N° 1682.

J. Gregory à H. Oldenburg.

25 décembre 1668.

La lettre a été publiée dans les Philosophical Transactions du 15 février 1668/9 No. 44 [V. st.] [1]).

An Extract

Of a Letter of Mr. James Gregory to the Publiſher, containing ſome Conſiderations of his, upon Mr. Hugens his Letter, printed [2]) in Vindication of his Examen of the Book, entitled *Vera Circuli & Hyperbola Quadratura* [3]).

Ex duobis Argumentis, quibus conatur Nobiliſſimus Dominus *Hugenius* doctrinam meam evertere, primo quidem, reſponſionis fundamentum dedi in *Proaemio* ad *Geometriae partem univerſalem* [4]): alterum autem provenit ſolummodo à *Propoſitione* 11. non recte, opinor, ab *Hugenio* intellecta. quam tandem admittit poſt Correctiones (*ut inquit*) a me factas. Ut autem, ſimul cum reſolutione Objectionum, omnem evertam dubitandi rationem, ex admiſſa *Propoſitione* 11ma. in forma conabor probare ſyllogiſtica, Nullam eſſe rationem Analyticam inter Circulum et diametri Quadratum: Praeter Modum quippe et Figuram nil deeſt in hactenus à me publicatis, quin id integre demonſtretur; quae interim forma raro à Geometris exigitur. Dico itaque,

Si daretur ratio Analytica (ſeu ratio notis Analyticis exprimenda) inter Circulum et Diametri quadratum, tunc Circulus analytice componeretur ex Quadratis, inſcripto & circumſcripto. Sed poſterius eſt abſurdum. Ergo. Sequela *Majoris* ſic probatur;

Quantitas quaeſita & determinata invenitur ex quantitatibus quibuſcunque eam determinantibus, in ea ratione, ſeu relatione quam habet quantitas determinata ad dictas quantitates determinantes. Sed Quadratum inſcriptum & circumſcriptum Circulum determinant, ideoque ex illis Circulus daretur in ea relatione, quam habet ad diametri Quadratum vel ejus ſemiſſem, hoc eſt ſi eſſet ratio analytica inter Circulum & Diametri quadratum; ex dictis quantitatis determinantibus *analytice* componeretur Circulus. Ex dictis enim quantitatibus omnia analytice componi poſſunt, quae ad eas rationem habent analyticam.

Secundi ſyllogiſmi *Minor* eſt evidentiſſima. *Major* autem eſt Axioma ab omnibus Geometris tacite admiſſum.

Minor ſyllogiſmi prioris ſic probatur.

Eodem modo componitur Circulus ex Quadrato inſcripto et circumſcripto, quo componitur Quadrans Circuli ex Triangulo inſcripto et Trapezio vel potius Quadrato circumſcripto. Sed ex 11ma *Propoſitione* Quadrans circuli ſeu Sector non poteſt componi analytice ex Triangulo inſcripto & Quadrilatero circumſcripto. Ergo.

Major eſt evidens. At poterit fortaſſe diſtingui *Minor*, dicendo: Propoſitionem 11am veram eſſe in methodo *Indefinita;* ſed poſſe eſſe falſam in methodis *particularibus*. At inſto. Omnis methodus indefinita in methodos ſeu caſus particulares eſt reſolubilis. Sed haec methodus indefinita, nempe quod Sector ſit terminatio datae ſeriei convergentis, in nullam particularem reſolvi poteſt. Nulla igitur datur hic methodus particularis. *Major* patet, quia quantitates aequales in ſe mutuo ſunt reſolubiles. *Minorem* ita probo; Si haec Methodus indefinita reſolveretur in aliquam particularem, reſolutio fieret vel ab Analyſi *ſpecioſa* vel *numeroſa*. Sed neutrum dici poteſt. Ergo. *Major* patet ex ſufficienti enumeratione. *Minor* ſic probatur: Non ab Analyſi *Specioſa*, quoniam haec methodus *indefinita* ad eam eſt irreducibilis, ut patet ex *Propoſitione* 11ma; Non à *Numeroſa*, quae hic eſt interminabilis proindeque invariabilis.

In hanc ultimam diſtinctionem reſolvitur Ia Objectio *Hugenii*. Velim enim Nobiliſſimum Virum conſiderare, Omnem plenam Problematis ſolutionem eſſe *Indefinitam*. Nam methodi *Particulares*, cum ſint *Infinitae*, exhiberi omnes nequeunt; neque dirigi poſſunt à tenore Problematis, quippe illis omnibus communi: Ideoque requiritur methodus *Generalis* ſeu Indefinita, *Particularium* directrix. Agnoſco utique methodos Particulares caſu ſaepe inveniri abſque ope Generalis, attamen fatendum eſt Geometris, nullam eſſe nec poſſe fieri Methodum Particularem, in quam reſolubilis non ſit methodus Indefinita. Si igitur methodus Indefinita omni reſolutioni ſit impervia (ut in *Propoſitione* 11ma eſt demon-

[1]) La Société Royale avait accordé cette publication. On lit dans Birch à cette date:
„Mr. James Gregory's reply to Monſieur Chriſtiaan Huygens in defence of his „Vera Circuli et Hyperbolae quadratura", was declared fit to be printed in the Philoſophical Tranſactions, but withal, that care ſhould be had of omitting all that might be offenſive."

[2]) Journal des Scavans du 12 novembre 1668. Conſultez la Lettre N°. 1669.

[3]) A cet en-tête se trouve jointe la note historique suivante:
„*The firſt occaſion of the exchange of Letters on this Subject was given in the* Journal des Scavans *of* July 2. 1668. *to which a civil return was made in* Numb. 37. *of theſe Tracts: which having been judiciouſly animadverted upon in another* Journal des Scavans, *viz. of* Nov. 12. 1668. *it was thought equitable here to make publick, what M.* Gregory *hath ſince imparted thereupon, out of a deſire expreſſed by him, further to elucidate that controverſie. Which how ſatiſfactory it is, we leave to the intelligent to judge; profeſſing, that we are no further concern'd in this conteſt, than to let the Sagacious Reader know the proceedings thereof, by referring him to the* French Journals *about what is ſaid thereof on the one hand, and by delivering in theſe Papers, what comes from the other: which as't is intended to be done without animoſity or offence, ſo we deſire the candid* Reader *will pardon us for diverting him thus much by this diſpute from what elſe he might juſtly expect in theſe Philoſophical Occurrences. The Anſwer it ſelf of M.* Gregory, *follows in the ſame language, wherein he thought fit to communicate it.*"

[4]) J. Gregorius, Geometriae Pars univerſalis, inſerviens quantitatum curvarum tranſmutationi et menſurae. Venet. 1667. in-4°.

ſtratum) eodem modo omnes Particulares reſolutionem etiam reſpuent; proindeque tam Definita quam Indefinita nullam compoſitionem agnoſcit. Talis enim Compoſitio, qualis Reſolutio.

Etiamſi praedicta, meo quidem judicio, abunde ſufficiant, ne tamen ullus relinquatur cavillationi locus, 11^{mam} noſtram *Propoſitionem* etiam in *Definitis* hic demonſtrabimus. Sit ergo B. Polygonum intra Circuli Sectorem, 2 B. Polygonum circumſcriptum & priori ſimile; ſufficit enim Polygonorum proportionem definire, ut Theorema definite demonſtretur. Continuetur Series convergens ut ſit ejus terminatio ſeu Circuli Sector Z. Dico, Z non poſſe componi *Analytice* ex Polygonis *definitis* 2 B. Si fieri poteſt, componatur Z. Analytice ex Polygonis Definitis B, 2 B. ſintque duae quantitates Indefinitae a & x, e quibus componatur m eodem modo, quo Z componitur à quantitatibus B, 2 B; Item eodem modo componatur n ex quantitatibus $\sqrt{ax}$ $\frac{2ax}{a+\sqrt{ax}}$: quantitates m, n, non ſunt indefinite aequales ex *propoſitione* 11^{ma}. Si igitur inter m & n fingatur aequatio; a manente quantitate indefinita, aequatio inter m & n tot habebit radices ſeu quantitates in quas reſolvitur x, quot quantitatum, inter ſe diverſas rationes habentium, binarii ſunt in rerum natura, quae vices quantitatum a, x, ſubire poſſunt, hoc eſt quae eandem quantitatem *Analytice* ex ſe ipſis componunt eodem modo, quo eadem quantitas componitur ex ipſarum media Geometrica $\sqrt{ax}$, & ex media Harmonica inter dictam mediam Geometricam & x, nempe $\frac{2ax}{a+\sqrt{ax}}$, ita ut compoſitio ſit eodem modo quo Z componitur ex B. & 2 B: atque ex Conſectario *Propoſitionis* 10^{mae}, omnes quantitatum binarii, rationes quoque diverſas inter ſe habentium, B 2B, C D, E F, G H, &c. in infinitum, poſſunt ſupplere vices quantitatum a, x, quoniam Z eodem modo componitur ex B 2B, quo ex C D, E F, vel G H, &c. & proinde aequatio inter m & n radices habet numero infinitas. Sed omnis aequatio habet ad ſummum tot radices, quot habet dimenſiones; & proinde aequatio inter m & n dimenſiones habet numero infinitas, quod eſt abſurdum; ideoque Z ſeu Circuli Sector non poteſt Analytice componi ex Polygonis definitis B, 2B. quod demonſtrandum erat. Hinc manifeſtum eſt, Terminationem cujuſlibet ſeriei convergentis, ſi non poſſit componi ex terminis convergentibus *indefinite*, nec poſſe componi *definite;* adeoque evaneſcit ſimul cum noſtra diſtinctione Objectio *Hugenii* prima.

