幾何原本第十四卷 論體四

英國 偉烈亞力 口譯
海甯 李善蘭 筆受

此下二卷、乃後人所續、或言出亞力山太（地名）虛西格里手、卷首列書一通、有復以僕所撰者寄呈左右云云、而書不署名、究不知是虛西氏否也、

與簿大古書

某啟、推羅白西里第在亞力山太時、與家君時相會語、講明算學、家君甚愛其明悟、一日相與論亞波羅泥所著同球容十二面二十面二體較義、尚未盡善、家君嘗

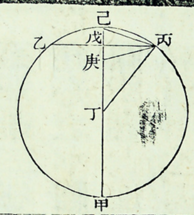
與白西里第改定其例其後僕得亞波羅泥别本論此理甚精微與昔見本不同讀之不覺狂喜此本今已不啻家有其書矣然因閣下與家君及僕累世交好故敢復以僕所撰者寄呈左右閣下於此事稱最精伏祈詳加檢閱誨我不逮幸甚

第一題

從圓心至本圓所容正五邊形之一邊作垂線此線爲本圓所容六邊形十邊形各一邊之半和

解曰甲乙丙平圓乙丙爲本圓所容正五邊形之一邊丁爲圓心作丁戊爲乙丙之垂線引長丁戊至己題言丁戊爲本圓所容六邊形十邊形兩邊和之半

論曰作丁丙丙己二線取庚戊等於戊己從庚點作庚丙線圓周既五倍乙己丙圓分而甲丙己爲半周丙己爲乙己丙圓分之半則甲丙己半周五倍丙己圓分故甲



丙圓分四倍丙己圓分惟甲丙與己丙二圓分比若甲丁丙與己丁丙二角比六卷三十三故甲丁丙角四倍己丁丙角惟甲丁丙角倍戊己丙角三卷二十故戊己丙角倍庚丁丙角即己丁丙而戊己丙與戊庚丙二角等一卷四故戊庚丙角倍庚丁丙角而丁庚與庚丙等一卷六又三十二又庚丙

與己丙等一卷四故丁庚與己丙等。而庚戊與戊己亦等
本論故丁戊與戊己己丙二線之和等。而丁己己丙二線
之和倍於丁戊。惟丁己等於六邊形之一邊。己丙為十
邊形之一邊。四卷十四故丁戊為同圓內六邊形及十邊形
各一邊之半和。

系準十三卷十二十三二題。顯從圓心至本圓所容三
角形之一邊作垂線。必為半徑之半。

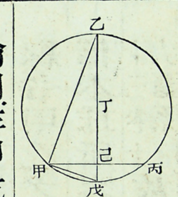
第二題

同球所容十二面體之五邊形。與二十面體之三角形。為
同圓所容。

此題之理。在亞理梯五體論中。又見亞波羅泥所著同
球容十二面二十面二體較義中。如所云十二面二十
面二體總面之比。若二體積之比是也。蓋從球心作線
至十二面體之五邊形心。等於球心作線至二十面體
之三角面心。故也。今欲明同球十二面體之五邊形。與
二十面體之三角形。為同圓所容。先作一例明之。

例圓內五等邊形。以形之二邊為三角形之二腰。而作
底邊。則一邊之正方。加底邊之正方。五倍圓半徑之正
方。

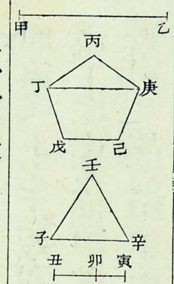
解曰。甲乙丙圓。甲丙為所容五邊形之一邊。丁為圓心



作丁己爲甲丙之垂線，引長之至乙，至戊，又作甲乙聯線，例言乙甲甲丙之二正方和，五倍丁戊之正方。

論曰，作甲戊線，爲十邊形之一邊，乙戊既倍於戊丁，則乙戊之正方，四倍戊丁之正方，（六卷二十題系）惟乙甲甲戊之二正方和，等於乙戊之正方，故乙甲甲戊之二正方和，四倍戊丁之正方，則乙甲甲戊戊丁之三正方和，五倍戊丁之正方，惟甲戊戊丁之二正方和，等於甲丙之正方，（十三卷十）故乙甲甲丙之二正方和，五倍戊丁之正方，如例。既有確証，乃可明同球十二面體之五邊形，二十面

