Avertiſſement.

En janvier 1652 Huygens commença à s'occuper aſſidûment de problèmes ſolides, c'eſt-à-dire de ceux dont l'analyſe algébrique amène des équations du troiſième ou quatrième degré; problèmes devant leſquels il s'était arrêté juſqu'alors quand il les avait rencontrés. [1]) Le point de départ de ces nouvelles recherches, comme de tant d'autres, [2]) lui eſt fourni par Archimède. Il s'agit cette fois du problème de couper une ſphère par un plan dans un rapport donné. Dans ſon ouvrage „De ſphaera et cylindro" [3]) Archimède n'en avait pas achevé la ſolution; il l'avait ſeulement réduit à un problème plus ſimple qui demande de couper une droite de longueur donnée en deux ſegments ſous des conditions qui font reconnaître le problème comme ſolide. [4]) Il eſt vrai qu' Eutocius dans ſes Commentaires ſur Archimède en avait rapporté trois ſolutions différentes; [5]) mais elles exigent la détermination de l'interſection d'une hyperbole avec une ellipſe

[1]) Comparez, au Tome XI, les pages 33 (Problème 7), 88 et 213.
[2]) Comparez les pages 50, 76, 83, 273 et 274 du Tome XI.
[3]) Voir les pages 210—219, T. I de l'édition de Heiberg, citée dans la note 2, p. 50 du T. XI ou les pages 45—47 de l'édition de Bâle, citée dans la note 3, p. 274 du T. XI.
[4]) Voir la note 16, p. 12 du Tome présent.
[5]) Voir, à la même page, les notes 15 et 17.

ou une parabole. Or, Descartes dans sa „Géométrie" [6]) avait montré qu'on pouvait réduire chaque problème solide à celui de trouver l'intersection d'une parabole avec un cercle. C'est ce que Huygens va accomplir, pour le problème en question, dans la pièce N°. I. [7]) Le même mois, d'ailleurs, il en élabora une seconde solution, [8]) basée cette fois sur la trisection de l'angle, parce qu'il considérait ces sortes de constructions, là où elles sont possibles, comme les plus simples et les plus pratiques pour les problèmes solides. [9]) C'est cette seconde solution qui, sous une forme un peu modifiée, a passé dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" de 1654. [10])

Les analyses qui ont conduit à ces solutions nous sont inconnues. Sans doute Huygens a commencé par déduire algébriquement l'équation cubique dont le problème dépend; il a appliqué ensuite les règles données par Descartes, au Livre III de sa „Géométrie", pour résoudre une telle équation par l'intersection d'une parabole avec un cercle ou par la trisection de l'angle; adaptant toutefois ces constructions autant que possible au problème à résoudre de manière à économiser sur les lignes à tirer. [11])

Le second problème solide traité par Huygens, est celui des deux moyennes proportionnelles. L'antiquité en connaissait plusieurs solutions qui nous ont été conservées. Parmi elles celle de Nicomède, fondée sur l'emploi de sa conchoïde, semble avoir frappé particulièrement Huygens. En effet, dès qu'on se demande de quelle manière Nicomède a pu parvenir à cette solution, elle nous apparaît comme une véritable énigme. Il est clair, d'abord, que la détermination des points d'intersection d'une droite avec une conchoïde doit mener en général à une équation du quatrième degré. Or, dans la solution de Nicomède, le pôle et la base de la conchoïde sont placés de telle façon que l'un des quatre points d'intersection qui

[6]) Voir l'article: „Façon generale pour construire tous les problesmes solides, reduits à une Equation de trois ou quatre dimensions," p. 464—469 du T. VI de l'édition récente des Œuvres de Descartes par Adam et Tannery.

[7]) Voir la page 9.

[8]) Voir la pièce N°. III, p. 16.

[9]) Comparez la première page de l'„Illustrium quorundam problematum constructiones," où on lit; „Et hæc construendi ratio in solidis problematis quodammodo simplicissima videtur, atque ad usum maximè accommodata." Les règles pour réduire les problèmes solides, qui en sont capables, à la trisection de l'angle avaient été données également par Descartes dans sa „Géométrie." Voir les pages 472—474, Tome VI de l'édition d'Adam et Tannery.

[10]) Voir l'ouvrage cité dans la note 1, p. 287 du T. I.

