N° 2632.

G. W. Leibniz à Christiaan Huygens.

[novembre] 1690.

La lettre se trouve à Leiden, coll. Huygens.
Elle a été publiée par P. J. Uylenbroek [1]) *et par C. J. Gerhardt* [2]).
La lettre fait suite au No. 2627.
Chr. Huygens y répondit par le No. 2633.

Monsieur

Vous aures receu la lettre que je me ſuis donné l'honneur de vous écrire, et ou je reponds touchant les lignes que vous me propoſés à chercher par ma methode; et touchant la Ligne de la corde pendante. Je n'ay pas encore mis au net une lettre plus longue [3]), ou je mets mes penſées ſur le mouuement des planetes. Cependant vous l'aurés auſſitoſt que je pourray m'y attacher aſſez pour cet effect, et j'en eſpere alors voſtre jugement. Cependant je crois que par ce peu que j'auois dit de la chaine pendante, vous jugerés ſi je me ſuis rencontré avec vous ſans qu'il faille d'autre chiffre, et j'en eſpere des nouuelles quand voſtre commodité le permettra.

Il m'eſt venu dans l'eſprit cependant, que l'equation que j'auois donnée pour voſtre courbe, pourroit embaraſſer, n'eſtant pas aiſé de juger, ſi elle peut ſatiſfaire à voſtre demande, puiſqu'on n'a pas encor donné moyen de trouuer les tangentes par des equations où l'expoſant eſt inconnu. Et quoyque je n'aye pas encor communiqué à d'autres la methode dont je me ſers pour cet effect, je ne laiſſe pas de vous en envoyer icy un echantillon par le quel vous la connoiſtrés aſſés.

Soit donc x l'abſciſſe et y l'ordonnée de la courbe, et l'equation, comme je vous ay dit, $\frac{x^3y}{h} = b^{\frac{2xy}{\cdot}}$. Je deſigneray le logarithme de x par log. x, et nous aurons 3 log. x + log. y − log. $h = 2\,x\,y$, ſuppoſant que le log. de l'unité ſoit o, et le log. $b = 1$. Donc par la quadrature de l'hyperbole nous aurons $3\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dy}{y} -$ log. $h = 2xy$, dont l'equation differentielle ſera $\frac{3dx}{x} + \frac{dy}{y} = 2xdy + 2ydx$, ou bien $3ydx + xdy = 2xx\,ydy + 2xyydx$, et par conſequent dx ſera à dy, ou bien DB à y (ſelon la figure de la lettre precedente) comme $2xxy - x$ eſt à $3\,y - 2xyy$, c'eſt a dire DB ſera $\frac{2xxy - xaa}{3aa - 2xy}$ comme vous le demandiés, a eſtant l'unité.

---

1) Chr. Hugenii Exercitationes Mathematicae etc. Fasc. I, p. 36.
2) Leibnizens Mathematische Schriften, Bd. II, p. 53, et Briefwechsel, p. 604.
3) Il s'agit de la pièce N°. 2628, qui n'a jamais été envoyée à Huygens.

Je croy, Monſieur, que vous trouverés ce calcul nouveau, et de conſequence. L'analyſe Tranſcendente ſeroit portée à ſa perfection ſi on la pouuoit touſjours reduire à de telles equations. Les equations differentielles ſont un acheminement pour cet effect. J'ay beaucoup medité ſur ce qu'il y a à faire la deſſus, et ſi j'auois le loiſir neceſſaire, ou ſi quelque jeune mathematicien intelligent eſtoit proche de moy pour m'aſſiſter, je croy qu'on pourroit avancer cette ſcience bien au de là de l'eſtat où elle ſe trouve. Plût à Dieu, qu'on pût avancer en phyſique à proportion.

Que jugés vous, Monſieur, de l'explication du flus et reflus de Mons. Newton [4])? et vous paroiſt il raiſonnable, que les queues des cometes ſoyent une matiere effective, pouſſée hors de la comete à des diſtances immenſes, et qui ne laiſſe pas de ſuivre ſon mouuement [5])? Je les aurois plus toſt pris pour un effect optique.

Un Écoſſois qui eſtoit en Hollande, nommé Mr. Stear [6]) dit dans ſa phyſiologie d'auoir experimenté que les corps pouſſés dans le vuide d'air ne vont pas fort loin; j'ay de la peine à le croire. N'a-t-on rien decouuert ſur les loix de la variation de l'eguille aimantée? Je m'imagine, Monſieur, que vous aurés medité la deſſus, auſſi bien que ſur beaucoup d'autres matieres de phyſique, et je vous ſupplie de me faire quelques fois part de vos lumieres, quand même ce ne ſeroient que des conjectures, puiſque vos conjectures mêmes valent mieux que les demonſtrations de bien des gens. C'eſt à cet effect que je vous ay demandé vos ſentimens dans cette lettre, auſſi bien que dans la precedente, ſur certains points, et j'eſpere que vous me connoiſſés aſſez, pour ne vous pas defier de ma ſincérité.

Conſiderant [7]) ce que j'ay dit de la reſiſtance du milieu dans les Actes de Leipzig,

---

4) Voir les prop. XXIV, XXXVI et XXXVII du Livre III des Principia.
5) Voir la prop. XLI du livre III des Principia.
6) Il s'agit de D. de Stair et de son ouvrage:
Physiologia nova Experimentalis Auctore D. de Stair, Carolo II Britanniarum Regi a Consiliis Juris & Status, nuper Latinitate donata. Lugduni Batavorum apud Cornelium Boutesteyn, 1686, in-4°.
7) Pour faciliter l'intelligence de ce qui va suivre nous croyons utile de citer ici les passages suivants, qui se trouvent aux pages 173, 174 et 175 du Discours sur la cause de la pesanteur et auxquels les remarques de Leibniz se rapportent:
„En examinant ce qui arrive dans la vraye hypothese de la Resistance, qui est en raison double de la Vitesse, j'avois seulement determiné ce cas particulier d'un corps jetté en haut avec sa vitesse Terminale"... „Je n'avois point recherché les autres cas, qui sont compris universellement dans la prop. 9, du 2 Livre de Mr. Newton, qui est tres belle: & ce qui m'en empêcha, ce fut que je ne trouvois point, par la voie que je suivois, la mesure des descentes des corps, si non en supposant la quadrature de certaine Ligne courbe, que je ne sçavois pas qu'elle dependoit de la quadrature de l'Hyperbole. Je reduisis la dimension de l'espace de cette courbe, à une Progression infinie, $a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5 + \frac{1}{7}a^7$ &c. Ne sçachant pas que la mesme proportion donnoit aussi la mesure du secteur Hyperbolique: ce que j'ay vu depuis, en comparant la demonstration de Mr. Newton avec ce que j'avais trouvé. Mais par ce que cette Progression

Fevrier 1689[8]), vous trouverés, Monſieur, article 5. n. 3[9]) qu'encor chez moy (les elemens des temps eſtant pris egaux, condition que vous et Mr. Newton avés diſſimulée) les reſiſtences ſont comme les quarrés des viſteſſes, et par le nombre 4 et 6 de cet article[10]), il s'enſuit auſſi que la ſomme $a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5$ etc., ſe reduit a la quadrature de l'hyperbole[11]). Dans l'ouurage que j'avois compoſé autres fois ſur la quadrature Arithmetique[12]), je trouue cette propoſition generale: Sector comprehenſus arcu ſectionis Conicae a vertice incipiente et rectis ex centro ad ejus extrema ductis, aequatur rectangulo ſub ſemilatere tranſverſo et recta $t \pm \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7$ etc. poſito t eſſe portionem tangentis in vertice, inter verticem et tangentem[a]) alterius extremi interceptam, et rectangulum ſub dimidiis lateribus recto et tranſverſo (id eſt quadratum a ſemiaxe tranſverſo) eſſe unitatem. Eſt autem $\pm$ in hyperbola $+$ in Ellipſe vel circulo $-$.

pour la mesure de l'Hyperbole, n'a pas encore esté remarquée que je scache, je veux expliquer icy comment elle y sert".... „De sorte que cette Progression pour l'Hyperbole, respond à celle qu'a donné Mr. Leibnits pour le Cercle."

8) Lisez: Janvier. Il s'agit de l'article cité dans la Lettre N°. 2561, note 6.

9) Allusion à la phrase suivante: „Nam ex prop. 1 (hic) sequitur resistentias esse in composita ratione elementorum temporis et quadratorum velocitatum". De cette phrase on pouvait inférer en effet que dans l'Article 5 il s'agit du cas d'une résistance proportionelle au *carré* de la vitesse; mais la suscription de l'article lui-même: „Si motus a gravitate acceleratus a medio uniformi retardetur proportione velocitatis" était bien propre à induire en erreur. Dans la suite de la correspondance on verra d'ailleurs les raisons pour lesquelles Leibniz avait donné à l'article ce titre singulier.

