



SUR LES

## ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. III,  
1879, p. 311-325.

C'est à Euler qu'est due la première méthode d'intégration de ces équations dans le cas où, les coefficients étant supposés constants, l'équation a la forme

$$\alpha y + \beta \frac{dy}{dx} + \gamma \frac{d^2y}{dx^2} + \dots + \frac{d^ny}{dx^n} = 0.$$

Cauchy a ensuite donné une seconde méthode, qui est celle que nous allons exposer.

A cette équation différentielle, Cauchy a rattaché l'équation algébrique suivante

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \dots + z^n = 0,$$

obtenue en remplaçant les dérivées successives de la fonction  $y$  par les puissances de l'inconnue  $z$ , dont les exposants sont respectivement égaux aux ordres de dérivation. Soit  $F(z)$  le premier membre de cette équation, que Cauchy a appelée l'équation caractéristique de l'équation différentielle proposée. Si nous envisageons l'intégrale suivante

$$y = \int \frac{e^{zx} \Pi(z)}{F(z)} dz,$$

où  $\Pi(z)$  est un polynôme entier en  $z$  à coefficients arbitraires, et si nous supposons cette intégrale effectuée en faisant décrire à la variable  $z$  un contour fermé tout à fait quelconque, nous allons montrer que cette intégrale est une solution de l'équation différentielle proposée.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

497

Dans le cas particulier où le contour ne renferme aucun pôle de la fonction  $\frac{e^{zx} \Pi(z)}{F(z)}$ , c'est-à-dire aucun point qui ait pour affixe une racine de l'équation caractéristique, l'intégrale est nulle, et  $y = 0$  est bien une solution de l'équation différentielle proposée; mais c'est dans le cas où le contour renferme des pôles que nous obtenons effectivement des solutions.

Pour démontrer ou plutôt pour vérifier ce théorème, formons les dérivées successives de l'intégrale par rapport à  $x$ ; nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \int \frac{e^{zx} z \Pi(z)}{F(z)} dz, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \int \frac{e^{zx} z^2 \Pi(z)}{F(z)} dz, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d^ny}{dx^n} &= \int \frac{e^{zx} z^n \Pi(z)}{F(z)} dz, \end{aligned}$$

chacune de ces intégrales étant toujours supposée effectuée le long du contour fermé.

Substituons dans l'équation proposée; le premier membre devient

$$\int \frac{e^{zx} \Pi(z)}{F(z)} (\alpha + \beta z + \dots + z^n) dz.$$

On voit que  $F(z)$  disparaît comme facteur commun et que l'intégrale est celle de  $e^{zx} \Pi(z)$ , qui, effectuée le long du contour fermé, est nulle, puisque  $\Pi(z)$  est un polynôme entier. L'équation est donc vérifiée, ce qui démontre que, quel que soit le contour fermé d'intégration, l'intégrale

$$\int \frac{e^{zx} \Pi(z)}{F(z)} dz$$

est une solution de l'équation proposée.

*Remarque.* —  $\Pi(z)$  étant un polynôme de degré quelconque, il semble qu'il entre dans la solution un nombre quelconque de constantes arbitraires; mais il est facile de voir que ce nombre est au plus égal à  $n$ . En effet, on peut toujours, si  $\Pi(z)$  est de degré supérieur à celui de  $F(z)$ , écrire identiquement

$$\frac{\Pi(z)}{F(z)} = \Phi(z) + \frac{\Psi(z)}{F(z)},$$



$\Psi(z)$  étant un polynôme entier en  $z$  de degré inférieur à  $n$ , d'où l'on tire

$$\int \frac{e^{zx} \Pi(z)}{F(z)} dz = \int e^{zx} \Phi(z) dz + \int \frac{e^{zx} \Psi(z)}{F(z)} dz;$$

mais, en intégrant le long d'un contour fermé quelconque, on voit que la première intégrale s'évanouit, puisque  $\Phi(z)$  est un polynôme entier, et il ne reste que la seconde où  $\Psi(z)$  renferme au plus  $n$  constantes arbitraires, puisque son degré est au plus égal à  $n-1$ .

Nous allons maintenant passer de l'expression de la solution sous forme d'intégrale à une expression sous forme explicite.

Soit  $S$  la somme des résidus de la fonction  $\frac{e^{zx} \Pi(z)}{F(z)}$  qui correspondent aux racines du dénominateur affixes de points intérieurs au contour d'intégration.

L'intégrale aura pour valeur  $2i\pi S$ .

Calculons ces résidus.

Supposons d'abord que l'équation caractéristique n'ait pas de racine multiple, et décomposons la fonction  $\frac{\Pi(z)}{F(z)}$  en éléments simples. On peut toujours supposer que le degré  $\Pi(z)$  est inférieur à celui de  $F(z)$ ; par suite, le résultat de la décomposition sera

$$\frac{\Pi(z)}{F(z)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \dots + \frac{L}{z-l}.$$

Faisons  $z = a + h$  dans la fonction  $\frac{e^{zx} \Pi(z)}{F(z)}$ ; elle devient

$$\frac{e^{x(a+h)} \Pi(a+h)}{F(a+h)} = e^{ax} \left( 1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2 x^2}{1 \cdot 2} + \dots \right) \times \left( \frac{A}{h} + p + qh + rh^2 + \dots \right),$$

puisque le terme  $\frac{A}{z-a}$  donne seul un terme en  $\frac{1}{h}$ . Le résidu sera donc égal à  $Ae^{ax}$ ; on a donc pour première solution, en intégrant le long d'un contour qui ne contient que la racine  $a$ ,  $2i\pi Ae^{ax}$ . En général, le contour pouvant contenir un nombre quelconque de pôles de la fonction  $\frac{e^{zx} \Pi(z)}{F(z)}$ , la solution générale sera de la

forme

$$y = A e^{ax} + B e^{bx} + \dots + L e^{lx},$$

$a, b, \dots, l$  étant les racines de l'équation caractéristique, et  $A, B, \dots, L, n$  constantes arbitraires qui peuvent être nulles et qui renferment le facteur  $2i\pi$ .