[11]) Comparez surtout la solution du problème de la pièce N°. XX, p. 83—86 du Tome présent où l'on peut suivre facilement le procédé que nous venons de décrire.

correspondent aux racines de cette équation biquadratique est construisible à l'aide de la seule règle et que de plus l'équation cubique, qui reste, se réduit à la forme binomiale. [12]) Mais comment Nicomède a-t-il pu réussir à remplir ces conditions, indispensables au succès de sa solution? Huygens croit l'avoir deviné et il nous expose ses idées là-dessus dans la pièce N°. II, du 30 janvier 1652. [13]) Il y suppose implicitement que l'antiquité était en possession d'une analyse algébrique qui ressemblait à la nôtre; opinion qu' il a exprimée formellement dans une lettre à Kinner à Löwenthurn du 9 août 1652 [14]) et qui fut partagée par d'autres savants de son époque. [15])

Ayant si bien réussi, dans cette pièce N°. II, à retrouver la solution de Nicomède en la considérant comme une solution particulière du problème plus général de mener par un point donné une droite de manière que deux droites, données en position, en découpent un segment de longueur donnée, Huygens se met à rechercher les cas où ce problème devient plan, c'est-à-dire résoluble à l'aide de la règle et du compas. [16]) De cette façon il obtient aisément les cas particuliers mentionnés par Pappus [17]) et dont il s'était déjà occupé en 1650, [18]) dans lesquels le point donné est situé sur une des bissectrices des angles formés par les droites données. Il les reprend et en trouve de nouvelles solutions, [19]) reproduites

[12]) Voir la figure 2 de la pièce N°. II, p. 15, où il s'agit de construire les deux moyennes entre LA et LG. Le point B y est le pôle, la droite AD la base de la conchoïde qui coupe la droite donnée CA au point E. Le pôle a été construit en prenant $AR = \frac{1}{2} AL = \frac{1}{4} AC$, $AB = DE = \frac{1}{2} LG$; la base en menant AD parallèle à CB. La solution parasitaire s'obtient en tirant la droite BL.

[13]) Voir les pages 13—15 du Tome présent.

[14]) Voir la page 237 du T. I, où on lit à propos de l'analyse algébrique „restituée" par Descartes „nam talem quoque veteribus Geometris in usu fuisse certissimis mihi indicijs constat."

[15]) Témoin la préface du „Tractatus de Concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraïco", ouvrage posthume de Frans van Schooten (voir la note 1, p. 41 du T. III), publié par son frère Pieter, où celui-ci s'exprime comme il suit: „meus Frater, postquam methodo Synthetica scientiae hujus praeclara multa publicis tam scriptis quam praelectionibus cum fructu tradidisset, ad Analysin quoque, certissimam inveniendi artem, ejusque perficiendae rationem sua studia convertit. Neque dubitabat quin pleraque omnia, quae Veteribus tantum gloriae peperissent, Analyseos beneficio ac ope reperta essent: sed quae illi ut inventorum major admiratio foret, dissimulato hoc artificio & suppresso, vulgari tantum Syntheseos forma exhibuissent."

[16]) Voir la pièce N°. VI, p. 26—27.

[17]) Dans son aperçu de l'ouvrage „De inclinationibus" d'Apollonius, au lieu cité dans la note 2, p. 239 du T. XI.

[18]) Voir les pièces N°. IV et VIII, pp. 226 et 239 du T. XI.

[19]) Voir les pièces N°. IV, VI, VII, IX et XIII aux pages 20, 28, 34, 44, 57 et 58 du Tome présent.

pour la plupart dans les „Illuſtrium quorundam problematum conſtructiones.”

Enſuite, dans la pièce N°. VIII [20]), du 14 février 1652, Huygens revient au cas général où le point donné occupe une poſition quelconque à l'intérieur de l'angle qui doit contenir le ſegment donné. Il en obtient une ſolution qui dépend de l'interſection d'une hyperbole et d'un cercle et ſe met enſuite à rechercher ce qu'on appelait alors la „determinatio” du problème, c'eſt-à-dire l'enſemble des conditions ſous lesquelles la ſolution est poſſible. Cette „determinatio” exige ici la conſtruction du plus petit ſegment que, dans l'angle donné, on puiſſe faire paſſer par le point donné; ce qui conſtitue un nouveau problème ſolide dont Huygens donne trois ſolutions diverſes et qu'il reprend en ſeptembre de la même année [21]) pour le traiter ſyſtématiquement par ſa règle „de maximis et minimis” qui eſt une modification de celle de Fermat. [22]) A cette occaſion il expoſe amplement les principes qui conduiſent à cette règle.

