ferons

$$\zeta = a - (a-b)\mathrm{U}^2;$$

soient encore

$$k^2 = \frac{a-b}{a-c}, \qquad k'^2 = \frac{b-c}{a-c};$$

on aura

$$(\zeta - a)(\zeta - b)(\zeta - c) = -(a-b)^2(a-c)\,\mathrm{U}^2(1-\mathrm{U}^2)(1-k^2\mathrm{U}^2),$$

et de l'équation

$$\zeta'^2 = -2\beta(\zeta - a)(\zeta - b)(\zeta - b)$$

nous conclurons

$$\mathrm{U}'^2 = \frac{(a-c)\beta}{2}(1-\mathrm{U}^2)(1-k^2\mathrm{U}^2).$$

Faisons donc $n = \sqrt{\frac{(a-c)\beta}{2}}$; puis, en désignant par $s_0$ une constante, $u = n(s - s_0)$, on aura

$$\mathrm{U} = \operatorname{sn} u, \qquad \zeta = a - (a-b)\operatorname{sn}^2 u,$$

et par conséquent

$$n(z - z_0) = \int_0^u \zeta\, du = \left[a - (a-c)\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right]u + (a-c)\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

$z_0$ étant la valeur arbitraire de $z$ pour $u = 0$.

Considérons, pour obtenir la valeur de $x + iy$, l'expression $\frac{\zeta' + i(\gamma\zeta + \alpha)}{2(\zeta - \delta)}$, qui en représente la dérivée logarithmique. C'est une fonction doublement périodique de la variable $u$, ayant pour pôles d'une part $u = i\mathrm{K}'$ et de l'autre les racines de l'équation $\zeta - \delta = 0$. Mais des deux solutions $u = \pm\omega$ qu'on en tire une seule est en effet un pôle, comme le montre la relation

$$\zeta'^2 + (\gamma\zeta + \alpha)^2 = 2\beta(\zeta - \delta)(1 - \zeta^2),$$

d'où l'on déduit

$$\zeta' = \pm i(\gamma\delta + \alpha),$$

en faisant $\zeta = \delta$. Il en résulte que, si nous prenons pour $u = \omega$ la valeur $\zeta' = +i(\gamma\delta + \alpha)$, on aura

$$\zeta' = -i(\gamma\delta + \alpha) \qquad \text{pour} \qquad u = -\omega,$$



la dérivée changeant de signe avec la variable. En même temps on voit que le résidu de la fonction qui correspond au pôle $u = \omega$ est $+n$; le résidu relatif à l'autre pôle $u = i\mathrm{K}'$ est donc $-n$, et, par la décomposition en éléments simples, nous obtenons

$$\frac{\zeta' + i(\gamma\zeta + \alpha)}{2(\zeta - \delta)} = n\left[\lambda - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + \frac{\mathrm{H}'(u-\omega)}{\mathrm{H}(u-\omega)}\right].$$

La constante $\lambda$ se détermine en supposant $u = 0$ ou $\zeta = a$, ce qui donne immédiatement

$$\lambda = \frac{in(a\gamma + \alpha)}{a - \delta} + \frac{\mathrm{H}'(\omega)}{\mathrm{H}(\omega)},$$

et l'expression cherchée se conclut de la relation

$$\mathrm{D}_s \log(x + iy) = n\,\mathrm{D}_u \log(x + iy) = n\left[\lambda - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + \frac{\mathrm{H}'(u-\omega)}{\mathrm{H}(u-\omega)}\right]$$

au moyen d'une fonction doublement périodique de seconde espèce

$$x + iy = (x_0 + iy_0)\frac{\Theta(0)\,\mathrm{H}(\omega - u)\,e^{\lambda u}}{\Theta(u)\,\mathrm{H}(\omega)}.$$

Dans cette formule, $x_0$ et $y_0$ désignent les valeurs que prennent $x$ et $y$ pour $u = 0$; elles sont liées par l'équation

$$\beta(x_0^2 + y_0^2) = 2(a - \delta)$$

et ne contiennent, par conséquent, qu'une seule indéterminée. En y joignant les constantes $z_0$, $s_0$ et $\delta$, on a donc quatre quantités arbitraires dans l'expression générale des coordonnées de l'élastique. A l'égard de $\delta$, nous avons vu que sa valeur doit rester comprise entre $b$ et $c$; de là résulte que $\operatorname{sn}^2\omega$, déterminé par la formule $\operatorname{sn}^2\omega = \frac{a-\delta}{a-b}$, a pour limites $1$ et $\frac{1}{k^2}$. On peut écrire par suite $\omega = \mathrm{K} + i\upsilon$, $\upsilon$ étant réel, et poser

$$x + iy = (x_0 + iy_0)\frac{\Theta(0)\,\mathrm{H}_1(i\upsilon - u)\,e^{\lambda u}}{\Theta(u)\,\mathrm{H}_1(i\upsilon)}.$$

Changeons $i$ en $-i$, ce qui change $\lambda$ en $-\lambda$; on aura

$$x - iy = (x_0 - iy_0)\frac{\Theta(0)\,\mathrm{H}_1(i\upsilon + u)\,e^{-\lambda u}}{\Theta(u)\,\mathrm{H}_1(i\upsilon)},$$

et ces relations, jointes à celle qui a été précédemment obtenue, à savoir

$$n(z-z_0)=\left[a-(a-c)\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right]u+(a-c)\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

donnent la solution complète de la question proposée.

## XXXVI.

Les expressions des rayons de courbure et de torsion, R et $r$, se calculent facilement, sans qu'il soit besoin d'employer les valeurs des coordonnées, et comme conséquence immédiate des équations différentielles

$$\begin{aligned}
y'z''-y''z' &= \alpha x'+\beta y,\\
z'x''-z''x' &= \alpha y'-\beta x,\\
x'y''-x''y' &= \alpha z'+\gamma.
\end{aligned}$$

On trouve, en effet, après les réductions qui s'offrent d'elles-mêmes,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{R}^2} &= (\alpha x'+\beta y)^2+(\alpha y'-\beta x)^2+(\alpha z'+\gamma)^2\\
&= 2\beta(\zeta-\delta)+\gamma^2-\alpha^2\\
&= 2\beta[a-\delta-(a-b)\operatorname{sn}^2 u]+\gamma^2-\alpha^2,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix} = \alpha\beta(\zeta-\delta)-\beta(\alpha\delta+\gamma)+\alpha(\gamma^2-\alpha^2),$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{r}=\frac{\alpha\beta(\zeta-\delta)-\beta(\alpha\delta+\gamma)+\alpha(\gamma^2-\alpha^2)}{2\beta(\zeta-\delta)+\gamma^2-\alpha^2}.$$

