EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. CH. HERMITE A M. BORCHARDT

SUR LA

FORMULE D'INTERPOLATION DE LAGRANGE.

Journal de Crelle, t. 84, 1878, p. 70.

Je me suis proposé de trouver un polynome entier $F(x)$ de degré $n-1$, satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{array}{llll}
F(a)=f(a), & F'(a)=f'(a), & \ldots, & F^{\alpha-1}(a)=f^{\alpha-1}(a),\\
F(b)=f(b), & F'(b)=f'(b), & \ldots, & F^{\beta-1}(b)=f^{\beta-1}(b),\\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots,\\
F(l)=f(l), & F'(l)=f'(l), & \ldots. & F^{\lambda-1}(l)=f^{\lambda-1}(l),
\end{array}$$

où $f(x)$ est une fonction donnée. En supposant

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda=n,$$

la question comme on voit est déterminée et conduira à une généralisation de la formule de Lagrange sur laquelle je présenterai quelques remarques. Elle se résout d'abord facilement comme il suit. Je considère une aire s, comprenant d'une part, $a, b, \ldots, l$, et de l'autre la quantité x; je suppose qu'à son intérieur la fonction $f(x)$ soit uniforme et n'ait aucun pôle; cela étant je vais établir la relation

$$F(x)-f(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{f(z)(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda}{(x-z)(z-a)^\alpha(z-b)^\beta\ldots(z-l)^\lambda}\,dz,$$

l'intégrale du second membre se rapportant au contour de s, et en même temps donner l'expression du polynome cherché $F(x)$.

Faisons pour abréger

$$\Phi(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda$$

et

$$\varphi(x)=\frac{f(z)\Phi(x)}{(x-z)\Phi(z)};$$

l'intégrale curviligne sera la somme des résidus de $\varphi(z)$ pour les valeurs $z=a, b, \ldots, l$ et $z=x$. Le dernier de ces résidus est évidemment $-f(x)$; à l'égard des autres, en considérant pour fixer les idées celui qui correspond à $z=a$, je vais le déterminer par le calcul du terme en $\frac{1}{h}$ dans le développement de $\varphi(a+h)$, suivant les puissances croissantes de h.

Observons d'abord qu'on a

$$\Phi(a+h)=h^\alpha(a-b+h)^\beta(a-c+h)^\gamma\ldots(a-l+h)^\lambda,$$

de sorte qu'en posant

$$\begin{aligned}&(a-b+h)^{-\beta}(a-c+h)^{-\gamma}\ldots(a-l+h)^{-\lambda}\\ &\quad=A+A_1h+A_2h^2+\ldots+A_{\alpha-1}h^{\alpha-1}+\ldots,\end{aligned}$$

nous pouvons écrire

$$\varphi(a+h)=\frac{f(a+h)\Phi(x)}{(x-a-h)h^\alpha}[A+A_1h+A_2h^2+\ldots].$$

Effectuons ensuite le produit des deux séries

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)\frac{h}{1}+f''(a)\frac{h^2}{1.2}+\ldots+f^{\alpha-1}(a)\frac{h^{\alpha-1}}{1.2\ldots\alpha-1}+\ldots,$$

$$\frac{1}{x-a-h}=\frac{1}{x-a}+\frac{h}{(x-a)^2}+\frac{h^2}{(x-a)^3}+\ldots+\frac{h^{\alpha-1}}{(x-a)^\alpha}+\ldots;$$

il est clair qu'on aura pour résultat

$$\frac{f(a+h)}{x-a-h}=\frac{X_0}{x-a}+\frac{X_1h}{(x-a)^2}+\frac{X_2h^2}{(x-a)^3}+\ldots+\frac{X_{\alpha-1}h^{\alpha-1}}{(x-a)^\alpha}+\ldots,$$

X_i désignant un polynome entier en x du degré i. Il résulte que le résidu cherché, étant le coefficient de $h^{\alpha-1}$, dans le produit

$$\begin{aligned}&\Phi(x)[A+A_1h+A_2h^2+\ldots+A_{\alpha-1}h^{\alpha-1}]\\ &\quad+\left[\frac{X_0}{x-a}+\frac{X_1h}{(x-a)^2}+\frac{X_2h^2}{(x-a)^3}+\ldots+\frac{X_{\alpha-1}h^{\alpha-1}}{(x-a)^\alpha}\right],\end{aligned}$$

aura pour expression

$$\Phi(x)\left[\frac{AX_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1X_{\alpha-2}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}X_0}{x-a}\right],$$

ou encore

$$(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}\ldots(x-l)^{\lambda}$$
$$\times[AX_{\alpha-1}+A_1X_{\alpha-2}(x-a)+\ldots+A_{\alpha-1}X_0(x-a)^{\alpha-1}].$$

C'est donc à l'égard de la variable x, un polynome entier de degré $\alpha+\beta+\ldots+\lambda-1=n-1$; il en est de même des autres résidus de $\varphi(z)$, et par conséquent leur somme que je désignerai par $F(x)$ est bien un polynome entier de degré $n-1$, dans la relation que nous venons d'obtenir

$$F(x)-f(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_s\frac{f(z)\Phi(x)}{(x-z)\Phi(z)}dz.$$

Observez maintenant que l'intégrale du second membre, renfermant comme facteur, sous le signe d'intégration, la fonction $\Phi(x)$, s'annule ainsi que ses dérivées par rapport à x, jusqu'à l'ordre $\alpha-1$ pour $x=a$ jusqu'à l'ordre $\beta-1$ pour $x=b$, etc. Il est ainsi immédiatement mis en évidence que $F(x)$ est le polynome cherché, toutes les conditions à remplir se trouvant en effet satisfaites. Mais de plus, nous obtenons une expression de la différence entre la fonction et le polynome d'interpolation, sous une forme permettant de reconnaître qu'elle diminue sans limite, lorsque le nombre des quantités $a, b, \ldots, l$, ou bien les exposants $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ vont en augmentant. Effectivement, si nous admettons que tous les cercles passant par le point dont l'affixe est x et ayant pour centres les n points $a, b, \ldots, l$ soient contenus à l'intérieur de s, les rayons de ces cercles, c'est-à-dire les modules de $x-a$, $x-b$, $\ldots$, seront respectivement inférieurs aux modules des quantités $z-a, z-b, \ldots, z-l$, lorsque la variable z décrit le contour de l'aire.

Le module du facteur $\frac{\Phi(x)}{\Phi(z)}$ entrant dans l'intégrale curviligne peut ainsi devenir moindre que toute quantité donnée, lorsqu'on augmente le degré du polynome $F(x)$.

Cette considération est d'ailleurs exactement celle dont on fait

usage à l'égard du reste de la série de Taylor,

$$R=\frac{1}{2i\pi}\int_s\frac{f(z)(x-a)^{\alpha}}{(x-z)(z-a)^{\alpha}}dz,$$

lorsqu'on veut établir la convergence de cette série pour des valeurs imaginaires de la variable. J'ajouterai cette remarque que la différentiation par rapport à a donne

$$\frac{dR}{da}=\frac{\alpha(x-a)^{\alpha-1}}{2i\pi}\int_s\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{\alpha+1}},$$

de sorte que la formule

$$f^{(\alpha)}(a)=\frac{1.2\ldots\alpha}{2i\pi}\int_s\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{\alpha+1}}$$

permet d'écrire

$$\frac{dR}{da}=\frac{(x-a)^{\alpha-1}f^{(\alpha)}(a)}{1.2\ldots\alpha-1},$$

et l'on en conclut, R s'évanouissant pour $a=x$, la forme élémentaire du reste

$$R=\int_x^a\frac{(x-a)^{\alpha-1}f^{(\alpha)}(a)\,da}{1.2\ldots\alpha-1}.$$

Après avoir rattaché à un même point de vue la série de Taylor et la formule d'interpolation de Lagrange, qui s'obtiennent, comme on voit, en posant

$$\Phi(x)=(x-a)^{\alpha} \quad \text{et} \quad \Phi(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-l),$$

je vais considérer un nouveau cas et faire

$$\Phi(x)=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}.$$

Si l'expression des polynomes $F(x)$ devient alors plus compliquée, l'intégrale $\int_a^b F(x)\,dx$ donne, pour la valeur approchée de la quadrature $\int_a^b f(x)\,dx$, un résultat très simple, auquel on parvient comme il suit.