10) Ces numéros contiennent la solution de Leibniz du problème de la chute d'un corps grave sous l'influence d'une résistance proportionelle au carré de la vitesse. Comme ils reviendront plusieurs fois dans la correspondance qui va suivre, nous croyons utile de reproduire ici les résultats énoncés dans la forme que Leibniz leur a donnée, accompagnés d'une traduction algébrique que nous y avons ajoutée. Les voici:

4. „*Si rationes inter summam et differentiam velocitatis maximae et minoris assumtae, sunt ut numeri; tempora quibus assumtae velocitates sunt acquisitae, erunt ut Logarithmi*"

($t : t' = l\,\frac{a+v}{a-v} : l\,\frac{a+v'}{a-v'}$, où a représente la vitesse terminale et où les temps sont comptés depuis le commencement de la chute).

6. „*Si velocitates acquisitae sunt ut sinus, erunt spatia percursa ut Logarithmi sinuum complimenti posito radium seu sinum totum esse ut velocitatem maximam.*"

$$\left(s : s' = l\sqrt{1-\frac{v^2}{a^2}} : l\sqrt{1-\frac{v'^2}{a^2}}\right)$$

11) Comme on sait, la réduction aux logarithmes implique celle à la quadrature de l'hyperbole et comme Huygens avait réduit le problème à la sommation de la série citée et Leibniz aux logarithmes, il s'ensuivit que cette sommation elle-même était réduisible à la quadrature de l'hyperbole.

12) Voir la Lettre N°. 2192, note 6.

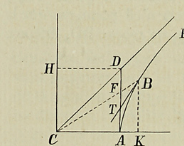
Quelqu'un m'a dit qu'on ſcait en Hollande la carte de l'Aſie Septentrionale, et ſi l'Amerique en eſt diviſée par la mer. Si vous en ſcavés quelque choſe, je vous ſupplie de m'en dire un mot. Voila à quoy votre bonté et voſtre ſcauoir vous expoſent. Mais il eſt touſjours bon d'eſtre riche au hazard d'eſtre importuné par des pauvres. Je ſuis avec zele

Monsieur

Voſtre treſhumble et treſobeiſſant ſeruiteur
Leibniz.

a) Secantem [Chriſtiaan Huygens][13]).

13) Cette correction a pour but de rapprocher le théorème énoncé ici par Leibniz à la quadrature de l'hyperbole, telle qu'elle avait été trouvée par Huygens et décrite aux pages 174 et 175 du „Discours de la pesanteur"; mais elle repose sur un malentendu. En effet, ces deux quadratures, celle de Huygens et celle de Leibniz telle qu'elle est formulée ici, sont exactes toutes les deux, mais *différentes*, quoiqu'elles dépendent de la sommation de la même série. Pour le montrer nous allons les déduire au moyen des méthodes modernes.



Posant dans la figure ci-jointe, qui représente une hyperbole ABE avec son asymptote CD, CA $= a$, CH $= b$, CB $= r$, $\angle$ BCA $= \varphi$, nous partons de l'équation polaire:

$$r^2 = \frac{a^2 \sec^2 \varphi}{1 - \frac{a^2}{b^2} tg^2 \varphi}.$$

Elle nous donne immédiatement pour l'aire du secteur hyperbolique CABFC:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\varphi} \frac{a^2 \sec^2 \varphi \, d\varphi}{1-\frac{a^2}{b^2}tg^2\varphi} = \frac{1}{2}a^2 \int_0^{\varphi}\left(1 + \frac{a^2}{b^2}tg^2\varphi + \frac{a^4}{b^4}tg^4\varphi + \ldots\right) dtg\,\varphi =$$

$$\frac{1}{2}a^2\left(tg\varphi + \frac{1}{3}\frac{a^2}{b^2}tg^3\varphi + \frac{1}{5}\frac{a^4}{b^4}tg^5\varphi + \ldots\right), \text{ où } tg\varphi = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{CA}}.$$

Dans le cas de l'hyperbole équilatère, le seul dont Huygens s'occupe, ce résultat s'identifie avec celui de la page 174 du „Discours de la pesanteur".

Maintenant pour obtenir le résultat de Leibniz, posons AK $= x$, BK $= y$; donc $y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$. Alors on trouve facilement AT $= t = \frac{b^2 x}{ay}$, d'où il suit successivement: $x = \frac{2at^2}{b^2-t^2}$; CK $= a + x = \frac{a(b^2+t^2)}{b^2-t^2}$; BK $= y = \frac{2b^2 t}{b^2-t^2}$; $tg\,\varphi = \frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{CK}} =$

N° 2633.

Christiaan Huygens à G. W. Leibniz.

18 novembre 1690.

La lettre se trouve à Hannover, Bibliothèque royale.
La minute se trouve à Leiden, coll. Huygens.
La lettre a été publiée par C. J. Gerhardt [1]).
La minute a été publiée par P. J. Uylenbrock [2]).
La lettre est la réponse aux Nos. 2627 et 2632.
Leibniz y répondit par le No. 2636.

Le 18 Novembre 1690.

Monsieur

Je repons à deux de vos lettres, par la premiere des quelles j'ay eſtè bien aiſe d'apprendre, que le paquet, ou eſtoit mon Traitè de la Lumiere, s'eſt enfin trouvè et je vois dans l'autre et que vous avez commencè d'en examiner le contenu, à quoy je vous prie de continuer, vous aſſurant que je recevray avec joye non ſeulement voſtre approbation mais auſſi vos objeɛtions. Je ne vous avois pas envoiè les deux queſtions des lignes courbes pour vous donner de la peine en cherchant les ſolutions, mais croiant que vous auriez une methode preſte pour trouver les courbes par la proprietè de leur Tangentes, ou pour determiner quand cela ſe peut ou non. Je commence à croire maintenant que cela n'eſt point, puiſque la courbe, dans laquelle AB eſtant x et ſa perpend. BC y, on trouve BD, diſtance

$$\frac{2b^2t}{a(b^2+t^2)};\ sec^2\ \varphi\ d\varphi=\frac{2b^2(b^2-t^2)}{a(b^2+t^2)^2}dt;\ 1-\frac{a^2}{b^2}tg^2\ \varphi=\left(\frac{b^2-t^2}{b^2+t^2}\right)^2.$$

On a donc encore:

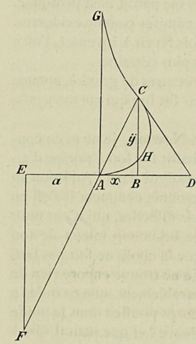
$$\text{Secteur hyperbolique CABFC}=\tfrac{1}{2}\int_0^{\varphi}\frac{a^2\,sec^2\,\varphi.d\varphi}{1-\frac{a^2}{b^2}tg^2\,\varphi}=ab^2\int_0^{t}\frac{dt}{b^2-t^2}=$$

$$=a\left(t+\frac{t^3}{3b^2}+\frac{t^5}{5b^4}+\ldots\right).$$

Identifiant alors, comme Leibniz le fait, le „semi-axis traversus" b avec l'unité, on retrouve le résultat énoncé par lui dans le texte de la lettre. Une démonstration de Leibniz de ce théorème a été publiée d'ailleurs par Gerhardt; voir le „Compendium quadraturae arithmeticae" (Leibnizens mathematische Schriften, Band V) à la page 109.

[1]) Leibnizens Mathematische Schriften, Bd. II, p. 59, et Briefwechsel p. 613.
[2]) Chr. Hugenii Exercitationes Mathematicae, etc. Fasc. I, p. 39.

du concours de la tangente égale à $\frac{2xxy-aax}{3aa-2xy}$; cette courbe, dis-je, à pour equation qui exprime ſa nature, $x^3+xyy \infty aay$ [3]). Car par la regle des Tangentes,



BD ſe trouve premierement $\infty \frac{2xyy-aay}{yy+3xx}$, et ſi pour xx on y ſubſtitue ſa valeur $\frac{aay}{x}-yy$, on aura $\frac{2xxy-aax}{3aa-2xy}$. J'ay fabriquè cette ligne [4]) en mettant AE ∞ a, EF perpendiculaire à BAE, et en faiſant que dans la droite FAC, le quarré de AC ſoit égal au reɛtangle de AE, EF; car alors C eſt un point dans la courbe ACH, qui a ſon aſymptote AG perpendic. à AB. Elle n'eſt donc point de ces Tranſcendantes, comme voſtre équation l'a faite. Et vous examinerez s'il vous plait, comment peut ſubſiſter la demonſtration que vous en donnez dans voſtre derniere. Pour moy, j'avoue que la nature de cette ſorte de lignes ſupertranſcendentes, où les inconnues entrent dans l'Expoſant, me paroit ſi obſcure, que je ne ſerois pas d'avis de les introduire dans la geometrie, à moins que vous n'y remarquiez quelque notable utilitè.