En attendant, en mars 1652, il était retourné au problème des deux moyennes proportionelles. Après avoir donné, pour le cas particulier de la duplication du cube, dans la pièce N°. X [23]) une première ſolution, dont l'analyſe nous eſt inconnue, accompagnée d'une conſtruction approximative élégante, il va procéder plus ſyſtématiquement par la méthode qui, ſelon lui, a amené la ſolution de Nicomède; c'eſt-à-dire il ſe poſe des problèmes dans leſquels il s'agit d'obtenir l'égalité de deux ſegments dont l'un eſt ſitué ſur une droite mobile, paſſant par un point donné, et l'autre ſur une droite fixe; [24]) il ſoumet ces problèmes à une analyſe algébrique conduiſant à une équation cubique ou biquadratique; après quoi il choiſit les données du problème de manière à ſimplifier cette équation juſqu' à ce qu'elle ſe réduiſe à une équation cubique binomiale. Alors, pourvu qu'on ſuppoſe accomplie l'égaliſation des deux ſegments, il eſt en poſſeſſion d'une ſolution nouvelle du problème des deux moyennes.

Les ſolutions obtenues de cette façon ont paſſé dans les „Illuſtrium quorundam problematum conſtructiones”, [25]) mais sans les analyſes et ſous des rédactions modifiées.

Enſuite, après un intervalle de pluſieurs mois, pendant leſquels Huygens a

---

[20]) Voir les pages 38—41 du Tome présent.
[21]) Voir la pièce N°. XIV, p. 66—68 du Tome présent.
[22]) Consulter le § 11 de la page 19 du T. XI et la note 11, p. 48 du même Tome.
[23]) Voir la p. 45 du Tome présent.
[24]) Voir les débuts des pièces N°. XI et N°. XII, pp. 49 et 54 du Tome présent.
[25]) Comme „Probl. III”.

commencé ſes recherches ſur la dioptrique [26]) et poſé les baſes de ſa théorie de la percuſſion des corps durs, [27]) il aborde en ſeptembre 1653 deux autres problèmes ſolides; en premier lieu celui des normales à abaiſſer d'un point donné ſur une parabole donnée, problème dont Apollonius s'était occupé au cinquième livre de ſes „Coniques”. Par la méthode esquiſſée au ſecond alinéa du préſent „Avertiſſement” Huygens parvient à réſoudre ce problème à l'aide des interſections d'un cercle avec la parabole même qui eſt donnée. [28]) Alors il ſe poſe la queſtion ſi une telle ſolution où il n'entre d'autres courbes que le cercle et la courbe qu'on eſtime connue, doit être comptée comme plane ou comme ſolide. Huygens incline vers la première interprétation et il croit pouvoir expliquer de cette façon un paſſage où Pappus reproche à Apollonius, qui s'était ſervi d'une hyperbole pour la réſolution du problème en queſtion, d'avoir employé une conique dans la ſolution d'un problème plan. [29])

Le dernier problème ſolide [30]) réſolu par Huygens dans la période qui nous occupe, eſt celui de la détermination du point d'inflexion de la conchoïde de Nicomède. Il le réduit d'abord à une queſtion „de maximis et minimis,” à laquelle il applique la méthode expoſée dans la pièce N°. XIV; ce qui amène une équation cubique réſoluble, comme toujours, à l'aide d'un cercle et d'une parabole et, entre certaines limites des données, par la triſection de l'angle. Dans ce dernier cas Huygens a cru, au premier abord, qu'on pourrait ſe ſervir, pour la triſection de l'angle en queſtion de la conchoïde même qu'on ſuppoſe donnée. [31]) Alors, comme nous l'avons vu, le problème ſe rangerait, ſelon lui, parmi les problèmes plans; mais il ſemble qu'il ait abandonné bientôt cette penſée. [32]) Une remarque, qui, dans la pièce N°. XX y donnait expreſſion, eſt ſupprimée dans les „Illuſtrium quorundam problematum ſolutiones” où le problème apparaît comme „Problema VIII.”

C'eſt ici la partie principale de l'œuvre purement mathématique des années 1652

---

[26]) Comparez la note 17, p. 91 du T. XI.
[27]) On trouvera ces travaux sur la dioptrique et sur la percussion dans d'autres volumes de la présente publication.
[28]) Voir la pièce N°. XIX, p. 81 du Tome présent.
[29]) Voir, pour ce passage, la note 5, p. 82 du Tome présent.
[30]) Voir la pièce N°. XX, p. 83.
[31]) Voir le dernier alinéa de la page 86 du Tome présent.
[32]) Voir la note 10 de la page citée.

et 1653 pour autant qu'elle nous a été confervée. Nous n'y avons à ajouter que les pièces N°. V, XV, XVI, XVII, XVIII et XXI dont nous n'avons pas encore parlé.

