XLVI.

La question qui s'offre maintenant est d'obtenir ω et λ au moyen des relations précédentes, qui sont algébriques en $\operatorname{sn}\omega$ et λ. Or, on est de la sorte amené à un problème d'Algèbre dont la difficulté se montre au premier coup d'œil et résulte de la complication des coefficients H_0, H_1, ...

Revenons, en effet, au développement déjà donné paragraphe V, à savoir :

$$\chi(iK'+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\Omega\varepsilon - \frac{1}{3}\Omega_1\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\Omega_2\varepsilon^3 - \frac{1}{30}\Omega_3\varepsilon^4 - \ldots,$$

où l'on a

$$\begin{aligned}
\Omega &= k^2\operatorname{sn}^2\omega - \frac{1+k^2}{3},\\
\Omega_1 &= k^2\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega,\\
\Omega_2 &= k^4\operatorname{sn}^4\omega - \frac{2(k^2+k^4)}{3}\operatorname{sn}^2\omega - \frac{7-22k^2+7k^4}{45},\\
\Omega_3 &= k^2\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega\left(k^2\operatorname{sn}^2\omega - \frac{1+k^2}{3}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Les coefficients H_0, H_1, ... résultant de l'identité

$$\frac{1}{\varepsilon} + H_0 + H_1\varepsilon + \ldots = \left(1 + \lambda\varepsilon + \frac{\lambda^2\varepsilon^2}{2} + \ldots\right)\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\Omega\varepsilon - \ldots\right)$$

seront

$$\begin{aligned}
H_0 &= \lambda,\\
H_1 &= \tfrac{1}{2}(\lambda^2 - \Omega),\\
H_2 &= \tfrac{1}{6}(\lambda^3 - 3\Omega\lambda - 2\Omega_1),\\
H_3 &= \tfrac{1}{24}(\lambda^4 - 6\Omega\lambda^2 - 8\Omega_1\lambda - 3\Omega_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et l'on voit que, H_n étant du degré $n+1$ en λ, l'une de nos deux équations est, par rapport à cette quantité, du degré n, et la seconde du degré $n+1$. A l'égard de $\operatorname{sn}\omega$, une nouvelle complication se présente en raison du facteur irrationnel $\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega$, qui entre dans Ω_1, Ω_3, Ω_5, ...; aussi paraît-il impossible de conclure de leur forme actuelle qu'elles ne donnent pour λ^2 et $\operatorname{sn}^2\omega$ qu'une

seule et unique détermination. Et si l'on considère ces quantités comme des coordonnées, en se plaçant au point de vue de la Géométrie, on verra aisément que les courbes représentées par nos deux équations n'ont aucun point d'intersection indépendant de la constante h qui entre sous forme rationnelle et entière dans les coefficients. Il n'est donc pas possible d'employer les méthodes si simples de Clebsch et de Chasles qui permettent de reconnaître, *a priori* et sans calcul, que les points d'un lieu géométrique se déterminent individuellement en fonction d'un paramètre. Le cas de $n=3$, qui sera traité tout à l'heure, fera voir en effet que les intersections des deux courbes se trouvent, à l'exception d'une seule, rejetées à l'infini. Mais, avant d'y arriver, je ferai encore cette remarque, qu'on peut joindre aux équations déjà obtenues une infinité d'autres, dont voici l'origine.

Nous avons vu au paragraphe XLIV que l'équation de Lamé donne, en faisant $x = iK'+\varepsilon$, ces deux développements, à savoir :

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{h_1}{\varepsilon^{n-2}} + \frac{h_2}{\varepsilon^{n-4}} + \ldots,\\
y &= \varepsilon^{n+1} + h'_1\varepsilon^{n+3} + h'_2\varepsilon^{n+5} + \ldots.
\end{aligned}$$

Il en résulte que, si l'on pose de même $x = iK'+\varepsilon$ dans la solution représentée par $F(x)$, nous aurons, en désignant par C une constante dont on obtiendra bientôt la valeur,

$$\begin{aligned}
F(iK'+\varepsilon) = {}& \frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{h_1}{\varepsilon^{n-2}} + \frac{h_2}{\varepsilon^{n-4}} + \ldots\\
&+ C(\varepsilon^{n+1} + h'_1\varepsilon^{n+3} + h'_2\varepsilon^{n+5} + \ldots).
\end{aligned}$$

On peut donc identifier ce développement avec celui que donnent l'une ou l'autre des deux formules

$$\begin{aligned}
F(x) &= -\frac{D_x^{2\nu-1}f(x)}{\Gamma(2\nu)} - h_1\frac{D_x^{2\nu-3}f(x)}{\Gamma(2\nu-2)} - \ldots - h_{\nu-1}D_x f(x),\\
F(x) &= +\frac{D_x^{2\nu-2}f(x)}{\Gamma(2\nu-1)} + h_1\frac{D_x^{2\nu-4}f(x)}{\Gamma(2\nu-3)} + \ldots + h_{\nu-1}\quad f(x)
\end{aligned}$$

lorsqu'on pose $x = iK'+\varepsilon$. Bornons-nous, pour abréger, au cas de $n = 2\nu$, et représentons la partie qui procède, suivant les puissances positives de ε, par

$$\sum_0^i \mathfrak{H}_i\varepsilon^i.$$

On trouve facilement, si l'on écrit

$$m_i = \frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2\ldots i},$$

l'expression

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_i = &-(i+2\nu-1)_i \mathrm{H}_{i+2\nu-1} - (i+2\nu-3)_i h_1 \mathrm{H}_{i+2\nu-3} \\ &-(i+2\nu-5)_i h_2 \mathrm{H}_{i+2\nu-5} - \ldots - (i+1)_i h_{\nu-1} \mathrm{H}_{i+1}.\end{aligned}$$

Nous aurons donc, pour $i = 1, 3, 5, \ldots, 2\nu - 1$, les équations

$$\mathfrak{H}_i = 0;$$

on trouvera ensuite, pour les valeurs paires de l'indice,

$$\mathfrak{H}_{2i} = h_{i+\nu},$$

et enfin, pour les valeurs impaires supérieures à $2\nu - 1$,

$$\mathfrak{H}_{2i+2\nu+1} = \mathrm{C} h'_i.$$

Telles sont les relations, en nombre illimité, qui doivent toutes résulter des deux que nous avons données en premier lieu, à savoir :

$$\mathfrak{H}_1 = 0, \qquad \mathfrak{H}_0 = h_\nu;$$

on est amené ainsi à se demander si leurs premiers membres, $\mathfrak{H}_i$, $\mathfrak{H}_{2i} - h_{i+\nu}$, $\mathfrak{H}_{2i+2\nu+1} - \mathrm{C}h'_i$, ne s'exprimeraient point, sous forme rationnelle et entière, par les fonctions $\mathfrak{H}_1$ et $\mathfrak{H}_0 - h_\nu$. Mais je laisserai entièrement de côté cette question difficile, et j'arrive immédiatement à la résolution des équations relatives au cas de $n = 3$.

XLVII.

Ces équations ont été données au paragraphe XXXVIII, et sont

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_2 + h_1 \mathrm{H}_0 &= 0,\\ 3\mathrm{H}_3 + h_1 \mathrm{H}_1 &= h_2.\end{aligned}$$

Si l'on met en évidence les quantités Ω, et qu'on fasse $h_1 = \frac{l}{2}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}h &= -4(1+k^2) - 5l,\\ h_2 &= \frac{5l^2}{24} - s_1,\end{aligned}$$

elles prennent la forme suivante :

$$\begin{gathered}\lambda^3 - 3\Omega\lambda - 2\Omega_1 + 3l\lambda = 0,\\ \lambda^4 - 6\Omega\lambda^2 - 8\Omega_1\lambda - 3\Omega_2 + 2l\lambda^2 - 2l\Omega = \frac{5l^2}{3} - 8s_1.\end{gathered}$$

Cela étant, j'emploie ces identités, à savoir :

$$\begin{gathered}\Omega^2 - \Omega_2 = 4s_1,\\ \Omega\Omega_2 - \Omega_1^2 = \Omega s_1 + 7s_2,\end{gathered}$$

et je remarque qu'on en tire, par l'élimination de Ω_1 et Ω_2, deux équations du second degré en Ω. Mais il convient d'introduire H_1 au lieu de Ω; en faisant alors, pour un moment,

$$\begin{aligned}a &= 1 - k^2 + k^4,\\ b &= 2 - 3k^2 - 3k^4 + 2k^6,\end{aligned}$$

ces relations seront

$$\begin{gathered}36\mathrm{H}_1^2 - 12l\mathrm{H}_1 + 36l\lambda^2 + 5l^2 - 4a = 0,\\ 72l\mathrm{H}_1^2 - 6(5l^2 - a)\mathrm{H}_1 + 72l^2\lambda^2 + b = 0.\end{gathered}$$

Éliminons λ^2; elles donnent immédiatement

$$\mathrm{H}_1 = -\frac{10l^3 - 8al - b}{6(l^2 - a)};$$

nous obtenons ensuite

$$\lambda^2 = -\frac{4(l^2 - a)^3 + (11l^3 - 9al - b)^2}{36l(l^2 - a)^2},$$

ou bien

$$\lambda^2 = -\frac{\varphi(l)}{36l(l^2 - a)^2},$$

si l'on pose, pour abréger,

$$\varphi(l) = 125l^6 - 210al^4 - 22bl^3 + 93a^2l^2 + 18abl + b^2 - 4a^3,$$

soit encore

$$\begin{aligned}\psi(l) &= 5l^6 + 6al^4 - 10bl^3 - 3a^2l^2 + 6abl + b^2 - 4a^3\\ &= \varphi(l) - 12l(l^2 - a)(10l^3 - 8al - b);\end{aligned}$$

de la relation $\lambda^2 - 2\mathrm{H}_1 = \Omega$ on conclura

$$\Omega = k^2 \operatorname{sn}^2\omega - \frac{1+k^2}{3} = -\frac{\psi(l)}{36l(l^2 - a)^2}.$$

Enfin j'observe qu'on déduit des équations proposées la valeur de Ω_1 exprimée en Ω et λ, par cette formule,

$$2\Omega_1 = (\lambda^2 - 3\Omega + 3l)\lambda;$$

faisant donc

$$\chi(l) = l^6 - 6al^4 + 4bl^3 - 3a^2l^2 - b^2 + 4a^2,$$

nous parvenons encore à la relation

$$\Omega_1 = k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega = -\frac{\chi(l)\lambda}{36l(l^2-a)^2}.$$

Le signe de λ se trouve ainsi déterminé par celui de ω, et la solution complète de l'équation de Lamé dans le cas de $n=3$ est obtenue sans aucune ambiguïté au moyen de la fonction

$$\frac{\mathrm{H}(x+\omega)}{\Theta(x)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]x}.$$

On n'a toutefois pas mis en évidence dans les formules précédentes les valeurs de la constante l qui donnent les solutions doublement périodiques, ou les fonctions particulières de seconde espèce de M. Mittag-Leffler, comme nous l'avons fait dans le cas de $n = 2$.

Voici, dans ce but, les nouvelles expressions qu'on en déduit.

