 248, sous la susscription: „Ex Analysi (11 Febr. 1652) suprà descripta". Elle a passé avec des modifications légères dans les „Ill. quor. probl. constr.", où on la trouvera au „Probl. VII."