Nommons A et B les résidus correspondant à $z=a$ et $z=b$ de la fonction

$$\varphi(z)=\frac{f(z)(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}}{(x-z)(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}},$$

de sorte qu'on ait

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{A} + \mathrm{B},$$

je montrerai d'abord que les intégrales

$$A = \int_a^b \mathrm{A}\, dx, \qquad B = \int_a^b \mathrm{B}\, dx,$$

se déduisent immédiatement l'une de l'autre. Ces quantités sont en effet les coefficients de $\frac{1}{h}$, dans le développement des expressions

$$\int_a^b \varphi(a+h)\, dx = \frac{f(a+h)}{h^\alpha (a-b+h)^\beta} \int_a^b \frac{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta\, dx}{x-a-h}$$

et

$$\int_a^b \varphi(b+h)\, dx = \frac{f(b+h)}{h^\beta (b-a+h)^\alpha} \int_a^b \frac{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta\, dx}{x-b-h}.$$

Or écrivons pour un moment

$$(a, b, \alpha, \beta) = \frac{f(a+h)}{h^\alpha (a-b+h)^\beta} \int_a^b \frac{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta\, dx}{x-a-h},$$

et permutons à la fois, d'une part a et b, et de l'autre α et β, ce qui donnera

$$(b, a, \beta, \alpha) = \frac{f(b+h)}{h^\beta (b-a+h)^\alpha} \int_b^a \frac{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta\, dx}{x-b-h};$$

on voit que le second membre de cette égalité étant $-B$, on a simplement

$$\int_a^b \mathrm{F}(x)\, dx = (a, b, \alpha, \beta) - (b, a, \beta, \alpha).$$

Cette remarque faite, posons $m = \alpha + \beta$; la formule élémentaire

$$\int_a^b (x-a)^{p-1} (b-x)^{q-1}\, dx = (b-a)^{p+q-1} \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

donne le développement

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \frac{(x-a)^\alpha (b-x)^\beta\, dx}{x-a-h} \\
&\quad = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m+1)} (b-a)^m + \frac{\Gamma(\alpha-1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m)} (b-a)^{m-1} h \\
&\qquad + \frac{\Gamma(\alpha+2)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m-1)} (b-a)^{m-2} h^2 + \ldots.
\end{aligned}$$

Faisons encore $h = (b-a)t$, on pourra l'écrire sous cette nouvelle forme

$$\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m+1)} (b-a)^m \left[1 + \frac{m}{\alpha-1} t + \frac{m(m-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)} t^2 + \ldots \right].$$

Cela étant, nous effectuerons la multiplication par le facteur $(a-b+h)^{-\beta}$, ou plutôt par la quantité égale

$$(-1)^\beta (b-a)^{-\beta} (1-t)^{-\beta}.$$

Des réductions qui se présentent d'elles-mêmes montrent que le produit des deux séries

$$1 + \frac{m}{\alpha-1} t + \frac{m(m-1)}{(\alpha-1)(\alpha-2)} t^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)} t^3 + \ldots,$$

$$1 + \frac{\beta}{1} t + \frac{\beta(\beta+1)}{1.2} t^2 + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3} t^3 + \ldots$$

a la forme simple

$$\begin{aligned}
\mathrm{T} = 1 &+ \frac{\alpha(\beta+1)}{\alpha-1} t + \frac{\alpha(\beta+1)(\beta+2)}{1.2(\alpha-2)} t^2 + \frac{\alpha(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{1.2.3(\alpha-3)} t^3 + \ldots \\
&+ \frac{\alpha(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+\alpha-1)}{1.2.3\ldots(\alpha-1)} t^{\alpha-1} + \ldots,
\end{aligned}$$

de sorte qu'on a

$$\frac{1}{(a-b+h)^\beta} \int_a^b \frac{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta\, dx}{x-a-h} = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(m+1)} (b-a)^\alpha \mathrm{T}.$$

Mais il est préférable, en gardant seulement les puissances de h, dont l'exposant est inférieur à α, et qui nous seront seules utiles, d'ordonner le second membre suivant les puissances décroissantes de cette quantité. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(a-b+h)^\beta} \int_a^b \frac{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta\, dx}{x-a-h} \\
&\quad = \frac{\alpha}{m} (b-a) h^{\alpha-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{m(m-1)} \frac{(b-a)^2 h^{\alpha-2}}{2} \\
&\qquad + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{m(m-1)(m-2)} \frac{(b-a)^3 h^{\alpha-3}}{3} + \ldots.
\end{aligned}$$

En dernier lieu, multiplions par le facteur

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \frac{h}{1} + f''(a) \frac{h^2}{1.2} + \ldots + f^{\alpha-1}(a) \frac{h^{\alpha-1}}{1.2\ldots\alpha-1} + \ldots;$$

pour former le coefficient du terme en $h^{\alpha-1}$, qui est la quantité cherchée, nous parvenons ainsi à l'expression

$$(a, b, \alpha, \beta) = \frac{\alpha}{m}(b-a)f(a) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2\ldots m(m-1)}\,\frac{(b-a)^2 f'(a)}{1.2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{m(m-1)(m-2)}\,\frac{(b-a)^3 f''(a)}{1.2.3} + \ldots,$$

dont la loi est manifeste.

On obtient d'une autre manière cette formule, en partant de la relation

$$\int \mathrm{UV}^m\,dx = \Theta(x) + (-1)^m \int \mathrm{VU}^m\,dx,$$

où j'ai fait

$$\Theta(x) = \mathrm{UV}^{m-1} - \mathrm{U'V}^{m-2} + \mathrm{U''V}^{m-3} - \ldots.$$

Prenons en effet $\mathrm{U} = f(x)$, $\mathrm{V} = (x-a)^\beta (x-b)^\alpha$, avec la condition $\alpha + \beta = m$, de sorte qu'on ait $\mathrm{V}^m = 1.2\ldots m$. On en déduira en intégrant entre les limites $x = a$ et $x = b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{\Theta(b) - \Theta(a)}{1.2\ldots m} + \frac{(-1)^m}{1.2\ldots m}\int_a^b f^m(x)(x-a)^\beta (x-b)^\alpha\,dx,$$

et il est aisé de calculer $\Theta(a)$ et $\Theta(b)$. Il suffit en effet d'avoir les dérivées successives de $\mathrm{V} = (x-a)^\beta (x-b)^\alpha$ pour $x = a$ et $x = b$; or les premières s'obtiennent en faisant $x = a + h$, et sont données par les coefficients de $h^\beta(a - b + h)^\alpha$, les autres résultant semblablement de l'expression $h^\alpha(b - a + h)^\beta$, et l'on trouve ainsi

$$\frac{\Theta(a)}{1.2\ldots m} = \frac{\alpha}{m}(a-b)f(a) - \frac{\alpha(\alpha-1)}{m(m-1)}\,\frac{(a-b)^2 f'(a)}{1.2} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{m(m-1)(m-2)}\,\frac{(a-b)^3 f''(a)}{1.2.3} - \ldots.$$

Écrivons cette quantité de la manière suivante

$$\frac{\Theta(a)}{1.2\ldots m} = -\frac{\alpha}{m}(b-a)f(a) - \frac{\alpha(\alpha-1)}{m(m-1)}\,\frac{(b-a)^2 f'(a)}{1.2} - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{m(m-1)(m-2)}\,\frac{(b-a)^3 f''(a)}{1.2.3} - \ldots;$$

on aura de même

$$\frac{\Theta(b)}{1.2\ldots m} = -\frac{\beta}{m}(a-b)f(b) - \frac{\beta(\beta-1)}{m(m-1)}\,\frac{(a-b)^2 f'(b)}{1.2} - \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{m(m-1)(m-2)}\,\frac{(a-b)^3 f''(b)}{1.2.3} - \ldots,$$

et nous sommes ramenés à la formule précédemment obtenue. Mais on trouve, par cette méthode, que la différence entre l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ et sa valeur approchée est la quantité

$$\frac{(-1)^m}{1.2\ldots m}\int_a^b f^m(x)(x-a)^\beta (x-b)^\alpha\,dx,$$

où le facteur $(x-a)^\beta (x-b)^\alpha$ conserve toujours le même signe entre les limites de l'intégration.

Écrivant donc

$$\int_a^b f^m(x)(x-a)^\beta (x-b)^\alpha\,dx = f^m(\xi)\int_a^b (x-a)^\beta (x-b)^\alpha\,dx,$$

en désignant par ξ une quantité comprise entre a et b, on voit que pour une valeur donnée de m, l'approximation obtenue dépend du facteur

$$\int_a^b (x-a)^\beta (x-b)^\alpha\,dx,$$

ce qui conduit à déterminer α et β par la condition qu'il soit le plus petit possible. Or on trouve aisément que le minimum du produit $\Gamma(x)\Gamma(m-x)$ s'obtient en faisant $x = \frac{m}{2}$. Parmi les diverses formules qui se rapportent à la même valeur de m, c'est donc celle où $\alpha = \beta$, où figure par conséquent la dérivée de l'ordre le moins élevé de la fonction $f(x)$, qui conduit en même temps à l'approximation la plus grande.