B	2 B
C	D
E	F
G	H
Z	
a	x
$\sqrt{ax}$	$\frac{2ax}{a+\sqrt{ax}}$
m	
n	

Idem in Objectione ſua ſecunda non videtur advertiſſe, me non ſolum in *Propoſitione* 11^{ma}, ſed etiam in toto meo Tractatulo intelligere per Extractionem radicum, Reſolutionem omnium poteſtatum ſive purarum ſive affectarum; omnium quippe eadem eſt ratio, neque ulla imaginabilis eſt in demonſtratione diverſitas,

ſive Sector ſupponatur Radix alicujus poteſtatis purae, ſive affectae ad puram irreducibilis. Nam ſi Sector eodem modo fiat ex primis terminis convergentibus quo ex ſecundis (ut in Conſectario *propoſitionis* 10^{mae} eſt demonſtratum) etiam omnes ejus poteſtates ſive purae ſive quocunque modo affectae eodem modo componitur é primis quo é ſecundis terminis convergentibus, quae (in Analyticis exhibitae) erunt aequales quantitates eodem modo Analytice compoſitae ex primis quo ex ſecundis terminis convergentibus; quod eſt abſurdum, nempe contra *Propoſitionem* 11^{mam} admiſſam. Senſus igitur integer *Propoſitionis* 11^{mae} eſt; Hoc Problema (*E datis duobus polygonis complicatis*, *invenire Sectorem ſive Circularem ſive Hyperbolicum ab illis determinatum*) non poteſt reduci ad ullam aequationem Analyticam.

In comparatione *Hugeniana* inter noſtras methodos, agnoſco, meas approximationes propoſitionis 20^{ae} et 21^{ae} eaſdem eſſe cum *Hugenianis*, ſed methodo mihi peculiari demonſtratas. At meam approximationem in fine *propoſitionis* 25^{ae} non percipere videtur *Hugenius;* aliam interim ſibi fingit: hanc primo meam non eſſe probat, deinde tamen eam cum ſua comparat, victoriaque potitur. Sed lente hic feſtinandum.

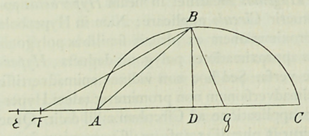
Sit a Polygonum, Circulo vel Sectori inſcriptum, c Polygonum inſcriptum duplo plura habens latera, d autem ſit Polygonum circumſcriptum ſimile ipſi c. Ex 20^{ma} *propoſitione* Sector eſt major quam $\frac{4c-a}{3}$; & ex 21^{ma}, Sector eſt minor quàm $\frac{2d+c}{3}$, inter quos terminos ſit maximus quatuor arithmetice continue proportionalium $\frac{8d+8c-a}{15}$, nempe noſtra approximatio; quam rigidiſſimis *Hugenii* cenſuris ſubjicio. Hallucinatur autem *Hugenius*, quod Polygona a & d ſimilia ſumeret, cum debeant eſſe c & d, quae duplo plura habent latera. Ne autem dicat, factam eſſe à me correctionem, conſideret hanc approximationem non ſolum verbis *propoſitionis* 25^{ae}, ſed & praxi *propoſitionis* 30^{mae} eſſe conſonam, ubi approximationem *propoſitionis* 21^{mae} ex ultimis ſimilibus Polygonis conſtruo: ridiculum enim eſſet, illam e penultimis minus praeciſam dare, cum eadem operâ detur magis praeciſa ex ultimis. At miror cum *Hugenius* incidiſſet in meam *Hyperbolae* approximationem, quod eam non potuerit *Circulo* applicare; Nam in Hyperbola abſque dubio 24^{tae} *proportionis* approximationem ex ultimis ſimilibus polygonis conſtruxit: Omnis enim ad *Circulum* approximatio ex polygonis deducta, *Hyperbolae* eſt etiam applicabilis, & vice verſa. Sed hoc non videtur animadvertiſſe *Hugenius;* alioqui in fine ſuarum Animadverſionum non promitteret talem Hyperbolicam approximationem, de cujus applicatione ad Circulum nihil dicit. Quae autem illic affirmat (ſi de ſemet loquitur in plurali) tranſeant; ſi vero etiam de me adeo fidenter ſibi perſuadeat, falli ipſum putem, cum haec eadem quadratura, de qua loquitur, antequam ab eo videretur, ad laboris dimidium à me ſit reducta.

Ne autem *Hugenii* praxis Geometrica minus peritis videatur noſtram ſuperaſſe, ex noſtra approximatione, ab *Hugenio* rejecta, ſequentem praxin exhibebo.

In Figura *Hugeniana* (quam vide infra) ſit AC = A, ZAB [5]) = B, ſitque A + B : B :: 2 B : C; eritque $\frac{8C+8B-A}{15}$ major, quam arcus ABC; differentia autem, in ſemi circumferentia minor erit quàm ipſius $\frac{1}{3500}$, in triente minor quàm ipſius $\frac{1}{40000}$, & in quadrante minor quàm ipſius $\frac{1}{300000}$. Sed quoniam praecedens approximatio major eſt quàm arcus, aliam addamus eodem minorem. Sit A : B :: B : D; $\frac{12\,C + 4\,B - D}{15}$ minor erit quam arcus ABC; differentia autem in ſemi-circumferentia minor erit quàm ipſius $\frac{1}{1000}$, & in quadrante minor quam ipſius $\frac{1}{60000}$. Inter has approximationes ſit maxima, penultima ſex continue *Arithmetice* proportionalium, quae minor erit quàm arcus, differentia autem, in ſemi-circumferentia minor erit quàm ejuſdem $\frac{1}{13000}$, et in quadrante minor quàm ejuſdem $\frac{1}{3000000}$. Sed haec levia mihi videntur, cum poſſim Approximationes exhibere, quae ab ipſa ſemi-circumferentia differant minori intervallo, quàm quaelibet ejus pars aſſignata, neque nobis amplius apparent haec mirabilia, cum demonſtratio ſolida innoteſcat. Ad reliqua ab *Hugenio* publicata, cum à meo inſtituto ſint aliena, nihil dico, niſi quod ipſa *Hugenii* dicta (non obſtante exactiſſima ſua, ut ait, materiae hujus examinatione) à meae *Appendiculae* factis, ni fallor, longe ſuperentur. Vale. *Decemb.* 15. 1668.

Figura *Hugenii* haec eſt, quam ipſe hoc ſenſu, licet Gallice, ſic explicat.

Sit Arcus Circuli, qui non excedat ſemi-circumferentiam, ABC, cujus ſubtenſa ſit AC; & dividantur ambo in partes aequales per lineam BD. Ducta ſubtenſa AB, capias inde $\frac{2}{3}$, eaſque jungas inde ab A ad E in linea CA protracta. Dein, reſecta lineae DE parte decima EF, ducas FB, & tandem BG, ipſi perpendicularem: & habebis lineam AG aequalem Arcui ABC, cujus exceſſus tantillus erit,



5) Liſez: 2 AB.

ut etiam tunc, quando hic arcus aequalis erit ſemi-circumferentiae Circuli, futura non ſit differentia $\frac{1}{1400}$ ſuae longitudinis; at quando non eſt niſi tertiae partis circumferentiae, differentia non erit $\frac{1}{13000}$; et ſi non eſt niſi quartae partis, non differet niſi $\frac{1}{90000}$ ſuae longitudinis.

N° 1683.

Christiaan Huygens à [R. Moray].

[? décembre 1668].

La minute se trouve à Leiden, coll. Huygens.
Elle est la réponse au No. 1668. R. Moray y répondit le 14 février 1669.

Monsieur

Si vous ne ſcaviez pas que les lettres qu'on adreſſe par voie d'amy ſont d'ordinaire longtemps en chemin, vous auriez ſujet de vous eſtonner que je ne reponds qu'aujourdhuy a la voſtre du 21 Octobre. Elle ne m'a eſtè rendue que lundy dernier, et m'a procurè cet avantage de recevoir une viſite de Meſſieurs Beringhen pere [1]) et fils [2]) en meſme temps, qui ſont aſſurement perſonnes de merite et dont je devois rechercher l'amitiè, ſi elle ne m'avoit eſtè donnee par voſtre moyen. Ie vous en remercie donc tres humblement et non pas moins de ce que a cette occaſion vous avez bien voulu avoir la bontè de renouveller noſtre anciene correſpondance, dont je me ſuis aſſez ſouvent reprochè une ſi longue interruption, et que par ma faute j'eſtois privè de tout commerce avec voſtre Illuſtre et Scavante Societè.

I'ay aſſez teſmoignè par ma derniere [3]) a Monſieur Oldenbourg que j'eſtois

1) Sur Jean de Beringhen, voir la Lettre N°. 1666, note 1.
2) Théodore de Beringhen, fils aîné de Jean de Beringhen et de Marie de Menours, naquit en 1644. Il épousa Elisabeth Goyon, était protestant zélé, et fut persécuté et emprisonné comme tel. Finalement, en 1687, il fut expulsé, comme l'avaient été son père et plusieurs de ses sœurs. Il raconta leurs revers dans l'ouvrage anonyme:
Lettre d'exhortation et de consolation sur les souffrances de ces derniers temps. la Haye, 1704, in-12°.
3) Consultez la Lettre N°. 1670.

bien aiſe de le recommencer ſur ce qu'il m'avoit demandè par ordre de la Societè Royale la communication de ce que j'ay trouvè des regles de mouvement, dont je luy envoieray quelque choſe par le prochain ordinaire, n'ayant pu eſtre preſt pour cettuici. Ie vous prie comme je l'en ay priè auſſi de faire en ſorte que l'on m'envoie en recompenſe les experiences ſur ce meſme ſujet que ceux de la Societè Royale ont faites et les conſequences qu'ils en ont tirees et ſur tout l'excellent Monſieur Wren, que l'on dit y avoir travaillè [4]) le plus.