De ce que vous me mandez touchant vos ſpeculations ſur la ligne de la chaine pendante, qu'on peut nommer *Catenaria*, ſcavoir que certaines choſes données, vous en determinez les Tangentes, la dimenſion de la courbe, la ſurface du ſolide de ſa rotation, et la dimenſion de l'eſpace compris de la courbe et de l'axe (vous ne dites pas de quelle ligne encore, car ces deux ne comprennent point d'eſpace) je croirois certainement que nous aurions trouvè les meſmes choſes; car tout cela eſt dans le chifre que je vous ay envoiè; ſi ce n'eſtoit cette difference dans nos equations d'une courbe auxiliaire, ou j'ay $xxyy \infty a^4-aayy$, au lieu que vous avez $xxyy \infty a^4+aayy$. Cela me paroit etrange, et s'il n'y a point d'abus dans voſtre calcul, il faut que vous ayez ſuivi quelqu'autre chemin que moy par lequel peut eſtre vous ſerez allè plus avant. C'eſt pourquoy je vous prie de m'envoier voſtre chifre, où les grandeurs ſoient determinées comme dans le mien, afin de voir ſi nous differons en quelque choſe. Je trouve qu'au lieu de ma courbe, que je

[3]) Voir la Lettre N°. 2627, note 6.
[4]) Voir l'Appendice N°. 2612 au § II.

viens de marquer, je puis fubftituer cette autre $xxyy \propto 4a^4 - x^4$ 5), mais non pas la voftre. Il y a une faute à mon chifre que vous aurez la bontè de corriger en mettant $\frac{1}{6}$ *ec* où j'avois ecrit $\frac{2}{3}$ *ec*.

Voftre meditation pour les Tangentes par les foyers me paroit bien profonde. Elle fuppofe pourtant des chofes qui ne peuvent eftre admifes comme evidentes. Et quoyque des tels raifonnemens puiffent quelque fois fervir à inventer, l'on a befoin enfuite d'autres moiens pour des demonftrations plus certaines.

J'eus quelque part à la regle de Mr. Fatio 6) pour les centres de gravitè, comme il l'a avouè luy mefme dans les Journaux 7). Mais ce fut luy qui me montra le premier la faute de Mr. D. T.

Pour ce qui eft de la Caufe du Reflus que donne Mr. Newton, je ne m'en contente nullement, ni de toutes fes autres Theories qu'il baftit fur fon Principe d'attraction, qui me paroit abfurde, ainfi que je l'ay defia temoignè dans l'Addition au Difcours de la Pefanteur 8). Et je me fuis fouvent etonnè, comment il s'eft pu donner la peine de faire tant de recherches et de calculs difficiles, qui n'ont pour fondement que ce mefme principe. Je m'accommode beaucoup mieux de fon Explication des Cometes et de leur queues; et quoyque la chofe ne foit pas fans cette grande difficultè, que vous remarquez fort bien, je ne trouve encore rien de meilleur que ce qu'il en dit, qui vaut mieux incomparablement, que ce qu'en a imaginè des Cartes 9). Mr. Stair a tort, s'il dit que les corps pouffez dans le vuide ne vont guere loin. Où eft ce qu'il en a fait l'expérience? et que peut il dire à celle, que moy et d'autres ont faite, de la plume qui tombe dans un tuyau de verre vuide d'air auffi vifte que du plomb.

J'ay quelques meditations fur l'Aimant 10); mais la raifon de la Variation de

5) Consultez l'Appendice N°. 2634 de cette Lettre, au § II.
6) Voir la pièce N°. 2460, note 2.
7) Voir la Lettre N°. 2467, note 2.
8) Voir la Lettre N°. 2558, note 6.
9) Voir la troisième partie des Principes de la Philosophie, aux articles 136—138.
10) D'après Duhamel, Historia Academiae, 2e éd., p. 184, Huygens a, déjà en 1679, entretenu l'Académie des Sciences à Paris, de ses recherches sur l'aimant. Selon les Registres de l'Academie, ce fut le 1er juin qu'on lut à l'Académie „le reste du Traitè de l'Aimant de M. Huguens dont la Copie est à la fin des Registres de Physique". Duhamel dit: „Tractatus ille in Commentarios Academiae relatus est, atque id è re litteraria fuisset, ut vir Clariss. ultimam ei manum imponere & publici juris eum facere dignatus esset: sed cum haec scribimus, eum morte sublatum accepimus".

La copie du mémoire de Huygens intitulé: „Dernière manière pour expliquer les effets de l'aimant", tel qu'il a été envoyé a Duhamel, se trouve dans la collection Huygens de la Bibliothèque de Leiden. C'est une pièce inachevée, ce qui malheureusement a empêché que le mémoire de Huygens, qui contient des vues originales, ne fût publié par de Volder et Fullenius.

l'Eguille m'eft inconnue, qui ne fuit pas des loix certaines que je fcache, quoy qu'il y en a qui en ont voulu etablir. Je trouve les effets de l'Ambre encore plus difficiles à expliquer que ceux de l'Aimant, principalement à l'égard de quelques nouveaux phenomenes, que j'ay trouuez, il n'y a guere par mes experiences.

J'ay regardè ce que vous avez donnè dans les Acta de Leipfich, en Janv. 1689, art. 5 n. 3, ou je ne puis pas dire que je trouve que vous ayez confiderè les refiftences du milieu qui foient comme les quarrez des vifteffes, tout voftre raifonnement dans cette matiere m'eftant obfcur et inintelligible. Je vois au contraire qu'à la tefte de cet article 5e, vous fuppofez *motum retardatum proportione velocitatis*, et non pas *duplicata proportione velocitatis*. Auffi ces Elemens egaux des temps, que vous croiez que Mr. Newton et moy avons diffimulez, n'ont rien à faire, à mon avis, avec les refiftences, puis qu'elles dependent uniquement des viteffes des corps. Vous me pardonnerez auffi, fi aux nombres 4 et 6 de ce mefme article je ne trouve rien, d'où je puiffe entrevoir la quadrature de l'hyperbole par la progreffion $a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5$ etc., puis qu'il n'y eft pas dit un mot ni de progreffion, ni d'hyperbole 11). Je vous affure que je n'ay pas pris cette progreffion de là, et que je n'ay point fceu non plus que vous euffiez la Propofition generale qui comprend le cercle et l'hyperbole, qu'apres l'avoir appris dans voftre derniere lettre. Vous deviez bien l'avoir publiée en fuite de voftre premiere quadrature du cercle 12).

Ce qu'on vous aura dit de la carte de l'Afie Septentrionale, n'eft pas fans fondement, M. Witfen, Bourguem. d'Amfterdam, eftant fur le point de donner au public celle qu'il en a faite avec bien de la peine et de la depenfe; a quoy mefme il fe trouve preffè parce qu'on dit qu'une autre perfonne en promet une pareille. J'ay vu, il y a plus d'un an, la carte de Mr. Witfen, mais elle n'avoit rien de certain touchant la contiguité de l'Afie et de l'Amerique.

Je n'ay plus à me plaindre de Mrs. de Leipfich 13), ayant vu le raport exact qu'ils ont donnè 14) de mon traitè de la lumiere avec des eloges plus grands que je ne merite.

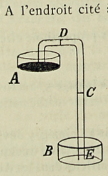
11) Voir la Lettre N°. 2632, note 11.
12) Voir l'article des „Acta eruditorum" de février 1682, intitulé „De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus."
13) Voir la Lettre N°. 2623, note 12.
14) Ce rapport était probablement de la main de Pfautz. On lit, en effet, à la page 57 recto du livre G des Adversaria, l'annotation suivante de Huygens: „D. Pfauts vocatur mathematicus Lipsiensis qui hanc partem actorum eruditorum scribit".

Christoffel Pfautz, né le 11 octobre 1645 à Leipheim près d'Ulm, étudia à Leipzig, y devint professeur de mathématique et bibliothécaire. Il mourut le 2 août 1722 et laissa quelques ouvrages sur les éclipses, la parallaxe etc. Il fut l'auteur de plusieurs articles dans les Acta Eruditorum.

Je m'eſtonne de ne recevoir aucunes nouvelles de Mr. Spener, qui avoit promis qu'il m'eſcriroit. Il eſt vray qu'il doit eſtre bien occupè à tenir ce college du quel il m'a laiſſè un projet imprimè. Je ne ſcay s'il vous a debitè une experience avec du mercure attirè par un ſiphon, que je ne pus croire et que j'ay auſſi trouvée fauſſe et Mr. de Volder de meſme [15]).