體之三角形爲同圓所容之理。



解曰，甲乙爲球之徑線，於球內作十二面體二十面體，丙丁戊己庚爲十二面體之五邊形，壬子辛爲二十面體之三角形，題言此五邊形三角形爲同平圓所容。

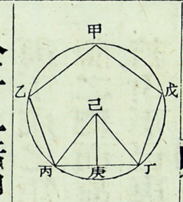
論曰，作丁庚線，爲六面體之一邊，（十三卷八又十七）另作丑寅線，令甲乙之正方，五倍丑寅之正方，惟球徑之正方，五倍本球所容二十面體上容五邊形平圓半徑之正方，（十三卷十六題系）故丑寅爲圓半徑，於卯點分丑寅爲中末線，

（六卷三十）丑卯為大分，則丑卯為十邊形之一邊，（十三卷五又九）又
乙甲之正方，既五倍丑寅之正方，亦三倍丁庚之正方，
（十三卷十五）則三倍丁庚之正方，等於五倍丑寅之正方，惟
三倍丁庚之正方，與五倍丑寅之正方比，若三倍丙庚
之正方，與五倍丑卯之正方比，（十三卷八、本卷七）故三倍丙庚
之正方，等於五倍丑卯之正方，惟五倍壬子之正方，等
於五倍丑寅之正方，加五倍丑卯之正方，（九卷五、三卷十）因
壬子即二十面體上五等邊形之一邊，故也，故五倍壬
子之正方，等於三倍丁庚之正方，加三倍丙庚之正方，
惟三倍丁庚丙庚之二正方和，十五倍容丙丁戊己庚

五邊形圓半徑之正方，因丁庚丙庚之二正方和，五倍
容丙丁戊己庚五邊形圓半徑之正方，故也，（本例）而五倍
壬子之正方，等於十五倍容壬子辛三角形圓半徑之
正方，因壬子之正方，三倍容壬子辛三角形圓半徑之
正方，故也，（十三卷十二）則彼此十五倍圓半徑之正方相等，
故二徑線必等，是以同球所容十二面體之五邊形，二
十面體之三角形，為同平圓所容，

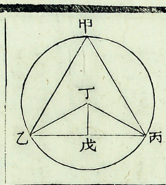
第三題

容十二面體五邊形之平圓，從圓心任至一邊，作垂線，則
三十倍一邊與垂線之矩形，等於十二面體諸面之和



解曰甲乙丙丁戊爲十二面體之五邊形作外切平圓己爲圓心作己庚爲丙丁邊之垂線題言三十倍丙丁己庚之矩形等於十二倍甲乙丙丁戊五等邊形即本體諸面之和

論曰作丙己己丁二線則丙丁己庚之矩形倍於丙丁己三角形故五箇丙丁己庚之矩形等於十箇丙丁己三角形一卷四十一惟十箇三角形成兩箇五邊形各六倍之則三十箇丙丁己庚之矩形等於十二箇五邊形而十二箇五邊形即十二面體之諸面故三十倍丙丁己庚之矩形等於十二面體之諸面

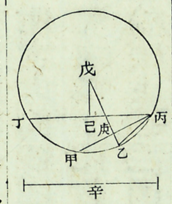


更論曰作甲乙丙等邊三角形之外切平圓丁爲圓心作丁戊垂線則三十倍乙丙丁戊之矩形等於二十面體之總面蓋乙丙丁戊之矩形倍於丁乙丙三角形故兩箇丁乙丙三角形等於乙丙丁戊之矩形一卷四十一各三倍之則六箇丁乙丙三角形等於三箇乙丙丁戊之矩形惟六箇丁乙丙三角形等於兩箇甲乙丙三角形各十倍之則三十箇乙丙丁戊之矩形等於二十箇甲乙丙三角形即二十面體之總面故十二面體之總面與二十面體之總面比若丙丁己庚與乙丙丁戊之二矩形比