I'ay encore une priere a vous faire Monſieur, c'eſt de me faire avoir raiſon s'il y a moyen d'un de vos compatriotes Monſieur Gregory, de qui le procedè a fort ſcandalizè tous les honeſtes gens d'icy qui ont veu les choſes qu'il a eſcrites contre moy ſans en avoir eu ſujet. Prenez s'il vous plait la peine de chercher parmy les lettres que vous avez de moy ſi vous les avez gardees, celle [5]) ou il y a la regle [6]) par logarithmes pour trouver la peſanteur de l'air dans les hauteurs donnees par deſſus la terre, et de la luy montrer, apres quoy s'il n'avoue publiquement qu'il m'a accuſè a tort de n'avoir jamais envoiée cette regle contre ce que j'avois aſſurè, je ſeray contraint de me juſtifier moy meſme et peut eſtre de luy dire ſes veritez ainſi qu'il a meritè.

C'eſt dommage que cet homme qui paroit avoir de l'eſprit aye une conduite ſi peu raiſonable qui ne ſervira qu'on luy attire des enemis. car je vois deſia que Monſieur Wallis [7]) n'eſt guere plus ſatiſfait de luy que moy. Il faut qu'il n'aye pas encore grande habitude avec vous, parce ſi cela eſtoit il devroit avoir profitè et de vos conſeils et de l'exemple de vos vertus. Je vous prie de croire que je les honore comme j'ay touſjours fait et que je ſuis &c.

---

4) Consultez la Lettre de Wren du 17 décembre 1668 [V. st.], qui suit, comme Appendice N°. 1696, la Lettre de H. Oldenburg du 14 janvier 1669.
5) Consultez la Lettre N°. 1046, du 18 août 1662, et l'Appendice N°. 1048.
6) Moray lui envoya cette copie le 14 février 1669.
7) Consultez la Lettre N°. 1676.

N° 1684 [1]).

J. Gregory.

[1668].

Les pièces ont été imprimées dans ses „Exercitationes Geometricae" [2]).

Praefatio [3]).

Tanta eſt in ratiocinio Mathematico certitudo & evidentia, ut eo ritè conſiderato nihil non audeant etiam Viri modeſtiſſimi: ſi tamen magni quid tentaverint, ideo innata eſt humano generi invidia & aemulatio, ut generalis quaſi ſiat conſenſus, illos ludibrio exponendi: eorum enim inventa (etiamſi veriſſima) à prorſus ignaris deridentur, à ſciolis vel ſurripiuntur vel rejiciuntur, & à verè doctis (quorum judicio & authoritati talia ſubmittuntur) neglecta manent. Imo non deſunt [4]), qui, ejuſdem inventi partem ignobiliorem, aliis quippe approbatam, ſibi arrogant, & reliqua longè ſubtiliora non ſine famae ſuae jacturâ faſtuoſè rejiciunt; reſponſa interim ſpernunt, praeclarius exiſtimantes, infallibiles haberi apud ignaros, quàm ingenui apud doctos: O coeca famae libido, quae homines ita dementat, ut omniſcii apparere ſatagant! Non carent hoc communi fato noſtrae de circulo & hyperbolâ lucubrationes, quas à pauciſſimis video vel intelligi vel examinatu dignas aeſtimari: Cenſores enim plerique ſcriptorum potius famam quàm rationes conſiderant; nam adeo arridet hominibus authoritas, ut nihil novi (quod alicujus momenti ſit) à novis authoribus inveniri credant. Ego tam iniquis cenſuris ſtimulatus, hiſce exercitationibus conabor oſtendere, etiam in rebus Mathematicis maximè obviis & uſui humano neceſſariis, non pauca eſſe quae ſubtiliſſimos Geometras hucuſque latuerunt; atque ita fortaſſe de aliis noſtris ſpeculationibus minùs rigidè judicabitur. Quae interim objiciuntur à praeſtantiſſimo

---

1) Nous avons admis ces pièces ici, parce qu'elles sont nécessaires pour bien comprendre la dispute entre J. Gregory et Chr. Huygens, et la correspondance qui s'y rattache. En outre, le livre cité est rare et difficilement accessible.
2) Exercitationes Geometricae: A Jacobo Gregorio, Scoto, è R. Societate. Appendicula ad veram Circuli & Hyperbolae Quadraturam. N. Mercatoris Quadratura Hyperbolae Geometricè demonſtrata. Analogia inter Lineam Meridianam Planiſphaerii Nautici & Tangentes Artificiales Geometricè demonſtrata; ſeu, quod Secantium Naturalium additio efficiat Tangentes Artificiales. Item, quòd Tangentium Naturalium additio efficiat Secantes Artificiales. Quadratura Conchoidis. Quadratura Ciſſoidis. Methodus facilis & accurata componendi Secantes & Tangentes Artificiales. Londini, Typis Guilielmi Godbid, & Impenſis Moſis Pitt, Bibliopolae, in vico vulgò vocato Little Britain. Anno M.DC.LXVIII. in-4°. 27 pages.
3) Cette préface a principalement rapport à J. Wallis. On y fait allusion dans les Lettres Nos. 1672, 1676 et aussi dans le N°. 1685.
4) Ici Gregory fait probablement allusion à Chr. Huygens.

Geometra [5]) contra noſtram Doctrinam, hic reſolvere conabor. *Admitto* (inquit) *in Propoſitione* 11 *Demonſtratum eſſe, quod Sector ABIP non ſit analyticè compoſitus à triangulo ABP & Trapezio ABFP; ſed non video ubi demonſtretur Sectorem ABIP non eſſe analyticè compoſitum ex aliis quantitatibus.* Ego facilè agnoſco infinitas alias eſſe quantitates, è quibus analyticè componitur Sector ABIP, ſed Reverendum Virum interrogo, quomodo innoteſcant illae quantitates è datis ſolummodo triangulo ABP & Trapezio ABFP, nam hae Problema determinant, & proinde aliae fruſtra dantur: ſi autem invenviantur; inveniuntur vel analyticè vel non analyticè; ſi poſterius, concedo totum; ſi autem analyticè inveniantur è quantitatibus ABC, ABFP, & Sector rurſus analyticè componatur ex illis; Idem Sector etiam analyticè componetur ex quantitatibus ABP, ABFP, quod eſt abſurdum, nempe contra Propoſitionem 11, quae admittitur. Si autem inſiſtatur, Sectorem poſſe componi analyticè ex aliis quantitatibus, quae illam determinant praeter ABP, ABFP: dico ABP, ABFP, vel poſſe componi analyticè ex aliis illis quantitatibus vel non; ſi poſterius, concedo totum, ſed tales quantitates exhiberi deſidero; ſi prius, Analyſeos tenorem examinando, ſatis conſtabit alias illas quantitates etiam analyticè componi ex ABP, ABFP, & ita ad primum caſum relabimur. Satis etiam ſciunt Geometrae, perinde eſſe quo ad ſolutionem, quomodocunque determinetur problema; ſi igitur ſolutio analytica ſit impoſſibilis ex quantitatibus ABF, ABFP, illud determinantibus; impoſſibilis etiam erit ex aliis, quas analyticè exhiberi poſſunt. Exiſtimabam duas noſtras petitiones unà cum ſcholio Propoſitionis 11. huic dubio ſatiſfeciſſe; ſed fateor humeris meis onus impar, nova principia (etiamſi intellectui claro & exercitato evidentiſſima) ita ſtabilire, ut unicuique ſatiſfaciat. Poſſem aliis objectionibus hic reſpondere, quae me anxium tenebant, dum haec primò mente revolverem; ſed animadverto objectiones Mathematicas cuilibet praeter Authorem proprium frivolas apparere. In Epiſtola *verae Circuli & Hyperbolae quadraturae* pagina 5. agnoſco me totum inſtitutum ad puram Geometriam non reduxiſſe, quoniam robur principalis propoſitionis nempe 11. dependet tantùm ex Canonibus analyticis; adeo certa tamen eſt, ut, eâ vacillante, neceſſario corruat tota Analyſis; at in reliquis omnibus exiſtimo me rigoroſè ſatiſfeciſſe. Si autem quis velit rigore Geometrico propoſitionem 11. demonſtrare; poterit fortaſſe in inſtitutum aſſequi hac ratione. Demonſtretur primò haec notio incommenſurabilitas: Si fuerint duae vel plures quantitates inter ſe commenſurabiles & quaedam alia, quae ex illarum Additione, Subductione, Multiplicatione, Diviſione, non poteſt componi; erit illa alia quantitas prioribus incommenſurabilis, & vice verſâ: deinde ex hac notione deducatur univerſalis doctrina incommenſurabilitatis; quae erit non ſolùm analoga huic doctrinae non analyticae, ſed illi etiam viam ſternet.

5) Ici il s'agit de J. Wallis.

APPENDICULA
Ad Veram
CIRCULI
&
HYPERBOLAE QUADRATURAM.