Pour ce qui eſt de mes etudes, dont vous demandez des nouvelles, je taſche de mettre en eſtat de paroiſtre au jour divers traitez, où la forme manque plus que la matiere, mais je ne puis pas travailler avec aſſiduitè ſans incommoder ma ſantè. Je ne crois pas que nous devions rien attendre de Mr. Hudde, quoy que je ne laiſſe pas de l'en preſſer quand je le vois. Mr. Arnaut eſt en ce pais, ou fort peu loin. C'eſt une merveille que cet eſprit, qui ne ſe ſent pas de la vieilleſſe. J'attens voſtre lettre ſur le mouvement des planetes [16]), et ſuis etc.

[15]) A l'endroit cité à la fin de la note 3 de la Lettre N°. 2623, l'expérience de Spener se trouve décrite comme il suit: „Sypho primum aqua repletur, tum crus exiguum in vasculum A mergitur in quo argentum vivum. longitudo siphonis est 3 pedum aut amplius. Statim aqua delabitur in vas B et sequitur hydrargyrus, at quam primum tubi os inferius hydrargyro circumfusum est, vacua fit tubi pars CD, ita ut CE sit altitudo 28 poll. qualis in Torricelli experimento. quod mirabile videtur, quid enim impedit quin aeris pondus pellat hydrargyrum ex A per D."



Huygens ajoute les mots: „Experire. non successit".

[16]) Voir la pièce N°. 2628, qui n'a jamais été envoyée.

N°. 2634.

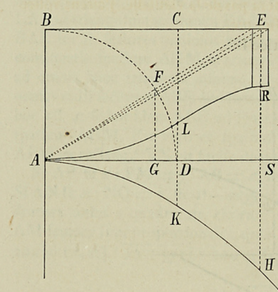
Christiaan Huygens.

[octobre ou novembre 1690].

Appendice [1]) *au No.* 2633.

La pièce se trouve à Leiden, coll. Huygens.

§ I.



AKH hyperbola aequilatera, centro B, ſemi axe BA. BE perp. AB. ut et AS. HE parall. AB. Proportionales ſunt HE, SE, RE. Item KC, DC, LC, et ita ubique. et curva ALR [2]). [Jam ſi ſit in fig. pag. 14^a, ut WX ad XS, ita hic BE ad BA. Erit ibi longitudo catenae VSPA ad rectam AZ, ſicut hic ▭ BS ad ſpatium ALREB] [3]).

Triangulum minimum FA eſt ad ▭ minimum ER in ratione compoſita ex △° FA ad △° EA et ex △° EA ad ▭ ER. Hoc eſt in rat. compos. ex rat. qu. AF, ad qu. AE et rat^e SE ad 2RE. Eſt autem RE = FG ſinui compl.^i anguli EAB, quia HE = AE et quia prop.^les HE, SE, RE ut et AE, ES, FG.

[1]) Nous reproduisons dans cette pièce la réduction de la quadrature de la courbe $x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$ à celle de la courbe $x^2y^2 = 4a^4 - x^4$, dont il est question dans la lettre précédente. Nous l'avons divisée en deux paragraphes, dont le premier, que nous avons emprunté à la page 59 verso du livre G des Adversaria, contient la réduction de la quadrature de la première courbe à une somme infinie de sécantes, et le second, qui se trouve à la page 69 recto du même livre, celle de cette somme à la quadrature de la courbe $x^2y^2 = 4a^4 - x^4$. Ajoutons que la réduction à une somme de sécantes a été mentionnée par Huygens dans son article sur la chaînette dans les Acta eruditorum de Juin 1691.

[2]) Posant $BA = a$, $BE = x$, $ER = y$, on a donc: $\sqrt{a^2 + x^2} : a = a : y$, c'est-à-dire: $x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$. ALR représente donc la première courbe de la note précédente.

[3]) Les phrases que nous avons mises entre parenthèses ne sont pas nécessaires à la démonstration qui va suivre. Toutefois, nous n'avons pas voulu les omettre. Elles ne contiennent au fond qu'une répétition d'une partie des §§ VII et VIII de la pièce N°. 2625. En effet, la figure pag. 14 (= 58 recto, le numéro 14 se rapporte à une pagination partielle du livre G

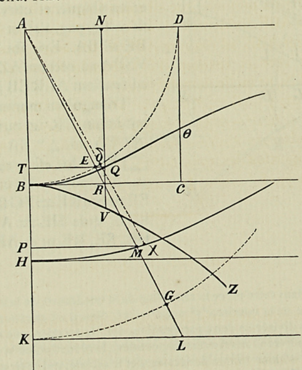
Dicatur AF, r. AE, s; FG ſeu RE, c. Ergo ratio triang.^{i} ſeu ſectoris minimi AF ad ▭ ER componitur ex rr ad ss
et r ad $2c$

ergo quam rrr ad $2css$
ſeu, quia r ad s ut c ad r quam crr ad $2csr$
ſeu quam r ad $2s$

adeoque ſector totus FAB ad ſpatium ERLABE ſicut radius multiplex per numerum integrorum omnium graduum arcu FB contentorum ad duplam ſummam omnium ſecantium graduum integrorum uſque ad ſecantem AE incluſive [4]).

§ II.

BVZ eſt hyperb. aequilatera centr. A vertice B.
AD et BC perpend. AB.



faite par Huygens lui-même) est celle que nous avons reproduite au § II de la pièce N°. 2625, et la courbe ALR de la figure de la présente pièce N°. 2634 est identique avec la courbe $\alpha\Theta$ de la figure du § VII de la pièce N°. 2625.

4) En langage moderne, posant AB $= a$, BAF $= \varphi$:

$$\tfrac{1}{2}a^2\varphi : \text{aire ERL ABE} = \varphi : 2\int_0^{\varphi} \sec\varphi\, d\varphi.$$

c'est-à-dire:

VN, RN, QN proportionales, et ſic ubique. Curva eſt BQθ [5]) per puncta ſic inventa.

BD quadrans peripheriae centro A. Eam ſecat RA in E. ET perp. AB.

Jam eſt AT $=$ NQ et TEQ recta linea [6]).

Oſtenſum eſt pag. 17^{a} in fine [7]), ſectorem ABE eſſe ad ſpatium ABQN ſicut radii omnes ſectoris ABE, arcum BE in particulas aequales dividentes, ad duplam ſummam omnium ſecantium, arcubus aequaliter per iſtas particulas creſcentibus convenientium.

Sicut autem ſecans earum quaevis dupla ut LA (poſita nempe AK $=$ 2AB et KL perp.^{i} AK) ad radium EA, ita triangulum minimum MAX (ſumpta MA media prop.^{i} inter LA, EA, vel inter GA, RA; quia GA dupla EA, et RA dimidia LA) ad triangulum minimum EAδ, ſeu ſectorem minimum. Ideoque ſi totus ſector BAE ita in ſectores minimos aequales diviſus intelligatur et ſimul eorum radiis continuatis ſpatium AHM in triangulos minimos. Erit omnes iſti ſectores minimi ad omnia haec triangula minima, hoc eſt totus ſector ABE ad ſpatium AHM, ut omnes radii ſectorem ABE dividentes ad omnes duplas ſecantes ipſis convenientes, hoc eſt ut ſector idem ABE ad ſpatium ABQN. Ideoque ſpatio huic aequale erit ſpatium AHM. Fit vero et ſpatium BTQ aequale ſpatio HPM, quia triang. APM $=$ rectang.° TN, ut facile demonſtratur.

Si AP ſit x : PM $= y$. AB $= a$, ſit $4a^4 - x^4 = xxyy$ [8]) aequatio curvae HM. Si AN ſit x : NQ $= y$, ſit $a^4 - aayy = xxyy$, aequatio curvae BQθ, quarum quadratura unius a quadratura alterius pendet. AH med. prop. AK, AB. AP, AH, AM ſemper ſunt proportionales. quia $4a^4 = xxyy + x^4$, unde $xx + yy$ ad $2aa$ ut $2aa$ ad xx, et $\sqrt{xx+yy} : \sqrt{2aa}$ ut $\sqrt{2aa} : x$, hoc eſt MA ad HA ut haec ad AP.

$$\text{aire ERL ABE} = a^2 \int_0^{\varphi} \sec\varphi d\varphi,$$

résultat que l'on vérifie aisément en substituant $x = a\,tg\varphi$ dans l'intégrale $\int_0^x \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$, qui représente l'aire de la courbe $x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$.

5) Cette courbe est donc identique avec la courbe ALR de la figure précédente et de même avec la courbe $\alpha\psi\Theta$ de la figure du § VII de la pièce N°. 2625.

6) Cela résulte de la construction de la courbe $\alpha\psi\Theta$, telle qu'elle est décrite au § VIII de la pièce N°. 2625.

7) Il s'agit du paragraphe précédent de cette pièce.