Cette expression du rayon de torsion conduit naturellement à envisager le cas particulier où elle devient indépendante de $\zeta$ et a la valeur constante $r=\frac{2}{\alpha}$. La condition à remplir à cet effet étant

$$2\beta(\alpha\delta+\gamma)-\alpha(\gamma^2-\alpha^2)=0,$$

je remarque que, en remplaçant l'indéterminée $\zeta$ par $-\frac{\gamma}{\alpha}$, dans l'égalité

$$2\beta(\zeta-\delta)(1-\zeta^2)-(\gamma\zeta+\alpha)^2=-2\beta(\zeta-a)(\zeta-b)(\zeta-c),$$



le résultat peut s'écrire ainsi

$$(\gamma^2-\alpha^2)[2\beta(\alpha\delta+\gamma)-\alpha(\gamma^2-\alpha^2)]=2\beta(\gamma+a\alpha)(\gamma+b\alpha)(\gamma+c\alpha),$$

par où l'on voit que l'une des racines $a$, $b$, $c$ est alors égale à $-\frac{\gamma}{\alpha}$. Mais notre condition donne

$$\delta+\frac{\alpha^2-\gamma^2}{2\beta}=-\frac{\gamma}{\alpha};$$

ainsi l'on doit poser

$$\delta+\frac{\alpha^2-\gamma^2}{2\beta}=a,\ b\ \text{ou}\ c,$$

et voici la conséquence remarquable qui résulte de là. Nous avons trouvé tout à l'heure

$$\frac{1}{\mathrm{R}^2}=2\beta[a-\delta-(a-b)\operatorname{sn}^2 u]+\gamma^2-\alpha^2,$$

ou plutôt

$$\frac{1}{\mathrm{R}^2}=2\beta\left(a-\delta-\frac{\alpha^2-\gamma^2}{2\beta}\right)-2\beta(a-b)\operatorname{sn}^2 u;$$

or cette expression montre que le premier cas, où l'on suppose

$$\delta+\frac{\alpha^2-\gamma^2}{2\beta}=a,$$

doit être rejeté, comme conduisant à une valeur négative pour $\mathrm{R}^2$. Mais les deux autres peuvent avoir lieu et donnent successivement, en employant la valeur du module $k^2=\frac{a-b}{a-c}$,

$$\frac{1}{\mathrm{R}^2}=2\beta(a-b)\operatorname{cn}^2 u,$$

$$\frac{1}{\mathrm{R}^2}=2\beta(a-c)\operatorname{dn}^2 u.$$

Le rayon de courbure devient donc, comme les coordonnées elles-mêmes, une fonction uniforme de l'arc, en même temps que le rayon de torsion prend une valeur constante. Ces circonstances remarquables me semblent appeler l'attention sur la courbe qui les présente; mais ce serait trop m'étendre d'essayer d'en suivre les conséquences, et je reviens à mon objet principal, en donnant une dernière remarque sur la formation des équations linéaires d'ordre quelconque dont les intégrales sont des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, unipolaires [1].

## XXXVII.

Soit, comme au paragraphe XXX (p. 347),

(p. 347)

$$f(u) = \frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(u+\omega)}{\mathrm{H}(u)\,\Theta(\omega)}\, e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u};$$

désignons par $f_i(u)$ ce que devient cette fonction quand on y remplace les quantités $\omega$, $\lambda$ par $\omega_i$, $\lambda_i$; nommons enfin $\mu_i$ et $\mu'_i$ ses multiplicateurs. Si l'on pose

$$y = \mathrm{C}_1 f_1(u) + \mathrm{C}_2 f_2(u) + \ldots + \mathrm{C}_n f_n(u),$$

l'équation différentielle linéaire d'ordre $n$, admettant cette expression analytique pour intégrale, se présente sous la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} y & f_1(u) & f_2(u) & \ldots & f_n(u) \\ y' & f'_u(u) & f'_2(u) & \ldots & f'_n(u) \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ y^n & f_1^n(u) & f_2^n(u) & \ldots & f_n^n(u) \end{vmatrix} = 0.$$

D'après cela, j'observe que, le déterminant étant mis sous la forme

$$\Phi_0(u)\,y^n + \Phi_1(u)\,y^{n-1} + \ldots + \Phi_n(u)\,y,$$

les coefficients $\Phi_i(u)$ sont des fonctions de seconde espèce, aux multiplicateurs $\mu_1\,\mu_2\ldots\mu_n$, $\mu'_1\,\mu'_2\ldots\mu'_n$, ayant le pôle $u=0$, avec l'ordre de multiplicité $n+1$, sauf le premier $\Phi_0(u)$, où l'ordre de multiplicité est $n$. C'est ce qu'on voit immédiatement en retranchant la seconde colonne du déterminant de celles qui suivent, attendu que les différences $f_2(u) - f_1(u)$, $f_3(u) - f_1(u)$, ..., ainsi que leurs dérivées, ne sont plus infinies pour $u=0$. Nous pouvons donc poser, comme je l'ai fait voir ailleurs (*Sur l'intégration de l'équation différentielle de Lamé*, dans le *Journal de M. Borchardt,* t. LXXXIX, p. 10),

[1] On doit à M. de Saint-Venant un travail important sur les flexions considérables des verges élastiques, que l'éminent géomètre a publié dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville (t. IX, 1844), et auquel je dois renvoyer; je citerai aussi, sur la même question, un Mémoire récemment publié par M. Adolphe Steen, sous le titre : *De elastike Kurve, og dens anvendelse i böjningstheorien,* Copenhague, 1879.



$$\Phi_0(u) = \frac{\mathrm{G}_0\,\mathrm{H}(u-a_1)\,\mathrm{H}(u-a_2)\ldots\mathrm{H}(u-a_n)\,e^{g_0 u}}{\mathrm{H}^n(u)},$$

les quantités $\mathrm{G}_0$, $g_0$, $a_i$ étant des constantes, puis d'une manière semblable pour les coefficients suivants,

$$\Phi_i(u) = \frac{\mathrm{G}_i\,\mathrm{H}(u-a_1^i)\,\mathrm{H}(u-a_2^i)\ldots\mathrm{H}(u-a_{n+1}^i)\,e^{g_i u}}{\mathrm{H}^{n+1}(u)}.$$

en résulte qu'en décomposant en éléments simples les quotients $\frac{\Phi_i(u)}{\Phi_0(u)}$, qui sont des fonctions doublement périodiques de première espèce, on aura

$$\frac{\Phi_i(u)}{\Phi_0(u)} = \text{const.} + \frac{\mathrm{A}_1\,\mathrm{H}'(u-a_1)}{\mathrm{H}(u-a_1)} + \frac{\mathrm{A}_2\,\mathrm{H}'(u-a_2)}{\mathrm{H}(u-a_2)} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_n\,\mathrm{H}'(u-a_n)}{\mathrm{H}(u-a_n)} + \frac{\mathrm{A}_0\,\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)},$$

avec la condition

$$\mathrm{A}_0 = -(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_n).$$

C'est donc la généralisation du résultat trouvé au paragraphe XXVIII (p. 343) pour les équations du second ordre, et il est clair qu'on peut encore écrire

$$\frac{\Phi_i(u)}{\Phi_0(a)} = \text{const.} + \frac{\mathrm{A}_1\,\mathrm{sn}\,a_1}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(u-a_1)} + \frac{\mathrm{A}_2\,\mathrm{sn}\,a_2}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(u-a_2)} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_n\,\mathrm{sn}\,a_n}{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(u-a_n)}.$$

La détermination des constantes $\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}_2$, ..., qui entrent dans ces expressions des coefficients de l'équation linéaire, par la condition que les solutions soient des fonctions uniformes, est une question difficile et importante, que je n'ai pas abordée au delà du cas le plus simple de $n=2$; je me borne à donner la forme analytique générale de ces coefficients et à observer que, chacune des fonctions $f_i(u)$ contenant deux arbitraires, l'équation différentielle en renferme en tout $2n$. Les remarques que j'ai à présenter ont un autre objet, comme on va le voir. Je me suis attaché à cette circonstance que présente l'équation de Lamé, $y'' = (2k^2\,\mathrm{sn}^2 u + h)y$, de ne contenir aucun point à apparence singulière ; elle m'a paru donner l'indication d'un type spécial, à distinguer et à caractériser, de manière qu'on ait ses analogues, si je puis dire, pour un ordre quelconque. Introduisons donc la condition $\Phi_0(u) = \text{const.}$ pour amener la disparition des points à apparence singulière $u = a_1$, $a_2, \ldots, a_n$, et posons, à cet effet, les $n+1$ conditions

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad \ldots, \quad a_n = 0, \quad g_0 = 0.$$

J'observerai, en premier lieu, que, dans ce type particulier d'équations, le nombre des arbitraires se trouve réduit à $2n-(n+1)$, c'est-à-dire à $n-1$. Je remarque ensuite que, les fonctions $\Phi_i(u)$ ayant toutes les mêmes multiplicateurs, ces multiplicateurs seront nécessairement l'unité, puisque l'une d'elles, $\Phi_0(u)$, est une constante. C'est dire qu'elles deviennent des fonctions doublement périodiques de première espèce, ayant pour pôle unique $u = 0$, avec l'ordre de multiplicité maximum $n+1$. Nous avons, par conséquent, l'expression

$$\Phi_i(u) = a + b\frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} + c\,D_u\frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} + \ldots + h\,D_u^{n-1}\frac{1}{\operatorname{sn}^2 u},$$

que la considération suivante va nous permettre encore de simplifier.