La première de ces pièces, le N°. V, [33]) a, évidemment, été compofée par Huygens pour fe faciliter la rédaction, à la mode des anciens, des démonftrations et conftructions auxquelles il avait été conduit par l'analyfe algébrique, et le N°. XVI [34]) peut être confidéré comme un exemple de l'application à un problème plan déterminé des règles expofées dans le N°. V.

Le N°. XV [35]) donne une déduction algébrique de la formule célèbre de Héron qui exprime l'aire d'un triangle en fonction des côtés.

Les pièces N° XVII [36]) et N°. XVIII [37]) contiennent la détermination de la tangente à la ciffoïde et à la conchoïde dans le cas du point de rebrouffement. Comme la méthode de Defcartes [38]) y eft employée, cette détermination fe réduit à une queftion „de maximis et minimis" traitable par les méthodes expofées dans la pièce N°. XIV.

Enfin le N°. XXI [39]) applique au triangle une méthode inventée par van Schooten pour déterminer les centres de gravité de certaines figures fimples.

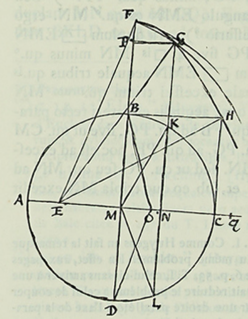
33) Voir les pages 21—25 du Tome présent.
34) Voir les pages 72—75.
35) Voir les pages 69—71.
36) Voir les pages 76—78.
37) Voir les pages 79—80.
38) Voir la note 10, p. 65.
39) Voir les pages 87—89.

I. [1])

1652.

13 Jan. 1652. Prop. 4. lib. 2. Archim. de Sphaer. et Cylind. [2])

Datam fphaeram fecare plano, ita ut portiones inter fe rationem habeant eandem datae. [3])



Sit data fphaera ABCD quam oporteat fecare plano KL, ita ut portio LAK ad KCL portionem eam habeat rationem quam CE ad EA.

Secetur fphaera per centrum, atque efto fectio circulus ABCD, diameter ejus BD et centrum M. Producatur DB et fit BF aequalis femidiam°. BM et defcribatur in eodem plano in quo eft circulus ABCD parabola FGH, cujus vertex fit punctum F axis FB et latus rectum aequale ipfi FB vel BM. Jungatur deinde EF, centroque E, radio EF defcribatur circuli circumferentia FG, quae ubi parabolam defcriptam proxime verticem fecabit in G, inde ducatur GKL parall. FD, et fecetur fphaera plano fecundum KL quod rectum fit ad planum ABCD.

dico portionem LAK effe ad portionem reliquam KCL ut CE ad EA. [4])

[1]) La pièce est empruntée aux pages 179—181 du manuscrit N°. 12, mentionné dans la note 1, T. XI, p, 7.
[2]) Voir la note 3, p. 3 du Tome présent.
[3]) On trouvera une autre solution du même problème dans la pièce N°. III, p. 16 du Tome présent.
[4]) Cette construction fut communiquée à Grégoire de St. Vincent le 24 janvier 1652; voir la

Quod autem circumferentia FG parabolam ſecabit inter verticis punctum F et punctum H in quo BH perpendicularis ad FB, occurrit parabolae, hoc inde manifeſtum fiet. Jungantur EH, HC. Quoniam igitur FB aequalis eſt lateri recto parabolae FGH, erit neceſſario etiam BH aequalis FB vel MC quare CH parallela et aequalis BM. Eſt autem quadr. EF aequale iſtis ſimul quadrato FM, hoc eſt quatuor quadr.is MH [5]) et qu.° ME. at qu. EH aequale eſt iſtis qu.is ex EC et CH, hoc eſt duobus qu.is MH [5]) una cum qu.° ME et duobus rectangulis EMC, ergo quia hinc duo rect.la EMC minora ſunt duobus iſtinc quadratis MH [5]), et reliqua utrinque communia, apparet quadr. EH minus eſſe qu.° EF; itaque punctum H intra circumferentiam cadet FG; ſed eadem circumf. FG ad verticem F neceſſario ingreſſa eſt parabolam FGH. ergo eandem hanc ſecabit inter puncta F et H: quod erat primò oſtendendum.