8) On a, en effet, par construction MA$^2 = a$ LA; mais LA : AK $=$ MA : x, donc LA $= \frac{2a.\text{MA}}{x}$, d'où il résulte MA $= \sqrt{x^2+y^2} = \frac{2a^2}{x}$, ou bien $4a^4 - x^4 = x^2y^2$.

N° 2635.

CONSTANTYN HUYGENS frère, à CHRISTIAAN HUYGENS.

21 NOVEMBRE 1690.

La lettre et la copie se trouvent à Leiden, coll. Huygens.
La lettre est la réponse au No. 2631.

Kinſington ce 21e Novembre 1690.

J'ay receu la voſtre du [?] [1]) de ce mois, et vous envoye cy jointes quatres lettres de recommandation pour ſervir a noſtre proces. Une a Monsr. de Ripperda [2]) Preſident de la Cour de Gueldre, la ſeconde a Mr. van Eſſen [3]) Frere du Droſſart [4]) du Veluw qui eſt fort de mes amis, la troiſieme a Mr. Verbolt [5]) qui m'a depuis peu fait aſſeurer de ſon ſervice, et la derniere a Mr. de Rooſendael [6]) conſeiller de la Cour, et comme je croy bien intentionné pour nous. Je n'ay pu recommander noſtre affaire qu'en de termes generaux, par ce que je ne me ſouviens pas fort bien de ce qui en fait la ſubſtance.

Il faut louer Dieu de ce que le malheur de Voorhout n'a pas eſté plus grand, comme il l'auroit aſſeurement eſté s'il y euſt eu une plus grande quantité de poudre.

Pour Monſieur Juſtel il m'a eſté voir une fois, il y a deſja du temps, et un peu de temps apres luy ayant rendu viſite, il n'eſt pas revenu et ne l'ay pas reveu depuis ce temps la.

Il y a trois ou quatre jours qu'un certain virtuoſo m'eſt venu voir ſur l'avis de Mylord Sidney [7]). Il s'appelle Mr. Write [8]), a eſté pluſieurs fois et ſouvent

1) Constantyn Huygens n'a pas indiqué la date. Il s'agit évidemment de la Lettre N°. 2631.
2) Georg Ripperda, seigneur de Verwolde. Il étudia, en 1648, à l'Académie de Harderwijk, dont plus tard il fut un des curateurs. Il fut nommé juge à Doesburg en 1659, conseiller de la Cour de Gueldre en 1660, puis Président, et mourut en 1702.
3) Johan van Essen, bourgmestre de Zutphen, membre de la chambre des comptes, député de Gueldre aux Etats Généraux. Willem III le nomma Conseiller privé et maître des Requêtes. En 1700 il fut nommé curateur de l'Académie de Gueldre (Harderwijk). Il mourut en 1724.
4) Lucas Willem van Essen tot Helbergen, né en 1644. Il épousa, en 1678, Geertruid Agnes Vijgh, fut admis dans la chevalerie de Veluwe le 12 mai 1680, et succéda en cette année à son père comme landdrost de la Veluwe. Il fut page du roi Willem III et mourut en 1701.
5) François Verbolt. Le 20 février 1675 il fut nommé conseiller, et le 22 février 1675 échevin de Nijmegen.
6) Johan van Arnhem tot Harsseloe, fils de Gerrit van Arnhem et de Theodora van Wassenaar van Duyvenvoorde, né en 1636, devenu, par son mariage avec sa cousine, Janna Margaretha van Arnhem, seigneur de Roosendaal. Il fut nommé conseiller extraordinaire à la Cour de Gueldre en 1684, et mourut en 1716.
7) Henri Sidney, né à Paris. Dès 1679 il prit part aux menées politiques tendant à remplacer James II par Willem III sur le trône d'Angleterre. En 1688, il accompagna le Prince dans

longtemps en Italie connoit touts les maiſtres et leurs ouvrages. Je ſcay que Lily [9]) a eu de luy pluſjeurs de ſes meilleurs deſſeins Italiens. Il ſe connoit auſſi fort bien en medailles, agates &c. Demain j'iray chez luy pour voir des choſes qu'il dit avoir encore.

Stanley me tourmente furieuſement, pour que je faſſe preſent a la Societé Royalle d'un de mes verres de Teleſcop et a bien l'effronterie d'oſer demander celuy de 210 [10]), ou 160 [11]) pieds. Mais je luy ay dit, qu'ils ſeront bien heureux, ſi je leur en donne un de 120 [12]). Ils veulent faire dreſſer un maſt auſſi haut que je voudray dans une baſſe court de Greſham-College. Nous parlerons de tout, quand Dieu aydant je feray là; mais de dire quand ce ſera preciſement, c'eſt ce que je ne ſcaurois, celà dependant des affaires qui ſont ſur le tapis. On parle pourtant du commencement du mois prochain.

Noyelle [13]), le Duc de Schomberg [14]), Sommelſdijck et Madame Danckelman ſont arrivés non ſans danger et beaucoup de peine, apres avoir croiſé la mer quinze jours durant, eſtant a veue de la coſte ils ſe mirent dans la chalouppe et gagnerent la terre, mais non ſans bien du danger comme j'ay dit.

Lundy Meſſr. de l'Eſtang [15]) et de la Lecque partent, pour aller devant le Roy en Hollande avec 80 Gardes du corps.

P. S. Ayant eſcrit cecy j'ay trouvé a propos d'envoyer la lettre a Mr. Verbolt par de Wilde qui eſt ſon parent.

l'expédition de Torbay. Bientôt après il fut nommé membre du Conseil privé de Willem III, gentleman of the bedchamber et colonel du régiment des gardes du Roi. De 1689 à 1692 et puis de 1694 jusqu'à sa mort (le 8 avril 1704) il fut Lord Lieutenant de Kent. Il était connu pour sa beauté; son portrait, peint par Lely, se trouve à Penshurst.
8) John Michael Wrigt, né en Ecosse vers 1625. Jeune encore, il se rendit en Italie, où, en 1648, il devint membre de l'Académie de St. Luc à Florence. De retour en Angleterre, il rivalisa avec Lely dans la peinture de portraits, qui sont conservés encore dans la National Gallery et dans d'autres collections de l'Angleterre. Il s'acquit une riche collection de pierres précieuses, coquilles et autres raretés, laquelle, après avoir passé après sa mort, en 1670, aux mains de sir Sloane, se trouve actuellement au British museum.
9) Sur Pieter de Lely ou van der Faes, consultez la Lettre N°. 1124, note 8.
10) Consultez la Lettre N°. 2441. 11) Consultez la Lettre N°. 2385.
12) Consultez les Lettres Nos. 2418 et 2419.
13) Louis, comte de Noyelle servit dans l'armée des Provinces Unies et fut nommé, en 1694, lieutenant-général de l'infanterie et en 1697 gouverneur de Bergen-op-Zoom. Plus tard il fut envoyé en Espagne comme général de Charles III. Il avait épousé, en 1680, à la Haye, Sophia Charlotte d'Aumale.
14) Meinhard, duc de Schönberg et Leinster, fils du maréchal Friedrich von Schomberg (voir la Lettre N°. 2153, note 9). Il mourut en 1719.
15) Nicolas de l'Estang servit dans l'armée française de 1677 jusqu'en 1687, lorsqu'il quitta la France et fut reçu, avec son épouse Magdelaine Mercier, membre de l'église wallonne à la Haye. En 1688 il fut nommé lieutenant des gardes du corps du Prince d'Orange qu'il suivit en Angleterre. Il devint brigadier en 1691, général en 1696 et mourut à la Haye le 11 octobre 1712.

N° 2636.

G. W. Leibniz à Christiaan Huygens.

24 novembre 1690.

La lettre se trouve à Leiden, coll. Huygens.
Elle a été publiée par P. J. Uylenbroek [1]) *et par C. I. Gerhard* [2]).
La lettre est la réponse au No. 2633.
Chr. Huygens y répondit par le No. 2643.

A Hanover ce $\frac{14}{24}$ de Novembre 1690.