Supposons maintenant que l'équation caractéristique ait des racines multiples, et soit

$$F(z) = (z-a)^{\alpha+1} (z-b)^{\beta+1} \dots (z-l)^{\lambda+1}.$$

La formule de décomposition est alors

$$\begin{aligned} \frac{\Pi(z)}{F(z)} = & \frac{A}{z-a} + \frac{B}{(z-b)} + \dots \\ & + \frac{A_1}{(z-a)^2} + \frac{B_1}{(z-b)^2} + \dots \\ & + \dots \dots \dots \\ & + \frac{A_\alpha}{(z-a)^{\alpha+1}} + \frac{B_\beta}{(z-b)^{\beta+1}} + \dots \end{aligned}$$

Nous aurons, en faisant  $z = a + h$ ,

$$\frac{\Pi(a+h)}{F(a+h)} = \frac{A}{h} + \frac{A_1}{h^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{h^{\alpha+1}},$$

les termes suivants ne contenant pas de puissances négatives de  $h$ ; d'ailleurs,

$$e^{x(a+h)} = e^{ax} \left( 1 + \frac{hx}{1} + \frac{h^2 x^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{h^2 x^2}{1 \cdot 2 \dots 2} + \dots \right).$$

Pour avoir le résidu correspondant à  $z = a$ , c'est-à-dire le coefficient du terme en  $\frac{1}{h}$  dans le développement de  $\frac{\Pi(a+h)}{F(a+h)} e^{x(a+h)}$ , il suffit de multiplier les coefficients des termes qui se correspondent dans les seconds membres des deux égalités précédentes. On trouve ainsi pour expression du résidu, et par conséquent pour une solution de l'équation différentielle proposée,

$$2i\pi e^{ax} \left( A + \frac{A_1 x}{1} + \dots + \frac{A_\alpha x^\alpha}{1 \cdot 2 \dots \alpha} \right).$$

La solution générale sera donc de la forme

$$\begin{aligned} e^{ax} (\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 x + \dots + \mathfrak{A}_\alpha x^\alpha) + e^{bx} (\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 x + \dots + \mathfrak{B}_\beta x^\beta) + \dots \\ + e^{lx} (\mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L}_1 x + \dots + \mathfrak{L}_\lambda x^\lambda), \end{aligned}$$



et, comme

$$(\alpha + 1) + (\beta + 1) + \dots + (\lambda + 1) = n,$$

on voit que la solution générale contient  $n$  coefficients arbitraires.

Faisons une vérification dans le cas des racines simples. Montrons d'abord que  $y = \Lambda e^{ax}$  est une solution; nous partirons de là pour vérifier la solution générale. Soit donc

$$\begin{aligned} y &= \Lambda e^{ax}, \\ \frac{dy}{dx} &= \Lambda a e^{ax}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \Lambda a^2 e^{ax}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{d^ny}{dx^n} &= \Lambda a^n e^{ax}. \end{aligned}$$

Substituant dans l'équation différentielle, le premier membre devient

$$\Lambda e^{ax}(\alpha + \beta a + \gamma a^2 + \dots + a^n).$$

Or le second facteur n'est autre chose que  $F(a)$ ; il est donc nul, puisque  $F(z) = 0$  admet la racine  $a$ . Donc  $y = \Lambda e^{ax}$  est une solution.

Je dis que, si  $y_1$  et  $y_2$  sont des solutions, il en est de même de  $y_1 + y_2$ .

En effet, si l'on a

$$\begin{aligned} \alpha y_1 + \beta \frac{dy_1}{dx} + \gamma \frac{d^2y_1}{dx^2} + \dots + \frac{d^ny_1}{dx^n} &= 0, \\ \alpha y_2 + \beta \frac{dy_2}{dx} + \gamma \frac{d^2y_2}{dx^2} + \dots + \frac{d^ny_2}{dx^n} &= 0, \end{aligned}$$

il vient, en ajoutant,

$$\alpha (y_1 + y_2) + \beta \frac{d}{dx} (y_1 + y_2) + \gamma \frac{d^2}{dx^2} (y_1 + y_2) + \dots = 0,$$

ce qui montre que  $y_1 + y_2$  est une solution. Il en serait de même de la somme d'un nombre quelconque de solutions de la forme  $\Lambda e^{ax}$ , ce qui vérifie la solution générale

$$\Lambda e^{ax} + B e^{bx} + \dots + L e^{lx}.$$

Passons au cas des racines multiples. La vérification est moins

immédiate. Nous considérerons, pour y parvenir, une transformée de l'équation différentielle proposée, dont la variable  $z$  sera liée à la variable  $y$  par la relation

$$y = e^{mx} z,$$

$m$  étant une constante arbitraire. Formons les dérivées successives de  $y$ ; on aura

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{mx}(mz + z'), \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= e^{mx}(m^2z + 2mz' + z''), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On voit que, en substituant dans l'équation proposée, on obtient le produit de  $e^{mx}$  par une fonction linéaire de  $z$  et de ses dérivées.

Nous avons donc identiquement

$$\alpha y + \beta \frac{dy}{dx} + \dots + \frac{d^ny}{dx^n} = e^{mx}(Gz + Hz' + \dots + Lz^{(n)}).$$

Pour calculer les coefficients constants  $G, H, \dots, L$ , remarquons que nous n'avons fait aucune hypothèse sur la nature de  $z$ , qui est une fonction quelconque de  $x$ . Faisons  $z = e^{hx}$ ,  $h$  étant une constante; nous devons avoir identiquement, en divisant les deux membres par le facteur  $e^{(m+h)x}$ ,

$$\alpha + \beta(m+h) + \gamma(m+h)^2 + \dots + (m+h)^n = G + Hh + \dots + Lh^n.$$

Le premier membre est  $F(m+h)$ ; l'identité précédente devant avoir lieu quel que soit  $h$ , les coefficients  $G, H, \dots$  doivent être égaux respectivement aux coefficients des puissances successives de  $h$  dans le développement de  $F(m+h)$ . On a donc

$$\begin{aligned} G &= F(m), \\ H &= F'(m), \\ &\dots\dots\dots \\ L &= \frac{F^{(n)}(m)}{1.2\dots n}. \end{aligned}$$

L'équation transformée est donc la suivante :

$$e^{mx} \left[ \alpha F(m) + \frac{dz}{dx} F'(m) + \frac{d^2z}{dx^2} \frac{F''(m)}{1.2} + \dots \right] = 0.$$



Supposons que  $m$  soit une racine simple de l'équation caractéristique; alors  $F'(m) = 0$ . L'équation précédente commence par un terme en  $\frac{dz}{dx}$ , elle est donc vérifiée si l'on suppose que  $z$  est une constante  $A$ . L'équation proposée aura pour solution correspondante

$$y = A e^{mx}.$$

Si  $m$  est une racine double, on a  $F(m) = 0$ ,  $F'(m) = 0$ ; la transformée, commençant par un terme en  $\frac{dz^2}{dx^2}$ , est vérifiée si l'on suppose que  $z$  est un binôme du premier degré en  $x$  ( $z = A + Bx$ ). La solution correspondante pour l'équation proposée est

$$y = e^{mx}(A + Bx).$$

On verrait de même que, si  $m$  est une racine d'ordre de multiplicité  $\alpha + 1$  de la caractéristique, on a pour solution de l'équation différentielle

$$y = e^{mx}(A + Bx + \dots + Lx^\alpha),$$

$A, B, \dots, L$  étant des coefficients arbitraires.

Nous allons maintenant déterminer les constantes arbitraires que renferme la solution générale de l'équation différentielle linéaire, de façon que pour une valeur particulière de  $x$ , pour  $x = 0$  par exemple, la fonction  $y$  et ses dérivées successives prennent des valeurs données.