Et, d'abord, il résulte des expressions de $\Phi_0(u)$ et $\Phi_1(u)$, sous forme de déterminants, qu'on a, en général,

$$\Phi_1(u) = -D_u\,\Phi_0(u).$$

La condition $\Phi_0(u) = \text{const.}$ donne donc

$$\Phi_1(u) = 0,$$

et l'on voit que l'équation d'ordre $n$, analogue à celle de Lamé, a la forme

$$y^n + \Phi_2(u)\,y^{n-2} + \ldots + \Phi_n(u)\,y = 0.$$

Je ferai maintenant un nouveau pas en appliquant l'un des beaux théorèmes donnés par M. Fuchs, à savoir que le point singulier effectif $u = 0$ doit être, dans le coefficient $\Phi_i(u)$, un pôle dont l'ordre de multiplicité ne dépasse pas $i$, pour que l'intégrale de l'équation différentielle soit une fonction uniforme de la



variable. On a, en conséquence, les expressions suivantes des coefficients, en remplacant $u$ par $u + iK'$, afin de nous rapprocher autant que possible de l'équation de Lamé,

$$\begin{aligned}
\Phi_2(u) &= \alpha_0 + \alpha_1 \operatorname{sn}^2 u,\\
\Phi_3(u) &= \beta_0 + \beta_1 \operatorname{sn}^2 u + \beta_2 D_u \operatorname{sn}^2 u,\\
\Phi_4(u) &= \gamma_0 + \gamma_1 \operatorname{sn}^2 u + \gamma_2 D_u \operatorname{sn}^2 u + \gamma_3 D_u^2 \operatorname{sn}^2 u,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

La question de déterminer les constantes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$, de manière à réaliser complètement la condition que l'intégrale soit une fonction uniforme, offre, comme on le voit, beaucoup d'intérêt. Elle a fait le sujet des recherches d'un jeune géomètre du talent le plus distingué, M. Mittag-Leffler, professeur à l'Université d'Helsingfors, et je vais exposer les résultats auxquels il est parvenu.

## XXXVIII.

Considérons en premier lieu les équations du troisième ordre, que nous savons devoir contenir deux constantes arbitraires. Elles présentent deux types distincts, et l'un d'eux, découvert antérieurement par M. Picard, a offert le premier et mémorable exemple de l'intégration au moyen des fonctions elliptiques d'une équation différentielle d'ordre supérieur au second [1]. C'est l'équation

$$y''' + (\alpha - 6k^2 \operatorname{sn}^2 u)\,y' + \beta y = 0,$$

a la quelle on satisfait de la manière suivante.

Soit

$$y = \frac{H(u+\omega)}{\Theta(u)}\, e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u},$$

et posons, comme au paragraphe V,

$$\begin{aligned}
\Omega\ &= k^2 \operatorname{sn}^2\omega - \frac{1+k^2}{3},\\
\Omega_1 &= k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega.\\
\Omega_2 &= k^2 \operatorname{sn}^4\omega - \frac{2(k^2+k^4)}{3}\operatorname{sn}^2\omega - \frac{7-22k^2+7k^4}{45},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

[1] *Sur une classe d'équations différentielles* (*Comptes rendus*, t. XC, p. 128).

de sorte qu'on ait, pour $u = i\mathrm{K}' + \varepsilon$,

$$y = \mathrm{C}\, e^{\lambda\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\Omega\varepsilon - \frac{1}{3}\Omega_1\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\Omega_2\varepsilon^3 - \ldots\right),$$

C désignant un facteur constant. Les quantités ω et λ se déterminent au moyen des relations

$$\begin{aligned} 3(\lambda^2 - \Omega) + \alpha - 2(1 + k^2) &= 0, \\ 2\lambda^3 - 6\lambda\Omega - 4\Omega_1 - \beta &= 0, \end{aligned}$$

et il a été démontré par M. Picard qu'elles admettent trois systèmes de solutions, d'où se tirent trois intégrales particulières et par conséquent l'intégrale complète de l'équation considérée.

Le second type qu'il faut joindre au précédent pour avoir, dans le troisième ordre, toutes les équations analogues à celle de Lamé est

$$y''' + (\alpha - 3k^2\,\mathrm{sn}^2 u)y' + (\beta + \gamma k^2\,\mathrm{sn}^2 u - 3k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)y = 0,$$

avec la condition

$$3(\alpha - 1 - k^2) + \gamma^2 = 0.$$

Il présente cette circonstance bien remarquable que, dans les trois intégrales particulières, la constante λ a la même valeur, à savoir : $\lambda = -\frac{\gamma}{3}$. Cela étant, ω s'obtient par la relation

$$2\lambda^3 - \lambda(3\Omega - 1 - k^2) - \Omega_1 - \beta = 0.$$

En passant maintenant au quatrième ordre, on obtient quatre équations A, B, C, D avec trois constantes arbitraires, et pour chacune d'elles les constantes ω et λ se déterminent ainsi que je vais l'indiquer.

A.

$$y^{\mathrm{IV}} + (\alpha - 12k^2\,\mathrm{sn}^2 u)y'' + \beta y' + (\gamma + \delta k^2\,\mathrm{sn}^2 u)y = 0,$$

avec la condition

$$2\alpha - 8(1 + k^2) + \delta = 0.$$

Les relations entre ω et λ sont

$$\begin{aligned} 4\lambda^3 - \lambda(12\Omega + \delta) - 8\Omega_1 + \beta &= 0, \\ 90\lambda^4 - (540\Omega + 15\delta)\lambda^2 - 720\Omega_1\lambda - 270\Omega_2 + 15\delta\Omega & \\ - 30\gamma - 10\delta(1 + k^2) + 48(1 - k^2 + k^4) &= 0. \end{aligned}$$



B.

$$\begin{aligned} y^{\mathrm{IV}} + (\alpha - 8k^2\,\mathrm{sn}^2 u)y'' + (\beta + \gamma k^2\,\mathrm{sn}^2 u - 8k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)y' & \\ + (\delta + \varepsilon k^2\,\mathrm{sn}^2 u - \gamma k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)y &= 0, \end{aligned}$$

sous les conditions

$$4\varepsilon = \gamma^2, \qquad \gamma^3 + 8\gamma(\alpha - 2 - 2k^2) + 16\beta = 0.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} 48(\lambda^2 - \Omega) + 12\lambda\gamma + 24\alpha + 3\gamma^2 - 64(1 + k^2) &= 0, \\ 120\lambda^4 - 720\lambda^2\Omega - 960\lambda\Omega_1 - 360\Omega_2 - 60(\lambda^3 - 3\lambda\Omega - 2\Omega_1)\gamma & \\ - 15(\lambda^2 - \Omega)\gamma^2 - 120\delta - 10(1 + k^2)\gamma^2 + 64(1 - k^2 + k^4) &= 0. \end{aligned}$$