Posons, en premier lieu,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} &= 5l^2 - 2(1+k^2)l - 3(1-k^2)^2,\\
\mathrm{Q} &= 5l^2 - 2(1-2k^2)l - 3,\\
\mathrm{R} &= 5l^2 - 2(k^2-2)\,l - 3k^4,\\
\mathrm{S} &= 36l,
\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= l^2 - (1+k^2)l - 3k^2,\\
\mathrm{B} &= l^2 - (1-2k^2)l + 3(k^2-k^4),\\
\mathrm{C} &= l^2 - (k^2-2)\,l - 3(1-k^2),\\
\mathrm{D} &= l^2 - 1 + k^2 - k^4;
\end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned}
\lambda^2 &= -\frac{\mathrm{PQR}}{\mathrm{SD}^2},\\
k^2 \operatorname{sn}^2\omega &= -\frac{\mathrm{PA}^2}{\mathrm{SD}^2},\\
k^2 \operatorname{cn}^2\omega &= +\frac{\mathrm{QB}^2}{\mathrm{SD}^2},\\
\operatorname{dn}^2\omega &= +\frac{\mathrm{RC}^2}{\mathrm{SD}^2},
\end{aligned}$$

et enfin, pour établir la correspondance des signes entre ω et λ, l'équation

$$k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega = -\frac{\mathrm{ABC}\lambda}{\mathrm{SD}^2}.$$

Cela étant, ce sont les conditions $\mathrm{P}=0$, $\mathrm{Q}=0$, $\mathrm{R}=0$, $\mathrm{S}=0$ qui donnent les solutions doublement périodiques, au nombre de sept, tandis qu'on obtient les fonctions de M. Mittag-Leffler en posant $\mathrm{A}=0$, $\mathrm{B}=0$, $\mathrm{C}=0$, $\mathrm{D}=0$. Mais je laisse de côté l'étude détaillée de ces formules, en me bornant à la remarque suivante, sur laquelle je reviendrai plus tard. Exprimons les quantités $k^2\operatorname{sn}^2\omega$, $k^2\operatorname{cn}^2\omega$, $\operatorname{dn}^2\omega$, en partant de l'équation

$$k^2 \operatorname{sn}^2\omega - \frac{1+k^2}{3} = -\frac{\psi(l)}{36l(l^2-a)^2},$$

de cette nouvelle manière, à savoir :

$$\begin{aligned}
k^2 \operatorname{sn}^2\omega &= \frac{12l(l^2-a)^2(1+k^2) - \psi(l)}{36l(l^2-a)^2},\\
k^2 \operatorname{cn}^2\omega &= \frac{12l(l^2-a)^2(2k^2-1) + \psi(l)}{36l(l^2-a)^2},\\
\operatorname{dn}^2\omega &= \frac{12l(l^2-a)^2(2-k^2) + \psi(l)}{36l(l^2-a)^2}.
\end{aligned}$$

On conclura facilement de l'égalité

$$k^4 \operatorname{sn}^2\omega \operatorname{cn}^2\omega \operatorname{dn}^2\omega = -\frac{\varphi(l)\chi^2(l)}{[36l(l^2-a)^2]^3}$$

la relation que voici :

$$\psi^3(l) - 3.12^2 al^2(l^2-a)^4\psi(l) + 12^3 bl^3(l^2-a)^6 = \varphi(l)\chi^2(l).$$

Or elle conduit à cette conséquence, qu'en posant

$$y = \frac{\psi(l)}{12l(l^2-a)^2},$$

on a

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^3 - 3ay + b}} = 2\sqrt{3}\int \frac{(5l^2-a)\,dl}{\sqrt{l\varphi(l)}};$$

c'est donc un exemple de réduction d'une intégrale hyperelliptique de seconde classe à l'intégrale elliptique de première espèce.

XLVIII.

La méthode générale que je vais exposer maintenant pour la détermination des constantes ω et λ repose principalement sur la considération du produit des solutions de l'équation de Lamé, qui viennent d'être représentées par $F(x)$ et $F(-x)$. Et, d'abord, on remarquera que, ayant

$$\begin{aligned} F(x+2K) &= \mu\, F(x), \\ F(x+2iK') &= \mu'\, F(x) \end{aligned}$$

et, par suite,

$$F(-x-2K) = \frac{1}{\mu}\, F(-x),$$

$$F(-x-2iK') = \frac{1}{\mu'}\, F(-x),$$

ce produit est une fonction doublement périodique de première espèce, qui a pour pôle unique $x = iK'$. Voici, en conséquence, comment s'obtient son expression sous forme entièrement explicite.

Soit

$$\Phi(x) = (-1)^n \mu'\, F(x)\, F(-x),$$

le facteur μ' ayant été introduit pour pouvoir écrire

$$\begin{aligned} \Phi(iK'+\varepsilon) &= (-1)^n \mu'\, F(iK'+\varepsilon)\, F(-iK'-\varepsilon) \\ &= (-1)^n \quad F(iK'+\varepsilon)\, F(\quad iK'-\varepsilon). \end{aligned}$$

Cela étant et posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{h_1}{\varepsilon^{n-2}} + \frac{h_2}{\varepsilon^{n-4}} + \ldots, \\ S_1 &= C(\varepsilon^{n+1} + h'_1\,\varepsilon^{n+3} + h'_2\,\varepsilon^{n+5} + \ldots), \end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned} F(iK'+\varepsilon) &= S + S_1, \\ F(iK'-\varepsilon) &= (-1)^n (S - S_1), \end{aligned}$$

d'où, par conséquent,

$$\Phi(iK'+\varepsilon) = S^2 - S_1^2.$$

On voit ainsi que la partie principale de développement suivant les puissances croissantes de ε est donnée par le premier terme S^2,

et ne dépend point de la constante C, entrant dans le second terme, que nous ne connaissons pas encore. Faisons donc

$$S^2 = \frac{1}{\varepsilon^{2n}} + \frac{A_1}{\varepsilon^{2n-2}} + \frac{A_2}{\varepsilon^{2n-4}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{\varepsilon^2} + \ldots;$$

les coefficients A_1, A_2, ... seront

$$\begin{aligned} A_1 &= 2h_1, \\ A_2 &= 2h_2 + h_1^2, \\ A_3 &= 2h_3 + 2h_1 h_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et l'on en conclut que, h_i étant un polynome de degré i en h_1, il en est de même, en général, pour un coefficient de rang quelconque A_i. Maintenant l'expression cherchée découle de la formule de décomposition en éléments simples, qui a été donnée au paragraphe II. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \Phi(x) = &-\frac{D_x^{2n-1}\left[\dfrac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right]}{\Gamma(2n)} - A_1 \frac{D^{2n-3}\left[\dfrac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right]}{\Gamma(2n-2)} - A_2 \frac{D^{2n-5}\left[\dfrac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right]}{\Gamma(2n-4)} - \ldots \\ &- A_{n-1} D_x \left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right] + \text{const.} \end{aligned}$$

La relation élémentaire

$$D_x \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \frac{J}{K} - k^2 \operatorname{sn}^2 x$$

donnera ensuite, sous une autre forme, en désignant par A une nouvelle constante,

$$\begin{aligned} \Phi(x) = &\frac{D_x^{2n-2}(k^2 \operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2n)} + A_1 \frac{D^{2n-4}(k^2 \operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2n-2)} + A_2 \frac{D^{2n-6}(k^2 \operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2n-4)} + \ldots \\ &+ A_{n-1}(k^2 \operatorname{sn}^2 x) + A. \end{aligned}$$

Pour la déterminer, nous emploierons, en outre de la partie principale de la série S^2, le terme indépendant de ε, qui sera désigné par A_n. En déduisant ce même terme de l'expression de $\Phi(x)$, et se rappelant qu'on a fait

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 \varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} + s_0 + s_1 \varepsilon^2 + \ldots + s_i \varepsilon^{2i} + \ldots,$$

nous trouvons immédiatement

$$A = A_n - A_{n-1} s_0 - A_{n-2} \frac{s_1}{3} - \ldots - A_1 \frac{s_{n-2}}{2n-3} - \frac{s_{n-1}}{2n-1}.$$

Beaucoup d'autres expressions s'obtiennent par un procédé semblable en fonction linéaire de dérivées successives de $k^2 \operatorname{sn}^2 x$, celles-ci, par exemple,

$$D_x^\alpha F(x) \, D_x^\beta F(-x),$$

que je vais considérer dans le cas particulier de $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

Soit alors

$$\Phi_1(x) = (-1)^{n+1} \mu' F'(x) F'(-x),$$

et désignons par S' et S'_1 les dérivées par rapport à ε des séries S et S_1, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} F'(iK' + \varepsilon) &= S' + S'_1, \\ F'(iK' - \varepsilon) &= (-1)^{n+1}(S' - S'_1). \end{aligned}$$

De la relation

$$\Phi_1(iK' + \varepsilon) = (-1)^{n+1} F'(iK' + \varepsilon) F'(iK' - \varepsilon),$$

on conclura cette expression, savoir :

$$\Phi_1(iK' + \varepsilon) = S'^2 - S'^2_1.$$

Faisant donc, comme tout à l'heure,

$$S'^2 = \frac{n^2}{\varepsilon^{2n+2}} + \frac{B_1}{\varepsilon^{2n}} + \frac{B_2}{\varepsilon^{2n-2}} + \ldots + \frac{B_n}{\varepsilon^2} + B_{n+1} + \ldots,$$

où le coefficient B_i est encore un polynome en h_1 de degré i, nous aurons

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) = n^2 \frac{D_x^{2n}(k^2 \operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2n+2)} &+ B_1 \frac{D_x^{2n-2}(k^2 \operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2n)} \\ &+ B_2 \frac{D^{2n-4}(k^2 \operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2n-2)} + \ldots + B_n(k^2 \operatorname{sn}^2 x) + B, \end{aligned}$$

et la constante sera donnée par la formule

$$B = B_{n+1} - B_n s_0 - B_{n-1} \frac{s_1}{3} - \ldots - B_1 \frac{s_{n-1}}{2n-1} - n^2 \frac{s_n}{2n+1}.$$

J'envisage enfin le déterminant fonctionnel formé avec les solutions $F(x)$ et $F(-x)$ de l'équation de Lamé, et je pose

$$\Phi_2(x) = (-1)^{n+1} \mu' [F(x) F'(-x) + F'(x) F(-x)].$$

La relation suivante, qui s'obtient aisément, et dont le second membre ne contient que des termes entiers en ε, à savoir

$$\Phi_2(iK' + \varepsilon) = 2(SS'_1 - S'S_1) = 2(2n+1)C + \ldots,$$

donne, comme on le voit, la proposition bien connue que cette fonction est constante; nous allons en obtenir la valeur en la mettant sous la forme

$$(2n+1)C = \sqrt{N},$$

que nous garderons désormais.

XLIX.