En particulier on trouvera, pour $\alpha = \beta = 1$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)] - \frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi),$$

puis en supposant $\alpha = \beta = 2$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)] + \frac{1}{12}(b-a)^2[f'(a)-f'(b)] + \frac{1}{720}(b-a)^5 f^{\text{IV}}(\xi).$$

Paris, 5 juillet 1877.

POST-SCRIPTUM.

J'ai réfléchi de nouveau à ces deux origines de la série de Taylor, suivant qu'on la déduit, au point de vue élémentaire, de l'intégrale définie

$$\int_x^a \frac{(x-u)^\alpha f^{\alpha+1}(u)}{1.2\ldots a}\,du,$$

ou bien sous un point de vue analytique plus étendu, de l'intégrale curviligne

$$\frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{(x-a)^{\alpha+1} f(z)}{(x-z)(z-a)^{\alpha+1}}\,dz,$$

et j'ai pensé qu'il devait être possible pareillement d'arriver au polynome d'interpolation par une autre voie qui n'exigerait pas l'emploi des variables imaginaires et des intégrales curvilignes. C'est en effet ce qui a lieu, mais il faut recourir comme vous allez le voir à la considération des intégrales multiples.

En posant

$$\Pi(z) = (z-a_0)(z-a_1)\ldots(z-a_n)$$

j'envisage l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{f(z)}{\Pi(z)}\,dz,$$

où la fonction $f(z)$ est supposée continue à l'intérieur de l'aire s, qui comprend tous les points ayant pour affixes $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Si l'on désigne par $f^n(z)$ la dérivée d'ordre n de $f(z)$ et qu'on fasse

$$u = (a_0-a_1)t_1 + (a_1-a_2)t_2 + \ldots + (a_{n-1}-a_n)t_n + a_n,$$

l'intégrale curviligne s'exprime comme il suit au moyen d'une intégrale multiple d'ordre n. On a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{f(z)}{\Pi(z)}\,dz = \int_0^1 dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \ldots \int_0^{t_2} f^n(u)\,dt_1,$$

et nous allons aisément le démontrer.

Il vient d'abord en effet

$$\int_0^{t_2} f^n(u)\,dt = \frac{f^{n-1}[(a_0-a_2)t_2+(a_2-a_3)t_3+\ldots+a_n]}{a_0-a_1} + \frac{f^{n-1}[(a_1-a_2)t_2+(a_2-a_3)t_3+\ldots+a_n]}{a_1-a_0},$$

puis successivement

$$\begin{aligned}\int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} f^n(u)\,dt_1 = {} & \frac{f^{n-2}[(a_0-a_3)t_3+(a_3-a_4)t_4+\ldots+a_n]}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} \\ & + \frac{f^{n-2}[(a_1-a_3)t_3+(a_3-a_4)t_4+\ldots+a_n]}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)} \\ & + \frac{f^{n-2}[(a_2-a_3)t_3+(a_3-a_4)t_4+\ldots+a_n]}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{t_4} dt_3 \int_0^{t_3} dt_2 \int_0^{t_2} f^n(u)\,dt_1 = {} & \frac{f^{n-3}[(a_0-a_4)t_4+(a_4-a_5)t_5+\ldots+a_n]}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)} \\ & + \frac{f^{n-3}[(a_1-a_4)t_4+(a_4-a_5)t_5+\ldots+a_n]}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)} \\ & + \frac{f^{n-3}[(a_2-a_4)t_4+(a_4-a_5)t_5+\ldots+a_n]}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)} \\ & + \frac{f^{n-3}[(a_3-a_4)t_4+(a_4-a_5)t_5+\ldots+a_n]}{(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)},\end{aligned}$$

en faisant usage des identités élémentaires :

$$\frac{1}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)} + \frac{1}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)} + \frac{1}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)} = 0,$$

$$\frac{1}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)(a_0-a_3)} + \frac{1}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)(a_1-a_3)} + \frac{1}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)(a_2-a_3)} + \frac{1}{(a_3-a_0)(a_3-a_2)(a_3-a_1)} = 0.$$

En dernier lieu, et sans qu'il soit besoin d'entrer dans des détails que la simplicité des calculs rend inutiles, on obtient pour l'intégrale multiple d'ordre n l'expression

$$\frac{f(a_0)}{\Pi'(a_0)}+\frac{f(a_1)}{\Pi'(a_1)}+\ldots+\frac{f(a_n)}{\Pi'(a_n)},$$

qui est en effet la valeur de l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{f(z)}{\Pi(z)}\,dz$.

Appliquons ce résultat en supposant $a_0 = x$, et faisons pour abréger

$$\Phi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n);$$

si l'on désigne comme précédemment par $\mathrm{F}(x)$ le polynome d'interpolation de Lagrange, on trouvera

$$f(x)-\mathrm{F}(x)=\Phi(x)\int_0^1 dt_n\int_0^{t_n} dt_{n-1}\ldots\int_0^{t_2} f^n(u)\,dt_1,$$

la valeur de u pouvant être mise sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u = x t_1 &+ a_1\ \ (t_2 - t_1\ \ )\\ &+ a_2\ \ (t_3 - t_2\ \ )\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ a_{n-1}(t_n - t_{n-1})\\ &+ a_n\ \ (1 - t_n\ \ ). \end{aligned}$$

Je remarque ensuite qu'en différentiant la relation

$$\frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{f(z)}{(z-x)\Phi(z)}\,dz=\int_0^1 dt_n\int_0^{t_n} dt_{n-1}\ldots\int_0^{t_2} f^n(u)\,dt_1$$

$a-1$ fois par rapport à a_1, $\beta-1$ fois par rapport à a_2, ..., $\lambda-1$ fois par rapport à a_n, nous obtiendrons dans le premier membre l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\ldots\Gamma(\lambda)f(z)}{(z-x)(z-a_1)^\alpha(z-a_2)^\beta\ldots(z-a_n)^\lambda}\,dz,$$

qui se trouvera donc exprimée par l'intégrale multiple

$$\int_0^1 dt_n\int_0^{t_n} dt_{n-1}\ldots\int_0^{t_2} f^\sigma(u)\Theta\,dt_1,$$

où j'ai fait

$$\Theta=(t_2-t_1)^{\alpha-1}(t_3-t_2)^{\beta-1}\ldots(1-t_n)^{\lambda-1},$$
$$\sigma=\alpha+\beta+\ldots+\lambda.$$

Nous parvenons ainsi, pour la formule plus générale d'interpolation, à l'expression suivante du reste

$$f(x)-\mathrm{F}(x)=\frac{\Phi(x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\ldots\Gamma(\lambda)}\int_0^1 dt_n\int_0^{t_n} dt_{n-1}\ldots\int_0^{t_2} f^{\alpha+\beta+\ldots+\lambda}(u)\Theta\,dt_1,$$

$\Phi(x)$ représentant le polynome $(x-a_1)^\alpha(x-a_2)^\beta\ldots(x-a_n)^\lambda$; c'est le résultat que je me suis proposé d'obtenir et qui me semble compléter sous un point de vue essentiel la théorie élémentaire de l'interpolation.

Bain-de-Bretagne, septembre 1877.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. HERMITE A M. LINDEMANN.

OBSERVATIONS ALGÉBRIQUES

SUR

LES COURBES PLANES.

Journal de Crelle, t. 84, 1878, p. 298-299.