Voici quelle était la méthode suivie avant que Cauchy eût donné une solution générale de ce problème. Prenons le cas où  $F(z)$  n'a que des racines simples; la solution est de la forme

$$y = A e^{ax} + B e^{bx} + \dots + L e^{lx}.$$

On forme les  $(n - 1)$  premières dérivées, on y fait  $x = 0$ , et, en égalant les valeurs qu'elles prennent aux valeurs données  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ , on obtient, pour déterminer  $A, B, \dots, L$ , les  $n$  équations suivantes :

$$\begin{aligned} A + B + \dots + L &= y_0, \\ Aa + Bb + \dots + Ll &= y'_0, \\ \dots, \dots, \dots \\ Aa^{n-1} + Bb^{n-1} + \dots + Ll^{n-1} &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Quand on passe au cas où l'équation caractéristique a des racines multiples, cette méthode est d'une application difficile, puisque les dérivées de  $y$  sont plus compliquées et que les diverses racines n'entrent plus de la même manière dans les équations à résoudre.

Cauchy a donné une méthode très simple, qui est la même dans le cas des racines simples et des racines multiples.

Reprenons la solution de l'équation différentielle sous la forme

$$y = \frac{1}{2i\pi} \int \frac{e^{zx} \Pi(z)}{F(z)} dz;$$

pour que cette intégrale soit la solution générale, il faut supposer que le contour d'intégration renferme à son intérieur tous les points dont les affixes sont des racines de  $F(z)$ , et, comme l'intégrale ne change pas de valeur quand on agrandit le contour, je supposerai que c'est un cercle dont le centre est à l'origine des coordonnées et dont le rayon sera très grand.

Il s'agit de déterminer les coefficients de  $\Pi(z)$  de sorte que, pour  $x = 0$ ,  $\frac{1}{2i\pi} \int \frac{e^{zx} \Pi(z)}{F(z)} dz$  et ses  $n - 1$  premières dérivées prennent les valeurs données, que je supposerai être  $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ ; nous avons les  $n$  équations

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int \frac{\Pi(z)}{F(z)} dz &= y_0, \\ \frac{1}{2i\pi} \int \frac{z \Pi(z)}{F(z)} dz &= y'_0, \\ \frac{1}{2i\pi} \int \frac{z^2 \Pi(z)}{F(z)} dz &= y''_0, \\ \dots, \dots, \dots \\ \frac{1}{2i\pi} \int \frac{z^{n-1} \Pi(z)}{F(z)} dz &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Pour obtenir ces diverses intégrales, développons  $\frac{\Pi(z)}{F(z)}$  suivant les puissances décroissantes de la variable;  $\Pi(z)$  étant en général de degré  $n - 1$ , le premier terme du développement sera du degré  $-1$  en  $z$ , et l'on aura

$$\frac{\Pi(z)}{F(z)} = \frac{\varepsilon_0}{z} + \frac{\varepsilon_1}{z^2} + \frac{\varepsilon_2}{z^3} + \dots + \frac{\varepsilon_{n-1}}{z^n} + \dots$$

En effectuant le long du cercle de rayon infini les  $n$  intégrales



précédents, il suffira d'avoir égard dans chaque développement au terme en  $\frac{1}{z}$ , et nous nous trouverons immédiatement amenés aux relations

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= y_0, \\ \varepsilon_1 &= y'_0, \\ &\dots\dots\dots \\ \varepsilon_{n-1} &= y_0^{n-1}, \end{aligned}$$

puisque les valeurs des intégrales sont respectivement

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}.$$

Nous connaissons ainsi dans le développement de  $\frac{\Pi(z)}{F(z)}$  les coefficients des termes de degré égal ou supérieur à  $-n$ ; cela suffit pour déterminer complètement  $\Pi(z)$ , puisqu'on a identiquement

$$\Pi(z) = F(z) \left( \frac{y_0}{z} + \frac{y'_0}{z^2} + \dots + \frac{y_0^{n-1}}{z^n} \right)$$

et que  $\Pi(z)$  doit être un polynome entier; par conséquent,  $F(z)$  étant de degré  $n$ , on voit que les  $n$  premiers termes de la série sont seuls utiles à la détermination de ce polynome et qu'on obtient

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= y_0(\beta + \gamma z + \delta z^2 + \dots + z^{n-1}) \\ &+ y'_0(\gamma + \delta z + \dots + z^{n-2}) \\ &+ y_0''(\delta + \varepsilon z + \dots + z^{n-3}) \\ &+ \dots\dots\dots \\ &+ y_0^{n-1}. \end{aligned}$$

On a donc  $\Pi(z)$  par une méthode qui s'applique aussi bien au cas des racines simples qu'à celui des racines multiples. Cela étant, et pour obtenir explicitement la valeur de  $y$ , il suffira, connaissant  $\Pi(z)$ , de calculer les résidus de la fonction  $\frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}$ . Ce calcul, que nous avons effectué précédemment, n'exige, comme on l'a vu, que l'opération algébrique élémentaire de la décomposition de la fraction rationnelle  $\frac{\Pi(z)}{F(z)}$  en fractions simples.

Comme application des formules obtenues dans la dernière Leçon pour l'intégration des équations linéaires à coefficients constants

sans second membre, je prendrai l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y^2 = 0,$$

qui se rencontre dans les applications de l'Analyse à la Physique, et en particulier à l'Optique. Elle appartient à un type déjà étudié d'équations différentielles du second ordre; mais nous la traiterons suivant les procédés que nous venons d'expliquer.

L'équation caractéristique est  $z^2 + n^2 = 0$ ; elle admet les deux racines  $z = \pm in$ . Si nous voulons que, pour  $x = 0$ ,  $y$  et  $y'$  prennent certaines valeurs fixées d'avance,  $y_0$  et  $y'_0$ , il faudra déterminer le polynome entier  $\Pi(z)$  par la relation

$$\frac{\Pi(z)}{F(z)} = \frac{y_0}{z} + \frac{y'_0}{z^2} + \frac{y_0''}{z^3} + \dots,$$

qui donne, en multipliant les deux membres par  $F(z)$  et ne conservant dans le second que les termes ne contenant pas  $z$  en dénominateur,

$$\Pi(z) = y_0 z + y'_0.$$

La fonction  $\frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}$ , dont on doit calculer les résidus, est  $\frac{y_0 z + y'_0}{z^2 + n^2} e^{zx}$ ; pour une racine  $z$ , son résidu est  $\frac{e^{zx}\Pi(z)}{F(z)}$  ou  $\frac{1}{2} \left( y_0 + \frac{y'_0}{z} \right) e^{zx}$ ; pour la racine  $-z$ , ce sera  $\frac{1}{2} \left( y_0 - \frac{y'_0}{z} \right) e^{-zx}$ . La somme de ces deux résidus est alors

$$\frac{1}{2} y_0 (e^{zx} + e^{-zx}) + \frac{1}{2} y'_0 \frac{e^{zx} - e^{-zx}}{z};$$