J'observe, à cet effet, que de l'identité

$$(SS' - S_1 S'_1)^2 = (SS'_1 - S_1 S')^2 + (S^2 - S_1^2)(S'^2 - S'^2_1)$$

on conclut immédiatement, entre les fonctions dont il vient d'être question, la relation suivante :

$$\frac{1}{4} \Phi'^2(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{4} \Phi_2^2(iK' + \varepsilon) + \Phi(iK' + \varepsilon) \Phi_1(iK' + \varepsilon),$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{4} \Phi'^2(x) = N + \Phi(x) \Phi_1(x).$$

Elle fait voir qu'en attribuant à la variable une valeur particulière, en supposant, par exemple, $x = 0$, N s'obtient comme un polynome entier en h_1 du degré $2n+1$, puisque cette quantité entre, comme on l'a vu, au degré n dans $\Phi(x)$ et au degré $n+1$ dans $\Phi_1(x)$. Ce point établi, nous remarquons que, en posant la condition $N = 0$, le déterminant fonctionnel $\Phi_2(x)$ est nul, de sorte que le quotient $\frac{F(x)}{F(-x)}$ se réduit alors à une constante. Désignons-la pour un instant par A, on voit que le changement de x en $-x$ donne $A = \frac{1}{A}$; on a donc

$$A = \pm 1,$$

et, par conséquent,

$$F(-x) = \pm F(x).$$

Remplaçons ensuite x par $x + 2K$ et $x + 2iK'$: le quotient se reproduit multiplié par μ^2 et μ'^2; ainsi il faut poser $\mu^2 = 1$, $\mu'^2 = 1$, c'est-à-dire $\mu = \pm 1$, $\mu' = \pm 1$.

La condition $N = 0$ détermine donc les valeurs de h, pour lesquelles l'équation de Lamé est vérifiée par des fonctions doublement périodiques. Ce sont ces solutions, auxquelles est attaché à jamais le nom du grand géomètre, et dont les propriétés lui ont permis de traiter pour la première fois le problème difficile de la détermination des températures d'un ellipsoïde, lorsque l'on donne en chaque point la température de la surface. Elles s'offrent en ce moment comme un cas singulier de l'équation différentielle, où l'intégrale cesse d'être représentée par la formule

$$y = C\,F(x) + C'\,F(-x)$$

et subit un changement de forme analytique. Je me borne à les signaler sous ce point de vue, devant bientôt y revenir, et je reprends, pour en tirer une nouvelle conséquence, l'équation

$$\frac{1}{4}\Phi'^2(x) = N + \Phi(x)\,\Phi_1(x).$$

Introduisons $\operatorname{sn}^2 x$ pour variable, en posant $\operatorname{sn}^2 x = t$; on voit que $\Phi(x)$ et $\Phi_1(x)$, ne contenant que des dérivées d'ordre pair de $\operatorname{sn}^2 x$, deviendront des polynomes entiers en t des degrés n et $n+1$, que je désignerai par $\Pi(t)$ et $\Pi_1(t)$. Soit encore

$$R(t) = t(1-t)(1-k^2 t);$$

la relation considérée prend cette forme

$$R(t)\,\Pi'^2(t) = N + \Pi(t)\,\Pi_1(t);$$

et voici la remarque, importante pour notre objet, à laquelle elle donne lieu.

Développons la fonction rationnelle $\frac{\Pi'(t)}{\Pi(t)}$ en fraction continue,

et distinguons, dans la série des réduites, celle dont le dénominateur est du degré ν, dans les deux cas de $n = 2\nu$ et $n = 2\nu - 1$. Si on la représente par $\frac{\theta(t)}{\varphi(t)}$, le développement, suivant les puissances décroissantes de t, de la différence

$$\frac{\Pi'(t)}{\Pi(t)}\varphi(t) - \theta(t),$$

commencera ainsi par un terme en $\frac{1}{t^{\nu+1}}$, et, en posant

$$\Pi'(t)\,\varphi(t) - \Pi(t)\,\theta(t) = \psi(t),$$

on voit que, dans le premier cas, $\psi(t)$ sera un polynome de degré $\nu - 1$, et, dans le second, de degré $\nu - 2$. Cela étant, je considère l'expression suivante,

$$N\,\varphi^2(t) - R(t)\,\psi^2(t);$$

on trouve d'abord aisément, en employant la relation proposée et la valeur de $\psi(t)$, qu'elle devient

$$\Pi(t)[-\varphi^2(t)\,\Pi_1(t) + 2\varphi(t)\,\theta(t)\,R(t)\,\Pi'(t) - \theta^2(t)\,R(t)\,\Pi(t)],$$

et contient, par conséquent, en facteur, le polynome $\Pi(t)$. On vérifie ensuite qu'elle est de degré $n+1$ en t, dans les deux cas de $n = 2\nu$ et $n = 2\nu - 1$; nous pouvons ainsi poser

$$N\,\varphi^2(t) - R(t)\,\psi^2(t) = \Pi(t)(gt - g'),$$

et nous allons voir que ω est donné par la formule

$$\operatorname{sn}^2\omega = \frac{g'}{g},$$

où le second membre est une fonction rationnelle de h.

L.

Considérons dans ce but une nouvelle fonction doublement périodique définie de la manière suivante,

$$\Psi(x) = -\mu' f(-x)\,F(x),$$

en faisant toujours

$$f(x) = e^{\lambda(x - iK')}\chi(x),$$

de sorte que les deux facteurs $f(-x)$ et $F(x)$ soient encore des fonctions de seconde espèce à multiplicateurs réciproques. Nous aurons d'abord

$$\Psi(x)\,\Psi(-x) = \mu'^2 f(x) f(-x)\,F(x)\,F(-x),$$

et, en employant l'égalité, qu'il est facile d'établir,

$$\mu' f(x) f(-x) = -k^2(\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 \omega),$$

on parvient à cette relation

$$\Psi(x)\,\Psi(-x) = (-1)^{n+1} k^2(\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2\omega)\,\Phi(x),$$

dont on va voir l'importance. Formons à cet effet l'expression de $\Psi(x)$ qui s'obtiendra sous forme linéaire au moyen des dérivées successives de $k^2\operatorname{sn}^2 x$, puisque cette fonction, comme celles qui ont été précédemment introduites, a pour seul pôle $x = iK'$. Nous déduirons pour cela un développement, suivant les puissances croissantes de ε, de l'équation

$$\begin{aligned}\Psi(iK'+\varepsilon) &= -f(iK'-\varepsilon)\,F(iK'+\varepsilon)\\ &= \left(\frac{1}{\varepsilon} - H_0 + H_1\varepsilon - H_2\varepsilon^2 + \ldots\right)\left(\frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{h_1}{\varepsilon^{n-2}} + \frac{h_2}{\varepsilon^{n-4}} + \ldots\right),\end{aligned}$$

développement que je représenterai par la formule

$$\Psi(iK'+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}} + \frac{\alpha_0}{\varepsilon^n} + \frac{\alpha_1}{\varepsilon^{n-1}} + \ldots + \frac{\alpha_i}{\varepsilon^{n-i}} + \ldots,$$

en posant

$$\alpha_0 = -H_0, \qquad \alpha_1 = H_1, \qquad \ldots,$$

et nous observerons immédiatement que cette série ne contient point le terme $\frac{\alpha_{n-1}}{\varepsilon}$. On a effectivement, pour $n = 2\nu$,

$$\alpha_{n-1} = H_{2\nu-1} + h_1 H_{2\nu-3} + h_2 H_{2\nu-5} + \ldots + h_{\nu-1} H_1 + h_\nu,$$

puis, en supposant $n = 2\nu - 1$,

$$\alpha_{n-1} = -(H_{2\nu-2} + h_1 H_{2\nu-4} + h_2 H_{2\nu-6} + \ldots + h_{\nu-1} H_0).$$

Or on voit que, d'après les équations obtenues pour la détermination de ω et λ, au paragraphe XLV, le coefficient α_{n-1} est nul dans les deux cas. La partie principale du développement de

$\Psi(iK'+\varepsilon)$, à laquelle nous joindrons le terme indépendant de ε, est donc

$$\frac{1}{\varepsilon^{n+1}} + \frac{\alpha_0}{\varepsilon^n} + \frac{\alpha_1}{\varepsilon^{n-1}} + \ldots + \frac{\alpha_{n-2}}{\varepsilon^2} + \alpha_n.$$

On en conclut, quand $n = 2\nu$,

$$\begin{aligned}\Psi(x) = &-\frac{D_x^{2\nu-1}(k^2\operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu+1)} + \alpha_0\frac{D_x^{2\nu-2}(k^2\operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu)}\\ &-\alpha_1\frac{D_x^{2\nu-3}(k^2\operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu-1)} + \ldots + \alpha_{2\nu-2}(k^2\operatorname{sn}^2 x) + \alpha,\end{aligned}$$

la constante ayant pour valeur

$$\alpha = \alpha_{2\nu} - \alpha_{2\nu-2}s_0 - \alpha_{2\nu-4}\frac{s_1}{3} - \ldots - \alpha_0\frac{s_{\nu-1}}{2\nu-1},$$

puis, dans le cas de $n = 2\nu - 1$,

$$\begin{aligned}\Psi(x) = &+\frac{D_x^{2\nu-2}(k^2\operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu)} - \alpha_0\frac{D_x^{2\nu-3}(k^2\operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu-1)}\\ &+\alpha_1\frac{D_x^{2\nu-4}(k^2\operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu-3)} - \ldots + \alpha_{2\nu-3}(k^2\operatorname{sn}^2 x) + \alpha,\end{aligned}$$

en posant

$$\alpha = \alpha_{2\nu-1} - \alpha_{2\nu-3}s_0 - \alpha_{2\nu-5}\frac{s_1}{3} - \ldots - \alpha_1\frac{s_{\nu-2}}{2\nu-3} - \frac{s_{\nu-1}}{2\nu-1}.$$

Soit maintenant $\operatorname{sn}^2 x = t$; les expressions auxquelles nous venons de parvenir prendront cette nouvelle forme, à savoir

$$\Psi(x) = G(t) + \sqrt{R(t)}\,G_1(t),$$

où $G(t)$ et $G_1(t)$ sont des polynomes entiers en t des degrés ν et $\nu - 1$ dans le premier cas, ν et $\nu - 2$ dans le second. Observons aussi que, le radical $\sqrt{R(t)}$ changeant de signe avec x, d'après la condition

$$\sqrt{R(t)} = \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$$

on aura

$$\Psi(-x) = G(t) - \sqrt{R(t)}\,G_1(t);$$

nous concluons donc de l'égalité donnée plus haut

$$\Psi(x)\,\Psi(-x) = (-1)^{n+1}k^2(\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2\omega)\,\Phi(x)$$

la suivante :

$$G^2(t) - R(t)\,G_1^2(t) = (-1)^{n+1}k^2(t - \operatorname{sn}^2\omega)\,\Pi(t).$$

Cette forme de relation est bien connue par le théorème d'Abel pour l'addition des intégrales elliptiques, et l'on sait que les polynomes $G(t)$, $G_1(t)$, étant des degrés donnés tout à l'heure, se trouvent, à un facteur constant près, déterminés par la condition que l'expression

$$G^2(t) - R(t)\,G_1^2(t)$$

soit divisible par $\Pi(t)$. Il suffit, par conséquent, de nous reporter à l'équation obtenue au paragraphe XLIX, à savoir

$$N\,\varphi^2(t) - R(t)\,\psi^2(t) = \Pi(t)(gt - g'),$$

pour en conclure le résultat que nous avons annoncé

$$\mathrm{sn}^2\omega = \frac{g'}{g}.$$

Mais nous voyons, de plus, qu'on peut poser

$$\rho\left[G(t) + \sqrt{R(t)}\,G_1(t)\right] = \sqrt{N}\,\varphi(t) + \sqrt{R(t)}\,\psi(t),$$

ρ désignant une constante. Voici maintenant les conséquences à tirer de cette relation.