Les formules que je crois d'une grande importance, par lesquelles vous représentez les coordonnées d'une courbe d'ordre m et de genre p, renferment-elles le nombre maximum de constantes arbitraires qu'elles comportent, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}m(m+3)-\left[\frac{1}{2}(m-1)(m-2)-p\right]=3m-1+p?$$

Pour $p=0$, les expressions des coordonnées étant

$$\xi=\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}},\qquad \eta=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}},$$

où A, B, C représentent des polynomes du $m^{\text{ième}}$ degré en t, on peut d'abord, si l'on remplace cette variable par la fonction linéaire $\frac{\alpha+\beta t}{1+\gamma t}$, diminuer de trois unités, en disposant de α, β, γ, le nombre des constantes que contiennent ces formules. On peut encore dans les résultats de cette substitution

$$\xi=\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}},\qquad \eta=\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}},$$

supposer égal à l'unité le coefficient de la puissance la plus élevée

de t, dans le dénominateur $\mathfrak{A}$, par exemple; et ainsi le nombre des arbitraires se réduit à

$$2(m+1)+m-3=3m-1.$$

Pour $p=1$, les formules

$$\begin{aligned}\xi&=\xi_0+\mathrm{A}_1\mathrm{Z}(t-t_1)+\mathrm{A}_2\mathrm{Z}(t-t_2)+\ldots+\mathrm{A}_m\mathrm{Z}(t-t_m),\\ \eta&=\eta_0+\mathrm{B}_1\mathrm{Z}(t-t_1)+\mathrm{B}_2\mathrm{Z}(t-t_2)+\ldots+\mathrm{B}_m\mathrm{Z}(t-t_m)\end{aligned}$$

mettent en évidence, d'une part les résidus, $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots$, c'est-à-dire $2(m-1)$ constantes, à cause des conditions $\Sigma\mathrm{A}=0$, $\Sigma\mathrm{B}=0$, puis les quantités $t_1, t_2, \ldots, t_m$ qu'il faut réduire à $m-1$ arbitraires, puisqu'on peut remplacer t, par $t+t_1$, par exemple. Si l'on ajoute à ces constantes le module ainsi que ξ_0 et η_0, on trouve bien en définitive le nombre $3m$.

Après avoir appelé votre attention sur ce point, permettez-moi de vous dire de quelle manière j'exprime qu'une courbe

$$f(x,y)=0$$

admet δ points doubles. Je considère à cet effet les relations

$$u=f(x,y),\qquad \frac{df}{dx}=0,\qquad \frac{df}{dy}=0,$$

et j'observe que le résultat de l'élimination de x et y sera une équation en u, $\Pi(u)=0$ dont les racines représenteront les diverses valeurs que prend $f(x,y)$, quand on y remplace x et y, par les solutions des équations $\frac{df}{dx}=0$, $\frac{df}{dy}=0$. Par conséquent le nombre des points doubles est donné par le nombre des racines u qui sont égales à zéro. Ceci posé, nommons $a, b, c, \ldots, k$ les coefficients de $f(x,y)$ et supposons que le terme indépendant des variables soit k. Il est évident que l'équation $\Pi(u)=0$ se formera au moyen du discriminant relatif à l'équation proposée, en y remplaçant k par $k-u$, de sorte qu'en représentant ce discriminant par $\Pi(a, b, c, \ldots, k)$, on aura

$$\Pi(u)=\Pi(a, b, c, \ldots, k-u).$$

Les conditions pour que la courbe $f(x,y)=0$ possède δ points doubles peuvent donc s'obtenir, au moyen du discriminant, sous la forme suivante :

$$\Pi = 0, \qquad \frac{d\Pi}{dk} = 0, \qquad \frac{d^2\Pi}{dk^2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^{\delta-1}\Pi}{dk^{\delta-1}} = 0.$$

Paris, 13 juillet 1877.

EXTRAIT D'UNE LETTRE A M. GYLDÉN, DE STOCKHOLM.

SUR LE PENDULE.

Journal de Crelle, Bd. 85, 1878, p. 246.

J'ai remarqué que les coordonnées x, y, z de l'extrémité d'un pendule sphérique sont les dérivées de fonctions uniformes du temps dont voici les expressions. Considérons en premier lieu la valeur de z qui s'obtient immédiatement comme conséquence des équations fondamentales

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$
$$(D_t x)^2 + (D_t y)^2 + (D_t z)^2 = 2g(z + c),$$
$$y D_t x - x D_t y = h,$$

où c et h désignent des constantes dont la signification est bien connue et qui donnent comme on sait

$$(D_t z)^2 = 2g(z + c)(1 - z^2) - h^2.$$

Nommons α, β, γ les racines rangées par ordre décroissant de grandeur, de l'équation du troisième degré

$$2g(z + c)(1 - z^2) - h^2 = 0,$$

de sorte que α soit positive et moindre que l'unité, β moindre également que l'unité en valeur absolue et γ enfin négative et supérieure à l'unité en valeur absolue. Si l'on pose

$$k^2 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma},$$
$$k'^2 = \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma},$$
$$n^2 = \frac{1}{2} g(\alpha - \gamma)$$

et

$$u = n(t - t_0),$$

on aura

$$\alpha - z = (\alpha - \beta)\sin^2 \mathrm{am}(u),$$
$$z - \beta = (\alpha - \beta)\cos^2 \mathrm{am}(u),$$
$$z - \gamma = (\alpha - \gamma)\Delta^2 \;\; \mathrm{am}(u).$$

Or la formule

$$\int_0^u k^2 \sin^2 \mathrm{am}(u)\, du = \frac{\mathrm{J}u}{\mathrm{K}} - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$$

permet déjà d'écrire

$$z = \mathrm{D}_u \left[\frac{\alpha k^2 \mathrm{K} - (\alpha - \beta)\mathrm{J}}{k^2 \mathrm{K}} u + \frac{\Theta'(u)}{k^2 \Theta(u)} \right].$$

Soit ensuite, en désignant par φ un angle arbitraire,

$$\mathrm{A} = \alpha\sqrt{(\gamma - \alpha)(\gamma + \beta)}\, e^{i\varphi},$$

et posons

$$\Phi(u) = \frac{\Theta(0)\,\mathrm{H}_1(u + \omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(u)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'_1(\omega)}{\Theta_1(\omega)}\right] u},$$

on aura cette expression

$$x + iy = \mathrm{AD}_u \Phi(u),$$

de sorte qu'en égalant les parties réelles et les coefficients de i, x et y seront, aussi bien que z, les dérivées de fonctions à sens unique. Voici maintenant la détermination des constantes ω et λ qui entrent dans la fonction $\Phi(u)$. Nous avons d'abord

$$\lambda^2 = -\frac{h^2}{4n^2},$$

puis ces formules

$$\sin^2 \mathrm{am}(\omega) = \frac{\beta^2(a^2 - \gamma^2)}{\gamma^2(\alpha^2 - \beta^2)},$$
$$\cos^2 \mathrm{am}(\omega) = \frac{\alpha^2(\gamma^2 - \beta^2)}{\gamma^2(\alpha^2 - \beta^2)},$$
$$\Delta^2 \mathrm{am}(\omega) = \frac{\beta - \gamma}{\gamma^2(\alpha + \beta)}.$$

Elles font voir que ω est imaginaire, mais sans partie réelle, comme λ. Si l'on pose en effet $\omega = ia$, et qu'on emploie les relations

$$\sin \mathrm{am}(ix, k') = \frac{i \sin \mathrm{am}(x, k)}{\cos \mathrm{am}(x, k)},$$
$$\cos \mathrm{am}(ix, k') = \frac{1}{\cos \mathrm{am}(x, k)},$$
$$\Delta \mathrm{am}(ix, k') = \frac{\Delta \mathrm{am}(x, k)}{\cos \mathrm{am}(x, k)},$$

on obtient les valeurs

$$\sin^2 \mathrm{am}(a, k') = \frac{\beta^2(\alpha^2 - \gamma^2)}{\alpha^2(\beta^2 - \gamma^2)},$$
$$\cos^2 \mathrm{am}(a, k') = \frac{\gamma^2(\beta^2 - \alpha^2)}{\alpha^2(\beta^2 - \gamma^2)},$$
$$\Delta^2 \mathrm{am}(a, k') = \frac{\beta - \alpha}{\alpha^2(\beta + \gamma)},$$

et d'après l'ordre de grandeur des quantités α, β, γ, vous voyez qu'elles sont, en effet, toutes positives et moindres que l'unité. Mais une double indétermination subsiste à l'égard des signes de ω et λ; elle se lève par les formules suivantes. On a, en premier lieu,

$$\frac{\sin \mathrm{am}(\omega)\cos \mathrm{am}(\omega)}{\Delta^3 \mathrm{am}(\omega)} = \frac{ih}{n} \frac{\alpha\beta\gamma(\alpha - \gamma)}{2(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)},$$

ce qui fixe le signe de ω, sa valeur absolue étant connue; je trouve ensuite qu'on doit prendre

$$\lambda = -\frac{ih}{2n}.$$

Vérifions, par l'élévation au carré, la formule relative à ω au moyen des expressions données pour $\sin^2 \mathrm{am}(\omega)$, $\cos^2 \mathrm{am}(\omega)$, $\Delta^2 \mathrm{am}(\omega)$. On trouve d'abord, dans le premier membre, la quantité

$$-\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha - \gamma)}{(\beta - \gamma)^2(\beta - \alpha)^2},$$

et le second, en remplaçant n^2 par $\frac{1}{2}g(\alpha - \gamma)$, devient

$$-\frac{h^2}{2g} \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha - \gamma)}{(\beta - \gamma)^2(\beta - \alpha)^2};$$

il suffit, par conséquent, de vérifier la condition

$$\frac{h^2}{2g} = (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha),$$

ce qui se fait immédiatement, en posant dans l'équation

$$2g(z+c)(1-z^2)-h^2=-2g(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma),$$