en y faisant  $z = in$ , on trouve l'intégrale cherchée

$$y_0 \cos nx + y'_0 \frac{\sin nx}{n}.$$

D'après la forme de l'équation différentielle, il est évident que, si l'on a une solution  $y = \varphi(z)$ ,  $y_1 = \varphi(x+c)$  sera encore une solution,  $c$  étant une constante quelconque. On profite de cette remarque pour mettre l'intégrale sous une forme telle qu'elle prenne des valeurs  $y_0$  et  $y'_0$ , non plus pour la valeur  $x = 0$ , mais pour une



valeur quelconque  $x = c$ ; il suffit de prendre

$$y = y_0 \cos nx(x-c) + y'_0 \frac{\sin n(x-c)}{n}.$$

Cette intégrale, comme on voit, est une expression réelle, bien que les racines de l'équation soient imaginaires; or, en général, étant donnée une équation différentielle linéaire sans second membre et à coefficients constants, je dis que, si ces coefficients sont réels, ainsi que les quantités  $y_0, y'_0, y''_0, \dots$ , on pourra mettre aisément l'intégrale sous forme explicitement réelle. En effet,  $a$  étant une racine imaginaire de l'équation caractéristique, on prendra sa conjuguée  $b$  et l'on considérera les deux termes  $Ae^{ax} + Be^{bx}$ .  $A$  et  $B$  sont évidemment conjugués, puisque ce sont les résidus d'une même fonction réelle  $\frac{\Pi(x)}{F(x)}$  pour deux racines conjuguées du dénominateur.

Supposons que  $a = \alpha + i\beta$ ,  $b = \alpha - i\beta$  et  $A = P + iQ$ ,  $B = P - iQ$ ; nous aurons

$$\begin{aligned} Ae^{ax} + Be^{bx} &= A e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + B e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) \\ &= e^{\alpha x} \cos \beta x (A + B) + e^{\alpha x} \sin \beta x (A - B)i \\ &= 2P e^{\alpha x} \cos \beta x - 2Q e^{\alpha x} \sin \beta x, \end{aligned}$$

quantité qui est en effet réelle.

Nous avons vu tout à l'heure que, étant donnée une solution de  $\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0$ , en  $y$  changeant  $x$  en  $x + c$ , on a encore une solution. Cela se voit immédiatement sur la forme générale  $y = Ae^{ax} + Be^{bx} + \dots$ , car les différents termes se trouvent simplement multipliés par  $e^{ax}$ ,  $e^{bx}$ , ce qui revient à changer les constantes  $A, B$ , qui sont arbitraires.

#### Équations linéaires à second membre et à coefficients constants.

Je supposerai que, ce second membre étant un polynôme entier  $f(x)$  de degré  $p$ , l'équation proposée soit

$$\alpha y + \beta \frac{dy}{dx} + \gamma \frac{d^2y}{dx^2} + \dots + \frac{d^ny}{dx^n} = f(x).$$

Si je prends la dérivée d'ordre  $p+1$  des deux membres, je

trouverai

$$\alpha \frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} + \beta \frac{d^{p+2}y}{dx^{p+2}} + \dots + \frac{d^{n+p+1}y}{dx^{n+p+1}} = 0,$$

que je sais intégrer et dont les solutions fourniront celles de la proposée. A la vérité, cette nouvelle équation est plus générale que la première; aussi devons-nous particulariser le résultat obtenu.

L'équation caractéristique est

$$\alpha z^{p+1} + \beta z^{p+2} + \dots + z^{n+p+1} = 0.$$

Le premier membre est  $z^{p+1}$  multiplié par le premier membre de l'équation caractéristique qui correspondrait à l'équation différentielle proposée sans second membre. On sait qu'une racine  $a$  d'ordre  $(p+1)$  de l'équation caractéristique donne dans l'intégrale un terme  $e^{ax}(g + hx + \dots + x^p)$ . Ici  $a = 0$ ; on aura donc simplement un polynôme de degré  $p$ ,  $F(x)$ , auquel il faudra ajouter l'ensemble des termes correspondant aux racines simples ou multiples de l'équation caractéristique

$$z + \beta z + \dots + z^n = 0.$$

La valeur de  $y$  sera donc

$$y = F(x) + A e^{ax} + B e^{bx} + \dots$$

où la partie ajoutée à  $F(x)$  représente la solution de l'équation proposée, privée de second membre.

Il s'agit maintenant de déterminer les coefficients de  $F(x)$ ; on pourrait le faire en effectuant la substitution de cette valeur de  $y$  dans l'équation proposée, et il n'y aura qu'à s'occuper des termes produits par  $F(x)$  et ses dérivées successives et identifier la somme de ces termes au second membre  $f(x)$ .

Mais nous donnerons le moyen de déterminer plus rapidement les coefficients de  $F(x)$ . Effectuons la division  $\frac{1}{z + \beta z + \gamma z^2 + \dots}$ , et représentons le quotient par  $\alpha_0 + \beta_0 z + \gamma_0 z^2 + \delta_0 z^3 + \dots$ . Les coefficients  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots$  seront liés par les relations

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha \alpha_0 = 1, \\ \alpha \beta_0 + \beta \alpha_0 = 0, \\ \alpha \gamma_0 + \beta \beta_0 + \gamma \alpha_0 = 0, \\ \dots \end{cases}$$



Cela étant, je dis que

$$F(x) = \alpha_0 f(x) + \beta_0 f'(x) + \gamma_0 f''(x) + \dots,$$

série qui s'arrêtera d'elle-même quand on arrivera à  $f^{p+1}(x)$ , qui est nul.

Pour vérifier cette valeur de  $F(x)$ , il suffit de faire la substitution comme il a été dit tout à l'heure; or on trouvera ainsi

$$\alpha \alpha_0 f(x) + (\alpha \beta_0 + \beta \alpha_0) f'(x) + (\alpha \gamma_0 + \beta \beta_0 + \gamma \alpha_0) f''(x) + \dots,$$

qui doit être identique à  $F(x)$ , et cette condition est satisfaite d'après les relations (1).

Comme exemple, je prendrai l'équation linéaire du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} + ay = f(x),$$

que nous savons déjà intégrer; nous allons ainsi retrouver le résultat précédemment obtenu. En appliquant la méthode qui vient d'être exposée, nous ferons le quotient

$$\frac{1}{a+z} = \frac{1}{a} - \frac{z}{a^2} + \frac{z^2}{a^3} - \dots$$

En posant alors

$$F(x) = \frac{f(x)}{a} - \frac{f'(x)}{a^2} + \frac{f''(x)}{a^3} - \dots,$$

la solution générale sera

$$y = c e^{-ax} + F(x).$$

*Remarque.* — Dans un grand nombre de questions, on se sert, comme nous l'avons fait ici, d'une fonction  $\varphi(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots$ , dans laquelle les exposants de la variable correspondent à des indices de dérivation d'une fonction donnée  $F(x)$ . Lorsqu'on déduit ainsi de  $F(x)$  la nouvelle fonction  $\alpha F(x) + \beta F'(x) + \gamma F''(x) + \dots$ , cela s'appelle *opérer* sur  $F(x)$  à l'aide de  $\varphi(x)$ .