Je supposerai que l'on ait $n = 2\nu$; les polynomes $\varphi(t)$ et $\psi(t)$, dont les coefficients doivent être regardés comme connus et, si l'on veut, exprimés sous forme entière en h, seront alors des degrés ν et $\nu - 1$. Cela étant, revenons à la variable primitive en faisant $t = \mathrm{sn}^2 x$; on pourra mettre $\sqrt{R(t)}\,\psi(t)$ et $\varphi(t)$ sous la forme suivante, à savoir

$$\sqrt{R(t)}\,\psi(t) = -\,a\,\frac{D_x^{2\nu-1}(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu+1)} - a'\,\frac{D_x^{2\nu-3}(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu-1)} - \ldots,$$

$$\varphi(t) = +\,b\,\frac{D_x^{2\nu-2}(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu)} + b'\,\frac{D_x^{2\nu-4}(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu-2)} + \ldots.$$

Nous aurons donc cette expression de la fonction $\Psi(x)$,

$$\begin{aligned}\rho\,\Psi(x) = -\quad & a\,\frac{D_x^{2\nu-1}(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu+1)} - a'\,\frac{D_x^{2\nu-3}(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu-1)} - \ldots \\ & + \sqrt{N}\left[b\,\frac{D_x^{2\nu-2}(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu)} + b'\,\frac{D_x^{2\nu-4}(k^2\,\mathrm{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu-2)} + \ldots\right],\end{aligned}$$

où les constantes $a, a', \ldots, b, b', \ldots$ sont déterminées linéairement par les coefficients de $\varphi(t)$ et $\psi(t)$.

Or on en déduit, en faisant $x = iK' + \varepsilon$ et se rappelant qu'on a supposé $n = 2\nu$, l'égalité suivante,

$$\rho\left(\frac{1}{\varepsilon^{n+1}} + \frac{\alpha_0}{\varepsilon^n} + \frac{\alpha_1}{\varepsilon^{n-1}} + \ldots\right) = \frac{a}{\varepsilon^{n+1}} + \frac{a'}{\varepsilon^{n-1}} + \ldots + \sqrt{N}\left(\frac{b}{\varepsilon^n} + \frac{b'}{\varepsilon^{n-2}} + \ldots\right),$$

d'où nous tirons

$$\begin{aligned}\rho &= a,\\ \rho\alpha_0 &= b\sqrt{N},\\ \rho\alpha_1 &= a',\\ &\ldots\ldots\end{aligned}$$

Éliminons l'indéterminée ρ et remplaçons les coefficients α_0, $\alpha_1, \ldots$ par leurs valeurs du paragraphe L (p. 406); on aura ces relations

$$\lambda = -\frac{b\sqrt{N}}{a},$$

$$h_1 + \frac{1}{2}(\lambda^2 - \Omega) = \frac{a'}{a},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La première donne l'expression de λ, et nous reconnaissons, par cette voie, qu'elle ne contient d'autre irrationnalité que $\sqrt{N}$. On obtiendrait la même conclusion dans le cas de $n = 2\nu - 1$, et c'est le résultat que j'avais principalement en vue d'établir, après avoir démontré que $\mathrm{sn}^2\omega$ est une fonction rationnelle de h. L'étude des solutions de Lamé qui correspondent aux racines de l'équation $N = 0$ nous permettra, comme on va le voir, d'aller plus loin et d'approfondir davantage la nature de ces expressions de λ et $\mathrm{sn}^2\omega$.

LI.

On a vu au paragraphe XLIX (p. 404) que l'intégrale générale de l'équation différentielle n'est plus représentée, lorsqu'on a $N = 0$, par la formule

$$y = C\,F(x) + C'\,F(-x),$$

le rapport $\dfrac{F(x)}{F(-x)}$ se réduisant alors à une constante, et, comme conséquence, nous avons établi que les multiplicateurs de la fonction de seconde espèce deviennent, au signe près, égaux à l'unité.

Suivant les diverses combinaisons des signes de μ et μ', nous pouvons donc avoir des solutions particulières de quatre espèces, caractérisées par les relations suivantes :

(I)	$F(x+2K) = -F(x)$,	$F(x+2iK') = +F(x)$,
(II)	$F(x+2K) = -F(x)$,	$F(x+2iK') = -F(x)$,
(III)	$F(x+2K) = +F(x)$,	$F(x+2iK') = -F(x)$,
(IV)	$F(x+2K) = +F(x)$,	$F(x+2iK') = +F(x)$.

Toutes existent en effet, et les trois premières, où $F(x)$ a successivement la périodicité de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, s'obtiennent en faisant, dans l'expression générale de cette formule, $\lambda = 0$, conjointement avec $\omega = 0$, $\omega = K$, $\omega = K + iK'$. Nous remarquerons, pour l'établir, que, les valeurs de l'élément simple

$$f(x) = e^{\lambda(x-iK)}\chi(x)$$

étant alors $f(x) = k \operatorname{sn} x$, $ik \operatorname{cn} x$, $i \operatorname{dn} x$, dans ces trois cas, les développements en série de $f(iK'+\varepsilon)$ ne contiennent que des puissances impaires de ε, de sorte que les coefficients désignés par H_i s'évanouissent tous pour des valeurs paires de l'indice. Des deux conditions obtenues au paragraphe XLV (p. 393), pour la détermination de ω et λ, à savoir

$$\begin{aligned} H_{2\nu-1} + h_1 H_{2\nu-3} + h_2 H_{2\nu-5} + \ldots + h_{\nu-1} H_1 + h_\nu &= 0, \\ 2\nu H_{2\nu} + (2\nu-2) h_1 H_{2\nu-2} + (2\nu-4) h_2 H_{2\nu-4} + \ldots + 2 h_{\nu-1} H_2 &= 0, \end{aligned}$$

dans le cas de $n = 2\nu$; puis, en supposant $n = 2\nu - 1$,

$$\begin{aligned} H_{2\nu-2} + h_1 H_{2\nu-4} + h_2 H_{2\nu-6} + \ldots + h_{\nu-1} H_0 &= 0, \\ (2\nu-1) H_{2\nu-1} + (2\nu-3) h_1 H_{2\nu-3} + \ldots + h_{\nu-1} H_1 - h_\nu &= 0; \end{aligned}$$

on voit ainsi qu'une seule subsiste et détermine la constante h, l'autre étant satisfaite d'elle-même.

Mais soit, pour plus de précision,

$$\begin{aligned} k \operatorname{sn}(iK'+\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} + p_1 \varepsilon + p_2 \varepsilon^3 + \ldots + p_i \varepsilon^{2i-1} + \ldots, \\ ik \operatorname{cn}(iK'+\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} + q_1 \varepsilon + q_2 \varepsilon^3 + \ldots + q_i \varepsilon^{2i-1} + \ldots, \\ i \operatorname{dn}(iK'+\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} + r_1 \varepsilon + r_2 \varepsilon^3 + \ldots + r_i \varepsilon^{2i-1} + \ldots; \end{aligned}$$

je poserai, dans le cas de $n = 2\nu$,

$$\begin{aligned} P &= p_\nu + h_1 p_{\nu-1} + h_2 p_{\nu-2} + \ldots + h_{\nu-1} p_1 + h_\nu, \\ Q &= q_\nu + h_1 q_{\nu-1} + h_2 q_{\nu-2} + \ldots + h_{\nu-1} q_1 + h_\nu, \\ R &= r_\nu + h_1 r_{\nu-1} + h_2 r_{\nu-2} + \ldots + h_{\nu-1} r_1 + h_\nu; \end{aligned}$$

puis, en supposant $n = 2\nu - 1$,

$$\begin{aligned} P &= (2\nu-1) p_\nu + (2\nu-3) h_1 p_{\nu-1} + \ldots + h_{\nu-1} p_1 - h_\nu, \\ Q &= (2\nu-1) q_\nu + (2\nu-3) h_1 q_{\nu-1} + \ldots + h_{\nu-1} q_1 - h_\nu, \\ R &= (2\nu-1) r_\nu + (2\nu-3) h_1 r_{\nu-1} + \ldots + h_{\nu-1} r_1 - h_\nu; \end{aligned}$$

cela étant, les équations

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0$$

détermineront les valeurs particulières de h auxquelles correspondent les trois espèces de solutions que nous avons considérées, et l'on voit que dans les deux cas elles sont toutes du degré ν.

Il ne nous reste plus maintenant qu'à obtenir les solutions de la quatrième espèce dont la périodicité est celle de $\operatorname{sn}^2 x$, mais elles se déduisent moins immédiatement que les précédentes de l'expression générale de $F(x)$; il est nécessaire, en effet, de supposer alors la constante λ et $\operatorname{sn}\omega$ infinis; je donnerai en premier lieu une méthode plus directe et plus facile pour y parvenir.

Soit d'abord $n = 2\nu$; je remarque que toute solution de l'équation différentielle par une fonction doublement périodique de première espèce résulte du développement

$$y = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-2}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon^2} + h_\nu,$$

et sera donnée par l'expression

$$\begin{aligned} F(x) = {} & \frac{D_x^{2\nu-2}(k^2 \operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu)} + h_1 \frac{D_x^{2\nu-4}(k^2 \operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu-2)} + \ldots + h_{\nu-1}(k^2 \operatorname{sn}^2 x) \\ & + h_\nu - h_{\nu-1} s_0 - h_{\nu-2} \frac{s_1}{3} - \ldots - h_1 \frac{s_{\nu-2}}{2\nu-3} - \frac{s_{\nu-1}}{2\nu-1}. \end{aligned}$$

Cela étant, disposons de h de manière à avoir

$$F(iK'+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-2}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon^2} + h_\nu + h_{\nu+1}\varepsilon^2,$$

ce qui donne la condition

$$\nu s_\nu + (\nu - 1) h_1 s_{\nu-1} + (\nu - 2) h_2 s_{\nu-2} + \ldots + h_{\nu-1} s_1 = h_{\nu+1};$$

je dis que la fonction doublement périodique

$$D_x^2 \, F(x) - [n(n+1) k^2 \operatorname{sn}^2 x + h] \, F(x)$$

est nécessairement nulle. Si, après avoir posé $x = iK' + \varepsilon$, on la développe en effet suivant les puissances croissantes de ε, non seulement la partie principale, mais le terme indépendant disparaîtront, comme on l'a vu au paragraphe XLIV (p. 392). De ce que la partie principale n'existe pas, on conclut que la fonction est constante; enfin cette constante elle-même est nulle, puisqu'elle s'exprime linéairement et sous forme homogène par le terme indépendant de ε, et les coefficients des divers termes en $\frac{1}{\varepsilon}$.