Fiat nunc ſicut CM at MN potentia, ita MN ad NO longitudine, [6]) ponaturque OQ aequalis duplae MN. Jungantur deinde MK, ML atque item EG, et ſit GP perpend. ad FB. Quia igitur aequales ſunt EF, EG aequalia quoque erunt earum quadrata. ergo quadrata FM et ME ſimul aequalia quadratis GN, NE. quadr.i autem FM exceſſus ſuper quadr. GN, aequatur duobus rectang.is PFM, hoc eſt, quatuor quadratis ex PG, minus qua.° PF. [7]) Sed quadratum EM deficit à qu.° EN duplo rectangulo EMN et qu.° MN. ergo cum hic defectus iſti exceſſus aequalis ſit neceſſariò [8]), erit duplum ▭ EMN una cum qu.° MN aequale quatuor qu.tis PG ſive 4 □is MN minus qu.° PF. et ablato utrinque qu.° MN, erit duplum ▭ EMN aequale tribus qu.is MN minus qu.° PF, ideoque qu. PF aequale exceſſui trium qu.orum MN ſuper duplo ▭° EMN. Quia autem ut FB, quae aequalis eſt lateri recto parabolae, ad PG, ita haec ad PF, erit quoque ut qu. FB ad qu. PG, ſive ut qu. CM ad qu. MN, hoc eſt ut MN linea ad NO, ita qu. PG. ad qu. PF, hoc eſt ad exceſſum trium qu.orum MN ſuper duplo ▭ EMN. ſed ut qu. PG ſeu qu. MN ad dictum exceſſum qui aequatur ▭° ſub MN et ſub eo quo tripla MN excedit

Lettre N°. 118 et la pièce N°. 119, p. 172 du T. I. Comme Huygens en fait la remarque dans sa lettre, Grégoire s'était occupé autrefois du même problème. En effet, aux pages 1021—1022 de son grand ouvrage, cité dans la note 6, p. 53, T. I, celui-ci, sans arriver à une solution proprement dite, avait montré qu'on pouvait réduire le problème à celui de couper un segment de parabole dans le rapport donné par une droite parallèle à l'axe de la parabole; ce qui d'ailleurs est très évident et n'avance guère la solution.

[5]) Lisez: MC.

[6]) C'est-à-dire $CM^2 : MN^2 = MN : NO$.

[7]) On a, en effet, $FM^2 - GN^2 = (FM - GN)(FM + GN) = PF\,(2\,FM - PF) = 2\,PF \times FM - PF^2 = 4\,BF \times FP - PF^2$; où $BF \times FP = PG^2$, puisque BF est le „latus rectum" de la parabole.

[8]) Huygens ajoute ici en marge „hoc melius paulo ante"; ce qui veut dire: de suite après la phrase „FM et ME simul aequalia quadratis GN, NE."

duplam EM, ita eſt MN ad id ipſum quo tripla MN excedit duplam EM; ergo quoque ut MN ad NO ita eadem MN ad 3MN minus 2EM. aequalis eſt igitur exceſſus triplae MN ſuper dupla EM ipſi NO ideoque tripla MN ablato NO, hoc eſt MQ (eſt enim OQ ex conſtr. aequalis duabus MN) aequabitur duplae EM.

Porro quoniam qu. CM. ſeu qu. KM eſt ad qu. MN ut MN linea ad NO, [9]) erit quoque per converſionem rationis qu. KM cui aequale qu MB, ad qu. KN ut MN ad MO. ſed ut qu. BM ad qu. KN, ita eſt circulus circa diametrum BD ad circulum circa KL diametrum. ergo conus baſin habens circulum circa BD et altitudinem MO aequalis eſt cono KML. [a] [10]) Eſt autem dimidia ſphaera BCD, cui aequalis conus baſin habens circulum circa BD et alitudinem AC, ad conum dictum baſin eundem habentem circulum circa BD, et altitudinem MO, ut AC ad MO: ergo dimidia sphaera BCD eſt quoque ad conum KML ut AC ad MO. Sed eadem dimidia ſphaera eſt ad partem ſolidi BKLD, quae remanet dempto cono KML, ut eadem AC ad OQ, (eſt enim dicta ſemiſphaera ad ſectorem ſolidum MKCL ſicut ſuperficies ſphaerica BCD ad ſuperficiem KCL [b] [11]), hoc eſt ut rectangulum ACM ad rectangulum ACN [c] [12]), ſive ut MC ad CN, ac proinde per converſionem rationis quoque ſemiſphaera BCD ad dictam partem ſolidi BKLD quae remanet dempto cono KML ut CM ad MN ſive ut AC ad duplam MN quae eſt OQ). Ergo ſemisphaera BCD erit ad totam partem ſolidam BKLD ut AC ad totam MQ, [d] [13]) quae aequalis duplae EM oſtenſa

[9]) Par construction.