C.

$$y^{\mathrm{IV}} + (\alpha - 6k^2\,\mathrm{sn}^2 u)y'' + (\beta - 12k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)y' + (\gamma + \delta k^2\,\mathrm{sn}^2 u)y = 0,$$

avec la relation

$$12\gamma - \delta^2 - 2\delta[\alpha - 4(1 + k^2)] = 0.$$

Les équations en ω et λ sont

$$\begin{aligned} 6(\lambda^2 - \Omega) + 2\alpha + \delta - 4(1 + k^2) &= 0, \\ 2\lambda^3 - \lambda(6\Omega - \delta) - 4\Omega_1 - \beta &= 0. \end{aligned}$$

D.

$$\begin{aligned} y^{\mathrm{IV}} + (\alpha - 4k^2\,\mathrm{sn}^2 u)y'' + (\beta + \gamma k^2\,\mathrm{sn}^2 u - 8k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)y' & \\ + (\delta + \varepsilon k^2\,\mathrm{sn}^2 u - 8k^4\,\mathrm{sn}^4 u + \gamma k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u)y &= 0. \end{aligned}$$

On a entre les constantes les deux conditions

$$\begin{aligned} 8\alpha - 32(1 + k^2) + 4\varepsilon + \gamma^2 &= 0, \\ 4\beta + \gamma[\varepsilon - 4(1 + k^2)] &= 0. \end{aligned}$$

Ce dernier cas présente un second exemple de la circonstance remarquable qui s'est offerte dans l'une des équations du troisième ordre, la quantité λ ayant dans toutes les intégrales particulières la même valeur, à savoir $\lambda = -\frac{\gamma}{4}$. L'équation en ω est ensuite

$$\begin{aligned} 90\lambda^4 - 15(\lambda^2 - \Omega)[3\varepsilon - 8(1 + k^2)] - 360\lambda^2\Omega - 360\lambda\Omega_1 & \\ - 90\Omega_2 - 90\delta - 30\varepsilon(1 + k^2) + 16(11 + 4k^2 + 11k^4) &= 0. \end{aligned}$$

## XXXIX.

Les recherches dont je viens d'énoncer succinctement les premiers résultats ont été étendues par M. Mittag-Leffler aux équations linéaires d'ordre quelconque, dans un travail qui paraîtra prochainement. (*Annali di Mathematica*, II, t. XI, 1882, p. 65.) Il sera ainsi établi que la théorie des fonctions elliptiques conduit aux premiers types généraux, après celui des équations à coefficients constants, dont la solution est connue sous forme explicite. L'équation de Lamé

$$\mathrm{D}_x^2 y = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y,$$

ayant été l'origine et le point de départ de ces recherches, doit d'autant plus appeler notre attention, et j'y reviens pour aborder un second cas, celui de $n = 2$, en me proposant d'en faire l'application à la théorie du pendule. Je traiterai ce cas par une méthode spéciale que j'expose avant d'arriver au cas général où le nombre $n$ est quelconque, afin de réunir divers points de vue sous lesquels peut être traitée la même question. Reprenons à cet effet l'équation considérée au paragraphe XXX (p. 347) et dont nous avons obtenu la solution complète, à savoir

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_u^2 y &- \left[\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-a)} + \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-b)}\right]\mathrm{D}_u y \\ &+ \left[\frac{\mathrm{A} \operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-a)} + \frac{\mathrm{B} \operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-b)} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)} - \mathrm{C}^2\right] y = 0.\end{aligned}$$

Soit $u = x + i\mathrm{K}'$, et changeons aussi $a$ et $b$ en $a + i\mathrm{K}'$ et $b + i\mathrm{K}'$, de sorte que les constantes A et B deviennent

$$\mathrm{A} = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a-b)} + \mathrm{C},$$

$$\mathrm{B} = \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(b-a)} - \mathrm{C}.$$

L'équation prendra la forme suivante,

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_x^2 y &- \left[\frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(x-a)} + \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(x-b)}\right]\mathrm{D}_x y \\ &- \left[\frac{\mathrm{A} \operatorname{sn} x}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(x-a)} + \frac{\mathrm{B} \operatorname{sn} x}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(x-b)} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)} - \mathrm{C}^2\right] y = 0,\end{aligned}$$



et aura pour solution la fonction de seconde espèce

$$y = \frac{\mathrm{H}(x+\omega)}{\Theta(x)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]x},$$

les quantités $\omega$ et $\lambda$ étant déterminées maintenant par les conditions

$$\lambda - \mathrm{C} = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a-b)} - \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} + \frac{\operatorname{sn} \omega}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a+\omega)},$$

$$\lambda + \mathrm{C} = \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(b-a)} - \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b} + \frac{\operatorname{sn} \omega}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b+\omega)}.$$

Cela posé, considérons le cas où $b = -a$; on trouve aisément, en chassant le dénominateur $\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a$, l'équation

$$\begin{aligned}&(\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a)\mathrm{D}_x^2 y - 2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \,\mathrm{D}_x y \\ &\quad + \left[\frac{2\mathrm{A} \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} \operatorname{sn}^2 x + \left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2 2a} - \mathrm{C}^2\right)(\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a)\right] y = 0.\end{aligned}$$

Particularisons encore davantage et, observant qu'on a

$$\mathrm{A} = -\frac{1}{\operatorname{sn} 2a} + \mathrm{C},$$

faisons disparaître le terme en $\operatorname{sn}^2 x$ dans le coefficient de $y$, en posant

$$\frac{2 \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} = \frac{1}{\operatorname{sn} 2a} + \mathrm{C}.$$

Ce coefficient se réduisant à une constante, l'équation précédente devient

$$\begin{aligned}&(\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a)\mathrm{D}_x^2 y - 2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \,\mathrm{D}_x y \\ &\quad + 2[3k^2 \operatorname{sn}^4 a - 2(1+k^2)\operatorname{sn}^2 a + 1] y = 0.\end{aligned}$$

Soit donc, pour un moment,

$$\Phi(x) = \operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a;$$

on voit qu'on peut l'écrire ainsi

$$\Phi(x)\mathrm{D}_x^2 y - \Phi'(x)\mathrm{D}_x y + \Phi''(a) y = 0,$$

et l'on en conclut, par la différentiation,

$$\Phi(x)\mathrm{D}_x^3 y - [\Phi''(x) - \Phi''(a)]\mathrm{D}_x y = 0.$$

Ce résultat remarquable donne, en remplaçant $D_x y$ par $z$,

$$D_x^2 z = \left[\frac{\Phi''(x) - \Phi''(a)}{\Phi(x)}\right] z = (6k^2 \operatorname{sn}^2 x + 6k^2 \operatorname{sn}^2 a - 4 - 4k^2) z:$$

c'est précisément l'équation de Lamé dans le cas de $n = 2$, la constante qui y figure étant $h = 6k^2 \operatorname{sn}^2 a - 4 - 4k^2$. Nous n'avons donc plus, pour parvenir à notre but, qu'à former l'intégrale de l'équation en $y$, c'est-à-dire à déterminer les quantités $\omega$ et $\lambda$ au moyen des équations rappelées plus haut. Introduisons, à cet effet, les conditions $b = -a$, $C = \frac{2 \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} - \frac{1}{\operatorname{sn} 2a}$; on en tirera successivement, en les retranchant et les ajoutant,

$$\frac{\operatorname{sn}^2 \omega}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 \omega} = \frac{\operatorname{sn}^2 a (2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1 - k^2)}{\operatorname{cn}^2 a \operatorname{dn}^2 a},$$

$$\lambda = \frac{\operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 \omega}.$$