$z=-c$, et remarquant qu'on a

$$\alpha+\beta+\gamma=-c.$$

Vous m'avez dit, Monsieur, dans votre dernière lettre, que la différentiation des fonctions elliptiques par rapport au module pourrait peut-être servir dans les importantes recherches auxquelles vous consacrez vos efforts pour l'application de ces fonctions à la théorie des perturbations. Voici à ce sujet les diverses formules que j'ai obtenues, et dans lesquelles j'ai posé pour abréger $\zeta=\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$:

$$\mathrm{D}_k \sin\operatorname{am}(x) = \frac{\cos\operatorname{am}(x)\Delta\operatorname{am}(x)}{kk'^2}\left[(\zeta-k^2)x-\frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)}\right],$$

$$\mathrm{D}_k \cos\operatorname{am}(x) = -\frac{\sin\operatorname{am}(x)\Delta\operatorname{am}(x)}{kk'^2}\left[(\zeta-k^2)x-\frac{\Theta_1'(x)}{\Theta_1(x)}\right],$$

$$\mathrm{D}_k \Delta\operatorname{am}(x) = -\frac{k^2\sin\operatorname{am}(x)\cos\operatorname{am}(x)}{kk'^2}\left[(\zeta-k^2)x-\frac{\mathrm{H}_1'(x)}{\mathrm{H}_1(x)}\right].$$

Si l'on pose, en outre,

$$\mathrm{Z}(x)=\int_0^x k^2\sin^2\operatorname{am}(x)\,dx,$$

on a aussi

$$\mathrm{D}_k\mathrm{Z}(x)=\frac{\mathrm{K}}{k'^2}[x\Delta^2\operatorname{am}(x)-\sin\operatorname{am}(x)\cos\operatorname{am}(x)\Delta\operatorname{am}(x)-\cos^2\operatorname{am}(x)\mathrm{Z}(x)].$$

M. C. O. Meyer avait déjà donné les trois premières, mais sous une forme différente et en prenant pour variable la quantité q au lieu du module, dans son Mémoire intitulé *Ueber rationale Verbindungen der elliptischen Transcendenten*, t. LVI de ce *Journal*, p. 321.

Paris, 8 octobre 1877.

SUR LA

THÉORIE DES FONCTIONS SPHÉRIQUES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LXXXVI, 1878, p. 1515.

J'ai l'honneur de faire hommage à l'Académie, au nom de l'auteur, M. le Dr E. Heine, professeur à l'Université de Halle, de la seconde édition d'un Ouvrage intitulé : *Sur les fonctions sphériques. Théorie et applications.* Ce sont les applications du calcul à la Mécanique céleste qui ont conduit à la découverte et à l'introduction en Analyse des fonctions auxquelles est consacré le beau et savant Ouvrage de M. Heine. Legendre et Laplace, dans d'admirables recherches sur la théorie de l'attraction des sphéroïdes et la figure des planètes, en ont donné les propriétés fondamentales, et elles ont été ensuite employées avec le plus grand succès dans beaucoup de questions importantes de Physique mathématique, et principalement dans la Théorie de la chaleur. Après ces deux grands géomètres, et en suivant la voie qu'ils avaient ouverte, Lamé est parvenu à ses belles découvertes qui ont étendu à la fois, comme on le sait, le champ des applications du calcul à la Physique et celui de l'Analyse pure. Coordonner, sous ce double point de vue, de nombreux et importants travaux, ceux de Dirichlet, de Jacobi, de nos illustres confrères Lamé et M. Liouville, de M. F.-E. Neumann, compléter la théorie sous un point de vue essentiel par l'introduction des fonctions de seconde espèce, montrer enfin par quels liens étroits elle se rattache aux fractions continues algébriques et à la série hypergéométrique de Gauss, tel est en peu de mots l'objet d'un Ouvrage auquel l'auteur a fait concourir tous les travaux de sa vie scientifique. Un point entièrement nouveau me semble devoir être particulièrement signalé à l'attention : c'est celui qui se rattache aux recherches de Lamé. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des constantes, et $\mathfrak{I}(x)$ une fonction entière, composée de telle manière que l'une des intégrales de l'équation différentielle

$$(a) \qquad \frac{dy^2}{du^2} + \mathfrak{I}(x)y = 0,$$

où l'on suppose

$$du = \frac{dx}{\sqrt{x(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_p)}},$$

soit une fonction entière et du degré n de $\sqrt{x}$, $\sqrt{x-a_1}$, $\ldots$, $\sqrt{x-a_p}$. L'auteur appelle cette intégrale *fonction de Lamé* de première espèce, de degré n et d'ordre p. Il démontre l'existence et trouve le nombre de ces fonctions pour chaque ordre p (§ 135). Les intégrales de l'équation différentielle, qui s'évanouissent pour des valeurs infinies de x, forment les fonctions de seconde espèce. Pour $p = 2$, on a les fonctions ellipsoïdales E, introduites par Lamé lui-même; et, si l'on fait $a_1 = a_2$, elles se changent en fonctions sphériques de Legendre. Supposons ensuite que les produits $n\sqrt{x-a_1}$, $n\sqrt{x-a_2}$ soient finis pour n infini, on trouve (p. 413) les *fonctions du cylindre elliptique;* et, faisant en outre $a_1 = a_2$, on en conclut les *fonctions de cylindre de révolution*. Ces dernières, introduites par Fourier, en 1822, sont de première ou de seconde espèce et, dans le premier cas, ont la forme

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \frac{x^\nu}{2.4\ldots2\nu}\left[1 - \frac{x^2}{2(2\nu+2)} + \frac{x^4}{2.4(2\nu+2)(2\nu+4)} - \ldots\right] \\ &= \frac{(-1)^\nu}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos\varphi}\cos\nu\varphi\, d\varphi. \end{aligned}$$

L'auteur les représente ainsi

$$K_\nu(x) = (-1)^\nu \int_0^\infty e^{ix\cos iu}\cos i\nu u\, du = (-1)^\nu K_\nu(-x),$$

sous la condition que la partie réelle de ix soit négative; et, pour une valeur réelle de x, il égale $K_\nu(x)$ à la moyenne arithmétique, entre $K_\nu(x+oi)$ et $K_\nu(x-oi)$.

Pour toutes ces fonctions on a des théorèmes semblables, par

exemple un théorème d'addition, comme celui de Laplace (voir p. 312, 333, 340, 346, 455, etc.).

Lamé a créé ses fonctions (*Journal de M. Liouville*, t. IV, p. 139) en intégrant par des produits $E(\rho_1).E(\rho_2)$ l'équation

$$\frac{d^2U}{d\varepsilon_1^2} + \frac{d^2U}{d\varepsilon_2^2} + n(n+1)U(\rho_1^2 - \rho_2^2) = 0;$$

et les fonctions du cylindre elliptique tirent leur origine de l'équation bien connue

$$\frac{d^2U}{du^2} + \frac{d^2U}{d\varphi^2} + \lambda^2(\cos^2\varphi - \cos^2 iu)U = 0.$$

Pour qu'elle admette une intégrale particulière de la forme $F(\varphi)F(iu)$, il faut poser

$$(b) \qquad \frac{d^2F(\varphi)}{d\varphi^2} + (\lambda^2\cos^2\varphi - l)F(\varphi) = 0.$$

Mais la constante l n'est pas définie comme la constante B de Lamé, par la condition que les fonctions F, du moins dans la première de leurs quatre classes, soient entières. La condition est alors que chaque intégrale de l'équation (b) soit une fonction périodique de φ, développable par la formule de Fourier. Si l'on représente les fonctions $F(\varphi)$, par exemple, dans la première de leurs quatre classes, par les séries $\Sigma\alpha_\nu\cos2\nu\varphi$, la condition nécessaire est que α_ν s'évanouisse pour ν infini, et l'auteur démontre (p. 412) qu'elle suffit en même temps pour assurer la convergence de la série. Or α_ν est un polynome entier en l, du degré ν, et la condition $\alpha_\infty = 0$ donne une équation d'un degré infini. M. Heine démontre (§ 104) que chaque racine, jusqu'à une grandeur quelconque, peut être comprise entre des limites aussi rapprochées qu'on le veut, et parvient (p. 408) au résultat suivant :

Les constantes α_ν sont les dénominateurs N_ν des réduites de la fraction continue

$$\sigma = 1 - \cfrac{1}{-\frac{1}{2}bz - \cfrac{1}{b(1-z) - \cfrac{1}{b(4-z) - \cfrac{1}{b(9-z) - \ldots}}}}$$

où $\lambda\sqrt{b=4}$, en prenant pour z les diverses racines de l'équation $\mathrm{N}=0$.