Monsieur

Je reponds incontinent à la voſtre du 18 de Novembre, afin que vous ne me ſoubçonnies pas d'une vanité ridicule, comme ſi j'auois crû, que ce que j'auois dit dans les Actes de Leipzig vous auoit ſervi pour voſtre ſeries $\frac{1}{1}a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5$ etc. Vous eſtes trop ſincere pour diſſimuler l'uſage que vous faites des penſées des autres, et vous avés marqué en cela même, que celles de Mr. Neuton vous avoient ſervi. J'auois dit ſeulement qu'il y a de l'accord, et cela eſt ainſi, car je dis en termes expres article 5 n° 3, *reſiſtentias eſſe in ratione compoſita elementorum temporis et quadratarum velocitatum.* De ſorte que les elements du temps eſtant pris egaux, comme on les prend ordinairement, les reſiſtences ſont en raiſon doublée des viteſſes; et cela s'enſuit de ce que j'auois dit que les reſiſtences ſont en raiſon compoſée des viteſſes et des elemens de l'eſpace. Car les elemens de l'eſpace ſont en raiſon compoſée des elemens du temps et des velocités. En ſymboles, ſoit reſiſtence r, viteſſe v, temps t, eſpace s, leur elemens dv, dt, ds, il eſt touſjours vray que ds ſont comme $dt.\,v$ et icy r eſt comme $ds.\,v$, donc r comme $dt.\,vv$. Et quoique les reſiſtences dependent de la viteſſe, comme vous dites, elles dependent auſſi de la quantité des parties du milieu qui reſiſte. Un globe en mouuement rencontrant un globule en repos, la perte, qu'il fait de ſa velocité eſt proportionnelle à la velocité (les grandeurs des globes et tout le reſte demeurant, hors mis la velocité) comme il eſt aiſé de demonſtrer. Mais plus il rencontre des globules, et plus grande eſt ſa perte; or le milieu eſtant uniforme, le nombre des globules ſera comme les parties de l'eſpace. Mais a fin que vous jugies mieux de cet accord, je dis, que j'ay preciſement determiné le même rapport entre les temps et les velocités. Il eſt vray qu'il y a eu une trajection ou tranſpoſition [3]) dans l'edition, qui eſt de ma

[1]) Chr. Hugenii Exercitationes Mathematicae etc. Fasc. I, page 44.
[2]) Leibnizens Mathematische Schriften, Bd. II, p. 59 et Briefwechsel, p. 617.
[3]) En réalité, il n'en est pas ainsi. Les propositions 4 et 6 sont parfaitement correctes telles qu'elles étaient formulées dans l'article cité et que nous les avons reproduites dans la note 10 de la Lettre N°. 2632. Leibniz s'en est aperçu plus tard. Aussi, dans sa lettre à Huygens du 5 décembre, notre N°. 2639, il a rétracté les corrections qu'il propose ici.

faute, mais j'eſtois en voyage et bien diſtrait. En voicy la correction. C'eſt qu'il faut mettre les eſpaces pour les temps et vice verſa dans les propoſitions 4 et 6 de l'article 5, et apres auoir ainſi corrigé les propoſitions, il faut donner la demonſtration de l'une à l'autre, et vice verſa. De ſorte voicy comme il falloit dire dans la prop. 4 en y mettant la prop. 6 corrigée: *ſi velocitates acquiſitae ſunt ut ſinus erunt tempora impenſa ut logarithmi ſinuum complementi, poſito radium ſeu ſinum totum eſſe ut velocitatem maximam.* Et à cela s'ajuſte la demonſtration qui eſt miſe a la propoſition 4me, *cum enim* (j'en repete les paroles) *incrementum velocitatis ſit differentia inter impreſſionem et reſiſtentiam, hinc ex præcedenti ſtatim ſequitur impreſſionem (gravitatis) eſſe ad incrementum velocitatis, ut quadratum velocitatis maximae ad exceſſum hujus quadrati ſuper quadratum præſentis velocitatis. Ex quo ſcimus per quadraturas, ſummam impreſſionum quae eſt proportionalis aſſumto tempori, eſſe ut Logarithmum, ſi numerus ſit qualem in propoſitione hac enuntiavimus.* Ce ſont mes paroles preciſes et pour vous faire voir qu'elles s'ajuſtent à la propoſition ainſi corrigée et tranſpoſée, auſſi bien qu'avec vos decouuertes [4]), Appellons comme auparavant le temps t, les velocités v, la plus grande velocité a, les reſiſtences r. Or il eſt manifeſte que les elemens des velocités c'eſt à dire les differences de deux velocités prochaines ſe trouuent en adjoutant à la velocité precedente la nouuelle impreſſion faite par la gravité et en ſouſtrayant en meſme temps la reſiſtence ou perte cauſée par le milieu, donc dv (increment de la velocité precedente pour faire la ſuivante) eſt $dt - r$ [5]), or $r = \frac{dt\,.\,vv}{aa}$ donc $dv = dt - dt\,\frac{vv}{aa}$ ou bien $\frac{dt}{dv} = \frac{aa}{aa - vv}$, c'eſt à dire, comme parle ma demonſtration: *impreſſio gravitatis* (dt) *eſt ad incrementum velocitatis* (dv) *ut quadratum velocitatis maximae* (aa) *ad exceſſum huius quadrati ſuper quadratum praeſentis velocitatis* ($aa - vv$). Car dt expriment auſſi bien les elemens des temps, que les impreſſions de la peſanteur, qui ſont proportionnelles à ces elemens. Par là vous voyés, Monſieur, que $t = \int \frac{dv\,.\,aa}{aa - vv}$, ou parlant à l'ordinaire, que le temps eſt la ſomme de $\frac{aa}{aa - vv}$, c'eſt à dire ſelon voſtre expreſſion, que le temps eſt $\frac{1}{1}v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ [6])

[4]) Consultez la note 7 de la Lettre N°. 2632.
[5]) Cette formule suppose que les unités de temps et d'espace soient choisies d'une telle manière que l'accélération de la gravité soit représentée par l'unité. Le choix singulier ou trop peu precisé des unités employées, dont on rencontrera encore un autre exemple dans cette lettre, tend quelquefois à répandre sur les raisonnements et les résultats de Leibniz, un certain vague qui devait rebuter un esprit aussi exact que celui de Huygens. Celui-ci ne s'en cache pas dans sa réponse à cette partie de la lettre.
[6]) En réalité, le temps est proportionnel à $\left(\frac{v}{a}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{v}{a}\right)^5 + \ldots$

etc. Mais ſelon la mienne, les temps ſont comme les logarithmes de $\sqrt{(aa-vv)}$ [7]) c'eſt à dire les velocités v eſtant comme les ſinus, les temps ſont comme les logarithmes ſinuum complementi. Et vous trouverés que ces deux expreſſions s'accordent. J'auois crû mieux faire en m'exprimant ainſi. En echange la propoſition 4me corrigée (les *eſpaces* eſtant mis pour les *temps*) doit eſtre miſe à la place de la ſixieme et alors la propoſition ſixieme veritable ſonnera ainſi: *ſi rationes inter ſummam et differentiam velocitatis maximae et minoris aſſumtae ſunt ut numeri, ſpatia quibus aſſumtae velocitates ſunt acquiſitae, ſunt ut logarithmj.* Et alors la demonſtration de la propoſition 6me repondra à ſa propoſition. En ſymboles les eſpaces eſtant marqués de s et les elemens de ds comme auparavant, puiſque $r = \frac{ds \cdot v}{a}$ et $dt = \frac{a}{v} ds$ [8]) ſubſtituant ces valeurs dans l'equation ſuſdite $dv = dt - r$, on aura $ds = \frac{dv \cdot av}{aa - vv}$ ou $s = \int \frac{dv \cdot av}{aa - vv}$. Ce qui depend encor de la quadrature de l'Hyperbole ou des Logarithmes. On le pourroit encor exprimer par cette ſeries $s = \frac{1}{2} vv + \frac{1}{4} v^4 + \frac{1}{6} v^6$ etc. mais j'ay crû mieux faire en diſant, que les velocités eſtant v, les eſpaces ſont comme les logarithmes des raiſons de $a + v$ à $a - v$. Ainſi j'ay ces expreſſions exponentiales (que vous appellés en riant ſupertranſcendentes) $\sqrt{(1 - vv)}$ comme b^t et $\frac{1 - v}{1 + v}$ comme b^s, b eſtant un certain nombre conſtant. Je ne voy pas pourquoy vous trouvés de l'obſcurité dans ces expreſſions, car il n'y en ſcauroit plus auoir que dans les logarithmes ordinaires, qui ne vous ſcauroient donner aucune peine. Et puiſque vous avés adjouté quelque limitation à voſtre arreſt contre ces ſortes de formules, en les rejettant, à moins que je n'y aye remarqué quelque utilité notable, j'acheveray d'inſtruire le procès, a fin que vous puiſſiés prononcer une ſentence definitive. Je crois donc que dans les lignes qui paſſent les equations de l'Algebre ordinaire, c'eſt tout ce qu'on peut ſouhaitter à leur egard en Analyſe, que de les exprimer par ces equations nouuelles. Si on le pouuoit touſjours faire, on connoiſtroit par là parfaitement la nature de la ligne, on pourroit donner ſes tangentes, ſes quadratures, extenſions, centres et même ſes interſections avec une courbe donnée, et reſoudre par ce moyen des problemes tranſcendans determinés, en fin je ne voy rien de poſſible, qui reſteroit à faire apres cela, et le tout ne ſuppoſeroit que la conſtruction des logarithmes, outre les conſtructions de la Geometrie ordinaire. On pourra encor determiner les cas quand certains points demandés ſe peuvent

7) En réalité, comme les logarithmes de $\frac{a+v}{a-v}$. Consultez la note 10 de la lettre N°. 2632.