En terminant, nous indiquerons, sans la démontrer, la conséquence suivante : *Lorsque l'équation caractéristique a toutes ses racines réelles, le nombre des racines réelles de  $F(x)$  est au plus égal au nombre des racines réelles de  $f(x)$ .*

SUR

## L'INDICE DES FRACTIONS RATIONNELLES.

*Bulletin de la Société mathématique de France,*  
t. VII, 1879, p. 128-131.

Soient  $U$  et  $V$  deux polynomes de degré  $n$  et  $n-1$ , que je supposerai premiers entre eux; je me propose de montrer, par une considération directe et entièrement élémentaire, que l'indice de la fraction  $\frac{V}{U}$ , entre les limites  $-\infty$  et  $+\infty$  de la variable, donne la différence entre le nombre des racines imaginaires de l'équation  $U + iV = 0$ , où le coefficient de  $i$  est positif, et le nombre de ces racines où il est négatif. Soit, à cet effet,

$$U + iV = (x - a_1 - ib_1)(x - a_2 - ib_2) \dots (x - a_n - ib_n),$$

et posons

$$U_1 + iV_1 = (x - a_2 - ib_2) \dots (x - a_n - ib_n),$$

de sorte qu'on ait

$$U + iV = (x - a_1 - ib_1)(U_1 + iV_1),$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} U &= (x - a_1)U_1 + b_1V_1, \\ V &= -b_1U_1 + (x - a_1)V_1, \end{aligned}$$

Je remarque d'abord qu'il résulte de ces relations que les polynomes  $U$  et  $U_1$  sont premiers entre eux; car autrement  $U$  et  $V$  auraient un diviseur commun, contre la supposition faite. Cela posé, l'égalité

$$(U + iV)(U_1 - iV_1) = (x - a_1 - ib_1)(U_1^2 + V_1^2)$$



donne, en égalant dans les deux membres les coefficients de  $i$ ,

$$VU_1 - UV_1 = -b_1(U_1^2 + V_1^2)$$

ou bien

$$\frac{V}{U} - \frac{V_1}{U_1} = -\frac{b_1(U_1^2 + V_1^2)}{UU_1}.$$

Faisons croître maintenant la variable de  $-\infty$  à  $+\infty$ ; puisque les polynômes  $U$  et  $U_1$  ne peuvent s'évanouir pour la même valeur, on voit que l'indice du premier membre sera la différence des indices des fractions  $\frac{U}{V}$  et  $\frac{U_1}{V_1}$ , qui va s'obtenir immédiatement.

Supprimons, en effet, le facteur positif  $U_1^2 + V_1^2$ ; nous sommes amené à la quantité  $-\frac{b_1}{UU_1}$ , dont la réciproque a un indice nul, de sorte qu'il suffit d'appliquer la proposition contenue dans l'égalité

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) + \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{f(x)} = \varepsilon,$$

où  $\varepsilon = +1$  lorsque  $f(x_0) > 0$ ,  $f(x_1) < 0$ ,  $\varepsilon = -1$  si l'on a  $f(x_0) < 0$ ,  $f(x_1) > 0$ , et enfin  $\varepsilon = 0$  lorsque  $f(x_0)$  et  $f(x_1)$  sont de même signe. Dans le cas présent,  $x_0 = -\infty$ ,  $x_1 = +\infty$ ; d'ailleurs  $U$  et  $U_1$  sont de degrés  $n$  et  $n-1$ ; il en résulte que  $\varepsilon$  sera  $+1$  ou  $-1$  suivant que  $b_1$  sera positif ou négatif.

La proposition énoncée à l'égard de l'équation  $U + iV = 0$ , de degré  $n$ , se trouve ainsi ramenée au cas de l'équation  $U_1 + iV_1 = 0$ , dont le degré est moindre d'une unité, et, de proche en proche, on arrivera au cas le plus simple, à savoir

$$x - a_n - ib_n = 0,$$

où elle se vérifie immédiatement.

Une première conséquence à en tirer, c'est que, en désignant par  $l$  l'indice de  $\frac{V}{U}$ , c'est-à-dire l'excès du nombre de fois que cette fraction, en devenant infinie, passe du positif au négatif sur le nombre de fois qu'elle passe du négatif au positif, le nombre des racines imaginaires de l'équation  $U + iV = 0$  dans lesquelles le coefficient de  $i$  est positif est donné par la formule  $\frac{l+n}{2}$ .

Supposons ensuite que, en changeant  $x$  en  $x + i\lambda$ ,  $U + iV$  de-

vienne  $U_\lambda + iV_\lambda$ , et soit  $l_\lambda$  l'indice de  $\frac{V_\lambda}{U_\lambda}$ . Le nombre des racines de l'équation proposée dans lesquelles le coefficient de  $i$  est supérieur à  $\lambda$  sera  $\frac{l_\lambda + n}{2}$ ; la formule  $\frac{l_\lambda - l_0}{2}$  donnera donc, en supposant  $\lambda < \lambda'$ , le nombre des racines où le coefficient de  $i$  est compris entre les deux limites  $\lambda$  et  $\lambda'$ . La transformée déduite de l'équation  $U + iV = 0$  par le changement de  $x$  en  $ix$  conduira d'ailleurs de la même manière au nombre des racines dont la partie réelle est dans un intervalle donné. Considérons encore l'équation en  $y$  obtenue en faisant

$$y = \frac{x-g}{h-x}$$

et la droite passant par les points dont les affixes sont  $g$  et  $h$ . L'indice relatif à cette nouvelle transformée donnera le nombre des racines de la proposée qui sont au-dessus ou au-dessous de cette droite, et, si nous remplaçons  $g$  et  $h$  par  $g+h$  et  $h+k$ , de manière à définir une seconde droite parallèle à la première, la demi-différence des indices relatifs aux deux transformées représentera le nombre des racines comprises entre les deux parallèles.

En dernier lieu, je remarquerai que, si l'on suppose les quantités  $b_1, b_2, \dots, b_n$  toutes de même signe, on a

$$l = +n \quad \text{ou} \quad l = -n,$$

selon qu'elles seront positives ou négatives. Dans les deux cas, la fraction  $\frac{V}{U}$  doit, par conséquent, passer  $n$  fois par l'infini lorsque la variable croît de  $-\infty$  à  $+\infty$ ; ainsi l'équation  $U = 0$  a nécessairement toutes ses racines réelles. C'est donc un nouvel exemple qui s'ajoute, en Algèbre, à l'équation dont dépendent les inégalités séculaires du mouvement elliptique des planètes et qui a été l'objet du travail célèbre de notre confrère M. Borchardt. Je ne tenterai point de suivre la voie qu'a ouverte l'illustre géomètre en appliquant le théorème de Sturm à l'équation  $U = 0$  pour obtenir, sous forme de sommes de carrés, les fonctions littérales dont dépendent les conditions de réalité des racines; mais je saisis l'occasion d'employer, pour démontrer directement la propriété que j'ai en vue,