De là nous concluons d'abord, pour $\omega$, les expressions suivantes,

$$\operatorname{sn}^2 \omega = \frac{\operatorname{sn}^4 a (2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1 - k^2)}{3k^2 \operatorname{sn}^4 a - 2(1 + k^2) \operatorname{sn}^2 a + 1},$$

$$\operatorname{cn}^2 \omega = -\frac{\operatorname{cn}^4 a (2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1)}{3k^2 \operatorname{sn}^4 a - 2(1 + k^2) \operatorname{sn}^2 a + 1},$$

$$\operatorname{dn}^2 \omega = -\frac{\operatorname{dn}^4 a (2 \operatorname{sn}^2 a - 1)}{3k^2 \operatorname{sn}^4 a - 2(1 + k^2) \operatorname{sn}^2 a + 1}.$$

On a ensuite

$$\lambda^2 = \frac{\operatorname{sn}^2 \omega \operatorname{cn}^2 \omega \operatorname{dn}^2 \omega}{(\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 \omega)^2} = \frac{(2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1 - k^2)(2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1)(2 \operatorname{sn}^2 a - 1)}{3k^2 \operatorname{sn}^4 a - 2(1 + k^2) \operatorname{sn}^2 a + 1},$$

et l'on voit que les constantes $\operatorname{sn}^2 \omega$ et $\lambda^2$ sont des fonctions rationnelles de $\operatorname{sn}^2 a$ ou de $h$. Nous remarquerons en même temps que $\operatorname{sn} \omega$ et, par conséquent, $\omega$ ayant deux déterminations égales et de signes contraires, le signe de $\lambda$ est donné par celui de $\omega$, en vertu de la relation $\lambda = \frac{\operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 \omega}$. Aucune ambiguïté ne s'offre donc dans la formule

$$y = C \frac{H(x + \omega)}{\Theta(x)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right] x} + C' \frac{H(x + \omega)}{\Theta(x)} e^{-\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right] x},$$



et l'on en conclut, pour l'intégrale de l'équation de Lamé,

$$D_x^2 y = (6k^2 \operatorname{sn}^2 x + 6k^2 \operatorname{sn}^2 a - 4 - 4k^2) y,$$

l'expression

$$y = C D_x \frac{H(x + \omega)}{\Theta(x)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right] x} + C' D_x \frac{H(x - \omega)}{\Theta(x)} e^{-\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right] x}.$$

Voici les remarques auxquelles elle donne lieu.

## XL.

Nous allons supposer nulle ou infinie la quantité $\lambda$, en nous proposant d'étudier les circonstances qu'offre alors la solution de l'équation différentielle.

Et d'abord, on voit, par l'expression de $\lambda^2$, que le premier cas a lieu en posant les conditions

$$2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1 - k^2 = 0,$$

$$2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1 = 0,$$

$$2 \operatorname{sn}^2 a - 1 = 0,$$

qui donnent successivement $\operatorname{sn} \omega = 0$, $\operatorname{cn} \omega = 0$, $\operatorname{dn} \omega = 0$. Les valeurs de $\omega$ qui en résultent, à savoir, $\omega = 0$, $\omega = K$, $\omega = K + iK'$, conduisent aux solutions considérées par Lamé, qui sont des fonctions doublement périodiques de la variable, avec la périodicité caractéristique de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$. Nous avons, en effet, pour $\omega = 0$ et $\omega = K$ : $y = D_x \operatorname{sn} x$, $y = D_x \operatorname{cn} x$. Il suffit ensuite d'employer les relations

$$H(x + K + iK') = \Theta_1(x) e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x + iK')},$$

$$\frac{\Theta'(K + iK')}{\Theta(K + iK')} = -\frac{i\pi}{2K},$$

pour conclure de la valeur $\omega = K + iK'$ l'expression $y = D_x \operatorname{dn} x$.

Supposons maintenant $\lambda$ infini, et soit à cet effet

$$3k^2 \operatorname{sn}^4 a - 2(1 + k^2) \operatorname{sn}^2 a + 1 = 0;$$

en désignant une solution de cette équation par $a = \alpha$, je ferai $a = \alpha + \eta$, $\omega = iK' + \varepsilon$, les quantités $\eta$ et $\varepsilon$ étant infiniment petites. D'après la relation

$$\operatorname{sn}^2\omega = \frac{\operatorname{sn}^4 a(2k^2 \operatorname{sn}^2 a - 1 - k^2)}{3k^2 \operatorname{sn}^4 a - 2(1+k^2)\operatorname{sn}^2 a + 1},$$

on voit d'abord qu'on aura, en développant en série,

$$\varepsilon^2 = p\eta + q\eta^2 + \ldots,$$

$p$, $q$ étant des constantes. Cela étant, nous développerons aussi $\lambda$ suivant les puissances croissantes de $\varepsilon$, au moyen de l'expression

$$\lambda = \frac{\operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2\omega} = \frac{\operatorname{cn}\varepsilon \operatorname{dn}\varepsilon}{\operatorname{sn}\varepsilon} \frac{1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\alpha+\eta)\operatorname{sn}^2\varepsilon}.$$

Or, ayant

$$\frac{\operatorname{cn}\varepsilon \operatorname{dn}\varepsilon}{\operatorname{sn}\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1+k^2}{3}\varepsilon + \ldots,$$

$$\frac{1}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(\alpha+\eta)\operatorname{sn}^2\varepsilon} = 1 + k^2 \operatorname{sn}^2\alpha\, \varepsilon^2 + \ldots,$$

on en conclut

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon} + \left(k^2 \operatorname{sn}^2\alpha - \frac{1+k^2}{3}\right)\varepsilon + \ldots.$$

Employons maintenant l'équation

$$\frac{\Theta'(i\mathrm{K}'+\varepsilon)}{\Theta(i\mathrm{K}'+\varepsilon)} = \frac{\mathrm{H}'(\varepsilon)}{\mathrm{H}(\varepsilon)} - \frac{i\pi}{2\mathrm{K}} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{i\pi}{2\mathrm{K}} + \left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} - \frac{1+k^2}{3}\right)\varepsilon + \ldots;$$

nous obtenons cette expression, qui est finie, pour $\varepsilon = 0$, à savoir

$$\lambda - \frac{\Theta'(i\mathrm{K}'+\varepsilon)}{\Theta(i\mathrm{K}'+\varepsilon)} = \frac{i\pi}{2\mathrm{K}} + \left(k^2 \operatorname{sn}^2\alpha - \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right)\varepsilon + \ldots.$$

Enfin, je remplace, dans la solution de l'équation différentielle, la quantité $\mathrm{H}(x + i\mathrm{K} + \varepsilon)$ par

$$i\Theta(x+\varepsilon)\, e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x+2\varepsilon+i\mathrm{K}')};$$

il viendra ainsi

$$\frac{\mathrm{H}(x+\omega)}{\Theta(x)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]x} = i\, e^{\frac{\pi \mathrm{K}'}{4\mathrm{K}}} \frac{\Theta(x+\varepsilon)\, e^{g\varepsilon}}{\Theta(x)},$$

en faisant, pour abréger,

$$g = -\frac{i\pi}{2\mathrm{K}} + \left(k^2 \operatorname{sn}^2\alpha - \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right)x.$$