Soit ensuite $n = 2\nu - 1$; le développement qu'on tire de l'équation différentielle, à savoir

$$y = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu-1}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-3}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon} + \ldots,$$

contenant un terme en $\frac{1}{\varepsilon}$, on doit tout d'abord le faire disparaître en posant $h_{\nu-1} = 0$, pour en déduire une fonction doublement périodique de première espèce, qui sera de cette manière

$$F(x) = -\frac{D_x^{2\nu-3}(k^2 \operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu - 1)} - h_1 \frac{D_x^{2\nu-5}(k^2 \operatorname{sn}^2 x)}{\Gamma(2\nu - 3)} - \ldots - h_{\nu-2} \, D_x(k^2 \operatorname{sn}^2 x).$$

Cela étant, et en nous bornant à la partie principale, on aura

$$F(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu-1}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-3}} + \ldots + \frac{h_{\nu-2}}{\varepsilon^3};$$

il en résulte que, si on laisse indéterminée la constante h, le développement de l'expression

$$D_x^2 \, F(x) - [n(n+1) k^2 \operatorname{sn}^2 x + h] \, F(x),$$

après avoir posé $x = iK' + \varepsilon$, commencera par un terme en $\frac{1}{\varepsilon^3}$. Mais faisons $h_{\nu-1} = 0$; comme on peut écrire alors

$$F(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu-1}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-3}} + \ldots + \frac{h_{\nu-2}}{\varepsilon^3} + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon},$$

on voit que ce développement commencera par un terme en $\frac{1}{\varepsilon}$, qui lui-même doit nécessairement s'évanouir, et il est ainsi prouvé que, sous la condition posée, le résultat de la substitution de la fonction $F(x)$, dans le premier membre de l'équation différentielle, ne peut être qu'une constante. J'ajoute que cette constante est nulle, le résultat de la substitution étant, comme $F(x)$, une fonction qui change de signe avec la variable. Soit donc, dans le cas de $n = 2\nu$,

$$S = \nu s_\nu + (\nu - 1) h_1 s_{\nu-1} + (\nu - 2) h_2 s_{\nu-2} + \ldots + h_{\nu-1} s_1 - h_{\nu+1};$$

puis, en supposant $n = 2\nu - 1$,

$$S = h_{\nu-1},$$

on voit que les équations

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad R = 0, \qquad S = 0$$

déterminent les valeurs de h auxquelles correspondent les quatre espèces de solutions doublement périodiques découvertes par Lamé, ces solutions ne se trouvant plus distinguées par leur expression algébrique, comme l'a fait l'illustre auteur, mais d'après la nature de leur périodicité. On voit aussi que la condition $N = 0$, d'où elles ont été tirées, se présente sous la forme

$$PQRS = 0,$$

et l'on vérifie immédiatement que le produit des quatre facteurs, dans les deux cas de $n = 2\nu$ et $n = 2\nu - 1$, est bien du degré $2n + 1$ en h, comme nous l'avons établi pour N au paragraphe XLIX (p. 403).

Voici maintenant le procédé que j'ai annoncé pour déduire les solutions de la quatrième espèce de la solution générale.

LII.

Je reviens à l'élément simple

$$f(x) = \frac{H'(0) \, H(x + \omega)}{\Theta(x) \, \Theta(\omega)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right](x - iK') + \frac{i\pi\omega}{2K}},$$

où λ et $\operatorname{sn}\omega$ sont des fonctions déterminées de h; je les suppose infinies l'une et l'autre pour une certaine valeur de cette constante, et je me propose de reconnaître ce que devient, lorsqu'on attribue à h cette valeur, l'expression de $f(x)$. Concevons, à cet effet, que λ soit exprimé au moyen de ω; je ferai

$$\omega = i\mathrm{K}' + \delta,$$

ce qui donne, après une réduction facile,

$$f(x) = \frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(x+\delta)}{\Theta(x)\,\mathrm{H}(\delta)}\, e^{\left[\lambda - \frac{\mathrm{H}'(\delta)}{\mathrm{H}(\delta)}\right](x - i\mathrm{K}') + \frac{i\pi\delta}{\mathrm{K}}}.$$

Or nous avons, en développant suivant les puissances croissantes de δ,

$$\frac{\mathrm{H}'(\delta)}{\mathrm{H}(\delta)} = \frac{1}{\delta} - \left(s_0 - \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right)\delta - \frac{s_1\delta^3}{3} - \frac{s_2\delta^5}{5} - \ldots;$$

cela étant, pour que l'exponentielle

$$e^{\left[\lambda - \frac{\mathrm{H}'(\delta)}{\mathrm{H}(\delta)}\right](x - i\mathrm{K}')}$$

soit finie lorsqu'on fera $\delta = 0$, on voit que λ doit s'exprimer de telle manière en ω qu'on ait, en supposant $\omega = i\mathrm{K}' + \delta$,

$$\lambda = \frac{1}{\delta} + \lambda_0 + \lambda_1\delta + \ldots.$$

Cette forme de développement nous donne, en effet,

$$\lambda - \frac{\mathrm{H}'(\delta)}{\mathrm{H}(\delta)} = \lambda_0 + \left(\lambda_1 + s_0 - \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right)\delta + \ldots;$$

on a d'ailleurs immédiatement

$$\frac{\mathrm{H}'(0)}{\mathrm{H}(\delta)} = \frac{1}{\delta} + \left(s_0 - \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right)\frac{\delta}{2} + \ldots,$$
$$\frac{\Theta(x+\delta)}{\Theta(x)} = 1 + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\delta + \ldots,$$

et nous en concluons l'expression

$$f(x) = e^{\lambda_0(x - i\mathrm{K}')}\left(\frac{1}{\delta} + \mathrm{X} + \mathrm{X}_1\delta + \ldots\right),$$

où le terme indépendant de δ, qui sera seul à considérer, est

$$\mathrm{X} = \left(\lambda_1 + s_0 - \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right)(x - i\mathrm{K}') + \frac{i\pi}{2\mathrm{K}} + \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}.$$

Elle fait voir que les formules, pour $n = 2\nu$ et $n = 2\nu - 1$,

$$\mathrm{F}(x) = -\frac{\mathrm{D}_x^{2\nu-1} f(x)}{\Gamma(2\nu)} - h_1\frac{\mathrm{D}^{2\nu-3} f(x)}{\Gamma(2\nu-2)} - \ldots - h_{\nu-1}\,\mathrm{D}_x f(x),$$

puis

$$\mathrm{F}(x) = +\frac{\mathrm{D}_x^{2\nu-2} f(x)}{\Gamma(2\nu-1)} + h_1\frac{\mathrm{D}^{2\nu-4} f(x)}{\Gamma(2\nu-3)} + \ldots + h_{\nu-1}\quad f(x),$$

contiennent chacune un terme en $\frac{1}{\delta}$, qui est, pour la première,

$$-e^{\lambda_0(x-i\mathrm{K}')}\left[\frac{\lambda_0^{2\nu-1}}{\Gamma(2\nu)} + h_1\frac{\lambda_0^{2\nu-3}}{\Gamma(2\nu-2)} + \ldots + h_{\nu-1}\lambda_0\right],$$

et, dans la seconde,

$$e^{\lambda_0(x-i\mathrm{K}')}\left[\frac{\lambda_0^{2\nu-2}}{\Gamma(2\nu-1)} + h_1\frac{\lambda_0^{2\nu-4}}{\Gamma(2\nu-3)} + \ldots + h_{\nu-1}\right].$$

Il est donc nécessaire, afin d'obtenir des quantités finies en faisant $\delta = 0$, que λ_0 satisfasse à ces équations

$$\frac{\lambda_0^{2\nu-1}}{\Gamma(2\nu)} + h_1\frac{\lambda_0^{2\nu-3}}{\Gamma(2\nu-2)} + \ldots + h_{\nu-1}\lambda_0 = 0,$$
$$\frac{\lambda_0^{2\nu-2}}{\Gamma(2\nu-1)} + h_1\frac{\lambda_0^{2\nu-4}}{\Gamma(2\nu-3)} + \ldots + h_{\nu-1}\quad = 0.$$

Cela étant, les expressions de $\mathrm{F}(x)$ se transforment de la manière suivante.

Soit, en général,

$$f(x) = e^{\lambda x}\mathrm{X},$$

en désignant par λ et X une constante et une fonction quelconques. On voit aisément que la quantité

$$\mathrm{A}\,\mathrm{D}_x^n f(x) + \mathrm{A}_1\,\mathrm{D}_x^{n-1} f(x) + \ldots + \mathrm{A}_n f(x),$$

si l'on admet la relation

$$\mathrm{A}\lambda^n + \mathrm{A}_1\lambda^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_n = 0,$$

s'exprime, au moyen de la nouvelle fonction

$$f_1(x) = e^{\lambda x}\,\mathrm{D}_x \mathrm{X},$$

par la formule

$$\begin{aligned}\mathrm{A}\mathrm{D}_x^{n-1} f_1(x) + (\mathrm{A}\lambda + \mathrm{A}_1)\mathrm{D}_x^{n-2} f_1(x) + \ldots \\ + (\mathrm{A}\lambda^{n-1} + \mathrm{A}_1\lambda^{n-2} + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}) f_1(x).\end{aligned}$$

Dans le cas auquel nous avons été conduit, on tire immédiatement de la valeur de X l'expression

$$f_1(x) = e^{\lambda_0(x - i\mathrm{K}')}(\lambda_1 + s_0 - k^2 \operatorname{sn}^2 x),$$

et nous obtenons par conséquent pour $\mathrm{F}(x)$ le produit, par l'exponentielle $e^{\lambda_0 x}$, d'une fonction doublement périodique de première espèce, composée linéairement avec les dérivées de $\operatorname{sn}^2 x$. L'analyse précédente, en établissant l'existence de ce genre de solutions de l'équation différentielle, les rattache aux valeurs de h qui rendent à la fois infinies les constantes λ et $\operatorname{sn}\omega$; on voit aussi que, dans le cas particulier où λ_0 est nul, elles donnent bien les fonctions que je me suis proposé de déduire de la solution générale. Mais revenons à la première forme qui a été obtenue au moyen de la fonction

$$f(x) = e^{\lambda_0(x - i\mathrm{K}')}\left(\frac{1}{\delta} + \mathrm{X} + \mathrm{X}_1\delta + \ldots\right).$$

Le terme $\dfrac{e^{\lambda_0(x - i\mathrm{K}')}}{\delta}$ disparaissant, comme nous l'avons vu dans l'expression de $\mathrm{F}(x)$, il est permis de prendre plus simplement à la limite, pour $\delta = 0$,

$$f(x) = e^{\lambda_0(x - i\mathrm{K}')}\,\mathrm{X}.$$

Cette fonction joue donc le rôle d'élément simple; il est facile, lorsqu'on fait $x = i\mathrm{K}' + \varepsilon$, d'obtenir son développement et d'avoir ainsi les quantités qui remplacent, dans le cas présent, les coefficients désignés en général par H_0, H_1, etc. Nous avons en effet, pour $x = i\mathrm{K}' + \varepsilon$,

$$\mathrm{X} = \left(\lambda_1 + s_0 - \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right)\varepsilon + \frac{\mathrm{H}'(\varepsilon)}{\mathrm{H}(\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon} + \lambda_1\varepsilon - \frac{s_1\varepsilon^3}{3} - \frac{s_2\varepsilon^5}{5} - \ldots.$$

Multiplions par $e^{\lambda_0\varepsilon}$ les deux membres, et soit

$$e^{\lambda_0\varepsilon}\mathrm{X} = \frac{1}{2} + \mathrm{S}_0 + \mathrm{S}_1\varepsilon + \ldots + \mathrm{S}_i\varepsilon^i;$$

nous trouverons

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_0 &= \lambda_0,\\
\mathrm{S}_1 &= \frac{\lambda_0^2}{1.2} + \lambda_1,\\
\mathrm{S}_2 &= \frac{\lambda_0^3}{1.2.3} + \lambda_1\lambda_0,\\
\mathrm{S}_3 &= \frac{\lambda_0^4}{1.2.3.4} + \lambda_1\frac{\lambda_0^2}{1.2} - \frac{s_1}{3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