系十二面二十面二體之總面比若五邊形一邊及從心至邊垂線之矩形與二十面體一邊及從心至邊垂線之矩形比亦即十二面二十面之二體積比

第四題

同球所容十二面體之總面與二十面體之總面比若六面體之一邊與二十面體之一邊比



解曰甲乙丙丁爲容同球十二面體五邊形二十面體三角形之平圓（本卷二）其內作丙丁爲三角形之一邊作甲丙爲五邊形之一邊戊爲圓心戊己爲丁丙之垂線戊庚爲丙甲之垂線引長戊庚至乙作乙丙線另以辛爲本球所容六面體之一邊題言十二面體之總面與二十面體之總面比若辛與丙丁比

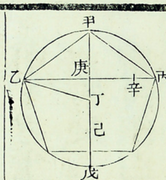
論曰戊乙乙丙和既分爲中末線乙戊爲大分戊庚爲戊乙乙丙和之半（本卷一）戊己爲乙戊之半則戊庚分爲中末線戊己爲大分辛線分爲中末線丙甲爲大分（十三卷十七題系）故辛與丙甲比若戊庚與戊己比（本卷七）所以辛及戊己之矩形等於丙甲戊庚之矩形（六卷十六）又辛與丙丁比若辛及戊己之矩形與丙丁戊己之矩形比（六卷一）丙甲戊庚之矩形既等於辛及戊己之矩形則辛與丙

丁比若丙甲戊庚之矩形與丙丁戊己之矩形比即十二面體之總面與二十面體之總面比若辛與丙丁比。本卷三題系

又顯十二面體與二十面體之二總面比若六面與二十面二體之邊比先以一例明之

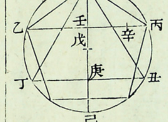
例設甲乙戊丙圜內作甲乙甲丙五等邊形之二邊又作乙丙線丁為圜心作甲丁線引長之至戊取丁己為甲丁之半取丙辛為丙庚三分之二則甲己乙辛之矩形等於五邊形之面積

論曰作乙丁線甲丁既倍於丁己則甲己為甲丁二分



之三丙庚既三倍於丙辛則庚辛倍於辛丙故丙庚為庚辛二分之三所以甲己與甲丁比若丙庚與庚辛比而甲己庚辛之矩形等於甲丁丙庚之矩形六卷十六惟丙庚等於乙庚故甲丁乙庚之矩形等於甲己庚辛之矩形惟甲丁乙庚之矩形倍於甲乙丁三角形一卷四十一故甲己庚辛之矩形倍於甲乙丁三角形所以五倍甲己庚辛之矩形為十箇甲乙丁三角形惟十箇甲乙丁三角形為兩箇五邊形故五倍甲己庚辛之矩形等於兩箇五邊形而庚辛倍於辛丙則甲己庚辛之矩形倍於甲己辛丙之矩形故兩

箇甲己辛丙之矩形等於甲己庚辛之矩形故十倍甲己辛丙之矩形等於五倍甲己庚辛之矩形即等於兩箇五邊形所以五倍甲己辛丙之矩形等於一箇五邊形惟五倍甲己辛丙之矩形等於甲己辛乙之矩形因辛乙五倍辛丙而甲己爲二形之公邊故也故甲己乙辛之矩形等於一箇五邊形



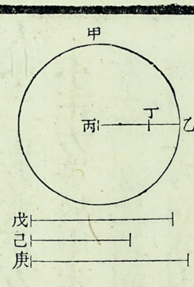
又論曰置容同球內十二面體五邊形二十面體三角形之甲乙丙圓其內作乙甲甲丙五等邊形之二邊次作乙丙線戊爲圓心作甲戊線引長之至己取戊庚爲甲戊之半取丙辛爲壬丙三分之一過庚點作丁丑線與甲己成直角則丁丑爲等邊三角形之一邊而甲丁丑爲等邊三角形本卷一題系甲庚辛乙之矩形既等於五邊形本題例而甲庚庚丁之矩形等於甲丁丑三角形十一卷四則甲庚辛乙之矩形與甲庚庚丁之矩形比若五邊形與三角形比惟甲庚辛乙之矩形與甲庚庚丁之矩形比若乙辛與丁庚比六卷一故十二倍辛乙與二十倍丁庚比若十二倍五邊形與二十倍三角形比即十二面體之總面與二十面體之總面比惟十二倍乙辛等於十倍乙丙因乙辛五倍於辛丙而乙丙六倍辛丙故也又二十倍丁庚等