Or, en développant suivant les puissances de $\varepsilon$, on obtient, si l'on se borne aux deux premiers termes,

$$\frac{\Theta(x+\varepsilon)\, e^{g\varepsilon}}{\Theta(x)} = 1 + \left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + g\right]\varepsilon;$$

il suffira donc de remplacer la constante arbitraire C par $\frac{\mathrm{C}}{\varepsilon}$, pour la limite cherchée, lorsqu'on pose $\varepsilon = 0$. Nous trouvons ainsi

$$\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{D}_x\left[\frac{\Theta(x+\varepsilon)\, e^{g\varepsilon}}{\Theta(x)}\right] = \mathrm{D}_x\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + g\right] = k^2(\operatorname{sn}^2\alpha - \operatorname{sn}^2 x),$$

où la constante $\operatorname{sn}^2\alpha$ est déterminée par l'équation

$$3k^2 \operatorname{sn}^4\alpha - 2(1+k^2)\operatorname{sn}^2\alpha + 1 = 0.$$

Ces deux solutions de l'équation différentielle, réunies à celles qui ont été obtenues précédemment, complètent l'ensemble des cinq solutions de Lamé, qui sont des fonctions doublement périodiques, ces deux dernières ayant, comme on voit, la périodicité de $\operatorname{sn}^2 x$.

## XLI.

La théorie du pendule conique ou du mouvement d'un point pesant sur une sphère conduit à une application immédiate de l'équation qui vient de nous occuper. C'est M. Tissot qui a le premier traité cette question importante, par une analyse semblable à celle de Jacobi dans le problème de la rotation, et donné explicitement, en fonction du temps, les coordonnées du point mobile (*Thèse de Mécanique*, *Journal de M. Liouville*, t. XVII, p. 88). En suivant une autre marche, nous trouvons une autre forme analytique de la solution que j'ai indiquée, sans démonstration, dans une Lettre adressée à M. H. Gyldén et publiée dans le *Journal de Borchardt*, t. LXXXV, p. 246. Ces résultats s'établissent de la manière suivante.

Soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées rectangulaires d'un point pesant, assujetti à rester sur une sphère de rayon égal à l'unité; les équations du mouvement, si l'on désigne par $g$ la pesanteur et N la force accélératrice, seront (¹)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mathrm{N}x=0,$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}+\mathrm{N}y=0,$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}+\mathrm{N}z=g,$$
$$x^2+y^2+z^2=1.$$

Elles donnent d'abord, comme on sait, en désignant par $c$ et $l$ des constantes,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=2g(z+c),$$
$$y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}=l.$$

Cela étant, j'emploie la combinaison suivante,

$$(x+iy)\left(\frac{dx}{dt}-i\frac{dy}{dt}\right)=x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+i\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)=-z\frac{dz}{dt}+il,$$

et je remarque que le carré du module du premier membre,

$$(x^2+y^2)\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right],$$

s'exprime par

$$(1-z^2)\left[2g(z+c)-\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right],$$

de sorte qu'on obtient, en l'égalant au carré du module du second membre,

$$(1-z^2)\left[2g(z+c)-\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]=z^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+l^2,$$

ou bien

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=2g(z+c)(1-z^2)-l^2.$$

La variable $z$ étant déterminée par cette relation, une première méthode pour obtenir les deux autres coordonnées consiste à diviser membre à membre les équations

(¹) *Traité de Mécanique* de Poisson, t. I, p. 386.



$$(x+iy)\left(\frac{dx}{dt}-i\frac{dy}{dt}\right)=-z\frac{dz}{dt}+il,$$
$$x^2+y^2=1-z^2.$$

On obtient facilement ainsi les expressions qui conduisent aux résultats de M. Tissot, à savoir

$$x-iy=e^{-\int\frac{z\,dz-il\,dt}{1-z^2}},$$

puis, en changeant $i$ en $-i$,

$$x+iy=e^{-\int\frac{z\,dz+il\,dt}{1-z^2}}.$$

Mais j'opérerai différemment; je déduis d'abord des équations différentielles, et les ajoutant après les avoir multipliées respectivement par $x$, $y$, $z$,

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}+\mathrm{N}=gz,$$

puis de l'équation de la sphère, différentiée deux fois,

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}=-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=-2g(z+c).$$

Nous avons donc

$$\mathrm{N}=g(3z+2c),$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^2(x+iy)}{dt^2}=-g(3z+2c)(x+iy);$$

or on est ainsi amené à l'équation de Lamé, dans le cas de $n=2$, comme nous allons le voir.

Formons pour cela l'expression de $z$, et soit à cet effet

$$2g(z+c)(1-z^2)-l^2=-2g(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma),$$

ce qui donne les relations suivantes :

$$\alpha+\beta+\gamma=-c,$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1,$$
$$\alpha\beta\gamma=c-\frac{l^2}{2g}.$$

On sait que les racines $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont nécessairement réelles, et qu'en les rangeant par ordre décroissant de grandeur $\alpha$ sera positive, $\beta$ positive ou négative, et toutes deux moindres en valeur absolue que l'unité, tandis que $\gamma$ sera négative et supérieure à l'unité en valeur absolue. Soient donc

$$k^2 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma},$$
$$u = n(t - t_0),$$
$$n = \sqrt{\frac{g(\alpha - \gamma)}{2}};$$

on aura

$$z = \alpha - (\alpha - \beta)\,\mathrm{sn}^2(u, k),$$

$t_0$ étant une constante et le coefficient $n$ étant pris positivement. Introduisons maintenant la variable $u$ dans l'équation du second ordre; elle deviendra

$$\mathrm{D}_u^2(x + iy) = \frac{g}{n^2}[3(\alpha - \beta)\,\mathrm{sn}^2 u - 3\alpha - 2c](x + iy)$$

et, en simplifiant,

$$\mathrm{D}_u^2(x + iy) = \left(6k^2\,\mathrm{sn}^2 u - 2\frac{\alpha - 2\beta - 2\gamma}{\alpha - \gamma}\right)(x + iy).$$

C'est donc l'équation de Lamé dont nous avons donné la solution complète au moyen de deux fonctions doublement périodiques de seconde espèce à multiplicateurs réciproques. Or une seule de ces fonctions doit figurer dans l'expression de $x + iy$, comme le montre la formule obtenue tout à l'heure

$$x + iy = e^{-\int \frac{z\,dz + il\,dt}{1 - z^2}};$$

par conséquent, nous pouvons immédiatement écrire

$$x + iy = \mathrm{CD}_u \frac{\mathrm{H}(u + \omega)}{\Theta(u)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u}$$

ou, sous une autre forme, en modifiant la constante arbitraire,

$$x + iy = \mathrm{AD}_u \frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(u + \omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(u)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u};$$

maintenant il nous faut déterminer cette constante, ainsi que les quantités $\omega$ et $\lambda$.