S_i étant, en général, un polynome du degré $i+1$ en λ_0, où n'entrent que des puissances impaires ou des puissances paires, suivant que l'indice est pair ou impair. Les conditions données au paragraphe XLV (p. 392) conduisent donc, dans les deux cas de $n = 2\nu$, $n = 2\nu - 1$, en y joignant l'équation en λ_0 précédemment trouvée, à ces trois relations

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_0^{2\nu-1}}{\Gamma(2\nu)} + h_1\frac{\lambda_0^{2\nu-3}}{\Gamma(2\nu-2)} + \ldots + h_{\nu-1}\lambda_0 &= 0,\\
\mathrm{S}_{2\nu-1} + h_1\mathrm{S}_{2\nu-3} + h_2\mathrm{S}_{2\nu-5} + \ldots + 2h_{\nu-1}\mathrm{S}_1 + h_\nu &= 0,\\
2\nu\mathrm{S}_{2\nu} + (2\nu-2)h_1\mathrm{S}_{2\nu-2} + (2\nu-4)h_2\mathrm{S}_{2\nu-4} + \ldots + 2h_{\nu-1}\mathrm{S}_2 &= 0,
\end{aligned}$$

lorsque l'on suppose $n = 2\nu$, puis

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_0^{2\nu-2}}{\Gamma(2\nu-1)} + h_1\frac{\lambda_0^{2\nu-4}}{\Gamma(2\nu-3)} + \ldots + h_{\nu-1} &= 0,\\
\mathrm{S}_{2\nu-2} + h_1\mathrm{S}_{2\nu-4} + h_2\mathrm{S}_{2\nu-6} + \ldots + h_{\nu-1}\mathrm{S}_0 &= 0,\\
(2\nu-1)\mathrm{S}_{2\nu-1} + (2\nu-3)h_1\mathrm{S}_{2\nu-3} + \ldots + h_{\nu-1}\mathrm{S}_1 - h_\nu &= 0
\end{aligned}$$

pour $n = 2\nu - 1$. Elles donnent le moyen d'obtenir directement, et sans supposer la connaissance de la solution générale, les trois quantités λ_0, λ_1 et h. Elles montrent aussi qu'on a en particulier la valeur $\lambda_0 = 0$, à laquelle correspondent les solutions de Lamé. Effectivement, lorsque λ_0 est supposé nul, on obtient

$$\mathrm{S}_{2i} = 0, \qquad \mathrm{S}_1 = \lambda_1, \qquad \mathrm{S}_{2i+1} = -\frac{s_i}{2i+1};$$

cela étant, dans le cas de $n = 2\nu$, la première et la troisième équation sont satisfaites d'elles-mêmes; la deuxième, devenant

$$-\frac{s_{\nu-1}}{2\nu-1} - h_1\frac{s_{\nu-2}}{2\nu-3} - h_2\frac{s_{\nu-3}}{2\nu-5} + \ldots + h_{\nu+1}\lambda_1 + h_\nu = 0,$$

ne détermine que λ_1. Il est donc nécessaire de recourir à l'une des relations en nombre infini qui ont été données au paragraphe XLVI (p. 394), sous ces formes,

$$\mathfrak{H}_i = 0, \qquad \mathfrak{H}_{2i} = h_{i+\nu}, \qquad \mathfrak{H}_{2i+2\nu+1} = C h_i.$$

» La plus simple est

$$\mathfrak{H}_2 = h_{\nu+1},$$

ou bien

$$\begin{aligned} -\nu(2\nu+1)H_{2\nu+1} + (\nu-1)(2\nu-1)h_1 H_{2\nu-1} \\ + (\nu-2)(2\nu-3)h_2 H_{2\nu-3} + \ldots + 3h_{\nu-1}H_3 + h_{\nu+1} = 0, \end{aligned}$$

et nous en tirons immédiatement

$$-\nu s_\nu - (\nu-1)h_1 s_{\nu-1} - (\nu-2)h_2 s_{\nu-2} - \ldots - h_{\nu-1}s_1 + h_{\nu+1} = 0,$$

ce qui est l'équation en h précédemment trouvée.

» En dernier lieu et pour le cas de $n = 2\nu - 1$, nos trois relations se trouvent vérifiées si l'on fait $h_{\nu-1} = 0$; on retrouve donc encore de cette manière le résultat auquel nous étions précédemment parvenu par une méthode toute différente. »

ÉTUDES DE M. SYLVESTER

SUR LA

THÉORIE ALGÉBRIQUE DES FORMES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences,
t. LXXXIV, 1877, p. 974.

On doit à M. Paul Gordan, professeur à l'Université d'Erlangen, la belle et importante découverte, qu'à l'égard des formes à deux indéterminées, les invariants et covariants, qui sont, comme on sait, en nombre illimité, peuvent être exprimés tous par les fonctions rationnelles et entières d'un nombre essentiellement fini et limité d'invariants et covariants fondamentaux, nommés, pour ce motif, *Grundformen*. Cette proposition capitale vient d'être étendue par M. Sylvester aux formes les plus générales, quels que soient leur degré et le nombre de leurs indéterminées, et je me fais un devoir de reproduire les termes mêmes dans lesquels l'illustre géomètre m'a chargé d'annoncer sa belle découverte.

Baltimore. — Depuis mon dernier envoi, avertissez l'Académie que j'ai résolu le problème de trouver les *Grundformen* complètes pour des *quantités* quelconques avec n variables.

EXTRAIT

D'UNE

LETTRE DE M. CH. HERMITE A M. L. FUCHS.

Journal de Crelle, t. 82, 1877, p. 343.

Soit

$$Z(x) = \frac{H'(x)}{H(x)};$$

on peut à l'aide de cette fonction représenter toute fonction uniforme, ayant pour périodes $2K$ et $2iK'$, par une formule entièrement analogue à celle d'une fraction rationnelle décomposée en fractions simples, à savoir

$$\begin{aligned} F(x) = \text{const.} &+ AZ(x-a) + A_1 D_x Z(x-a) + A_2 D_x^2 Z(x-a) + \ldots \\ &+ BZ(x-b) + B_1 D_x Z(x-b) + B_2 D_x^2 Z(x-b) + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ LZ(x-l) + L_1 D_x Z(x-l) + L_2 D_x^2 Z(x-l) + \ldots, \end{aligned}$$

où les constantes A, B, ..., L sont essentiellement assujetties à remplir la condition

$$A + B + \ldots + L = 0.$$

C'est cette expression, dont j'ai fait usage dans bien des circonstances, que je vais employer à la recherche des coordonnées d'une cubique plane en fonction explicite d'un paramètre. Je pose à cet effet

$$\begin{aligned} x &= x_0 + A\,Z(t-a) + B\,Z(t-b) + C\,Z(t-c), \\ y &= y_0 + A'Z(t-a) + B'Z(t-b) + C'Z(t-c), \end{aligned}$$

avec les conditions

$$A + B + C = 0, \qquad A' + B' + C' = 0,$$

de sorte que les coordonnées x et y se trouveront des fonctions linéaires des deux différences : $Z(t-a) - Z(t-c)$ et $Z(t-b) - Z(t-c)$. Cela étant, je remarque que x^2, xy, y^2 étant des fonctions doublement périodiques uniformes aux périodes $2K$ et $2iK'$, s'expriment linéairement, d'une part par ces deux différences, et de l'autre par les dérivées $D_t Z(t-a)$, $D_t Z(t-b)$, $D_t Z(t-c)$. Et pareillement, si l'on considère x^3, x^2y, xy^2, y^3, il résulte de la formule générale qu'on aura seulement les dérivées secondes $D_t^2 Z(t-a)$, $D_t^2 Z(t-b)$, $D_t^2 Z(t-c)$, à joindre aux dérivées premières et aux deux différences. Ce sont donc huit fonctions en tout, entrant linéairement dans les neuf fonctions doublement périodiques, que je viens de former, et la relation du troisième degré entre les coordonnées x et y en est la conséquence immédiate. J'ajoute que ces coordonnées renfermant, en premier lieu, les constantes a, b, c, ou seulement $a-c$, $b-c$, car on peut mettre $t-c$ au lieu de t, puis les coefficients A, B, A', B', et enfin x_0 et y_0, contiendront huit arbitraires, de sorte qu'en y joignant le module de la transcendante, on aura bien le nombre maximum égal à neuf, des indéterminées d'une cubique plane quelconque.

Soit maintenant

$$\begin{aligned} x &= x_0 + A\,Z(t-a) + B\,Z(t-b) + C\,Z(t-c) + D\,Z(t-d), \\ y &= y_0 + A'Z(t-a) + B'Z(t-b) + C'Z(t-c) + D'Z(t-d), \\ z &= z_0 + A''Z(t-a) + B''Z(t-b) + C''Z(t-c) + D''Z(t-d), \end{aligned}$$

avec les conditions

$$\Sigma A = 0, \qquad \Sigma A' = 0, \qquad \Sigma A'' = 0.$$

Ces trois quantités d'une part, et celles-ci de l'autre, à savoir : x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz, s'exprimeront en fonctions linéaires de $Z(t-a) - Z(t-d)$, $Z(t-b) - Z(t-d)$, $Z(t-c) - Z(t-d)$, et des quatre dérivées $D_t Z(t-a)$, etc. On a par conséquent sept fonctions, dans l'expression de neuf quantités, qui dès lors sont liées par deux équations, de sorte que les quantités considérées représentent bien l'intersection de deux surfaces du second ordre, et comme ci-dessus, on voit qu'elles contiennent le nombre d'arbitraires maximum que comporte une telle courbe, lequel est égal à seize.

Je reviens à la Géométrie plane pour considérer les courbes de Clebsch, dont les coordonnées sont des fonctions elliptiques d'un paramètre, que je prends sous la forme suivante :

$$x = x_0 + \mathrm{A}\,\mathrm{Z}(t-a) + \mathrm{B}\,\mathrm{Z}(t-b) + \ldots + \mathrm{L}\,\mathrm{Z}(t-l),$$
$$y = y_0 + \mathrm{A}'\mathrm{Z}(t-a) + \mathrm{B}'\mathrm{Z}(t-b) + \ldots + \mathrm{L}'\mathrm{Z}(t-l),$$

en supposant toujours

$$\Sigma\mathrm{A} = 0, \qquad \Sigma\mathrm{A}' = 0.$$

Le succès de la méthode précédente dans le cas de la cubique m'a fait tenter d'établir par la même voie que x et y satisfont à une équation algébrique d'un degré égal au nombre des transcendantes : $\mathrm{Z}(t-a)$, $\mathrm{Z}(t-b)$, ..., $\mathrm{Z}(t-l)$. Mais les choses se passent alors moins simplement. Considérez en effet les diverses fonctions homogènes de x et y, jusqu'au degré μ, dont le nombre sera $2+3+\ldots+\mu+1 = \frac{1}{2}(\mu^2+3\mu)$, et soit m le nombre des transcendantes. Toutes ces fonctions doublement périodiques s'expriment linéairement par les différences : $\mathrm{Z}(t-a)-\mathrm{Z}(t-l)$, $\mathrm{Z}(t-b)-\mathrm{Z}(t-l)$, ..., en nombre $m-1$, puis par les dérivées jusqu'à l'ordre $\mu-1$, des quantités $\mathrm{Z}(t-a)$, c'est-à-dire en tout par $m-1+m(\mu-1)$ fonctions. Afin donc de pouvoir effectuer l'élimination de ces fonctions, je pose la condition

$$\frac{1}{2}(\mu^2+3\mu) = m + m(\mu-1) = m\mu$$

qui me donne $\mu = 2m-3$, de sorte que je parviens par cette voie à une courbe d'ordre $2m-3$, au lieu d'obtenir l'ordre m. Le procédé qui réussit dans le cas de $m=3$, donne donc en général un degré trop élevé, et j'ai dû complètement y renoncer, comme méthode d'élimination. Mais l'existence, au moins, d'une équation de ce degré m se prouve très facilement. Considérez pour cela une droite arbitraire $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, dont les points de rencontre avec la courbe s'obtiennent en déterminant t par l'équation

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma + (\mathrm{A}\alpha + \mathrm{A}'\beta)\mathrm{Z}(t-a) + (\mathrm{B}\alpha + \mathrm{B}'\beta)\mathrm{Z}(t-b) + \ldots = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une fonction double-

ment périodique qui devient infinie pour les m valeurs

$$t = a, b, c, \ldots, l.$$

Elle ne peut donc s'annuler, d'après un théorème connu de la théorie des fonctions elliptiques, que pour m valeurs de t, dans l'intérieur du rectangle des périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$, et la courbe ne pouvant être coupée qu'en m points par une droite quelconque, est bien d'ordre m.