Ante menſes aliquot evulgavit Nobiliſſimus Vir *Chriſtianus Hugenius* animadverſiones quaſdam [6]) in meam Circuli & Hyperbolae quadraturam, quibus exiſtimo me [7]) (in tranſactionibus Philoſophicis Menſis *Julii*) ſolide ſatiſfeciſſe: duae autem fuerunt parvi momenti, quibus tunc temporis reſpondere non potui; utpote in ejus ſcriptis nequaquam verſatus: prima erat, quod mea circuli approximatio eſſet minùs praeciſa quam ſua [8]); ſecunda, quod mea Hyperbolae menſuratio eſſet optima, quam tamen non credebat Regiae Societati apparere novam, quoniam illam eandem Hyperbolae quadraturam ante aliquot annos ſuppoſuit; Dum Regiae Societati monſtraret methodum ſuam inveniendi aëris gravitates in diverſis a terra diſtantiis [9]). Conatur hic tacitè *Hugenius* me ignorantiae & plagii accuſare; ſed non animadvertit ſe ſibi contradicere, dum meam Hyperbolae menſurationem amplectitur, circularem autem rejicit, cum utraque una & eadem ſit: oportet ergo ut non percipiat ultimas ſuas approximationes in libro de magnitudine Circuli [10]) (quas tanti aeſtimat) Hyperbolae etiam eſſe applicabiles; debuit igitur & meam Hyperbolae quadraturam rejicere: at animadvertendum eſt ultimam meam approximationem (cujus demonſtratio ex hac appendicula dependet) in fine Propoſitionis 25, magis eſſe praeciſam & multo minus laborioſam quam ulla *Hugeniana*. Quod attinet ad ſecundam *Hugenii* accuſationem: expectabam certe à tanto viro majorem ingenuitatem; Nec enim potui hactenus edoceri, eſſe quenquam è Societate Regia, qui tale quid ab *Hugenio* unquam prolatum recordatur [11]). Non ſolum praedictae rationes ſed etiam aliae mihi quaſi perſuadent Hyperbolae quadraturam, ſaltem ante tot annos, *Hugenio* non innotuiſſe; nam nihil in tota Geometria à Mathematicis adeo eſt deſideratum, immo nec uſui humano magis accommodatum; quis ergo Geometra ſpeculationem non ſolum celeberrimam ſed etiam maximae utilitatis 7 vel 8 annorum ſpatio adeo ſuperſtitioſè celaret; & praecipuè *Hugenius*, qui non adeo alienus eſt à ſcribendi pruritu, ut res ordinarias aliquando etiam ſatis prolixè non edat in lucem: teſtantur *Theoremata de Quadratura Hyperboles*, *El-*

6) Voir la pièce N°. 1647.
7) Voir la pièce N°. 1653.
8) Consultez la pièce N°. 1648, note 1.
9) Consultez la Lettre N°. 1671 et la pièce N°. 1648, note 1.
10) Cet ouvrage a été cité dans la Lettre N°. 191, note 1.
11) Consultez la Lettre N°. 1671.

lipſis & Circuli ex dato portionum gravitatis Centro [12]), quae ſunt ſolummodo conſectaria ad generalia *Guldini* inventa, anno 1635 impreſſa, ſuppoſito tantum ſolido rotundo Hyperbolico circa Diametrum conjugatam, quod inventu non eſt difficile: teſtatur quoque *liber de Magnitudine Circuli* [13]), qui aliud non eſt quam comparatio ſegmenti Circularis cum ſegmento parabolico inſcripto vel circumſcripto eidem triangulo, ſatis etiam prolixe in lucem editus: atque haec omnia ſubtilitate utilitate & gloriâ Hyperboles quadraturae longè cedunt, hanc autem ſuo nomine indignam, vel reliquis ſaltem indigniorem cenſuit *Hugenius.* At parum refert quis ſit ejus primus inventor, ſatis enim conſtat me primum eſſe publicatorem; neque mihi eſſet difficile affirmare (ſi modo mentiri vellem) me ante 20 annos illam cognoviſſe: utcunque ſit, conabor hic Circuli & Hyperbolae quadraturam ad talem perfectionem promovere, ut *Hugenius* prolem ſuam vix cognoſcat.

Invenimus nos duplex compendium in menſuratione Circuli & Hyperbolae; Primum conſiſtit in continuatione ſeriei convergentis; Secundum in methodo inveniendi approximationes.

2 L		A	B.
M	a	C	D.
P	2 Q	E	F.
R	4 S	G	H.
T	8 V	J	K.
X	16 Y	N	O.
		Z.	

PROPOSITIO I.

Inter A, B quantitates arbitrarias eſt media Geometrica C, item inter C, B ſit media harmonica D, & continuetur ſeries convergens, ut ſit ejus terminatio, ſeu Circuli, Ellipſeos vel Hyperbolae ſector Z. Sit ut B ad C ita quantitas ad libitum 2 L ad M, ſitque inter L & 2 L + M media Geometrica P, & fiat $Q^2 =$ differentiae inter 4 L^2 & P^2, item $a^2 =$ differentiae inter 4 L^2 & M^2. Dico a : 2 Q : : C : E. Nam B : C. : : 2 L : M, & convertendo & componendo C + B : B : : M + 2 L : 2 L, ſed C + B : B : : 2 C : D, & ideo 2 C : D : : M + 2 L : 2 L; & duos ultimos analogiae terminos ducendo in differentiam inter M & 2 L, 2 C eſt ad D ut differentia inter 4 L^2 & M^2 ad differentiam inter 4 L^2 & 2 ML, & conſequentes duplicando, item priores terminos bipartiendo, C eſt ad D ut differentia inter 4 L^2 & M^2 ad differentiam inter 8 L^2 & 4 ML $=$ 4 Q^2, hoc eſt, C^2 eſt ad E^2 ut differentia inter 4 L^2 & $M^2 = a^2$ ad 4 Q^2, & ideo C : E : : a : 2 Q, quod, *&c.*

[12]) Voir l'ouvrage cité dans la Lettre N°. 95, note 1.
[13]) Consultez l'ouvrage cité dans la Lettre N°. 191, note 1.

PROPOSITIO II.

Eiſdem poſitis quae in antecedente. Dico E : D : : P : 2 L. ex antecedente 2 C : D : : M + 2 L : 2 L, & ultimos terminos ducendo in L, 2 C : D : : M L + 2 L^2 : 2 L^2, & conſequentes duplicando, item priores bipartiendo C : D : : M L + 2 $L^2 = P^2$: 4 L^2, & ideo E : D : : P : 2 L, quod, *&c.*

PROPOSITIO III.

Eiſdem poſitis, ſit inter L & 2 L + P media Geometrica R, ſitque $S^2 =$ differentiae inter 4 L^2 & R^2. Dico C : G : : a : 4 S. Eſt enim E : D : : P : 2 L, & componendo E + D : D : : P + 2 L : 2 L, ſed E + D : D : : 2 E : F, & proinde 2 E : F : : P + 2 L : 2 L, & poſteriores terminos ducendo in differentiam inter 2 L & P, item conſequentes duplicando & priores terminos bipartiendo, E eſt ad F ut differentia inter 4 L^2 & $P^2 = Q^2$ ad differentiam inter 8 L^2 & 4 P L $=$ 4 S^2, & ideo E : G : : Q : 2 S, & E : G : : 2 Q : 4 S, at ex hujus 1ma C : E : : a : 2 Q, & ideo ex aequalitate C : G : : a : 4 S, quod, *&c.*

PROPOSITIO IV.

Eiſdem poſitis, dico G : F : : R : 2 L, ex antecedente 2 E : F : : P + 2 L : 2 L, & poſteriores terminos ducendo in L, 2 E : F : : P L + 2 L^2 : 2 L^2, & conſequentes duplicando, item priores terminos bipartiendo, E : F : : P L + 2 $L^2 = R^2$: 4 L^2, & ideo G : F : : R : 2 L, quod, *&c.*

PROPOSITIO V.

Eiſdem poſitis, ſit inter L & 2 L + R media Geometrica T, ſitque V^2 aequalis differentiae inter 4 L^2 & T^2. Dico C : I : : a : 8 V. Eſt enim G : F : : R : 2 L & componendo G + F : F : : R + 2 L : 2 L, ſed G + F : F : : 2 G : H, & ideo 2 G : H : : R + 2 L : 2 L, & poſteriones terminos ducendo in differentiam inter 2 L & R, item conſequentes duplicando & priores terminos bipartiendo, G eſt ad H ut differentia inter 4 L^2 & $R^3 = S^2$ ad differentiam inter 8 L^2 & 4 R L $=$ 4 V^2, & ideo G : I : : S : 2 V, & G : I : : 4 S : 8 V, & ex hujus 3tia C : G : : a : 4 S, & ideo ex aequalitate C : I : : a : 8 V, quod, *&c.*

SCHOLIUM.

Ex praedictis manifeſtum eſt, ſeriem a, 2 Q, 4 S, 8 V, 16 Y *&c.* eſſe analogam ſeriei C, E, G, I, N; & proinde ut a ad terminationem ſuae ſeriei ita C ad ſectorem Z : at poſita 2 L binario cum numero quodam cyphrarum, inveniuntur omnes M, P, R, T, X, ex tot radicis quadratae extractionibus; & proinde poterit ſeries a, 2 Q, *&c.* produci ad libitum à paucis operationibus, exempli gratia ſi deſiderarem terminum 16 Y; produco feriem M, P, *&c.* in X, cujus quadrati differentia à $4\,L^2$ eſt quadratum ipſius Y: ſi autem quaeratur terminus convergens debitus termino 16 Y, dividatur duplum quadrati ipſius 16 Y per 8 V + 16 Y, & quotus dabit quaeſitum. Atque hoc eſt compendium non inelegans ad producendas Circuli, Ellipſeos vel Hyperbolae prolixiores ſeries convergentes; non tamen eſt diſſimulandum hanc methodum eſſe lubricam & in longa continuatione multas è notis poſterioribus falſificare, ob continuam Multiplicationem Numerorum Progreſſionis Geometricae duplae à binario.

Antequam accedamus ad ſecundum noſtrum compendium, conſiderentur hic Circuli proprietates quaedam eximiae.