une méthode que Sturm a lui-même donnée dans une Note du *Journal de M. Liouville*, publiée à la suite d'un travail de M. Gascheau, intitulé *Application du théorème de Sturm aux transformées des équations binomes*, t. VII, p. 126 (voir aussi le *Cours d'Algèbre supérieure* de M. Serret, t. I, p. 183). J'introduis, à cet effet, la série entière des polynomes  $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$ , en posant

$$U_k + iV_k = (x - a_{k+1} - ib_{k+1})(x - a_{k+2} - ib_{k+2}) \dots (x - a_n - ib_n),$$

et je remarque que la suite

$$U, U_1, U_2, \dots, U_{n-1}, 1$$

présente  $n$  variations pour  $x = -\infty$  et  $n$  permanences pour  $x = +\infty$ . J'observe ensuite que trois fonctions consécutives quelconques, par exemple  $U, U_1, U_2$ , sont liées par la relation

$$b_2 U - [b_1(x - a_2) + b_2(x - a_1)]U_1 + b_1[(x - a_2)^2 + b_2^2]U_2 = 0.$$

Sous la condition admise à l'égard des quantités  $b_1, b_2, \dots$ , on voit donc que, quand une fonction s'annule, la précédente et la suivante sont de signes contraires; il en résulte que, en faisant croître la variable de  $-\infty$  à  $+\infty$ , des changements dans le nombre des variations de la suite considérée ne peuvent se produire qu'autant que c'est la première fonction qui s'évanouit. Puisqu'on perd  $n$  variations, il est donc démontré que le polynome  $U$  passe  $n$  fois par zéro; en même temps que nous voyons que, à l'égard de  $U$ , la fonction  $U_1$  possède la propriété caractéristique de la dérivée, c'est-à-dire que le rapport  $\frac{U}{U_1}$  passe toujours, en s'évanouissant, du négatif au positif, pour des valeurs croissantes de la variable.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. CH. HERMITE A M. BORCHARDT.

SUR UNE EXTENSION DONNÉE

A LA

## THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES

PAR M. TCHEBYCHEF.

*Journal de Crelle*, t. 88, 1879, p. 10-15.

M. Tchebychef m'a fait part, dans un entretien, d'un théorème arithmétique qui m'a vivement intéressé. Il a établi, dans un Mémoire publié en langue russe dans les *Mémoires de Saint-Petersbourg* et dont sans lui je n'aurais jamais eu connaissance, cette proposition extrêmement remarquable, qu'il existe une infinité de systèmes de nombres entiers  $x$  et  $y$  tels que la fonction linéaire

$$x - ay - b,$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes quelconques, soit plus petite en valeur absolue que  $\frac{1}{2y}$ . C'est, comme vous voyez, le résultat fondamental de la théorie des fractions continues, étendu à une expression toute différente, et qui ouvre la voie à bien des recherches. Dans une lettre adressée à M. Brachmann, et publiée dans le *Journal de Liouville*, 2<sup>e</sup> série, t. X, M. Tchebychef, appliquant cette même conception à l'Algèbre, considère l'expression

$$x - UY - V,$$

où  $U$  et  $V$  sont deux fonctions quelconques d'une variable  $x$ , et



il détermine des polynomes entiers par rapport à cette variable, X et Y, tels qu'en ordonnant suivant les puissances décroissantes, le degré soit le nombre négatif le plus grand possible en valeur absolue. Les recherches de l'illustre géomètre sur la question sont extrêmement belles; à bien des titres elles sont pour moi du plus grand intérêt, et voici une remarque à laquelle elles m'ont amené. Me plaçant d'abord au point de vue arithmétique, je suppose que  $a$  soit une quantité positive; les valeurs entières de  $x$  et  $y$  s'obtiennent alors comme il suit. Soient  $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}$  deux réduites consécutives du développement en fraction continue de  $a$ ; posons

$$nb = N + \omega, \quad n'b = N' + \omega',$$

en désignant par  $N$  et  $N'$  des nombres entiers, par  $\omega$  et  $\omega'$  des quantités inférieures en valeur absolue à  $\frac{1}{2}$ . Soit encore, pour abrégér,

$$\varepsilon = mn' - m'n = \pm 1;$$

on aura

$$\varepsilon x = mN' - m'N, \quad \varepsilon y = nN' - n'N.$$

Ces formules donnent en effet

$$\begin{aligned} \varepsilon(x - ay) &= (m - an)N' - (m' - an')N \\ &= (m - an)(n'b - \omega') - (m' - an')(nb - \omega) \\ &= \varepsilon b + \omega(m' - an') - \omega'(m - an), \end{aligned}$$

de sorte qu'il vient déjà

$$\varepsilon(x - ay - b) = \omega(m' - an') - \omega'(m - an).$$

Employons maintenant la quantité  $\lambda$  qu'on nomme *quotient complet* dans la théorie des fractions continues et qui résulte de l'égalité

$$a = \frac{m'\lambda + m}{n'\lambda + n},$$

on aura

$$m - an = \frac{\varepsilon\lambda}{n'\lambda + n}, \quad m' - an' = -\frac{\varepsilon}{n'\lambda + n}$$

et, par suite,

$$\omega(m' - an') - \omega'(m - an) = -\varepsilon \frac{\omega'\lambda + \omega}{n'\lambda + n},$$

quantité moindre, d'après les limitations de  $\omega$  et  $\omega'$ , que

$$\frac{1}{2} \frac{\lambda + 1}{n'\lambda + n}.$$

Mais cette expression décroît avec  $\lambda$  sous la condition  $n' > n$ , qui est ici remplie; son maximum a donc lieu pour  $\lambda = 1$ , et de là résulte qu'on peut poser

$$x - ya - b = \frac{\theta}{n' + n},$$

$\theta$  étant compris entre  $-1$  et  $+1$ . Ce point établi, il suffit de remarquer qu'ayant

$$\varepsilon y = nN' - n'N = n(n'b - \omega') - n'(nb - \omega),$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon y = \omega n' - \omega' n,$$

l'entier  $y$  est renfermé entre les limites

$$+ \frac{n' + n}{2}, \quad - \frac{n' + n}{2},$$

ce qui démontre le beau théorème découvert par M. Tchebychef.

Les expressions de  $x$  et  $y$  conduisent facilement à une conséquence qu'il n'est pas inutile de remarquer. Supposons qu'on ait  $g - ah - b = 0$ ,  $g$  et  $h$  étant entiers; je dis qu'à partir d'une certaine réduite du développement de  $a$  en fraction continue, et pour toutes celles qui suivent, on trouvera constamment  $x = g, y = h$ . La théorie des fractions continues donnant en effet

$$a = \frac{m}{n} + \frac{\theta}{nn'}, \quad a' = \frac{m'}{n'} + \frac{\theta'}{n'n'},$$

où  $\theta$  et  $\theta'$  désignent des quantités moindres que l'unité, on obtient, en substituant dans la valeur  $b = g - ah$ ,

$$nb = ng - mh + \frac{\theta h}{n'}, \quad n'b = n'g - m'h + \frac{\theta h}{n'}.$$

Vous voyez donc que, quand  $n'$  dépassera  $2h$ , nous aurons

$$N = ng - mh, \quad N' = n'g - m'h;$$



or en remplaçant dans les formules proposées

$$\varepsilon x = mN' - m'N, \quad \varepsilon y' = nN' - n'N,$$

on en tire sur-le-champ

$$x = g, \quad y = h.$$

Si l'on suppose  $b = a^2$ , cette remarque donne un algorithme pour la détermination des diviseurs du second degré des équations algébriques à coefficients entiers, lorsque le coefficient de la plus haute puissance de l'inconnue est l'unité.