## XLII.

En posant la condition

$$6k^2\,\mathrm{sn}^2 a - 4 - 4k^2 = -2\frac{\alpha - 2\beta - 2\gamma}{\alpha - \gamma},$$

et employant l'expression du module $k^2 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma}$, on trouve d'abord

$$\mathrm{sn}^2 a = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}.$$

De là se tirent ensuite, après quelques réductions faciles où l'on fera usage de la relation

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1,$$

les formules suivantes,

$$\mathrm{sn}^2\omega = -\frac{\alpha^2(\beta + \gamma)}{\alpha - \beta},$$
$$\mathrm{cn}^2\omega = +\frac{\beta^2(\alpha + \gamma)}{\alpha - \beta},$$
$$\mathrm{dn}^2\omega = +\frac{\gamma^2(\alpha + \beta)}{\alpha - \gamma},$$
$$\lambda^2 = -\frac{(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)}{\alpha - \gamma}.$$

Cela étant, nous remarquerons en premier lieu que, d'après les limites entre lesquelles sont comprises les quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, on obtient pour $\mathrm{sn}^2\omega$ et $\mathrm{dn}^2\omega$ des valeurs positives, tandis que $\mathrm{cn}^2\omega$ est négatif. Il en résulte que $\mathrm{sn}^2\omega$ est plus grand que l'unité et moindre que $\frac{1}{k^2}$, de sorte qu'on doit supposer

$$\omega = \pm \mathrm{K} + i\upsilon,$$

$\upsilon$ étant réel et donné par ces expressions

$$\mathrm{sn}^2(\upsilon, k') = \frac{\beta^2(\gamma^2 - \alpha^2)}{\alpha^2(\gamma^2 - \beta^2)},$$
$$\mathrm{cn}^2(\upsilon, k') = \frac{\gamma^2(\beta^2 - \alpha^2)}{\alpha^2(\beta^2 - \gamma^2)},$$
$$\mathrm{dn}^2(\upsilon, k') = \frac{\beta - \alpha}{\alpha^2(\beta + \gamma)}.$$

J'observe ensuite qu'ayant $n^2 = \frac{g(\alpha - \gamma)}{2}$ nous pouvons écrire la valeur de $\lambda^2$ de cette manière,

$$\lambda^2 = -\frac{g(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{2n^2},$$

d'où l'on conclut facilement

$$\lambda^2 = -\frac{l^2}{4n^2}.$$

Les constantes $\omega$ et $\lambda$ se trouvent ainsi déterminées, mais seulement au signe près, et deux autres relations sont encore nécessaires pour lever toute ambiguïté. La première résulte d'abord de la condition qui a été donnée pour la solution générale de l'équation de Lamé, à savoir

$$\lambda = \frac{\operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2\omega},$$

et l'on en tire immédiatement

$$\lambda = -\frac{(\alpha-\beta)\operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\alpha\beta\gamma}.$$

Nous obtiendrons tout à l'heure la seconde comme conséquence de l'équation considérée plus haut,

$$(x+iy)\left(\frac{dx}{dt} - i\frac{dy}{dt}\right) = -z\frac{dz}{dt} + il.$$

Mais voici d'abord la détermination de la constante A qui entre dans la formule

$$x + iy = \mathrm{A}\,\mathrm{D}_u \frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(u+\omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(u)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u}.$$

Soit, pour abréger,

$$\mathrm{F}(u) = \frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(u+\omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(u)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u}.$$

Désignons par $\mathrm{F}_1(u)$ ce que devient cette fonction lorsqu'on change $i$ en $-i$, et par $\mathrm{A}_1$ la quantité conjuguée de A, de sorte qu'o

$$x + iy = \mathrm{A}\,\mathrm{F}'(u),$$
$$x - iy = \mathrm{A}_1\,\mathrm{F}'_1(u),$$



et, par conséquent,

$$x^2 + y^2 = \mathrm{A}\mathrm{A}_1\,\mathrm{F}'(u)\,\mathrm{F}'_1(u).$$

Nous supposerons $u = 0$, ce qui donne $z = \alpha$, dans l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; il viendra ainsi

$$\mathrm{A}\mathrm{A}_1\,\mathrm{F}'(0)\,\mathrm{F}'_1(0) = 1 - \alpha^2,$$

ou encore, au moyen de la condition $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1$,

$$\mathrm{A}\mathrm{A}_1\,\mathrm{F}'(0)\,\mathrm{F}'_1(0) = -(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma).$$

J'emploie maintenant, pour y faire $u = 0$, la relation

$$\frac{\mathrm{F}'(u)}{\mathrm{F}(u)} = \frac{\mathrm{H}'(u+\omega)}{\mathrm{H}(u+\omega)} - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} + \lambda;$$

on en tire d'abord

$$\frac{\mathrm{F}'(0)}{\mathrm{F}(0)} = \frac{\operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}\omega} + \lambda,$$

puis, au moyen de la valeur donnée précédemment de $\lambda$,

$$\frac{\mathrm{F}'(0)}{\mathrm{F}(0)} = \frac{\operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}\omega} - \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta\gamma}\operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega = \frac{\operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}\omega}\left(1 - \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta\gamma}\operatorname{sn}^2\omega\right),$$

et enfin

$$\frac{\mathrm{F}'(0)}{\mathrm{F}(0)} = -\frac{\operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\beta\gamma \operatorname{sn}\omega},$$

comme conséquence de la formule

$$\operatorname{sn}^2\omega = -\frac{\alpha^2(\beta+\gamma)}{\alpha-\beta};$$

mais l'expression de $\mathrm{F}(u)$ donne immédiatement

$$\mathrm{F}(0) = \frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(\omega)}{\Theta'(0)\,\Theta(\omega)} = k \operatorname{sn}\omega,$$

et nous en concluons l'expression cherchée, à savoir

$$\mathrm{F}'(0) = -\frac{k \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\beta\gamma}.$$

Changeons enfin $i$ en $-i$; la constance $\omega = \pm\mathrm{K} + i\upsilon$ deviendra

$$\omega' = \pm\mathrm{K} - i\upsilon;$$

on a donc

$$\operatorname{sn}\omega' = \operatorname{sn}\omega, \qquad \operatorname{cn}\omega' \operatorname{dn}\omega' = -\operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega,$$

et par suite

$$F'(o).F'_1(o) = -\frac{k^2 \operatorname{cn}^2\omega \operatorname{dn}^2\omega}{\beta^2\gamma^2} = -\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}{(\alpha-\gamma)^2}.$$

De cette expression nous tirons

$$AA_1 = (\alpha-\gamma)^2,$$

de sorte qu'on peut écrire

$$A \quad = (\alpha-\gamma)\,e^{i\varphi},$$

$\varphi$ désignant un angle arbitraire.

Ce point établi, je reprends l'équation

$$(x+iy)\left(\frac{dx}{dt} - i\frac{dy}{dt}\right) = -z\frac{dz}{dt} + il,$$

qui devient, si l'on introduit, au lieu de $t$, la variable $u$,

$$(x+iy)\left(\frac{dx}{du} - i\frac{dy}{du}\right) = -z\frac{dz}{du} + \frac{il}{n},$$

et j'y fais $u = o$. En remarquant qu'alors $\frac{dz}{du}$ s'évanouit, on trouve

$$(\alpha-\gamma)^2\,F'(o)\,F''_1(o) = \frac{il}{n},$$

ce qui nous mène à chercher la valeur de $F''_1(o)$. Pour cela, je déduis de la relation employée tout à l'heure

$$\frac{F'(u)}{F(u)} = \frac{H'(u+\omega)}{H(u+\omega)} - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} + \lambda$$

la suivante :

$$\frac{F''(u)}{F(u)} - \frac{F'^2(u)}{F^2(u)} = -\frac{1}{\operatorname{sn}^2(u+\omega)} + k^2\operatorname{sn}^2 u,$$

et j'en tire d'abord

$$\frac{F''(o)}{F(o)} = \frac{F'^2(o)}{F^2(o)} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2\omega} = \frac{\operatorname{cn}^2\omega \operatorname{dn}^2\omega}{\beta^2\gamma^2\operatorname{sn}^2\omega} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2\omega},$$



puis, après une réduction facile et au moyen de la valeur obtenue pour $F(o)$,

$$F''(o) = -\frac{2k\operatorname{sn}\omega}{\alpha(\alpha-\gamma)}.$$

Cette expression restant la même lorsqu'on change $i$ en $-i$, nous pouvons écrire

$$F''_1(o) = -\frac{2k\operatorname{sn}\omega}{\alpha(\alpha-\gamma)},$$

et, comme on a déjà trouvé

$$F'(o) = -\frac{k\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\beta\gamma},$$

nous en concluons

$$F'(o)\,F''_1(o) = \frac{2k^2\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\alpha\beta\gamma(\alpha-\gamma)},$$

et, en employant la valeur de $k^2$, l'équation suivante,

$$(\alpha-\gamma)^2\,F'(o)\,F''_1(o) = \frac{2(\alpha-\beta)\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\alpha\beta\gamma} = \frac{il}{n}.$$