Sit A polygonum regulare Circulo inſcriptum, B eidem ſimile circumſcriptum, C polygonum inſcriptum, duplum habens laterum numerum, D eidem ſimile circumſcriptum, & continuetur ſeries convergens, *&c.*

C erit medium Geometricum inter A & B.

D erit medium harmonicum inter C & B.

Si B ponatur perimeter polygoni B, erit C perimeter polygoni A, quoniam ſimilia polygona B, A, ſunt in duplicata ratione perimetrorum; erit quoque D perimeter polygoni D, quoniam polygona Circulo circumſcripta ſunt in eadem ratione cum ſuis perimetris; eodem modo erit E perimeter polygoni C, Item F perimeter polygoni F, & ſic deinceps.

Perimeter polygoni D erit medium harmonicum inter perimetros polygonorum A, B.

Perimeter polygoni C erit medium Geometricum inter perimetros polygonorum A, D.

Hae proprietates non ſolum inſunt Circuli integro, ſed etiam (conſideratis conſiderandis) omni ſectori: tertiam autem proprietatem ſi animadvertiſſet *Hugenius*, illi non opus fuiſſet tam prolixis demonſtrationibus eaſdem approximationes à polygonis ad eorum perimetros revocare, cum ſeries polygonorum eadem ſit cum ſerie perimetrorum.

Secundum noſtrum compendium conſiſtit in methodo inveniendi approximationes, quae ſequenti theoremati ſuperſtruitur.

THEOREMA.

P A B
C D
E F
Q G H
I K
L M
X
Z

In quacunque ſerie convergente A B, C D, *&c. cujus terminatio* Z, *ſi fuerint quantitas* P *eodem modo compoſita à terminis* A, B, *quo* Q *à terminis* C, D, *&* P *major fuerit quam* Q: *denique ſi componatur* Q *eodem modo à quantitatibus aequalibus* X, X, *quo à terminis* C, D *erit* X *major quam* Z: *ſi autem* P *fuiſſet minor quam* Q, *foret* X *minor quam* Z.

Quoniam enim P eodem modo componitur à terminis A, B, quo Q à terminis C D, & P major eſt quam Q, erit etiam Q major quam quantitas eodem modo compoſita à terminis E F, & haec major quam quantitas eodem modo compoſita à terminis G H, & ſic in infinitum uſque ad Z; & proinde Q multo major erit quam quantitas eodem modo compoſita à Z, Z, quo Q à C D vel X, X; hoc eſt, Q compoſita à X, X, major eſt quam quantitas eodem modo compoſita à Z, Z; & ideo X major eſt quam Z, quod, *&c.* Eodem prorſus modo demonſtratur ſecunda Theorematis pars.

Ex hoc Theoremate (caeteris paribus) facile patet differentiam inter X & Z eo eſſe minorem, quo minor fuerit indefinita differentia inter P & Q. Hinc patet campus vaſtiſſimus inveniendi approximationes non ſolum in Circuli & Hyperbolae menſura, ſed etiam in omnium aliarum ſerierum convergentium terminationibus: nos tamen unam particularem methodum eligimus, quam exiſtimamus eſſe reliquis faciliorem & minus prolixam, nempe ex inventorum terminorum combinatione; in hac enim prolixae operationes Arithmeticae evitantur. Ope noſtrae methodi ſequentes invenimus approximationes, quae hic examinandae ſubjiciuntur.

Sint duo polygona complicata A, B, nempe A intra Circuli vel Ellipſeos ſectorem, B extra: continuetur ſeries convergens in infinitum (nempe in CD, EF, G H, *&c.*) ut ſit ejus terminatio ſeu Circuli vel Ellipſeos ſector Z. Erit Z minor quam $\frac{16\,C + 2\,B - 3\,A}{15}$ & major quam $\frac{16\,D + A - 2\,B}{15}$, haec approximatio veras notas terminorum CD triplicat. Erit Z minor quam $[768\,F + 256\,E - 76D - 4C + B] : 945$ & major quam $\frac{1024\,E + 128\,D - 208\,C + 3\,A - 2\,B}{945}$, haec approximatio veras notas terminorum EF quadruplicat. Erit Z minor quam $\frac{12288\,E + 16384\,F - 576\,D - 1328\,C + 2\,B + 5\,A}{26775}$ & major quam $\frac{512\,E + 512\,F - 72\,C + A - 8\,D}{945}$, haec approximatio veras notas terminorum E F quintuplicat. Erit Z minor quam $\frac{524288\,G + 524288\,H - 74240\,E - 8704\,F + 1096\,C - A + 8\,D}{966735}$ & major quam $\frac{12582912G + 16777216H - 606208F - 1372160E + 2624D + 6448C - 2B - 5A}{27390825}$, haec approximatio ſextuplicat veras notas terminorum G H. Erit Z minor quam $[51539607552\,I + 68719476736\,K - 2499805184\,H - 5632950272\,G + 11354112F + 27783168E - 10816D - 26928C + 2B + 5A] : 112165428375$ & major quam $[2147483648\,I + 2147483648\,K - 304611328\,G - 36175872\,H + 4563456E + 41472\,F - 5192\,C - 8\,D + A] : 3958779825$, haec approximatio ſeptuplicat veras notas terminorum I K.

Ut apparat hanc noſtram methodum etiam eſſe applicabilem ſeriebus ſimplicibus, ſequentes conſiderentur approximationes. Erit Z major quam $\frac{64E-20C+A}{45}$, quae veras notas triplicat; & major quam $\frac{4096\,G-1344\,E+84\,C-A}{2835}$, quae quadruplicat; & major quam $\frac{1048576I-348160\,G+22848\,E-340C+A}{722925}$, quae quintuplicat; item & major quam

$$\frac{1073741824\,L-357564416\,I+23744512\,G-371008\,E+1364\,C-A}{739552275},$$

quae ſextuplicat.

Erit quoque Z minor quam $\frac{64\,F-20\,D+B}{45}$, quae triplicat, & major quam $\frac{4096\,H-1344\,F+84\,D-B}{2835}$, quae quadruplicat; & minor quam $\frac{1048576\,K-348160\,H+22848\,F-340\,D+B}{722925}$, quae quintuplicat; & major quam

$$\frac{107341824\,M-357564416K+23744512\,H-371008\,F+1364\,D-B}{739552275},$$ quae ſextuplicat.

Quod, ſi quis deſideret approximationes omnium poſſibilium ſimpliciſſimas, ſequentes tales eſſe non ſine ratione affirmo. Erit Z minor quam $\frac{8\,C+8\,D-A}{15}$, & major quam $\frac{12\,D+4\,C-B}{15}$, quae triplicat; & minor quam $\frac{320\,E+256\,F-52\,C+A}{525}$, & major quam $\frac{48\,C+64\,D-2\,B-5\,A}{105}$, quae quadruplicat; item minor quam $\frac{24704\,E+35072\,F-1356\,D-2460\,C+5\,B}{55965}$, & major quam $\frac{512\,E+512\,F-72\,C+A-8\,D}{945}$, quae quintuplicat.

Omnes hae approximationes (ſi analytice examinentur) praecedenti Theoremati quadrabunt; & inſiſtendo veſtigiis analyſeos, dicto Theoremati ſuperſtruenda eſt compoſitio Geometrica, quae ſatis difficilis & intricata reperietur. Methodum has approximationes inveniendi, ob diveras rationes mihi ſatis perſpectas, celare ſtatuo: paratus tamen ſum non ſolum alias longè differentes harum loco ſubſtituere, ſed etiam approximationes exhibere, quae veras notas octuplucent, nonuplicent, decuplicent, *&c.* in infinitum etiam in aliis ſeriebus convergentibus ex ſola hac terminorum convergentium combinatione.

Poſito A polygono ſectori Hyperbolico circumſcripto, & B inſcripto, *&c.*

eaedem approximationes inſerviunt Hyperbolae, hoc ſolo obſervato quod (in verarum notarum triplicatione, quintuplicatione, ſeptuplicatione, *&c.*) major approximatio nunc fiat minor & è contra.

Non opus eſt ut lectorem admoneam (modo praedicta intellexerit) has approximationes inſervire curvis circularibus & earum adſcriptis: Placet tamen ſequentes approximationes exhibere huic propoſito accommodatas. Sit A ſinus alicujus arcus, B ejuſdem tangens, C chorda & D tangens reſecta a recta per terminum diametri, ſeu duplum tangentis ſemiſſis arcus: erit arcus minor quam $\frac{96C-22A+B}{75}$, item minor quam $\frac{16\,C-3\,A+2\,D}{15}$, quae utraque veras notas triplicat, & major quam $\frac{320\,C+52\,D-56\,A-B}{315}$, quae quadruplicat.

N° 1685.

Christiaan Huygens à J. Gregory.

[1668] [1]).

La minute se trouve à Leiden, coll. Huygens.

Invenire aut inventa demonſtrare diſtant *δις δια πασων*. An ſibi partem honoris debitam putet dimenſionis hyperbolae quod inventum ſubtiliſſimum Nicolai Mercatoris [2]) demonſtratione alia [3]) probare conatus ſit. Mea [4]) de Circuli magnitudine et de Hyperboles ex dato gravitatis centro quam ridicule contemnit cum nihil boni habeat in ſuo Primo opuſculo [5]) quod non ex meis iſtis hauſerit. Propoſitiones enumero. Et haec cum plane eadem ſint cum meis quae 14 annis ante edita erant, putat ſe perſuaſum nobis cum dicit in ſcriptis meis minime verſatum adhuc uſque fuiſſe. Sed eodem modo fucum facile antehac ſperavit cum in dioptricis [6]) ſuis

[1]) Cette pièce est évidemment un projet de réponse à la pièce N°. 1684; toutefois, cette réponse n'a jamais paru.