Enfin, en passant de l'Arithmétique à l'Algèbre et considérant l'expression  $X - UY - V$ , où  $U$  et  $V$  sont des fonctions quelconques dont la partie infinie est de la forme  $\frac{a}{x} + \frac{a'}{x^2} + \dots$ , on obtient sous une forme toute semblable les polynômes  $X$  et  $Y$  qui donnent l'approximation la plus grande de la fonction  $V$ , par la formule  $X - UY$ . Désignons encore par  $\frac{M}{N}$ ,  $\frac{M'}{N'}$  deux réduites consécutives du développement de  $U$  en fraction continue algébrique; faisons toujours  $\varepsilon = MN' - M'N = \pm 1$ , et représentons la partie entière du développement d'une fonction  $f(x)$  suivant les puissances descendantes de la variable par  $[f(x)]$ , on aura

$$\varepsilon X = M[N'V] - M'[NV],$$

$$\varepsilon Y = N[N'V] - N'[NV].$$

Soit, de plus,  $\frac{M''}{N''}$  la réduite qui suit  $\frac{M'}{N'}$  et posons semblablement

$$\varepsilon' X' = M''[N'V] - M'''[NV],$$

$$\varepsilon' Y' = N''[N'V] - N'''[NV].$$

En observant que  $\varepsilon' = -\varepsilon$ , on en déduira

$$\varepsilon(X' - X) = (M'' - M)[N'V] - M''[NV] + M'[N'V],$$

$$\varepsilon(Y' - Y) = (N'' - N)[N'V] + N''[NV] - N'[N'V].$$

Mais la loi de formation des réduites donnant, si l'on désigne par  $q$  le quotient incomplet,

$$M'' = qM' + M, \quad N'' = qN' + N,$$

vous voyez qu'on obtient

$$\varepsilon(X' - X) = \omega M', \quad \varepsilon(Y' - Y) = \omega N',$$

en posant

$$\omega = q[N'V] + [NV] - [N''V].$$

Cette formule se simplifie, si l'on remplace dans le dernier terme  $N''$  par sa valeur, et devient évidemment

$$\omega = q[N'V] - [qN'V].$$

De là se tire l'expression des polynômes  $X$  et  $Y$  sous forme de séries, telle que l'a donnée M. Tchebychef dans sa lettre à M. Bruschmann, et je remplis l'intention qu'a bien voulu m'exprimer l'illustre géomètre en vous communiquant ce qui m'a été suggéré par l'étude de son beau travail.

La considération de la forme

$$f = (x - ay - bz)^2 + \frac{y^2}{\delta} + \frac{z^2}{\delta'},$$

où  $\delta$  et  $\delta'$  sont des quantités variables essentiellement positives, qui donne une démonstration facile des résultats découverts par Dirichlet sur les minima de la fonction linéaire  $x - ay - bz$ , conduit également à la proposition de M. Tchebychef. Soit d'abord  $\delta = t^2 u$ ,  $\delta' = tu^2$ , de sorte que l'invariant  $D$  ait pour expression  $t^3 u^3$ , je rappelle qu'un minimum de  $f$ , pour des valeurs entières des indéterminées, ayant pour limite supérieure le double de l'invariant, on a, quelles que soient les quantités positives de  $t$  et  $u$ ,

$$(x - ay - bz)^2 + \frac{y^2}{t^2 u} + \frac{z^2}{tu^2} < \frac{\sqrt{2}}{tu},$$

et par conséquent

$$(x - ay - bz)^2 < \frac{\sqrt{2}}{tu}, \quad x - ay - bz < \sqrt{\frac{2}{27}} \times \frac{1}{y^2},$$

puis

$$y^2 < t\sqrt{2}, \quad z^2 < u\sqrt{2}.$$

Cela posé, je remarque en premier lieu que, si la limite supérieure de  $z$  est inférieure à l'unité, on aura  $z = 0$ , et les minima obtenus en faisant croître  $t$  indéfiniment seront ceux de la fonction linéaire  $x - ay$  que donne le développement de  $a$  en fraction continue.



Concevons ensuite qu'on fasse croître  $u$ , la valeur entière de  $z$  à partir d'une certaine limite ne sera plus égale à zéro, et il s'agit de prouver qu'en cessant d'être nulle elle devient égale à l'unité. Je me fonderai pour cela sur la remarque suivante : Considérant une forme définie à coefficients variables quelconques  $f(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + \dots$ ; je suppose que, pour trois systèmes de valeurs infiniment voisines de ces coefficients, les minima soient

$$f(m, n, p), \quad f(m', n', p'), \quad f(m'', n'', p'');$$

je dis que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & m' & m'' \\ n & n' & n'' \\ p & p' & p'' \end{vmatrix}$$

sera zéro ou l'unité.

Soit en effet  $D$  l'invariant de  $f$ ,  $AX^2 + A'Y^2 - A''Z^2 + \dots$  la transformée qui en résulte en faisant

$$\begin{aligned} x &= mX + m'Y + m''Z, \\ y &= nX + n'Y + n''Z, \\ z &= pX + p'Y + p''Z, \end{aligned}$$

et dont l'invariant sera, par conséquent,  $\Delta^2 D$ . Comme, pour toute forme définie, le produit des coefficients des carrés des variables surpasse l'invariant, nous aurons  $AA'A'' > \Delta^2 D$ , ou bien

$$f(m, n, p)f(m', n', p')f(m'', n'', p'') > \Delta^2 D.$$

Mais on peut poser, en négligeant les quantités infiniment petites,

$$f(m, n, p) < D\sqrt[3]{2}, \quad f(m', n', p') < D\sqrt[3]{2}, \quad f(m'', n'', p'') < D\sqrt[3]{2},$$

et par conséquent

$$f(m, n, p)f(m', n', p')f(m'', n'', p'') < 2D.$$

Nous en tirons la condition  $\Delta^2 < 2$ , de sorte qu'on a bien  $\Delta = 0$  ou  $\Delta = \pm 1$ .