[10]) *a*. 15. 12. Elem." [Huygens]. Voici cette „Prop. 15" du „Lib. 12" des „Elementa" d'Euclide dans l'édition de Clavius citée dans la note 6, p. 477, T. I: „Aequalium conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi sunt aequales." (Clavius, p. 480).

[11]) „*b* ultima lib. 1. Archim." [Huygens]. „Cuicunque portioni sphaerae aequatur conus ille, qui basim habeat aequalem superficiei sectionis sphaerae, quae secundum dictam portionem habeatur: altitudinem uero aequalem sphaerae semidiametro." Voir p. 40 de l'édition de Bâle citée p. 137 du T. I note 1 ou celle de Heiberg T. I, p. 181; citée p. 50 du T. XI, note 2.

[12]) „*c* 40. lib. 1. Archim." [Huygens]. „Superficies cuiuscunque portionis sphaerae, quae quidem portio sit dimidia sphaera minor, aequalis est circulo, cuius semidiametros aequatur lineae illi, quae à uertice portionis ad circumferentiam circuli ducta sit, qui circulus portionis est basis." (p. 39 de l'édition de Bâle, où elle se trouve, en effet, sous le numéro 40; chez Heiberg, page 177 du T. I, elle porte le numéro 42.)

[13]) *d* 24.5. Elem. potuere tamen melius rationes disponi." [Huygens]. Voir la note 28 de la page 312 du Tome XI. Pour appliquer la proposition, considérons les proportions suivantes:

conus KML : dimidia sphaera BCD = MO : AC

portio BKLD — conus KLM : dimidia sphaera BCD = OQ : AC;

ce qui amène par la proposition citée:

portio BKLD : dimidia sphaera BCD = MQ : AC;

fuit, [14]) hoc eſt, ut AM ad ME. Quare et per converſionem rationis, erit ſemiſphaera BCD ad portionem KCL ut MA ad AE. ideoque tota ſphaera ABCD ad dictam portionem KCL ut AC ad AE, et dividendo, portio KAL ad portionem KCL ut CE ad EA: quod erat demonſtrandum.

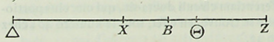
Idem problema compoſuit dionyſidorus ope parabolae ſimul et hijperboles. Diocles per ellipſis et hijperbolen. [15]) Ipſe vero Archimedes conſtructionem non dedit, [16]) niſi ea fortaſſis ipſius eſt quam Eutocius in vetuſto libro ſe reperiſſe teſtatur; [17]) quae ſimilis dionijſidori, nam per hijperbolam item et parabolam abſolvitur.

proportion identique avec celle du texte, à part l'ordre des termes que nous avons dû changer aussi dans les deux autres proportions pour pouvoir appliquer la proposition d'Euclide.

[14]) Voir la fin de l'alinéa précédent.

[15]) On rencontre ces solutions de Dionysidore et de Dioclès dans les Commentaires d'Eutocius sur l'ouvrage d'Archimède „De sphaera et cylindro"; voir les p. 37—42 de l'édition de Bâle. (Heiberg, p. 180—209 du T. III.)

[16]) La solution avait été réduite par Archimède à celle du problème suivant: „datis duabus lineis BΔ et BZ, quarum BΔ duplo maior est linea BZ, et puncto Θ in linea BZ, lineam ΔB in puncto X ita secare, ut fiat $B\Delta^2 : \Delta X^2 = XZ : Z\Theta$."



(Heiberg, T. I, p. 215; p. 46 de l'édition de Bâle). Posant $B\Delta = a$, $\Delta Z = b$, $Z\Theta = c$, $\Delta X = x$, ce problème se réduit à la solution de l'équation cubique $a^2 : x^2 = (b - x) : c$.

[17]) Le passage cité dans la note précédente est suivi par la phrase „quorum utrumque in fine et resoluetur et componetur." Toutefois cette résolution et composition manquent dans l'œuvre authentique d'Archimède. Or, Eutocius croit les avoir retrouvées dans un vieux manuscrit qu'il reproduit dans ses Commentaires (voir Heiberg, T. III, p. 152 — 179; p. 32 — 37 de l'édition de Bâle).

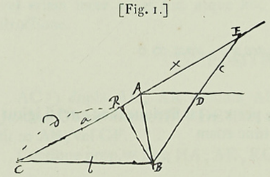
II. [1])

1652.

30 Jan. 1652.

Angulo poſitione dato et puncto extra ipſum lineam intra angulum accommodare datae longitudinis quae pertineat ad datum punctum. Et quomodo Nicomedes duas medias prop. invenerit ope Conchoidis. [2])

[Fig. 1.]