[2]) Sa „Logarithmotechnia", citée dans la Lettre N°. 1669, note 5.

[3]) Consultez le titre complet des „Exercitationes Geometricae". Voir la Lettre N°. 1684, note 2.

[4]) Voir l'ouvrage, publié en 1654, cité dans la Lettre N°. 191, note 1.

[5]) Consultez Gregory, Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura. 1667. Voir la Lettre N°. 1605, note 4.

[6]) Consultez l'ouvrage, cité dans la Lettre N°. 1106, note 6: Gregory, Optica Promota. 1663.

Carteſij ſubtiliſſimum inventum de figura Elliptica et Hyperbolica vitris teleſcopiorum donanda [7]) ſibi quoque arrogare conatus eſt. Nam nec ſcripta Carteſij niſi perfecto ſuo libello ſibi viſa dicere auſus eſt, atque ita ſe quoque ſuo marte eadem inveniſſe contendit, nec interim animadvertit quam immane diſtet Carteſianae ad iſta invenienda methodi ſubtilitas, a ſua. iſta ſi dis placet, cum Carteſius vi artis analyticae cum has lineas conicas tum alias magis compoſitas, uſui iſti in dioptricis idoneas exquiſiverit. Noſter vero poſitis prius hyperbola et ellipſi tentando an propoſito conveniant idem quaſi fortuito inveniat. Nam quum curvarum linearum innumerae ſint ſpecies quas infinitum eſſet omnes perveſtigare, deberet certe fortunae inſigniter propitiae acceptum ferre inventum ſuum quo v . . . . ſed profecto Carteſio nec alijcuiquam debet.

Ciſſoidis dimenſionis miſera demonſtratio quam affert [8]) ſi cum mea quam habeo confectam, cum ego primus problema invenerim ut ex Walliſij libro de Cycloide [9]) non potuit non didiciſſe. Quid ita inops inventorum eſt ac deſperat de ſuo aliquid novi producere poſſe; ut ſemper aliena retractet, neque id ſolum ſed et tractando ſua fieri ſibi perſuadet.

Mea de hyperbolae quadratura ex dato gravitatis centro adeo non contemnenda alijs viſa ſunt ut poſt me eodem titulo illa exponere placuerit P. de la Lovera [10]) et Tacqueto [11]). Sed nec alijs Gregorio doctioribus geometris ea diſplicuiſſe comperi, qui et inventa ſibi placere et demonſtrationum evidentiam ſaepe teſtati ſunt.

Gregorius tantum ab ea abeſt, tam inconcinne atque obſcure ſua proponit, ut pleriſque legendi animus non ſuppetat ſi agreſſi ſint faſtidium moveant tricae ac ſalebrae perpetuae et ſi quis omnia jam tedia devoravit, tandem an aliquid demonſtravit Gregorius an nihil aſſeverare non audeat. Quod niſi ita eſſet non conquereretur ſcripta ſua a doctis negligi, nunc vero quod ſua culpa atque ex merito contingit illorum oſcitantiae imputat. Primum cum ſpecioſo titulo nequaquam reſpondere opus intelligunt cum pro auro carbones [12]) quod aiunt exiſtiment numquid vanitatem autoris ſtomachum ijs movere credimus. Quid enim Veram Circuli et Hyperboles Quadraturam fronte pollicetur, cum tantum impoſſibilem eam in Geometria explicationem habere oſtendendum ſibi ſumſerit. Nam etſi hoc ita eſſe demonſtraſſet, quod nequaquam demonſtravit, an tunc ſeries illa polygonorum in circulo inſcriptorum et circumſcriptorum pro vera circuli quadratura habenda eſſet, atque hoc ille primus nos docuiſſet quod circulus minor eſt adſcripto

7) Publié dans sa „Geometria", Livre II.
8) Dans les „Exercitationes Geometricae". Voir la pièce N°. 1684, note 2.
9) J. Wallis, Tractatus II de Cycloide et Epiſtolaris. 1659 (Consultez la Lettre N°. 690, note 3).
10) A Lalovera, Quadratura Circuli et Hyperbolae Segmentorum, 1651 (Consultez la Lettre N°. 101, note 4).
11) A. Tacquet, Cylindrorum et Annularium Libri IV, 1651 (Consultez la Lettre N°. 102, note 5).
12) Consultez, Phaedrus Lib. V, Poema 6, vers. 4.

major inſcripto polygono. An non Archimedes primus approximationem hac via propoſuit ad quantumvis exactam circuli dimenſionem obtinendam; an non alias majoris compendij approximationes poſt illum in meis de circuli magnitudine tradidi quas partim eaſdem partim meis deteriores et quas tamen demonſtrare non poterat Gregorius obtruſit? Et hanc tamen quadraturam ſuam vocare non deſinit, hanc a me intactam hucuſque gloriatur.

Primam approximationem ejus eandem eſſe meae oſtendi [13]). alteram vero quam demonſtrare non poterat in circulo veram non eſſe, ſed et correctam tamen alteri meae cedere oſtendi.

N° 1686.

Christiaan Huygens à ?.

[? 1668] [1]).

La minute se trouve à Leiden, coll. Huygens.

Ad Centuriam Problematum Opticorum [2]) Francisci Eschinardi [3]).

Figurae peſſimae, Author geometriae parum peritus.

Pag. 25. Demonſtrationem paulo difficiliorem a Gregorio Scoto [4]) mutuatur.

13) Consultez la pièce N°. 1669.

1) La date de cette pièce résulte de la place qu'elle occupe dans les „Adversaria".
2) Cet ouvrage fut publié en trois parties:
a) Dialogus Opticus, in quo aliquibus quaeſitis compendioſe reſpondetur. Romae, Typis Haeredum Corbeletti. 1666. in-4°.
b) Centuria Problematum Opticorum in quâ praecipuae difficultates Catoptricae et Dioptricae demonſtrative ſolvuntur ſeu Dialogi Optici Pars Altera, Auctore Franceſco Eſchinardo e Societate Ieſv. Romae Typis H. H. Corbeletti. M.DCLXVI, Superiorum permiſſu. in-4°.
c) Centuriae Opticae Pars Altera ſeu Dialogi Optici Pars Tertia, in qua Definitiones ſeu explicatio terminorum: Problemata reliqua, quae deſiderantur, in prima parte ad complendam centuriam. Et Epilogus totius Operis ordinatus praecipue ad Praxim. Ad Eminentiſſimum et Reverendiſſimum Principem Leopoldum ab Hetruria, S. R. S. Cardinalem Ampliſſimum. Auctore Franceſco Eſchinardo e Societate Ieſv: Romae Typis Nicolai Angeli Timarſii, M.DCLXVIII. Superiorum Permiſſu. in-4°.
3) Francesco Eschinardi naquit à Rome en 1623 et mourut vers le commencement du siècle suivant. Entré en 1687 chez les Jésuites, il enseigna la philosophie et les mathématiques à Florence, Perouse et Rome. En 1677 il devint membre de l'Académie physico-mathématique de Rome.
4) Consultez l'ouvrage „Optica Promota" de J. Gregory. Voir la Lettre N°. 1106, note 6.

Pag. 50. Illam de foco lentis compofitae a Cavallerio [5]) fumfit.

Pag. 95. Male explicat quaeftionem de lunae apparentia bipalmari, ad unius oculi difpofitionem referens quod ad duorum pertinet.

Problemata reliqua levia funt et fupervacanea theorices Dioptricae peritis, quippe corollaria potius propofitionum quas tractare debuerat.

Nulla eft paulo elegantior demonftratio, fed omnes leves et obfcurè tractatae.

Nº 1687.

[Fr. Eschinardi] [1]) à [Christiaan Huygens].

[? 1668] [2]).

La pièce se trouve à Leiden, coll. Huygens.

Refponfio ad Obiectiones tranfmiffas ex Gallia [3]).

Dividitur haec ab ipfo Autore in tria puncta.

1. Quod practice poffunt hujufmodi et fimiles combinationes inveniri; fed ad hoc nihil refpondeo; quandoquidem ipfe Autor deinde laudat Theoricam in hac materia; et fane merito; alioquin ad quid defudent in iftis Mathematici?

2um eft, quod in numeris fractis in exiguas minutias, et petitis folum ad exemplificandum, non fuit adhibita exactiffima diligentia; ita ut fequatur diverfitas craffitiei, feu fpatij fere innominabilis, fcilicet minoris quam fit craffitudo unius nummi aurei; ficut etiam figura magis exacte poterat delineari.

3um eft, quod citanda erat Optica promota Jacobi Gregorij.

Ad 2um dico primo me uelociffime impreffiffe hoc ultimum folium; ut patet, eo quod fit poftdatum; et ratio fuit, quia cum hoc promififfem in prima parte, me impreffurum in 2a; plures petierunt a me, ut ftatim id facerem, ficut ex ipfa Epiftola apparet: 2o fepe contingit, ut omittantur ceterae lineae, de quibus nihil actu afferitur, etiamfi pertineant ad eas de quibus fit fermo; quod etiam

5) Exercitationes Geometricae sex. Voir la Lettre N°. 35, note 3.