Cela établi et revenant à la forme  $f = (x - ay - bz)^2 + \frac{y^2}{t^2u} + \frac{z^2}{tu^2}$ , je considère  $t$  et  $u$  comme l'abscisse et l'ordonnée d'un point rapporté dans un plan à des axes rectangulaires, de sorte qu'à un sys-

tème de trois entiers, qui donnent le minimum de  $f$ , correspond un ensemble de points ou une aire déterminée dans ce plan. De telles aires limitées par la partie positive de l'axe des abscisses s'offrent d'abord lorsqu'en faisant varier  $t$ , on suppose  $u$  assez petit pour avoir  $z = 0$ , et à deux aires contiguës appartiennent deux minima successifs de  $x - ay$ , ou bien deux réduites consécutives  $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}$  de  $a$ . Vous voyez qu'en un point de la ligne de séparation de ces deux aires voisines, les valeurs des quantités  $t$  et  $u$  présentent cette circonstance qu'une variation infiniment petite donne les minima correspondant aux deux systèmes  $m, n, 0$  et  $m', n', 0$ . Suivons cette ligne jusqu'à son extrémité où elle aboutit à une nouvelle aire placée au-dessus des précédentes et à laquelle appartiennent les nombres  $m'', n'', p''$ . Nous introduirons, en supposant  $p''$  différent de zéro, la condition que cette aire ne fasse plus partie de la première série où la troisième indéterminée est toujours nulle. Mais il en résulte que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} m & m' & m'' \\ n & n' & n'' \\ 0 & 0 & p'' \end{vmatrix},$$

ayant pour valeur  $\pm p''$ , est lui-même alors différent de zéro; or on a vu dans ce cas qu'il est en valeur absolue égal à l'unité, nous démontrons donc ainsi que  $p'' = \pm 1$ , ce qui établit bien l'existence du minimum découvert par M. Tchebychef. Enfin et comme conséquence de cette seconde méthode, la limitation précédemment obtenue  $x - ay - b < \frac{1}{2y}$  se trouve remplacée par celle-ci :  $x - ay - b < \sqrt{\frac{x}{27} \frac{1}{y}}$  où le coefficient numérique  $\sqrt{\frac{2}{27}}$  est sensiblement plus petit que  $\frac{1}{2}$ .

Paris, le 22 mars 1879.



ERRATA DU TOME I.

Page 168, lignes 18 et 19, au lieu de pour des valeurs entières des indéterminées, lire pour des valeurs entières des indéterminées, premières entre elles.

Page 179, ligne 9, au lieu de comme distincts, lire comme non distincts.

ERRATA DU TOME III.

Page	9, ligne	2, à partir d'en bas	ou lieu de	lire
» 35,	» 3,	» haut	$\frac{z_{n1}}{(1)}$	$\frac{z_{n-1}}{(1)}$
» 55,	» 1,	» bas	$(f \sin x, \cos x)$	$f(\sin x, \cos x)$
» 68,	» 7,	» bas	$\int \sin^m \cos^k x dx$	$\int \sin^m x \cos^k x dx$
» 69,	» 4,	» haut	$\int \sin^{m-2n} \cos^k x dx$	$\int \sin^{m-2n} x \cos^k x dx$
» 77,	» 2,	» haut	$f(\sin x, \cos x)$	$f(\sin x, \cos x)$
» 81,	» 3,	» haut	$\cot \frac{x-\mu}{2}$	$-\cot \frac{x+\mu}{2}$
» 122,	» 9,	» bas	$\frac{dy}{dt} \frac{d}{dx} \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{dy}{dt} \frac{d}{dx} \frac{1}{2\sqrt{x}}$
» 150,	» 8,	» haut	$A\sqrt{A}$	$A\sqrt{A}$
» 221,	» 8,	» haut	$B(x)$	$B'(x)$
» 225,	» 3,	» haut	$en(x-z)$	$cn(x-z)$
» 302,	» 1,	» haut	$v+iv'$	$v+iv'$
» 357,	» 10,	» haut	$e^{-\frac{i\pi}{k}(n+iK)}$	$e^{\frac{i\pi}{k}(n+iK)}$
» 371,	» 9,	» bas	$e^{\left[\lambda \frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}\right]}$	$e^{\left[\lambda \frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)}\right] u}$
» 408,	» 7,	» bas	$D_x^{2y3}$	$D_x^{2y-3}$
» 415,	» 14,	» bas	$\lambda_0^{2y4}$	$\lambda_0^{2y-4}$
» 426,	» 9,	» haut	$Sn^s(ix, k')$	$Sn^s(ix, k)$
» 433,	» 1,	» bas	$+[\dots]$	$\times[\dots]$
» 448,	» 5,	» bas	$a^2$	$a^2$
» 457,	» 7,	» bas	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{z}$

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages
AVERTISSEMENT.....	v
Sur l'extension du théorème de M. Sturm à un système d'équations simultanées.....	1
Intégration des fonctions rationnelles.....	35
Intégration des fonctions transcendentes.....	55
Sur l'équation $x^2 + y^2 = z^2 + w^2$ .....	115
Sur l'équation de Lamé.....	118
On an application of the theory of unicursal curves.....	123
Sur l'irrationalité de la base des logarithmes hyperboliques.....	127
Sur une équation transcendante.....	131
Extrait d'une lettre sur l'expression $U \sin x + V \cos x + W$ .....	135
Extrait d'une lettre sur quelques approximations algébriques.....	146
Sur la fonction exponentielle.....	150
Extrait d'une lettre sur l'intégrale $\int_0^\pi \left(\frac{\sin^2 x}{1-2a \cos x + a^2}\right)^m dx$ .....	182
Extrait d'une lettre sur la transformation des formes quadratiques ternaires en elles-mêmes.....	185
Extrait d'une lettre sur la réduction des formes quadratiques ternaires.....	190
Extrait d'une lettre sur quelques équations différentielles linéaires.....	194
Extrait d'une lettre sur les nombres de Bernoulli.....	211
Extrait d'une lettre sur la fonction de Jacob Bernoulli.....	215
Sur les développements de $F(x) = Sn^s x Cn^s x Dn^s x$ .....	222
Sur un théorème d'Eisenstein.....	232
Extrait d'une lettre sur le développement des fonctions elliptiques suivant les puissances croissantes de la variable.....	236
Extrait d'une lettre sur une formule de M. Delaunay.....	246
Sur l'aire d'un segment de courbe convexe.....	248
Sur un exemple de réduction d'intégrales abéliennes aux fonctions elliptiques.....	249
Sur une formule de Jacobi.....	249
Sur quelques applications des fonctions elliptiques.....	266
Études de M. Sylvester sur la théorie algébrique des formes.....	419
Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Fuchs.....	420
Extrait d'une lettre sur la formule de Maclaurin.....	425
Extrait d'une lettre sur la formule d'interpolation de Lagrange.....	432
Extrait d'une lettre sur les courbes planes.....	444
Extrait d'une lettre sur le pendule.....	447



	Pages
Sur la théorie des fonctions sphériques.....	451
Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{z^{n-1} - z^n}{1-z} dz$ .....	455
Extrait d'une lettre sur l'équation de Lamé.....	475
Sur un théorème de Galois relatif aux équations solubles par radicaux...	479
Sur le contact des surfaces.....	485
Sur les équations différentielles linéaires.....	496
Sur les équations linéaires.....	509
Extrait d'une lettre sur une extension donnée à la théorie des fractions continues par M. Tchebychef.....	513

PIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME III.