Les mêmes coefficients α_ν entrent dans le développement de $\mathrm{F}(\varphi)$ suivant les fonctions J (p. 414), et, en y remplaçant les quantités J par les fonctions de deuxième espèce K, on a le développement des fonctions $\mathrm{F}(\varphi)$ de deuxième espèce du cylindre elliptique.

On retrouve enfin les mêmes valeurs α_ν (p. 421), si l'on transforme, par une substitution orthogonale, la forme quadratique d'un nombre infini de variables,

$$b(1.x_1^2+4x_2^2+9x_3^2+\ldots)-2(x_0x_1+x_1x_2+x_2x_3+\ldots)$$

en une somme de carrés $z_0y_0^2+z_1y_1^2+z_2y_2^2+\ldots$, et ce résultat pouvait être prévu, d'après une proposition analogue concernant les fonctions de Lamé.

Dans les deux cas, le polynome homogène du second degré à transformer a la forme singulière

$$\Sigma a_i x_i^2+2\Sigma b_i x_i x_{i+1}.$$

La démonstration des théorèmes ainsi que les résultats dans la théorie de la transformation orthogonale sont plus simples à l'égard d'une telle forme singulière que dans le cas général. On peut mettre cette remarque à profit, Jacobi ayant démontré (*Journal de Crelle* et de M. Borchardt, p. 39 et 69, p. 290 et 1) que toute forme quadratique peut être réduite par des substitutions équivalentes à cette forme particulière, et une légère modification de la méthode de Jacobi permet de démontrer qu'on peut obtenir cette transformation au moyen d'une série de substitutions orthogonales très simples, les coefficients s'exprimant par des racines carrées (p. 480). Ces mêmes remarques ont été faites d'ailleurs par M. Kronecker dans un Mémoire publié dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin*, 1878, p. 105, et dont l'auteur a reçu communication pendant que s'imprimaient les dernières pages de son livre.

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^1 \frac{z^{a-1}-z^{-a}}{1-z}dz$.

Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, vol. XIV
(séance du 17 novembre 1878).

L'application des procédés élémentaires de l'intégration des fonctions rationnelles aux quantités

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{x^{2m}+1}dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2n}-x^{2p}}{x^{2m}-1}dx,$$

où m, n, p sont des nombres entiers, conduit facilement aux formules

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+z}dz=\frac{\pi}{\sin a\pi}, \qquad \int_0^\infty \frac{z^{a-1}-z^{b-1}}{1-z}dz=\pi(\cot a\pi-\cot b\pi),$$

et si l'on suppose $b=1-a$, la seconde devenant

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}-z^{-a}}{1-z}dz=2\pi\cot a\pi,$$

on a sous forme d'intégrales définies les expressions des fonctions $\frac{1}{\sin a\pi}$ et $\cot a\pi$, pour des valeurs de l'argument comprises entre zéro et l'unité. Ces expressions peuvent servir de base à la fois à l'étude des fonctions circulaires et à celle des intégrales eulériennes, en établissant une transition naturelle entre la théorie des deux transcendantes et montrant le lien étroit qui les réunit. En ce qui concerne les fonctions circulaires, je m'attacherai principalement à la formule

$$\pi\cot a\pi=\frac{1}{a}+\frac{2a}{a^2-1}+\frac{2a}{a^2-4}+\frac{2a}{a^2-9}+\ldots$$

pour lever une difficulté singulière qu'elle présente, lorsque, en remplaçant a par ia, on suppose a infiniment grand. La limite du premier membre est, en effet, $-i\pi$ ou $+i\pi$, suivant que a croît positivement ou négativement, et depuis longtemps Eisenstein a fait la remarque que la série ne conduit point à cette limite et donne lieu ainsi à un paradoxe que je me propose d'expliquer. Relativement aux intégrales eulériennes, j'aurai surtout pour but, en suivant une indication rapidement donnée par Cauchy dans son Mémoire sur les intégrales prises entre des limites imaginaires (p. 45), d'obtenir la relation

$$\log\Gamma(a) = \left(a - \frac{1}{2}\right)\log a - a + \log\sqrt{2\pi}$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{x}(2-x) - 2 - x}{x^2(1-e^{x})} e^{ax}\, dx,$$

démontrée par le grand Géomètre dans les *Nouveaux Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (t. II, p. 386). Ces résultats se rapportant aux fonctions circulaires et aux intégrales eulériennes, vont s'offrir comme les conséquences successives d'une même analyse, qui mettra ainsi en évidence la liaison et l'enchaînement des théories des deux genres de fonction.

1. Je commencerai par faire voir que des relations

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}}{1+z}\, dz = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \qquad \int_0^{\infty} \frac{z^{a-1} - z^{-a}}{1-z}\, dz = 2\pi\cot a\pi,$$

la première est une conséquence de la seconde, et en découle par suite de l'égalité

$$\frac{2}{\sin 2a\pi} = \cot a\pi + \operatorname{tang} a\pi.$$

Ayant, en effet,

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1} - z^{-a} + z^{-\frac{1}{2}-a} - z^{-\frac{1}{2}+a}}{1-z}\, dz = 2\pi\left[\cot a\pi + \cot\left(\frac{1}{2} - a\right)\pi\right],$$

nous écrirons

$$z^{a-1} - z^{-a} + z^{-\frac{1}{2}-a} - z^{-\frac{1}{2}+a} = \left(1 - z^{\frac{1}{2}}\right)z^{a-1} + \left(1 - z^{\frac{1}{2}}\right)z^{-a-\frac{1}{2}},$$

de sorte que l'intégrale sera ramenée à la forme

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1} + z^{-a-\frac{1}{2}}}{1 + z^{\frac{1}{2}}}\, dz.$$

Cela étant, il convient d'y remplacer z par z^2 ; elle devient ainsi

$$2\int_0^{\infty} \frac{z^{2a-1} + z^{-2a}}{1+z}\, dz.$$

Or, il est visible que les deux quantités

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{2a-1}}{1+z}\, dz \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\infty} \frac{z^{-2a}}{1+z}\, dz$$

sont égales : la première se ramenant à la seconde par le changement de z en $\frac{1}{z}$. Si l'on remplace a par $\frac{a}{2}$, nous obtenons donc bien la relation

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}}{1+z}\, dz = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

D'après cela, je me bornerai pour abréger à considérer l'intégrale définie, qui représente la cotangente, et j'y introduirai encore les limites zéro et l'unité, au lieu de zéro et l'infini. En faisant, en effet

$$\int_0^{1} \frac{z^{a-1} - z^{-a}}{1-z}\, dz + \int_1^{\infty} \frac{z^{a-1} - z^{-a}}{1-z}\, dz = 2\pi\cot a\pi,$$

et remarquant, comme tout à l'heure, que la seconde intégrale se ramène à la première par le changement de z en $\frac{1}{2}$, nous aurons

$$\int_0^{1} \frac{z^{a-1} - z^{-a}}{1-z}\, dz = \pi\cot a\pi.$$

Posons, en effet, $z = e^{x}$, et l'on se trouve amené à cette nouvelle forme

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ax} - e^{(1-a)x}}{1-e^{x}}\, dx = \pi\cot a\pi,$$

qui suffit à faire prévoir les rapports avec la théorie des intégrales eulériennes, dont je viens de parler. En représentant sur $S(a)_n$ la fonction de Jacob Bernouilli, de sorte qu'on ait pour a entier

$$S(a)_n = (a-1)^n + (a-2)^n + \ldots + 1^n,$$

nous avons en effet

$$\frac{e^{ax} - e^{(1-a)x}}{1-e^x} = 1 - 2a - 2\,S(a)_2 \frac{x^2}{1.2} - 2\,S(a)_4 \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$
$$- 2\,S(a)_{2n} \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} - \ldots.$$

La formule relative à l'inverse du sinus, à savoir

$$\int_0^1 \frac{z^{a-1} + z^{-a}}{1+z}\,dz = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

ou bien

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{ax} + e^{(1-a)x}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

conduit à une remarque analogue, la quantité $\frac{e^{ax} + e^{(1-a)x}}{1+e^x}$ donnant la série

$$1 + 2\,\mathfrak{S}(a)_2 \frac{x^2}{1.2} + 2\,\mathfrak{S}(a)_4 \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots + 2\,\mathfrak{S}(a)_{2n} \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} + \ldots,$$

où

$$\mathfrak{S}(a)_n = (a-1)^n - (a-2)^n + (a-3)^n - \ldots \pm 1^n,$$

lorsque a est entier (¹).