1) Le nom de l'auteur résulte de la mention faite de ses „Centuriae".
2) L'année de cette pièce est déduite de la considération qu'elle doit avoir été écrite entre la publication des deux „Centuriae", la première de 1666, la deuxième de 1668.
3) Cette pièce n'a pas rapport à la critique que l'on trouve dans le Journal des Sçavans du 19 novembre 1668, N°. X.

iuvat ad evitandam confufionem plurium linearum; quod fi omnia neceffaria debuiffent poni; certe Autor oppofitionis, debuiffet alias etiam lineas addere; cum fieri non poffit; ut SB. directa, habeat BM. pro refracta; et idem dico de CB: quod uero ad numeros attinet; cum antea dixiffem unam Radicem valere unam decimam octavam Vnius, et aliquid amplius in re allata folum ad exemplificandum; ftatim apparet me non adhibuiffe plenam diligentiam; quare quod pofuiffem $\frac{8}{9}$ vel $\frac{16}{18}$ pro $\frac{15}{16}$ non multum refert; et certe id faciam etiam in alijs; quando folum explicandi, et exemplificandi gratia haec afferam; neque enim fit vis in numeris; cum tamen non defint Autores confpicui, qui etiam, dum fit vis in numeris, haec contemnant, tanquam infenfibilia.

Ad 3um dico; me, quod attinet ad honorem dicti Auctoris, ipfum cum laude citaffe, tum in Dialogo [4]), tum in prima parte Centuriae [5]); ubi opus fuit; quoad vero cafum praefentem, citatur ex mea Centuria quicquid ad illum cafum requifitur; et fi quid fortaffe deducitur, mediate ex dicto Autore, ibi apparet; neque enim folent repeti fingulae propofitiones etiam mediate in fingulis cafibus: Neque dicatur huiufmodi figuram effe fimilem figurae ab ipfo alicubi allatae; nam fateor plures Auctores fimilem figuram adhibuiffe; eft quippe una ex figuris univerfalibus; fed confideratio a me facta non eft univerfalis: Neque vero ipfe met Jacobus [6]) unquam dicet, fe jam exhibuiffe huiufmodi confpicilia; cum ipfe nuperrime invitaverit alios ad eius profferri folutionem: quod fi denique dicatur, ipfum fuiffe hic citandum tamquam inventorem Principij fane utiliffimi; nempe quod de Imagine, feu Bafi diftincta MN. loqui poffumus quafi de aliquo Obiecto; et inde defumere quantitatem ultimam Anguli viforij pro ipfo objecto reali. Id omnino nego, etfi alteruter ex nobis conqueri debeat; fortaffe potior eft ratio pro me, qui anno 1658. Perufij expreffe id impreffi [7]), prout retuli in Dialogo, et Centuriis; dum de hoc expreffè agerem; impreffi enim haec ipfiffima verba: pagina 84. *Nota autem, quod Imago, feu Idolum Obiecti fic fe habet, ac fi ipfa emitteret fpecies?* et pag. 85. *Imago debet cenferi tamquam objectum &c.* quae fane apud plurimos iam funt nota; quippe a tot annis a me promulgata; nunquam tamen mihi venit in animum, ut id praefumerem,

4) Voir l'ouvrage cité dans la Lettre N°. 1686, note 3^a.
5) Voir l'ouvrage cité dans la Lettre N°. 1686, note 3^b.
6) Jacobus Gregory.
7) Consultez son ouvrage:
Microcofmus Phyfico-Mathematicus, feu Compendium in quo clare et breviter tractantur principuae Mundi partes, Coelum, Aër, Aqua, Terra, eorumque praecipua accidentia, Tomus Primus. Perugiae, Apud Haeredes Bartoli. 1658. in-folio.

ſcilicet ut obligarem caeteros ad celebrandam huiuſmodi utiliſſimam animadverſionem tamquam ſobolem mei jntellectus; imo et ipſum Gregorium et alios de hoc laudaui; quod fortaſſe inſcijs de eo quod anno 1658 impreſſi, venerit illis in mentem. Ad quod certè non tenebor. Videat igitur Auctor oppoſitionis; an male me geſſerim in dictum Gregorium; vel denique de hoc crederet; poſtquam legerit non unum folium poſtremum; ſed totum Dialogum, et Centuriam Opticam.

Haec habui, quae pro nunc reſponderem objectionibus ad me tranſmiſſis; plura, ſi opus fuerit, additurus ſuo loco de hoc negotio, praeſertim attinente ad dictum Gregorium, ſed non libenter tero tempus in huiuſmodi concertationibus inutilibus; niſi magna ad id neceſſitas me compellat. Habeo teſtes plurimos digniſſimos; inter quos praecipue Dominum Caſſinum; an me bene geſſerim erga dictum Gregorium.

Addo ad id, quod indicatur initio oppoſitionis, ſcilicet futura aptiora vitra planoconvexa; me quidem hic Romae ſtatuiſſe pro praxi lentem planoconcavam unam; ſed utrimque convenam alteram; ſed eſt quia, ſi primae ſuperficies plana verſatur ad oculum, cava autem ad lentem convexam; relinquitur plus ſpatij inter utramque lentem; ſecundae autem, meo quidem judicio, fit focus perfectior in tali determinata diſtantia; quam, ſi ſit planoconvexa; nam ad habendum focum in diſtantia aequali, requiritur multo minor ſphaera pro planoconvexa, quam pro utrimque convexa; et hinc ego oſtendo in 2a parte, quae mox imprimetur, plus pati lineas, quam in utrimque convexa; quod, ſi geometrice mihi oſtendatur, contrarium, libenter accipiam.

Denique adverto mihi hactenus videri meliora conſpicilia ex duplici hujuſmodi lente, quam ſi ſit Meniſcus.

N° 1688.

Christiaan Huygens à ?.

[? 1668].

La pièce se trouve à Leiden, coll. Huygens.

Jacobus Gregorius a bien remarquè [1]) que de Angelis en combattant le premier argument ne devoit pas inſiſter a prouuer que les corps en tombant ne deſcrivent pas une $\frac{1}{2}$ circonference de cercle, ſuppoſè le mouvement journalier de la terre, car quoy qu'il ſoit vray qu'ils ne decrivent pas cette demicirconference, mais une autre ligne courbe, toutefois ce n'eſt pas en cela que conſiſte principalement l'Erreur de Riccioli, et quand il luy auroit accordè que ce mouvement fut tel que Riccioli dit, ſon argument ne feroit pourtant rien contre le mouvement de la terre.

l'argument eſt cettuicy. Multa corpora gravia dimiſſa &c. Gregorius eſt d'avis que de Angelis devoit diſtinguer la mineure, mais j'aimerois mieux la nier, comme de Angelis a fait. Et quand Riccioli pour la prouuer, dit

Si tellus moveretur ſolo diurno motu, aliquod grave dimiſſum ex turris vertice C in plano aequatoris exiſtentis deſcriberet ſuo motu naturali portionem lineae CPI, quae eſſet ad omnem ſenſum circularis, *et cujus partes aequales aequalibus temporibus percurrerentur; atqui quod revera motu aequabili movetur tantum apparenter movetur motu accelerato. Ergo ſi tellus moveretur ſolo diurno motu*, *grave ex turris vertice in plano aequatoris exiſtentis*, *dimiſſum moveretur tantum apparenter motu accelerato terram verſus:* (Car il faut que le ſyllogiſme ſoit mis entier de cette ſorte). Je nierois la mineure, et montrerois que le mouvement d'un corps peut eſtre en meſme temps veritablement egal et veritablement accelerè ſelon qu'on raporte ſon mouvement a d'autres differents corps.

Pour moy je demanderois devant toute choſe ce qu'il entend dans ſa majeure par acceleration reelle, et en quoy elle differe d'acceleration apparente. Car s'il dit que les corps tombent avec acceleration reelle, parce qu'on void qu'ils approchent de la terre de plus en plus viſte, je diray que cette approche acceleree ſe peut faire auſſi bien quand la terre tourne que quand elle eſt immobile, et qu'il n'aura pas plus de raiſon de dire de l'une que de l'autre qu'elles ſont reelles.

[1]) Voir l'Appendice N°. 1689.

N° 1689.

J. Gregory à [H. Oldenburg].

[25 juin 1668].

La pièce a été imprimée dans les Philosophical Transactions No. 36, du 15 Juin 1668 [V. st.].

An Account

of a Controverſy betwixt Stephano de Angelis, *Profeſſor of the Mathematicks in* Padua, *and* Joh. Baptiſta Riccioli *Jeſuite; as it was communicated out of their lately Printed Books, by that Learned Mathematician Mr.* Jacob Gregory, *a Fellow of the* R. Society.

Riccioli in his *Almageſtum Novum* [1]) pretends to have found out ſeveral new demonſtrative Arguments againſt the Motion of the Earth. *Stephanus de Angelis*, conceiving his Arguments to be none of the ſtrongeſt, taketh occaſion [2]) to let the world ſee, that they are not more eſteem'd in *Italy*, than in other places. *Manfredi* [3]), in behalf of *Riccioli*, endeavours to anſwer the Objections of *Angeli*, and this latter [4]) replyes to *Manfredi's* Anſwer. The ſubſtance of their diſcourſe is this following.

Although the Arguments of *Riccioli* be many, yet the ſtrenghth of them conſiſts chiefly in theſe *three:*

The *firſt.*

Multa corpora gravia, dimiſſa per Aerem, in Plano Aequatoris exiſtentem, deſcenderent ad Terram cum Velocitatis Incremento reali & notabili, & non tantùm apparenti. Sed ſi tellus moveretur motu diurno tantùm circa ſui centrum, nulla corpora gravia, dimiſſa per Aerem, in Plano Aequatoris exiſtentem, deſcenderent ad Terram cum velocitatis incremento reali ac notabili, ſed tantùm cum apparenti. Ergo. *Tellus aut non movetur, aut non movetur diurno tantùm motu.*

The *ſecond.*

Si Tellus moveretur motu diurno, aut etiam annuo, multò debilior eſſet ictus

[1]) Voir l'ouvrage cité dans la Lettre N°. 280, note 7.
[2]) Consultez: St. de Angelis, Confiderazioni (voir la Lettre N°. 1575, note 2b).
[3]) Consultez: M. Manfredi, Argomento fiſico-mathematico (voir la Lettre N°. 1575, note 2c).
[4]) Consultez: St. de Angelis, Seconde Confiderazioni (Voir la Lettre N°. 1575, note 2d).