Sit datus angulus DAE, punctum B.

Sit BC parallela AD et productae EA occurrat in C. Sitque BR perp. in EC.

Sit AC ∞ a; CB ∞ b; DE ∞ c; CR ∞ d nam et haec data. AE ∞ x.

Fit EB $\frac{ac + cx}{x}$ detracto autem quadrato EB à ſumma quadratorum EC, CB, reliquoque diviſo per duplam CE, habebitur ſegmentum baſis CR.

[1]) La pièce est empruntée aux pages 182 et 183 du manuscrit N°. 12. Huygens y traite le problème de mener par un point donné une droite de telle manière que deux droites données par position en découpent un segment de longueur donnée. Il arrive à une équation biquadratique et montre ensuite comment, par la considération d'un cas particulier, on peut obtenir la construction de Nicomède, à l'aide de la conchoïde, des deux moyennes proportionnelles entre deux longueurs données.

[2]) On trouve cette construction de Nicomède avec sa démonstration par Pappus à deux reprises et sous des rédactions presque identiques au „Liber III, Prop. 5" et au „Liber IV, Prop. 24" des „Mathematicae Collectiones" de Pappus; voir dans l'édition de Hultsch (citée dans la note 17, p. 215 du Tome XI), T. I, pp. 58—63; 246—251 (pp. 5 verso — 6 recto;

$$\frac{aa + 2ax + xx + bb - \dfrac{aacc - 2accx - ccxx}{xx}}{2a + 2x} \infty\ d \text{ CR}$$

$$aa + 2ax + xx + bb - \frac{aacc - 2accx - ccxx}{xx} \infty\ 2ad + 2dx$$

$$\left.\begin{array}{lll} x^4 + 2ax^3 & + bb \\ \quad - 2d & + aa \\ & - cc \\ & - 2ad \end{array}\right\} xx \qquad - 2accx - aacc \infty\ 0$$

Hic animadvertit Nicomedes, [3]) fi $bb + aa$ effet $\infty\ cc + 2ad$ tunc tertium terminum evanefcere: tunc autem $\frac{bb + aa - cc}{2a} \infty\ d$. Sed ad hoc obtinendum oportet ut AB ponatur aequalis datae DE $\infty\ c$; tunc enim in Δ^o CBA erit fegmentum bafis CR $\infty\ \frac{bb + aa - cc}{2a}$.

Ablato fic tertio termino, ductoque $\frac{bb + aa - cc}{a}$ in x^3, loco $2d$, manet ipfi haec aequatio.

$$\left.\begin{array}{r} x^4 + ax^3 - bb \\ + \dfrac{cc}{a} \end{array}\right\} x^3 - 2acc\,x - aacc \infty\ 0$$

Hic vidit [4]) $2accx + aacc$ dividi poffe per $x + \frac{1}{2}a$ fierique tunc $2ac^2$ fi igitur id quod in x^3 ductum eft aequale effet $\frac{1}{2}a$, tunc etiam

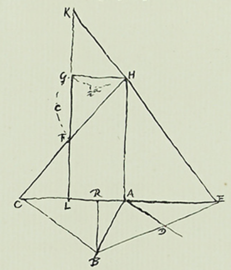
$$\left.\begin{array}{r} x^4 + aa \\ - bb \\ + \dfrac{cc}{a} \end{array}\right\} x^3 \text{ dividi poffet per } x + \tfrac{1}{2}a \text{ fieretque } x^3 \text{ quotiens.}$$

56 verso — 57 recto de l'ouvrage cité dans la note 3, p. 259 de notre T. II). On la retrouve encore dans les Commentaires d'Eutocius sur le „Liber II" de l'ouvrage d'Archimède. „De sphaera et cylindro"; voir les p. 26—27 de l'édition de Bâle (Heiberg, T. III, p. 122—127).

[3]) Bien entendu Huygens suppose que Nicomède soit arrivé par cette voie à sa construction. En effet, on n'en trouve rien aux lieux cités dans la note précédente, où Nicomède égale AB à DE par construction sans le motiver d'aucune façon.

[4]) D'après la supposition de Huygens.

[Fig. 2.]



fecit igitur $\frac{aa - bb + cc}{a} \infty\ \frac{1}{2}a$

$$aa - bb + cc \infty\ \tfrac{1}{2}aa$$

$$bb \infty\ \tfrac{1}{2}aa + cc$$

fed d erat $\infty\ \frac{bb + aa - cc}{2a}$ quod nunc erit $\frac{\frac{1}{2}aa + cc + aa - cc}{2a}$ five $\frac{3}{4}a$. ergo $d \infty\ \frac{3}{4}a$.