2. Le développement de la cotangente, sous forme d'une série infinie de fractions simples, est à bien des égards d'une grande importance en analyse, mais plus particulièrement peut-être, comme ayant offert le premier exemple d'un mode d'expression d'une fonction périodique où la périodicité se trouvait mise en évidence. Et c'est sous ce point de vue qu'elle a été l'objet des recherches d'Eisenstein en servant de point de départ à la théorie des fonctions

(¹) Les polynomes $\mathfrak{S}(a)_{2n}$ s'annulent pour $a = 0$, $a = 1$, et possèdent la même propriété que les polynomes $S(a)_{2n+1}$ de n'avoir entre ces limites qu'un seul maximum pour $a = \frac{1}{2}$.

elliptiques qu'a donnée l'illustre géomètre. Or la formule

$$\int_0^1 \frac{z^{a-1} - z^{-a}}{1-z}\,dz = \pi \cot a\pi$$

conduit immédiatement à ce développement. En remplaçant dans l'intégrale $\frac{1}{1-z}$ par l'expression

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} + \frac{z^n}{1-z},$$

on en tire en effet

$$\pi \cot a\pi = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \ldots + \frac{1}{a+n-1}$$
$$+ \int_0^1 \frac{z^{a-1} - z^{-a}}{1-z} z^n\,dz - \frac{1}{1-a} - \frac{1}{2-a} - \ldots - \frac{1}{n-a}.$$

Nous représenterons pour abréger par S_n la somme des fractions simples, et par R_n le reste, de sorte qu'on ait

$$S_n = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \ldots + \frac{1}{a+n-1} - \frac{1}{1-a} - \frac{1}{2-a} - \ldots - \frac{1}{n-a}$$
$$= \frac{1}{a} + \frac{2a}{a^2-1} + \ldots + \frac{2a}{a^2-(n-1)^2} - \frac{1}{n-a}$$

et

$$R_n = \int_0^1 \frac{z^{a-1} - z^{-a}}{1-z} z^n\,dz = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ax} - e^{(1-a)x}}{1-e^x} e^{nx}\,dx.$$

Je me propose maintenant d'établir que pour une valeur imaginaire quelconque de l'argument, $a = \alpha + i\beta$, R_n, ou plutôt son module, a pour limite zéro quand n croît indéfiniment. A cet effet je considérerai l'intégrale

$$\int_{-\infty}^0 \operatorname{mod}\left[\frac{e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(1-\alpha-i\beta)x}}{1-e^x} e^{nx}\right] dx,$$

qui est une limite supérieure de $\operatorname{mod} R_n$, et en distinguant deux cas suivant que α est négatif ou positif, je l'écris successivement sous ces deux formes :

$$\int_{-\infty}^0 \operatorname{mod}\left[\frac{e^{i\beta x} - e^{(1-2\alpha-i\beta)x}}{1-e^x}\right] e^{(n+\alpha)x}\,dx$$

et

$$\int_{-\infty}^{0} \operatorname{mod}\left[\frac{e^{(2\alpha+i\beta)x} - e^{(1-i\beta)x}}{1-e^x}\right] e^{(n-\alpha)x}\,dx.$$

Cela posé, je dis, à l'égard de la première, que la plus grande valeur du module de $\frac{e^{i\beta x} - e^{(1-2\alpha-i\beta)x}}{1-e^x}$, entre les limites de l'intégrale, est donnée à la limite supérieure pour $x = 0$. Ce maximum étant donc $\sqrt{(2\alpha-1)^2+4\beta^2}$, nous pourrons écrire, en désignant par ε un nombre inférieur à l'unité,

$$\operatorname{mod} R_n = \varepsilon\sqrt{(2\alpha-1)^2+4\beta^2}\int_{-\infty}^{0} e^{(n+\alpha)x}\,dx = \frac{\varepsilon\sqrt{(2\alpha-1)^2+4\beta^2}}{n+\alpha}.$$

Je mets, pour le démontrer, l'expression

$$\operatorname{mod}^2\left[\frac{e^{i\beta x} - e^{(1-2\alpha-i\beta)x}}{1-e^x}\right] = \frac{1-2\cos 2\beta x\, e^{(1-2\alpha)x} + e^{(2-4\alpha)x}}{(1-e^x)^2},$$

sous la forme suivante

$$\left[\frac{1-e^{(1-2\alpha)x}}{1-e^x}\right]^2 + 4\left[\frac{\sin\beta x}{1-e^x}\right]^2 e^{(1-2\alpha)x},$$

et je remarque d'abord que la quantité $\frac{1-e^{(1-2\alpha)x}}{1-e^x}$, ou bien $\frac{1-z^{1-2\alpha}}{1-z}$ en prenant $z = e^x$, est toujours pour des valeurs de z inférieures à l'unité, au-dessous de la limite $1-2\alpha$, qu'elle atteint pour $z = 1$. On vérifie en effet l'inégalité

$$\frac{1-z^{1-2\alpha}}{1-z} < 1-2\alpha,$$

ou la suivante

$$1-z^{1-2\alpha}-(1-2\alpha)(1-z) < 0,$$

en observant que la dérivée du premier membre est la quantité positive $(1-2\alpha)(1-z^{-2\alpha})$. Ce premier membre va donc en croissant depuis la valeur négative 2α qui correspond à $z = 0$, pour aboutir à une valeur nulle à la limite supérieure $z = 1$, et reste par conséquent négatif dans l'intervalle.

Ce point établi, je passe à l'autre terme, j'y remplace $\sin\beta x$ par βx, ce qui en augmente la valeur, et après l'avoir écrit

$$4\left[\frac{\beta x\, e^{\frac{1}{2}x}}{e^x-1}\right]^2 e^{-2\alpha x},$$

ou encore

$$4\beta^2\left[\frac{x}{e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}}\right]^2 e^{-2\alpha x},$$

je remarque que la quantité $\frac{x}{e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}}$ croît de zéro à l'unité lorsque x varie de $-\infty$ à 0. C'est ce qu'on reconnaît immédiatement en développant en série le dénominateur, car on obtient ainsi l'expression

$$\frac{x}{e^{\frac{1}{2}x} - e^{-\frac{1}{2}x}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1.2.3}\frac{x^2}{4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}\frac{x^4}{16}+\dots}.$$

On en conclut, le facteur $e^{-2\alpha x}$ atteignant lui-même sa plus grande valeur pour $x = 0$, que pour ce second terme comme pour le premier, le maximum est encore donné en faisant $x = 0$, ce qui démontre le résultat annoncé.

Nous obtiendrons à l'égard de l'expression

$$\operatorname{mod}^2\left[\frac{e^{(2\alpha+i\beta)x} - e^{(1-i\beta)x}}{1-e^x}\right] = \frac{e^{4\alpha x} - 2\cos 2\beta x\, e^{(1+2\alpha)x} + e^{2x}}{(1-e^x)^2}$$

une conclusion toute pareille, en la mettant sous la forme

$$\left[\frac{e^{2\alpha x}-e^x}{1-e^x}\right]^2 + 4\left[\frac{\sin\beta x}{1-e^x}\right]^2 e^{(1+2\alpha)x}.$$

Nous n'avons en effet qu'à considérer la quantité $\frac{e^{2\alpha x}-e^x}{1-e^x}$, ou $\frac{z^{2\alpha}-z}{1-z}$, la variable z croissant de zéro à l'unité; mais deux cas sont maintenant à distinguer. Supposons d'abord $2\alpha < 1$ de sorte qu'elle soit positive, nous prouverons qu'on a

$$\frac{z^{2\alpha}-z}{1-z} < 1-2\alpha,$$

ou bien

$$z^{2\alpha}-z-(1-2\alpha)(1-z) < 0,$$

en remarquant que le premier membre prend les valeurs $-(1-2\alpha)$ et 0, pour $z = 0$, $z = 1$, et a pour dérivée la quantité positive

$$2\alpha(1-z^{1-2\alpha})z^{2\alpha-1}.$$

Soit enfin $2\alpha > 1$, nous raisonnerons sur $\frac{z - z^{2\alpha}}{1 - z}$; et la condition

$$\frac{z - z^{2\alpha}}{1 - z} < 2\alpha - 1$$

se vérifiera absolument de même. Il est donc ainsi démontré que le maximum du module des deux expressions introduites, en supposant successivement α négatif et α positif, a pour valeur

$$\sqrt{(1 - 2\alpha)^2 + 4\beta^2},$$

de sorte qu'on a dans la première hypothèse

$$\operatorname{mod} R_n = \frac{\varepsilon \sqrt{(1 - 2\alpha)^2 + 4\beta^2}}{n + \alpha},$$

et dans la seconde

$$\operatorname{mod} R_n = \frac{\varepsilon \sqrt{(1 - 2\alpha)^2 + 4\beta^2}}{n - \alpha}.$$