Ce même raisonnement appliqué à la polaire, dont les coordonnées sont

$$\mathrm{X} = \frac{-y'}{xy'-x'y}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{x'}{xy'-x'y},$$

en détermine le degré.

Effectivement les intersections de cette seconde courbe avec la droite $\alpha\mathrm{X} + \beta\mathrm{Y} + \gamma = 0$ sont données par l'élément

$$-\alpha y' + \beta x' + \gamma(xy'-yx') = 0,$$

et vous voyez, que son premier membre est une fonction doublement périodique, admettant les infinis doubles $t = a, b, \ldots, l$, de sorte qu'on a $2m$ racines, et par suite $2m$ points d'intersection. Connaissant l'ordre de la polaire des courbes de Clebsch, $\delta = 2m$, le nombre d des points doubles de ces courbes en résulte immédiatement, comme conséquence de la relation $2d + \delta = m(m-1)$ donnée dans mon *Cours d'Analyse* (p. 385); on trouve ainsi par une voie facile la proposition fondamentale $d = \frac{1}{2}m(m-3)$ démontrée par Clebsch (t. 63 de ce *Journal*, p. 189).

Paris, 29 juin 1876.

P.-S. — La détermination des points d'inflexion de la cubique plane, et des points stationnaires de la quadrique dans l'espace, dépendent des équations suivantes :

$$\begin{vmatrix} \mathrm{Z}'(t-a)-\mathrm{Z}'(t-c) & \mathrm{Z}'(t-b)-\mathrm{Z}'(t-c) \\ \mathrm{Z}''(t-a)-\mathrm{Z}''(t-c) & \mathrm{Z}''(t-b)-\mathrm{Z}''(t-c) \end{vmatrix} = 0$$

et

$$\begin{vmatrix} \mathrm{Z}'(t-a)-\mathrm{Z}'(t-d) & \mathrm{Z}'(t-b)-\mathrm{Z}'(t-d) & \mathrm{Z}'(t-c)-\mathrm{Z}'(t-d) \\ \mathrm{Z}''(t-a)-\mathrm{Z}''(t-d) & \mathrm{Z}''(t-b)-\mathrm{Z}''(t-d) & \mathrm{Z}''(t-c)-\mathrm{Z}''(t-d) \\ \mathrm{Z}'''(t-a)-\mathrm{Z}'''(t-d) & \mathrm{Z}'''(t-b)-\mathrm{Z}'''(t-d) & \mathrm{Z}'''(t-c)-\mathrm{Z}'''(t-d) \end{vmatrix} = 0.$$

Je me suis proposé de calculer les déterminants qui forment les premiers membres, et j'ai trouvé les expressions suivantes. Soit pour abréger

$$\begin{aligned}\Phi(a, b, c) &= \mathrm{H}(a-b)\,\mathrm{H}(a-c)\,\mathrm{H}(b-c),\\ \Phi(a, b, c, d) &= \mathrm{H}(a-b)\,\mathrm{H}(a-c)\,\mathrm{H}(a-d)\\ &\qquad \mathrm{H}(b-c)\,\mathrm{H}(b-d)\\ &\qquad\qquad \mathrm{H}(c-d),\end{aligned}$$

le premier déterminant est

$$\mathrm{H}'(0)^5 \frac{\Phi(a, b, c)\,\mathrm{H}(3t-a-b-c)}{[\mathrm{H}(t-a)\,\mathrm{H}(t-b)\,\mathrm{H}(t-c)]^3},$$

et le second

$$\mathrm{H}'(0)^9 \frac{\Phi(a, b, c, d)\,\mathrm{H}(4t-a-b-c-d)}{[\mathrm{H}(t-a)\,\mathrm{H}(t-b)\,\mathrm{H}(t-c)\,\mathrm{H}(t-d)]^4}.$$

Les beaux résultats découverts par Clebsch sont la conséquence de ces expressions qui m'ont amené à considérer, en général, le déterminant à $n-1$ colonnes

$$\begin{vmatrix} \mathrm{Z}'(t-a)-\mathrm{Z}'(t-l) & \mathrm{Z}'(t-b)-\mathrm{Z}'(t-l) & \ldots & \mathrm{Z}'(t-k)-\mathrm{Z}'(t-l)\\ \mathrm{Z}''(t-a)-\mathrm{Z}''(t-l) & \mathrm{Z}''(t-b)-\mathrm{Z}''(t-l) & \ldots & \mathrm{Z}''(t-k)-\mathrm{Z}''(t-l)\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\\ \mathrm{Z}^{n-1}(t-a)-\mathrm{Z}^{n-1}(t-l) & \mathrm{Z}^{n-1}(t-b)-\mathrm{Z}^{n-1}(t-l) & \ldots & \mathrm{Z}^{n-1}(t-k)-\mathrm{Z}^{n-1}(t-l) \end{vmatrix}$$

où $a, b, \ldots, k, l$ sont n constantes. Si l'on pose comme précédemment

$$\begin{aligned}\Phi(a, b, \ldots, k, l) = \mathrm{H}(a-b)\,&\mathrm{H}(a-c)\ldots\mathrm{H}(a-l)\\ &\mathrm{H}(b-c)\ldots\mathrm{H}(b-l)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\qquad\mathrm{H}(k-l),\end{aligned}$$

on trouve qu'il a pour valeur

$$\mu\,\mathrm{H}'(0)^{\frac{1}{2}(n-1)(n+2)} \frac{\Phi(a, b, \ldots, k, l)\,\mathrm{H}(nt-a-b-\ldots-l)}{[\mathrm{H}(t-a)\,\mathrm{H}(t-b)\ldots\mathrm{H}(t-l)]^n},$$

μ désignant un facteur numérique.

Paris, 29 décembre 1876.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. CH. HERMITE A M. BORCHARDT

SUR LA FORMULE DE MACLAURIN.

Journal de Crelle, t. 84, 1878, p. 64.

Les propriétés de la fonction de Jacob Bernouilli établies par M. Malmsten dans son beau Mémoire sur la formule

$$hu'_x = \Delta u_x - \frac{1}{2} h\,\Delta u'_x + \ldots$$

(t. 35 de ce *Journal*, p. 55) peuvent être obtenues par une autre méthode à laquelle m'ont conduit les recherches que vous avez publiées, t. 79, p. 339. Reprenant à cet effet l'équation de définition, à savoir

$$\frac{e^{\lambda x}-1}{e^{\lambda}-1} = \mathrm{S}(x)_0 + \frac{\lambda}{1}\mathrm{S}(x)_1 + \frac{\lambda^2}{1.2}\mathrm{S}(x)_2 + \ldots,$$

de sorte que l'on ait pour x entier

$$\mathrm{S}(x)_n = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (x-1)^n,$$

je remplacerai d'abord λ par $i\lambda$, ce qui donnera

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\lambda x}-1}{e^{i\lambda}-1} &= \frac{e^{\frac{1}{2}i\lambda x}\left(e^{\frac{1}{2}i\lambda x}-e^{-\frac{1}{2}i\lambda x}\right)}{e^{\frac{1}{2}i\lambda}\left(e^{\frac{1}{2}i\lambda}-e^{-\frac{1}{2}i\lambda}\right)} = \frac{e^{\frac{1}{2}i\lambda(x-1)}\sin\frac{1}{2}\lambda x}{\sin\frac{1}{2}\lambda}\\ &= \frac{\sin\frac{1}{2}\lambda x\cos\frac{1}{2}\lambda(x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda} + i\frac{\sin\frac{1}{2}\lambda x\sin\frac{1}{2}\lambda(x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda},\end{aligned}$$

et l'on en conclura ces deux égalités, où je fais pour abréger $(n) = 1.2.3\ldots n$:

$$(1)\qquad \frac{\sin\frac{1}{2}\lambda x \sin\frac{1}{2}\lambda(x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda} = \lambda\,S(x)_1 - \frac{\lambda^3}{(3)}S(x)_3 + \frac{\lambda^5}{(5)}S(x)_5 - \ldots,$$

$$(2)\qquad \frac{\sin\frac{1}{2}\lambda x \cos\frac{1}{2}\lambda(x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda} = S(x)_0 - \frac{\lambda^2}{(2)}S(x)_2 + \frac{\lambda^4}{(4)}S(x)_4 - \ldots.$$

Ceci posé, la formule suivante dans laquelle B_1, B_2, etc., désignent suivant l'usage les nombres de Bernouilli

$$\log\sin\frac{1}{2}x = \log\frac{1}{2}x - \frac{B_1}{(2)}\frac{x^2}{2} - \frac{B_2}{(4)}\frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{B_n}{(2n)}\frac{x^{2n}}{2n} - \ldots$$

conduit à une expression analytique des polynomes $S(x)_n$, qui met immédiatement en évidence les propriétés découvertes par M. Malmsten. En considérant d'abord la première de nos deux relations, on en déduit en effet

$$\begin{aligned}\log\frac{\sin\frac{1}{2}\lambda x \sin\frac{1}{2}\lambda(x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda} = \log\frac{1}{2}\lambda x(x-1) &+ [1-x^2-(1-x)^2]\,\frac{B_1}{(2)}\frac{\lambda^2}{2}\\ &+ [1-x^4-(1-x)^4]\,\frac{B_2}{(4)}\frac{\lambda^4}{4}\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ [1-x^{2n}-(1-x)^{2n}]\,\frac{B_n}{(2n)}\frac{\lambda^{2n}}{2n}\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Posant donc

$$X_n = 1 - x^{2n} - (1-x)^{2n}$$

et observant que

$$X_1 = -2x(x-1),$$

nous avons cette formule

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\lambda x \sin\frac{1}{2}\lambda(x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda} = -\frac{\lambda}{4}X_1\,e^{\frac{B_1 X_1}{(2)}\frac{\lambda^2}{2} + \frac{B_2 X_2}{(4)}\frac{\lambda^4}{4} + \ldots}$$

dont voici les conséquences. Je remarque que le développement de l'exponentielle, suivant les puissances de λ, donnera pour le coefficient d'une puissance quelconque de cette indéterminée, une fonction rationnelle et entière des quantités $X_1, X_2, \ldots, X_n$, dont les coefficients seront tous positifs. On trouvera successivement, en effet,

$$\begin{aligned} S(x)_1 &= -\frac{1}{4}X_1,\\ S(x)_3 &= \frac{1}{16}X_1^2,\\ S(x)_5 &= -\frac{1}{192}(2X_1X_2 + 5X_1^3),\\ S(x)_7 &= \frac{1}{2304}(16X_1X_3 + 42X_1^2X_2 + 35X_1^4),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Or X_n qui s'annule pour $x = 0$ et $x = 1$, n'admet dans l'intervalle de ces deux racines, qu'un seul maximum, correspondant à la valeur $x = \frac{1}{2}$, comme le montre la dérivée

$$D_x X_n = -2nx^{2n-1} + 2n(1-x)^{2n-1}.$$

Cette valeur ne dépendant point de n, fournit par conséquent le maximum de toute fonction rationnelle entière et à coefficients positifs des quantités X_n, et il est ainsi prouvé que le polynome $(-1)^{n-1}S(x)_{2n+1}$, est positif quand la variable croît de $x = 0$ à $x = 1$, et acquiert sa valeur la plus grande pour $x = \frac{1}{2}$.