Ponendo igitur AB $\propto$ DE et CR $\infty\ \frac{3}{4}$ CA habet hanc aequationem.

$$x^4 + \tfrac{1}{2}ax^3 - 2accx - aacc \infty\ 0$$

dividendo per $x + \frac{1}{2}a$ fit $x^3 - 2acc \infty\ 0$

$$x^3 \infty\ 2acc$$

$$x \infty\ \sqrt{C.\,2acc}.$$

Eft autem $\sqrt{C.\,2acc}$ fecunda duarum mediarum proportionalium inter c et $2a$, vel etiam inter $2c$ et $\frac{1}{2}a$. atque hoc pofterius delegit Nicomedes in fua conftructione.

COMPOSITIO NICOMEDIS.

AC [5]) dupla AL, AR dimidia AL. RB perpend. LA. AB ∞ GF vel FL. Junctae CB parallela AD. BDE linea ope Conchoidis ducta ita ut intercepta DE fit ∞ AB, vel GF.

Continue prop.les funt HA, AE, KG, GH. [6])

[5]) Voir la figure 2, qui correspond exactement avec celles de Pappus et d'Eutocius aux lieux cités dans la note 2.

[6]) En effet, posant HA $= 2c$, GH $= \frac{1}{2}a$ (donc AB $= c$, AR $= \frac{1}{4}a$, CR $= \frac{3}{4}a$) on a d'après l'analyse qui précède : AE $= x$ (voir aussi la fig. 1) $= \sqrt[3]{2acc} = \sqrt[3]{(2c)^2 \times \frac{1}{2}a}$; ensuite KG $=$ HA $\times$ GH : AE $= \sqrt[3]{\frac{1}{2}a^2c} = \sqrt[3]{(2c) \times (\frac{1}{2}a)^2}$. Il est curieux de remarquer le rôle de la racine éliminée $x = -\frac{1}{2}a$. Elle correspond à une solution parasitaire qu'on obtient en tirant la droite BL. Ainsi le point L appartient à la seconde branche de la conchoïde.

III. [1])

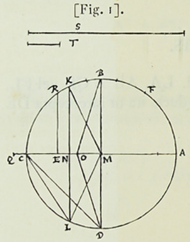
1652.

Ult. Jan. 1652.

Sphaeram in data ratione plano ſecare, [2]) *per triſectionem anguli* [3]).

Eſto ſphaera cujus centrum M, diameter CA. et data ſit proportio S majoris ad T minorem.

[Fig. 1].



Secetur ſphaera plano ſecundum AC diametrum eaque ſectio ſit circulus ABCD. Porro dividatur AC in E, ut ſit ſicut S ad T ita EA ad EC, et ſit ER perpendicularis ipſi AC. Sumatur autem arcui CR aequalis arcus AF, et ei quae ſubtendit tertiam partem arcus RF ponatur aequalis MN, quam manifeſtum eſt minorem fore quam ME. Denique per N punctum ducatur planum quod diametro AC ſit ad angulos rectos. Dico hoc ſphaeram ſic ſecare ut portio KAL eam habet rationem ad KCL portionem quam S ad T. [4])

Ducatur enim BMD parallela KL, et jungantur CD, CL et KM, ML. Ipſi vero EM ſit aequalis EQ, et duplae EN aequalis MO, et jungantur OB, OD.

---

[1]) La pièce se trouve aux pages 184—186 du manuscrit N°. 12.
[2]) Le problème est identique avec celui de la pièce N°. I.
[3]) On retrouvera la construction et la démonstration qui vont suivre, dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" de 1654 au „Problema I"; mais sous une rédaction assez différente et même avec des modifications dans la construction.
[4]) Une construction modifiée fut communiquée à Kinner à Löwenthurm dans une lettre du 9 août 1653 (p. 239 du T. I). Celui-ci en loua l'élégance et la simplicité dans ses lettres du

SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES.

AVIS.

MM. les Directeurs, Membres Nationaux et Membres Etrangers, qui désirent acquérir, au prix réduit de 7,50 florins de Hollande (16 francs, 12,50 RM, 12 sh. 6 d.) le Volume, les Tomes des

ŒUVRES COMPLÈTES DE CHRISTIAAN HUYGENS,

publiés avant leur élection sont priés de s'adresser au Secrétaire de la Société.

HAARLEM, avril 1908.