Globi bombardici exploſi in Septentrionem aut Meridiem, quàm ab Occidente in Orientem. At conſequens eſt falſum. Ergo. *& antecedens.*

The *third.*

Si Tellus diurna revolutione moveretur, Globus argillaceus unciarum 8. *ex altitudine Romanorum pedum* 240. *per aerem quietum dimiſſus, obliquo deſcenſu in Terram delaberetur abſque incremento reali ac phyſico velocitatis, vel certè nunquam tanto, quanta eſt proportio percuſſionis ac ſoni per caſum ex dicta altitudine facti. Sed poſterius eſt abſurdum.* Ergo. *et prius.*

In Anſwer to the *firſt* of theſe Arguments, *Angeli* denieth the *Minor*, which *Riccioli* pretends to prove thus;

Si Tellus moveretur ſolo diurno motu, aliquod Grave, dimiſſum ex Turris vertice C *in Plano Aequatoris exiſtentis, deſcriberet ſuo motu naturali portionem lineae* CTI, *quae eſſet ad omnem ſenſum circularis.*

Vide Figuram I.

Fig. 1.

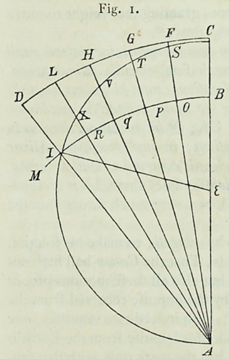
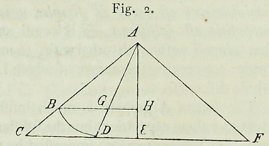


Fig. 2.



This *Angeli* denies, ſhewing by Computation, that *Riccioli* his Obſervation proveth no ſuch thing. For (ſaith *Angeli*) according to *Riccioli*, in one ſecond of an hour the weight deſcends 15 foot; in 2 ſeconds, 60 foot; in 3 ſeconds 135 foot;

and ſo continually the ſpaces from the beginning are in duplicate proportion of the Time from the beginning; and, according to the ſame Author, AB (the ſemi-diameter of the Earth) is of 25870000 foot, and BC (the height of the Tower of the *Aſinelli* in *Bononia*) of 240 foot; and therefore AC is 25870240, which hath the ſame proportion to FS, 15 foot, to wit, ye fall in one ſecond, which AC in parts 20000000000 hath to FS $11596 \frac{54356}{224189}$; but ſuppoſing, with *Riccioli*, CSIA a ſemi-circle, FS is 53 parts, of wich AC is 10000000000: Hence concludeth *Angeli*, that CSIA is no wayes near to a *ſemi-circle;* which is moſt ſure, if ſo be the weight fall not to the Center of the Earth preciſely in 6 hours: For, in this caſe of *Riccioli*, the weight falls to the Center of the Earth in 21 *minutes* and 53 *ſeconds.*

Manfredi in his Anſwer for *Riccioli* affirms, that *Angeli* underſtands not the *Rule* of *Three*, in giving out FS for $11596 \frac{54356}{224189}$, of which AC is 20000000000: And *Angeli* in his Reply affirms his Analogy to be ſo clear, that there can be nothing ſaid more evident than it ſelf to confirm it; referring in the mean time the further determination to Geometers.

Angeli might have anſwer'd *Riccioli*'s Argument, granting the weight to move equally in a *ſemi-circle*, by diſtinguiſhing his *Minor* thus;

Nulla Corpora gravia deſcenderent ad Terram cum velocitatis incremento reali ac notabili, ſi Velocitas computetur in circumferentia ſemi-circuli; *Minor propoſitio eſt vera. At non computatur ita Motus deſcenſivus: nam hic motus aequalis in circumferentia ſemi-circuli* CIA. *componitur ex motu aequali in quadrante* CD, *et motu accelerato in ſemidiametro mobili* CA; *& hic motus acceleratus in ſemidiametro eſt verus & ſimplex motus deſcenſivus; in qua acceptione Minor propoſitio eſt falſiſſima*, *&* Riccioli *etiam experientiis contraria.* But it ſeems, that *Angeli* anſwereth otherwiſe, to make *Riccioli* ſenſible, that CIA is no ſemi-circle; concerning the nature of which Line they debate very much throughout the whole diſcourſe.

The *ſecond* Argument is much inſiſted upon by *Angeli*, to make his ſolution clear to vulgar capacities; but the ſubſtance of all is, That the *Canon*-ball hath not only that violent motion, impreſſed by the Fire, but alſo all theſe motions proper to the Earth, which were communicated to it by the impulſe received from the Earth: for, the Ball, going from Weſt to Eaſt, hath indeed two impulſes, one from the Earth, and another from the Fire; but this impulſe from the Earth is alſo common to the mark, and therefore the Ball hits the mark only with that ſimple impulſe, received from the Fire, as it doth being ſhot towards the North or South; as *Angeli* doeth excellently illuſtrate by familiar examples of Motion.

To *Riccioli* his *third* Argument *Angeli* anſwereth, deſiring him to prove the ſequel of his *Major*, which *Riccioli* doeth, ſuppoſing the *curve*, in which the

heavy body deſcends, to be compoſed ot many ſmall right lines; and proving, that the motion is almoſt always *equal* in theſe lines; and after ſome debate, concerning the equality of motion in theſe right lines, *Angeli* anſwers, that the *equality* of *motion* is not ſufficient to prove the *equality* of *percuſſion* and ſound, but that there is neceſſary alſo *equal angles* of *incidence;* which in this caſe he proveth to be very *unequal.* To illuſtrate this more, let us prove, that, other things being alike, the proportion of two percuſſions is compoſed of the direct proportion of their *velocities*, and of the direct proportions of the *Sines* of their angles of incidence. *Supponamus autem ſequens principium*, *nempe*, *quod percuſſiones (caeteris paribus,) ſint in directa proportione cum velocitatibus*, *quibus mobile appropinquat planum reſiſtens. Fig.* 2*da*. *Sit planum* CF, *ſintque duo mobilia omni modo aequalia*, *& ſimilia*, *quae motu aequali accedant à puncto* A *ad planum* CF, *in rectis* AD, AF: *dico*, *percuſſionem in puncto* D *ad percuſſionem in puncto* F *eſſe in ratione compoſita ex ratione velocitatis in recta* AD. *ad velocitatem in* AF, *& ex ratione ſinus anguli* ADE *ad ſinum anguli* AFE. *Ex puncto* A *in planum* CF, *ſit recta* AE *normalis*, *ſitque recta* AC *aequalis rectae* AF, *&* AB *aequalis rectae* AD, *& planum* BGH, *parallelum plano* CF: *ſupponamus mobile*, *prioribus ſimile & aequale*, *moveri aequaliter in recta* AC, *eadem velocitate*, *qua movetur mobile in recta* AD: *quoniam plana* BGH, CF, *ſunt parallela*, *& motus in recta* AC *eſt aequalis*, *igitur mobile eadem velocitate accedit ad planum* BH, *qua ad planum* CF, *& proinde percuſſiones in punctis* B, C, *ſunt aequales; atque percuſſio in puncto D*, *eſt ad percuſſionem in puncto* B, *ut recta* AE *ad rectam* AH, *ſeu (ob aequales rectas* AD, AB) *ut ſinus anguli* ADE *ad ſinum anguli* ABH, quod ſic probo; *velocitas mobilis in recta* AD, *eſt aequalis velocitati mobilis in recta* AB, *ipſi* AD *aequali*, *& ideo eodem tempore perficitur utraque recta* AD, AB; *& proinde eodem tempore perficiuntur acceſſiones ad plana reſiſtentia* AE, AH; *ideoque velocitates acceſſionum ad plana reſiſtentia ſunt in directa ratione* AE *ad* AH, *atque ideò percuſſio in puncto* D *eſt ad percuſſionem in puncto* C *in eadem ratione* AE *ad* AH; *nempe ut Sinus anguli incidentiae* ADE, *ad ſinum anguli incidentiae* ACE, *vel* AFE. *Quoniam autem rectae* AC, AF, *aequaliter inclinant ad planum* CF, *mobilia in rectis* AC, AF, *accedunt ad planum* CF, *in eadem proportione qua moventur in rectis* AC, AF; *& ideo percuſſio in* C *eſt ad percuſſionem in* F *in ratione velocitatis motus in* AC *ſeu in* AD *ad velocitatem motus in* AF; *At demonſtratum eſt antè*, *percuſſionem in puncto* D *ad percuſſionem in puncto* C, *eſſe in ratione ſinus anguli* ADE *ad ſinum anguli* AFE, *& nunc demonſtratum eſt*, *percuſſionem in puncto* C *eſſe ad percuſſionem in puncto* F, *ut velocitas motus in* AD *ad velocitatem motus in* AF. *Igitur ex* 5*a* *definitione* 6*i* *Elementorum*, *percuſſio in* D, *eſt ad percuſſionem in* F, *in ratione compoſita ex ratione ſinus anguli incidentiae* ADE *ad ſinum anguli incidentiae* AFE, *& ex ratione velocitatis in* AD *ad velocitatem in* AF; quod demonſtrare oportuit. *Neminem moveat*, *quod haec demonſtratio adſtricta ſit motibus aequalibus in lineis rectis & planis reſiſtentibus;*