8) Pour justifier cette formule on doit supposer que l'unité de temps soit choisie égale au temps nécessaire pour parcourir l'unité de l'epace avec la vitesse terminale a.

donner par la Geometrie commune. Si ces raiſons ne valent rien, je me ſuis bien trompé de mon calcul. Je croyois vous avoir communiqué quelque choſe de fort bon et de grand uſage. Et quand j'aurois fait une beveue dans le cas, que je vous avois envoyé, cela ne pourroit rien diminuer de la force de la methode. Par les expreſſions ſuſdites je donne une equation qui exprime la relation entre l'eſpace et le temps, car il ſe trouve $\frac{1 - b^s}{1 + b^s} = \sqrt{(1 - b^t)}$. De ſorte que les temps eſtant donnés en nombres, les eſpaces ſe trouuent par là et vice verſa; en ſuppoſant la conſtruction des logarithmes. On aura bien de la peine à arriver icy, par une autre voye, à une equation finie.

Apres avoir examiné la courbe que vous aſſignés pour la proprieté des Tangentes, et que vous m'aviés propoſée, Monſieur, je trouve que voſtre courbe ſemble y repondre, mais qu'elle n'y repond pas de la maniere que la formule eſt conçue; au lieu que les miennes y repondent. Et il s'y paſſe quelque choſe de curieux à l'égard des ſignes [9]). Je trouue donc que l'equation eſtant $x^3 + xy^2 = aay$, il provient DB $= \frac{aax - 2xxy}{3aa - 2xy}$, au lieu que vous m'auiés propoſé $\frac{2xxy - aax}{3aa - 2xy}$. Et a fin qu'on ne penſe pas que c'eſt la meme choſe, et qu'il faut parler de la façon poſterieure, lorſque le point D doit eſtre pris ad partes oppoſitas, et non vers A, je reponds que ſuivant le calcul, il eſt toujours vray, ſoit que CD ſe mene ſupra ou infra, c'eſt à dire vers A ou ad partes oppoſitas, que DB eſt $\frac{aax - 2xxy}{3aa - 2xy}$ dans votre courbe, puiſque cette valeur s'obtient par un calcul general, et cela prouue ſeulement, que lorſque cette valeur eſt une grandeur negative, D doit eſtre pris non ſupra (vers A) mais infra B. Et a fin que vous jugiés mieux de la ſolidité de cette remarque, et que l'Analyſe ne ſcauroit mener à voſtre courbe par la proprieté que vous aviés propoſée, vous trouuerés que les courbes, que j'auois envoyées, satisfont rigoureuſement et uniquement a la valeur $2xxy - aax : 3aa - 2xy$, et ne ſcauroient ſatisfaire à la valeur $aax - 2xxy : 3aa - 2xy$; car jettant les yeux ſur ma derniere lettre [10]) vous trouverés cette equation $\frac{3dx}{x} + \frac{dy}{y} = 2xdy + 2ydx$, dont je puis venir à bout. Car la ſomme de $2xdy + 2ydx$ eſt $2xy$, mais ſi la valeur eſt $aax - 2xyy : 3aa - 2xy$, vous trouuerés $\frac{3dx}{x} - \frac{dy}{y} = -2xdy + 2ydx$. Mais la ſomme de $-2xdy + 2ydx$ ne ſe trouue pas de même, et il faut auoir recours à d'autres adreſſes, dont je ne m'eſtois pas ſervi parce que j'eſtois devenu fort aiſément à ce que vous m'aviés demandé: Apres tout cela, je

9) Consultez la note 3 de la pièce N°. 2612 et la note 6 de la Lettre N°. 2627.
10) La Lettre N°. 2632.

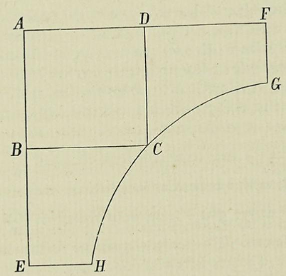
m'imagine que voſtre arreſt proviſionnel ſera addouci, et comme vous devés juger en dernier reſſort, et ſans appel, vous ſerés d'autant plus porté à faire droit aux parties.

Je ſuis bien aiſe que Mrs. de Leipzig vous ont fait juſtice dans leurs Actes [11]); Mais en rapportant la ſeconde partie de voſtre traité il y a une beveue dont je ſuis faſché. Celui qui a donné cette relation s'eſt imaginé [12]) que voſtre quadrature de l'Hyperbole par $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$ etc. eſtoit la même que celle que j'auois joint à ma Quadrature Arithmetique du cercle, parce que je voyois une certaine analogie aſſez belle. Cependant la mienne eſt celle de Mercator, tirée de $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ etc., et par conſequent differente de la voſtre [13]). Je vous aſſeure

[11]) Il s'agit des articles des „Acta" d'octobre et de novembre 1690, qui contiennent un exposé assez étendu du Traité de la Lumière et de celui de la Pesanteur.

[12]) Dans l'article de novembre 1690, cité dans la note précédente, l'auteur de l'exposé du traité de la Pesanteur s'exprimait comme il suit: „Hac itaque occasione non solum quadratura hyperbolae per infinitas series profert in medium, quae analoga est quadraturae circuli, quam a celeberrimo Viro G. G. Leibnizio acceptam ad Acta eruditorum 1682, p. 41 sqq., retulimus, imo gemina plane et consentanea illi Arithmeticae Hyperbolae Quadraturae quae dicto in loco proponitur; sed etiam singulares quasdam proprietates lineae Logarithmicae demonstrat."

[13]) Dans l'article de 1682, mentionné dans la note précédente, Leibniz avait indiqué l'emploi



de la progression $\frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{120} + \frac{1}{224} + \frac{1}{360}$ etc. pour exprimer l'aire de la figure EBCH, où GCH représente une hyperbole équilatère et AB = BE est supposé $= \frac{1}{2}$.

que je n'ay aucune part à ce meſentendu, et même je feray en ſorte que cela ſoit remarqué et redreſſé [14]).

Je voudrois pouuoir ſatisfaire à tous les autres points de voſtre lettre, et ſurtout examiner attentivement ce que j'ay fait ſur la figure de la chaine [15]), pour faire la comparaiſon avec vos decouuertes. Mais je ſuis a preſent enfoncé dans des vieux papiers et parchemins de nos archives et preſſé pour les depecher. Ainſi il me faut prendre du temps pour cela. J'ay demonſtration de la regle de la compoſition des mouuemens, qui me ſert de fondement à la decouuerte des tangentes par les foyers [16]). Je ſuis bien aiſe de ſcavoir que c'eſt vous dont M. Fatio entendoit parler [17]), pour joindre cette obligation aux autres qu'on vous a. Mons. Spener ne m'a pas ecrit non plus. J'eſpere qu'il ſera plus exact en experiences qu'en correſpondences. J'auois eu autre fois la vue d'eſſayer ſi par le moyen du vuide on ne pourroit tirer quelque choſe des corps, entre autres en y joignant des filtres, puiſque ce ſeroit une eſpece de preſſe, plus ſubtile et plus uniforme que l'ordinaire.

En effet, posant AB $= a$, BE $= x$, on a: EBCHE $= \int_0^x \frac{a^2}{a+x}dx = a^2\left[\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \cdot\ \cdot\right]$ ou bien, pour $x = a = \frac{1}{2}$:

$$\text{EBCHE} = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \frac{1}{56} + \frac{1}{90} + \ldots\right] = \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{120} + \frac{1}{224} + \frac{1}{360} + \ldots$$

On voit bien que cette progression n'avoit donc rien à faire avec la quadrature de l'hyperbole, proposée par Huygens dans l'Addition au Discours de la cause de la Pesanteur, au lieu cité dans la note 7 de la lettre N°. 2632.

[14]) Leibniz l'a fait dans son article „Quadratura arithmetica communis Sectionum Conicorum quae centrum habent, indeque ducta Trigonometria Canonica ad quantamcunque in numeris exactitudinem a Tabularum necessitate liberata: cum usu speciali ad lineam Rhomborum nauticam, aptatumque illi planisphaerium", publié dans les Acta d'avril 1691. Après avoir rappelé sa quadrature célèbre du cercle au moyen de la progression $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$, il poursuit: „Interim insignes quidam Mathematici, quibus veritas primariae nostrae propositionis dudum in his Actis" (ceux de février 1682) „publicatae innotuit, pro humanitate sua nostri qualiscunque inventi candide meminere. Quos inter Ill. Hugenius etiam analogum aliquid in Hyperbola eleganter adjecit, a nostri olim schediasmatis analogia diversum. Ut enim nos dederamus seriem $\frac{1}{1}t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5$ etc. per circulum; ita ipse $\frac{1}{1}t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5$ etc. per hyperbolam primariam exhiberi notavit"....