於十倍丁丑倍丁庚故也故十倍乙丙與十倍丁丑比即乙丙與丁丑比若十二面體總面與二十面體總面比而乙丙爲六面體之一邊十三卷八又十七丁丑爲二十面體之一邊故十二面體之總面與二十面體之總面比若六面體之一邊與二十面體之一邊比

第五題

大小二正方大正方等於中末全線及大分之二正方和小正方等於中末全線及小分之二正方和則大小正方之二邊比若同球所容六面體二十面體之二邊比

論曰置容同球內十二面體五邊形二十面體三角形



之甲乙平圓本卷二丙爲圓心從心至周任作丙乙線於丁點分爲中末線丙丁爲大分則丙丁爲圓內十邊形之一邊十三卷五又九置本球所容二十面體之邊戊十二面體之邊己六面體之邊庚十三卷十八則戊爲本圓內等邊三角形之邊己爲本圓內五邊形之邊而己爲庚之大分十三卷十七題系戊既爲等邊三角形之邊則戊之正方三倍乙丙之正方十三卷十二又乙丙乙丁之二正方和三倍丙丁之正方十三卷四屬理戊之正方與乙丙丙丁之二正方和比若乙丙與丙丁之二正方比

惟乙丙與丙丁之二正方比若庚與己之二正方比。本卷七 葢己爲庚之大分故也十三卷十七 故戊之正方與乙丙乙丁之二正方和比若庚與己之二正方比以屬理反理推之庚與戊之二正方比若己之正方與乙丙乙丁之二正方和比惟乙丙丙丁之二正方和等於己之正方因五邊形一邊之正方等於同圜所容六邊形十邊形二邊之正方和故也十三卷十 故庚與戊之二正方比若乙丙丙丁之二正方和與乙丙乙丁之二正方和比惟乙丙丙丁之二正方和與乙丙乙丁之二正方和比即中末全線及大分之二正方和與全線及小分之二正方和比。本卷七 故庚與戊之二正方比若中末全線及大分之二正方和與全線及小分之二正方和比。而庚爲六面體之一邊戊爲二十面體之一邊是以大正方等中末全線及大分之二正方和小正方等全線及小分之二正方和則大小二正方之邊比若同球所容六面體二十面體之邊比

第六題

同球所容六面體之一邊與二十面體之一邊比若十二面體與二十面體比。

論曰同球所容十二面體之五邊形及二十面體之三

角形既爲同平圓所容本卷二凡切球界相等之平圓距球心之線必等因從球心至平圓之垂線必等皆在平圓心故也故從球心至平圓所容十二面體之五邊形及二十面體之三角形二面之垂線皆爲圓面之垂線所以十二面體之五邊形二十面體之三角形爲二底面球心爲頂點之二錐體等高凡等高之錐體比若其底面比十二卷五又六故五邊形與三角形之二面比若十二面體二十面體之各一面爲底球心爲頂點之二錐體比所以十二箇五邊形與二十箇三角形比若十二箇五邊底與二十箇三角底之等高錐體比惟十二箇五邊形爲十二面體之總面二十箇三角形爲二十面體之總面故十二面體與二十面體之二總面比若十二箇五邊底與二十箇三角底之錐體比而十二箇五邊底之錐體即十二面體二十箇三角底之錐體即二十面體所以十二面與二十面二體之總面比若十二面與二十面之二體積比惟十二面與二十面之二總面比若六面與二十面二體之邊比本卷四是以六面與二十面二體之各一邊比若十二面與二十面之二體積比

第七題