Ces expressions, du reste, dans le développement en série de fractions simples de la cotangente, établissent en toute rigueur la convergence de cette série; elles montrent en effet que pour des valeurs aussi grandes qu'on le veut de α et β, mais finies cependant, R_n est nul si l'on suppose n infini. Mais on voit en même temps qu'on n'est point autorisé à faire usage de l'expression

$$\frac{1}{a} + \frac{2a}{a^2 - 1} + \frac{2a}{a^2 - 4} + \ldots$$

pour des valeurs infinies de l'argument; dans le domaine de ces valeurs, la définition de $\cot a\pi$ par la série offre en effet une lacune que la considération du reste permet seule de combler, comme nous allons le faire voir.

3. Je dis en premier lieu que la limite de S_n est indéterminée lorsqu'après avoir remplacé a par ia on suppose à la fois n et a infinis. Revenons en effet à l'expression

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{a} + \frac{2a}{a^2 - 1} + \ldots + \frac{2a}{a^2 - (n-1)^2} - \frac{1}{n - a} \\ &= \frac{1}{a} + \frac{2a}{a^2 - 1} + \ldots + \frac{2a}{a^2 - n^2} - \frac{1}{n + a}, \end{aligned}$$

et changeons a en ia, on en conclura

$$iS_n = \frac{1}{a} + \frac{2a}{a^2 + 1} + \ldots + \frac{2a}{a^2 + n^2} + \frac{i}{n + ia}.$$

Soit maintenant, en supposant a positif $\frac{1}{a} = dx$, désignons aussi par λ la limite du rapport $\frac{n}{a}$ lorsqu'on fait croître n et a indéfiniment, de sorte qu'on ait $\frac{n}{a} = n\,dx = \lambda$; nous pourrons écrire, en négligeant $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{n + ia}$,

$$iS_n = \frac{2\,dx}{1 + dx^2} + \frac{2\,dx}{1 + (2\,dx)^2} + \ldots + \frac{2\,dx}{1 + (n\,dx)^2}.$$

De cette expression résulte immédiatement, comme on voit, la valeur cherchée

$$iS_n = \int_0^\lambda \frac{2\,dx}{1 + x^2} = 2 \operatorname{arc tang} \lambda$$

qui dépend de la quantité entièrement arbitraire λ.

Ce point établi, cherchons ce que devient l'intégrale représentant le reste,

$$R_n = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{ax} - e^{(1-a)x}}{1 - e^x} e^{nx}\, dx.$$

Pour cela je remplace a par ia, n par λa, ce qui donne d'abord

$$R_n = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{iax} - e^{(1-ia)x}}{1 - e^x} e^{\lambda a x}\, dx,$$

puis en changeant de variable et posant $x = \frac{t}{a}$

$$R_n = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{it} - e^{\left(\frac{1}{a} - i\right)t}}{a\left(1 - e^{\frac{t}{a}}\right)} e^{\lambda t}\, dt.$$

Maintenant on obtient pour a infini la valeur

$$R_n = -2i \int_{-\infty}^0 \frac{\sin t}{t} e^{\lambda t}\, dt = -2i \operatorname{arc tang} \frac{1}{\lambda},$$

et l'on en tire la relation

$$i(S_n + R_n) = 2\left(\operatorname{arc tang} \lambda + \operatorname{arc tang} \frac{1}{\lambda}\right) = \pi$$

ou encore

$$\mathrm{S}_n + \mathrm{R}_n = -i\pi.$$

Ce résultat lève entièrement, comme on voit, la difficulté d'analyse offerte par le développement en série de la cotangente.

4. L'expression de $\sin a\pi$ en produit de facteurs linéaires est immédiatement donnée en intégrant par rapport à a les deux membres de l'équation

$$\pi \cot a\pi = \frac{1}{a} + \frac{2a}{a^2-1} + \ldots + \frac{2a}{a^2-n^2} - \frac{1}{n+a} + \mathrm{R}_n;$$

on obtient ainsi

$$\log\frac{\sin a\pi}{\pi} = \log a + \log\left(1-\frac{a^2}{1}\right) + \log\left(1-\frac{a^2}{4}\right) + \ldots$$
$$+ \log\left(1-\frac{a^2}{n^2}\right) - \log\left(1-\frac{a}{n}\right) + \mathrm{R}_n,$$

si l'on pose

$$\mathrm{R}'_n - \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ax} + e^{(1-a)x} - e^x - 1}{x(1-e^x)} e^{nx}\,dx.$$

Peut-être n'est-il pas inutile de donner encore pour R'_n une limite supérieure montant que cette quantité est nulle en supposant n infini, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire

$$a = \alpha + i\beta.$$

Posons à cet effet, pour abréger,

$$f(x) = \frac{e^{ax} + e^{(1-a)x} - e^x - 1}{x(1-e^x)};$$

je remarque qu'on peut écrire en ajoutant et retranchant $2e^{\frac{1}{2}x}$ au numérateur

$$f(x) = \frac{\left[e^{\frac{1}{2}ax} - e^{\frac{1}{2}(1-a)x}\right]^2}{x(1-e^x)} - \frac{\left[e^{\frac{1}{2}x} - 1\right]^2}{x(1-e^x)}.$$

On en déduit par une proposition connue,

$$\operatorname{mod} f(x) < \operatorname{mod} \frac{\left[e^{\frac{1}{2}ax} - e^{\frac{1}{2}(1-a)x}\right]^2}{x(1-e^x)} + \operatorname{mod} \frac{\left(e^{\frac{1}{2}x} - 1\right)^2}{x(1-e^x)},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{mod} f(x) < \frac{e^{\alpha x} - 2\cos\beta x\, e^{\frac{1}{2}x} + e^{(1-\alpha)x}}{x(e^x-1)} + \frac{\left(e^{\frac{1}{2}x} - 1\right)^2}{x(e^x-1)}.$$

L'expression suivante

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\alpha x} - 2\cos\beta x\, e^{\frac{1}{2}x} + e^{(1-\alpha)x}}{x(e^x-1)} e^{nx}\,dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{\left(e^{\frac{1}{2}x} - 1\right)^2}{x(e^x-1)} e^{nx}\,dx$$

est donc une quantité supérieure à l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} \operatorname{mod} f(x) e^{nx}\,dx$ et à plus forte raison au module de R'_n. Or en considérant d'abord la seconde des intégrales qui y entrent et qu'on peut écrire ainsi

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\frac{1}{2}x} - 1}{x\left(e^{\frac{1}{2}x} + 1\right)} e^{nx}\,dx,$$

je remarque que le maximum de la fraction $\dfrac{e^{\frac{1}{2}x} - 1}{x\left(e^{\frac{1}{2}x} + 1\right)}$ entre les limites de l'intégration est donné à la limite supérieure en faisant $x = 0$. Mettons en effet $-x$ au lieu de x, elle gardera la même forme, et l'inégalité

$$\frac{e^{\frac{1}{2}x} - 1}{x\left(e^{\frac{1}{2}x} + 1\right)} < \frac{1}{4},$$

ou bien celle-ci

$$4\left(e^{\frac{1}{2}x} - 1\right) < x\left(e^{\frac{1}{2}x} + 1\right),$$

se vérifie immédiatement par le développement en série, le coefficient de $\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}$ dans le premier membre étant

$$\frac{4}{1.2\ldots n+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1.2\ldots n}$$

dans le second.

Passant maintenant à la première intégrale, j'emploie la décomposition suivante

$$e^{\alpha x} - 2\cos\beta x\, e^{\frac{1}{2}x} + e^{(1-\alpha)x} = \left[e^{\frac{1}{2}\alpha x} - e^{\frac{1}{2}(1-\alpha)x}\right]^2 + 4\sin^2\frac{1}{2}\beta x\, e^{\frac{1}{2}x},$$