[15]) Voir la Lettre N°. 2627, note 9.

[16]) Voir Lettre N°. 2627.

[17]) Dans sa réponse à von Tschirnhaus, mentionnée dans la Lettre N°. 2467, note 2.

Peut-eftre que M. Spener a penfé à quelque chofe de femblable avec fon fiphon qui doit attirer, mais fi cela eftoit, il ne deuuroit pas avoir manqué. Ainfi je ne fcay pas bien ce que c'eft. Puis que vous avés fait des experiences de confequence avec l'ambre, je vous diray que feu Mons. Gericke en auoit fait de fort confiderables avec des corps electriques. Il m'en ecrivit un jour et j'en chercheray le détail. Ce qui m'a fait croire que la variation de l'eguille a quelque regle (quoiqu'inconnue encor) c'eft que j'ay vû des journaux des grands voyages ou elle eftoit tres fouvent obfervée et ou elle ne changeoit pas par fauts mais peu à peu.

Comme ma lettre fur les planetes et autres points, que je vous deftinois il y a long temps eft quafi faite, je la finiray et la mettray au net, pour la vous envoyer auffi toft [18]) que je feray un peu plus libre pour pouuoir vaquer à des penfées que je n'ay plus prefentes dans l'efprit. Je vous remercie de ce que vous dites de Meffieurs Hudde et Witfen. Quoyque je fouhaite fort de voir vos penfées publiées, je prefere l'intereft de voftre fanté à celuy de noftre utilité. Peut-eftre pourriés vous donner fouuent des penfées detachées qui feroient de confequence fans vous tant attacher à la forme des ouvrages reguliers. Je fuis avec tout le zele que je dois

MONSIEUR

Voftre trefhumble et trefobeiffant ferviteur
LEIBNIZ.

A Monfieur
Monfieur C. HUGENS
Seigneur de Zulichem
franco Breme à la Haye.

[18]) Voir la note 3 de la Lettre N°. 2632.

N° 2637.

J. DE GRAAFF à CHRISTIAAN HUYGENS.

26 NOVEMBRE 1690.

La lettre se trouve à Leiden, coll. Huygens.
Elle fait suite au No. 2630.

Erentfefte en zeer difcrete heer

Actum Amfterdam den 26 November.

Mijn hr. van ZELEM

Voor 't tegenwoordigh heb ik niet connen nalaten de weet te doen aangaande de toeftant der aanftaande befendingh van de naaft volgende Ooftindifche Carguafoen fchepen, die nu ook ophanden is, en zonder uytftel in 2 a 3 weken ftaat volvoert te worden, op een van welke de horologien gevolgelyck fullen geplaaft werden en nadien 't van UE: a: believen is geweeft, dat ik naar een horologiemakers knecht eens foude omfien; alzoo onder UE. a: vorige Letteren laat invloeyen, dat de zoon van UE horologiemaker zijn vader hem niet can mitzen [1]), en ingevalle UE: a: noch niemant bewuft was, zoo is er mij na vrij wat foeckens een voortgekomen, die daar toe wel geinclineert was; dit is all 't geen ik UE: a: nu weet te fchrijven, fullende de hr. van de blocquery zoo ik verftaan heb, kort naar den ontfangh van defe nader fchrijven [2]), hier mede blijven

Mijn hr.

UEd. zeer dienftwillige dienaar
JAN DE GRAAFF.

Aan de Wel E. hr. CON: VAN SUYLICHEM,
om te Behandigen aan de E. hr. CR. VAN ZELEM
tot Voorburg
's Gravenhaag.

[1]) Voir la Lettre N°. 2615. [2]) Voir la Lettre N°. 2638.

Nº 2638.

S. VAN DE BLOCQUERY à CHRISTIAAN HUYGENS.

27 NOVEMBRE 1690.

La lettre se trouve à Leiden, coll. Huygens.

WelEdele geſtrenge Heer

De Tijt gekomen zijnde dat mons.r de Graef nu met de bewuſte horologien nae de kaap zoude vertrecken, vinden wij eerſtelijk dat ons manqueert een horologiemaker, om deſelve ſchoon te maken en ontſtelt-zijnde, weder te recht te brengen, ten anderen dat ons naeder werd aengewezen op wat wijze, en hoedanig men die in het ſchip zal moeten ophangen, en ten derden is bij mons.r de Graaf ondervonden dat de pendule van het eene zoo reſolut niet doorgaat, als van't andere, en't geen wel het principaelſte is, dat de wijzer van de ſeconden, ieder 2 minuten een ſeconde voortſpringt, 't geen wij oordeelen veroorzaekt te zijn door dien in het werk van binnen iets moet wezen ontſtelt, en alzoo mijne heeren van de Compie dit laeſte experiment niet geern weder zouden beginnen, met een horologie dat reeds niet word bevonden te wezen in de gerequireerde ordre, en dat aan 't hangen off plaetzen mede vrij wat ſchijnt gelegen te wezen, dat deſelve ook geern zouden zien dat uwelEd. geſtr: daer bijvoegde een horologiemakers gezel, op dewelke hij ſich meijnde te konnen verlaeten, zoo hebben deſelve gemeijnd nodig te wezen, dat ik uwelEd. geſtr: van dees toeval en bedenkelijkheden verwittigde; en te gelijk verſocht dat zoo het deſſelfs commoditijt eenigſints quam toe te laeten, hij de moeijte wilde nemen van eens herwaerts te komen, om op alles de vereyſchte ordre te ſtellen, en nevens ons die ſorge helpen draegen, dat 'er nu niets aen mag komen te haperen, zijnde de compie gejnclineert ditmael alles te doen wat er zoude konnen werden gerequireert, ik maak ſtaet, dat onze ſchepen in 8 a 10 dagen klaer zullen wezen, en was het wel nodig dat het eene horologie inmiddels wierde gerepareert, en in die ſtaet gebragt waermede uwelEd. geſtr: zal meynen, dat men het effect van de verwachtinge zal konnen hebben, opt welk ik uwelEd. geſtr: reſcriptie met deſſelfs believen zal tegemoet zien, en inmiddels met veel reſpect toonen te zijn

Weledele geſtr: Heer

uWelEd: geſtr: zeer ootmoedigen dr.

V. D. BLOCQUERY.

Amſterd: 27 Novemb. 1690 [1]).

[1]) Au revers de la lettre Huygens a noté:

J. de Graaf met de 2 Horologien vertrocken naar de Caap de Bonne Esp.e den 28 Dec. 1690.
Met hem tot seconde ... van Laar.
En voor Horologiemaecker Carel Meybos.
Het schip Brandeburgh.
Schipper Verbrugge.

Nº 2639.

G. W. LEIBNIZ à CHRISTIAAN HUYGENS.

5 DÉCEMBRE 1690.

La lettre se trouve à Leiden, coll. Huygens.
Elle a été publiée par P. J. Uylenbroek [1]) et par C. I. Gerhardt [2]).
La lettre fait suite au No. 2636.
Chr. Huygens y répondit par le No. 2643.

A Hanover ce 25 de Novembre vieux ſtyle 1690.

MONSIEUR

J'apprehende de vous importuner trop ſouuent et d'interrompre vos penſées que j'eſtime pretieuſes. Mais la raiſon qui me fait écrire maintenant, eſt que ma derniere, qui comme j'eſpere vous aura eſté rendue maintenant, a beſoin de ſuite pour ſatisfaire entierement aux deux problemes que vous m'aviés propoſés. Je crois qu'il n'y a plus rien à demander [3]) à l'egard de l'une des lignes propoſées, ou DB [4]) deuoit eſtre $\frac{2xxy - aax}{3aa - 2xy}$, car en ce cas, prenant les ſignes au pied de la lettre, comme vous les auiés exprimés, les lignes tranſcendantes, dont je vous ay envoyé l'equation, y ſatisfont parfaitement. Mais en cas qu'on veuille DB = $= \frac{aax - 2xxy}{3aa - 2xy}$, la ligne que vous avés donnée vous meme y ſatisfait. Je viens

[1]) Chr. Hugenii Exercitationes Mathematicae, Fasc. I, p. 51.
[2]) Leibnizens Mathematische Schriften II, p. 64 et Briefwechsel p. 622.
[3]) Cette remarque semble indiquer que Leibniz, aussi peu que Huygens, n'avait pas encore fait l'observation que la solution complète d'une équation différentielle doit contenir nécessairement une constante arbitraire. Il est vrai que ses propres solutions contiennent souvent une telle constante, mais comme il se contente ici expressément de la solution particulière de Huygens, on en doit bien inférer qu'il n'avait pas encore entrevu la signification fondamentale de ces constantes.
[4]) Voir la figure de la Lettre Nº. 2633.