Je passe à l'équation (2) qui concerne les polynomes d'indices pairs, et en écrivant le premier membre sous la forme $\frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda}$, je développerai le logarithme de la quantité $\frac{\sin\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda}$. On sera ainsi amené à employer l'expression

$$X_n^0 = 1 - (2x-1)^{2n},$$

qui permettra d'écrire

$$\log\frac{\sin\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda} = \log(2x-1) + \frac{B_1X_1^0}{(2)}\frac{\lambda^2}{2} + \frac{B_2X_2^0}{(4)}\frac{\lambda^4}{4} + \ldots.$$

et par suite

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda} = (2x-1)\,e^{\frac{B_1X_1^0}{(2)}\frac{\lambda^2}{2} + \frac{B_2X_2^0}{(4)}\frac{\lambda^4}{4} + \ldots}.$$

Les polynomes X_n^0 possèdent la même propriété que les précédents de s'annuler pour $x=0$, $x=1$, et de n'admettre dans l'intervalle qu'un seul maximum correspondant à $x=\frac{1}{2}$. Il en est donc aussi de même de tous les coefficients des puissances de λ dans le développement de l'exponentielle, et en exceptant seulement $S(x)_0$, nous avons cette seconde proposition que les polynomes $\frac{(-1)^n S(x)_{2n}}{2x-1}$ sont positifs de $x=0$ à $x=1$ avec un seul maximum dans l'intervalle pour $x=\frac{1}{2}$.

La facilité avec laquelle les propriétés des polynomes $S(x)_n$ résultent de la forme trigonométrique de leurs fonctions génératrices conduit à employer ces mêmes fonctions pour établir la formule de Maclaurin. A cet effet je partirai de la formule élémentaire

$$\int U^{2n} V\,dx = U^{2n-1}V - U^{2n-2}V' + \ldots - UV^{2n-1} + \int UV^{2n}\,dx,$$

où U et V sont deux fonctions quelconques de la variable x, dont les dérivées d'ordre k sont désignées par U^k et V^k. Posons pour abréger

$$\Phi(x) = U^{2n-1}V + U^{2n-3}V'' + \ldots + U'V^{2n-2},$$
$$\Psi(x) = U^{2n-2}V' + U^{2n-4}V''' + \ldots + U\,V^{2n-1},$$

ce qui donnera

$$\int U^{2n} V\,dx = \Phi(x) - \Psi(x) + \int UV^{2n}\,dx;$$

en laissant arbitraire la fonction V, je prendrai

$$U = \frac{\sin\frac{1}{2}\lambda x \sin\frac{1}{2}\lambda(x-1)}{\sin\frac{1}{2}\lambda} = S(x)_1 - \frac{\lambda^3}{1.2.3}S(x)_3 + \ldots$$

et il sera facile d'obtenir les expressions de $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$, si l'on met U sous la forme $\frac{\cos\frac{1}{2}\lambda - \cos\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{2\sin\frac{1}{2}\lambda}$. Ayant en effet

$$U^{2k} = (-1)^k \lambda^{2k} \frac{\cos\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{2\sin\frac{1}{2}\lambda},$$
$$U^{2k-1} = (-1)^k \lambda^{2k-1} \frac{\sin\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{2\sin\frac{1}{2}\lambda},$$

on trouvera

$$\Phi(x) = (-1)^n \frac{\sin\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{2\sin\frac{1}{2}\lambda}[\lambda^{2n-1}V - \lambda^{2n-3}V'' + \ldots - (-1)^n \lambda V^{2n-2}],$$
$$\Psi(x) = (-1)^{n-1} \frac{\cos\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{2\sin\frac{1}{2}\lambda}[\lambda^{2n-2}V' - \lambda^{2n-4}V''' + \ldots + (-1)^n \quad V^{2n-1}]$$
$$+ \frac{\cos\frac{1}{2}\lambda}{2\sin\frac{1}{2}\lambda} V^{2n-1}.$$

Maintenant désignons les valeurs de V^k pour $x=1$ et $x=0$, par V_1^k et V_0^k, de ce qui précède nous déduirons les formules

$$\Phi(1) - \Psi(0) = \frac{(-1)^n}{2} [\lambda^{2n-1}(V_1 + V_0) - \lambda^{2n-3}(V_1'' + V_0'') + \ldots],$$
$$\Psi(1) - \Psi(0) = \frac{(-1)^{n-1}\cos\frac{1}{2}\lambda}{2\sin\frac{1}{2}\lambda}[\lambda^{2n-2}(V_1' - V_0') - \lambda^{2n-4}(V_1''' - V_0''') + \ldots]$$
$$+ \frac{\cos\frac{1}{2}\lambda}{2\sin\frac{1}{2}\lambda}(V_1^{2n-1} - V_0^{2n-1}),$$

dont la première comme on voit renferme des sommes et la seconde des différences. Soit encore

$$\varphi(\lambda) = \lambda^{2n-2}(V_1 + V_0) - \lambda^{2n-2}(V_1'' + V_0'') + \ldots + (-1)^n \; \lambda(V_1^{2n-2} + V_0^{2n-2}),$$
$$\psi(\lambda) = \lambda^{2n-2}(V_1' - V_0') - \lambda^{2n-4}(V_1''' - V_0''') + \ldots + (-1)^n \lambda^2 (V_1^{2n-3} - V_0^{2n-3});$$

en remarquant que le terme indépendant de λ disparaît dans la seconde formule, nous pouvons écrire

$$\Phi(1) - \Phi(0) = \frac{(-1)^n}{2} \varphi(\lambda),$$
$$\Psi(1) - \Psi(0) = \frac{(-1)^{n-1}\cot\frac{1}{2}\lambda}{2}\psi(\lambda),$$

et l'on en conclura, en prenant pour limites des intégrales zéro et l'unité, la relation suivante :

$$(-1)^n \int_0^1 \lambda^{2n} \frac{\cos\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{2\sin\frac{1}{2}\lambda} V\,dx$$
$$= \frac{(-1)^n}{2}\varphi(\lambda) - \frac{(-1)^{n-1}\cot\frac{1}{2}\lambda}{2}\psi(\lambda) + \int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{2}\lambda - \cos\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{2\sin\frac{1}{2}\lambda} V^{2n}\,dx,$$

ou, plus simplement,

$$\int_0^1 \lambda^{2n} \frac{\cos\frac{1}{2}\lambda(2x-1)}{2\sin\frac{1}{2}\lambda} V\,dx = \frac{1}{2}\varphi(\lambda) + \frac{\cot\frac{1}{2}\lambda}{2}\psi(\lambda) + (-1)^n \int_0^1 UV^{2n}\,dx.$$

Elle donne parmi divers résultats la formule de Maclaurin que j'ai eue principalement en vue, et qui s'obtient, comme on va le voir, en égalant les termes en λ^{2n-1}. Posons en effet $V = f(x_0 + hx)$, d'où

$$V_1^k = h^k f^k(x_0 + h), \qquad V_0^k = h^k f^k(x_0);$$

le coefficient de λ^{2n-1}, dans la quantité $\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\lambda\psi(\lambda)$, s'obtient au moyen de la série

$$\frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{\lambda} - \frac{B_1\lambda}{(2)} - \frac{B_2\lambda^3}{(4)} - \frac{B_3\lambda^5}{(6)} - \ldots,$$

sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &-\frac{B_1 h}{(2)}[f'(x_0+h) - f'(x_0)] + \frac{B_2 h^3}{(4)}[f'''(x_0+h) - f'''(x_0)] - \ldots \\ &+ (-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}h^{2n-3}}{(2n-2)}[f^{2n-3}(x_0+h) - f^{2n-3}(x_0)]. \end{aligned}$$

D'ailleurs, dans $\varphi(\lambda)$, le coefficient du même terme est simplement

$$V_1 + V_0 = f(x_0 + h) + f(x_0);$$

dans la fonction

$$U = \lambda S(x)_1 - \frac{\lambda^3}{(3)}S(x)_3 + \ldots,$$

son expression est $\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}S(x)_{2n-1}$; on est par conséquent amené à l'égalité

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x_0+hx)\,dx = {} & \frac{1}{2}[f(x_0+h) + f(x_0)] - \frac{B_1 h}{(2)}[f'(x_0+h) - f'(x_0)] \\ & + \frac{B_2 h^3}{(4)}[f'''(x_0+h) - f'''(x_0)] + \ldots \\ & + (-1)^{n-1}\frac{B_{n-1}h^{2n-3}}{(2n-2)}[f^{2n-3}(x_0+h) - f^{2n-3}(x_0)] \\ & - \frac{h^{2n}}{(2n-1)}\int_0^1 f^{2n}(x_0+hx)\,S(x)_{2n-1}\,dx \end{aligned}$$

qui se ramène à la forme habituelle, en remplaçant dans le premier membre l'intégrale $\int_0^1 f(x_0+hx)\,dx$ par $\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx$.

La proposition de M. Malmsten à l'égard de $S(x)_{2n-1}$ permet

ensuite d'écrire

$$\int_0^1 f^{2n}(x_0+hx)\,S(x)_{2n-1}\,dx = f^{2n}(x_0+\theta h)\int_0^1 S(x)_{2n-1}\,dx,$$

θ étant compris entre zéro et l'unité. Quant au facteur $\int_0^1 S(x)_{2n-1}\,dx$, il est donné par le coefficient de $\frac{(-1)^{n-1}\lambda^{2n-1}}{(2n-1)}$, dans le développement de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{2}\lambda - \cos(2x-1)\frac{1}{2}\lambda}{2\sin\frac{1}{2}\lambda}\,dx = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}\lambda,$$

d'où la valeur

$$\int_0^1 S(x)_{m-1}\,dx = (-1)^n B_n,$$

de sorte que la formule ordinaire s'obtiendra en remplaçant dans le premier membre l'intégrale

$$\int_0^1 f(x_0+hx)\,dx \qquad \text{par} \qquad \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx.$$

Paris, 7 avril 1877.