Si on la rapproche maintenant de la relation déjà donnée

$$\lambda = -\frac{(\alpha-\beta)\operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\alpha\beta\gamma},$$

on trouve immédiatement

$$\lambda = -\frac{il}{2n};$$

c'est le résultat que j'ai principalement en vue d'obtenir, afin d'avoir la détermination précise de la constante $\lambda$, qui n'était encore connue qu'au signe près.

En dernier lieu, et à l'égard de $\omega$, on remarquera que la fonction $F(u)$ change seulement de signe ou se reproduit quand on met $\omega + 2K$ et $\omega + 2iK'$ à la place de $\omega$. Et comme on peut obtenir un tel changement de signe pour la valeur de $x+iy$, en remplaçant $\varphi$ par $\varphi+\pi$ dans l'argument du facteur constant A, il en résulte qu'il est permis de faire $\omega = K + i\upsilon$, au lieu de $\omega = \pm K + i\upsilon$, et de déterminer une valeur de $\upsilon$, comprise entre $-K'$ et $+K'$.

Or, de la relation

$$\operatorname{sn}^2(\upsilon, k') = \frac{\beta^2(\gamma^2-\alpha^2)}{\alpha^2(\gamma^2-\beta^2)},$$

se tirent deux valeurs égales et de signes contraires de cette quantité entre lesquelles il reste à choisir. C'est à quoi l'on parvient au moyen de la condition

$$\frac{il}{2n} = \frac{(\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega}{\alpha\beta\gamma},$$

qui prend, si l'on y fait $\omega = \mathrm{K} + i\upsilon$, la forme suivante,

$$\frac{l}{2n} = -\frac{(\alpha-\beta)k'^2\,\mathrm{sn}(\upsilon, k)\,\mathrm{cn}(\upsilon, k')}{\alpha\beta\gamma\,\mathrm{dn}^3(\upsilon, k')};$$

or, $\gamma$ étant négatif, on voit ainsi que $\upsilon$ aura le signe de $l$ ou un signe contraire, suivant que la racine moyenne $\beta$ sera positive ou négative. Dans le cas de $\beta = 0$, on a donc

$$\omega = \mathrm{K}$$

et, par suite,

$$\mathrm{F}(u) = k\,\mathrm{D}_u\,e^{\frac{ilu}{2n}}\,\mathrm{cn}\,u:$$

c'est un exemple de ces fonctions particulières de seconde espèce qui ont été considérées par M. Mittag-Leffler dans un article intitulé *Sur les fonctions doublement périodiques de seconde espèce* (*Comptes rendus*, t. XC, p. 177).

## XLIII.

Je terminerai par une remarque sur l'équation

$$\frac{il}{n} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = 0,$$

qui exprime que les coordonnées $x$ et $y$ se reproduisent, sauf le signe, lorsqu'on change $u$ en $u + 2\mathrm{K}$. Soit $\omega = \mathrm{K} + i\upsilon$ et posons

$$i\,\Pi(\upsilon) = \frac{il}{n} + \frac{\Theta'(\mathrm{K}+i\upsilon)}{\Theta(\mathrm{K}+i\upsilon)};$$

cette fonction $\Pi(\upsilon)$, évidemment réelle, finie et continue pour toute valeur réelle de $\upsilon$, a pour dérivé l'expression

$$\Pi'(\upsilon) = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} - k^2\,\mathrm{sn}^2(\mathrm{K}+i\upsilon),$$



qui est toujours négative. On a, en effet,

$$\mathrm{J} < k^2\mathrm{K},$$

comme conséquence des formules

$$\mathrm{K} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad \mathrm{J} = \int_0^1 \frac{k^2x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

et l'on sait d'ailleurs que $\mathrm{sn}^2(\mathrm{K}+i\upsilon)$ est supérieur à l'unité. La fonction $\Pi(\nu)$, étant décroissante, ne peut s'évanouir qu'une fois; or on a, en désignant par $a$ un nombre entier,

$$\frac{\Theta'(\mathrm{K}+2ia\mathrm{K}')}{\Theta(\mathrm{K}+2ia\mathrm{K}')} = -\frac{ia\pi}{\mathrm{K}},$$

et par conséquent

$$\Pi(0) = \frac{l}{n}, \qquad \Pi(2a\mathrm{K}') = \frac{l}{n} - \frac{a\pi}{\mathrm{K}}.$$

Nous établissons ainsi l'existence d'une racine, puisqu'on peut disposer de $a$ de manière que $\frac{l}{n} - \frac{a\pi}{\mathrm{K}}$ soit de signe contraire à $\frac{l}{n}$. Mais c'est en déterminant les quantités $c$ et $l$ qu'il serait surtout important d'obtenir les cas où le mouvement du pendule est périodique, ces constantes représentant les éléments essentiels de la question. N'ayant pu surmonter les difficultés qui s'offrent alors, je me borne à donner de l'équation précédente une transformée où ces constantes se trouvent plus explicitement en évidence. Soit, à cet effet,

$$\mathrm{R}(z) = 2g(z+c)(1-z^2) - l^2;$$

on aura, en premier lieu,

$$\mathrm{K} = \int_\beta^\alpha \frac{n\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}}, \qquad \mathrm{J} = \int_\beta^\alpha \frac{n(\alpha-z)\,dz}{(\alpha-\gamma)\sqrt{\mathrm{R}(z)}};$$

on trouvera ensuite

$$z = \alpha - (\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}^2\omega = -\alpha\beta\gamma,$$

d'où

$$\omega = \int_{-\alpha\beta\gamma}^{\alpha} \frac{n\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}}, \qquad \int_0^\omega k^2\,\mathrm{sn}^2 x\,dx = \int_{-\alpha\beta\gamma}^{\alpha} \frac{n(\alpha-z)\,dz}{(\alpha-\gamma)\sqrt{\mathrm{R}(z)}}.$$

Enfin, en partageant l'intervalle compris entre les limites, en deux parties, l'une de $-\alpha\beta\gamma$ à $\beta$, et l'autre de $\beta$ à $\alpha$, l'équation se présentera, après une réduction facile, sous la forme suivante :

$$\frac{2l}{g}\int_{\beta}^{\alpha}\frac{dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}}=\int_{\beta}^{\alpha}\frac{z\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}}\int_{-\alpha\beta\gamma}^{\beta}\frac{dz}{\sqrt{-\mathrm{R}(z)}}-\int_{\beta}^{\alpha}\frac{dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}}\int_{-\alpha\beta\gamma}^{\beta}\frac{z\,dz}{\sqrt{-\mathrm{R}(z)}}.$$

La question qui vient d'être traitée termine les applications à la Mécanique que j'ai annoncées au commencement de ce travail, et j'arrive maintenant, pour la considérer dans toute sa généralité, à l'équation

$$\mathrm{D}_x^2 y=[n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2 x+h]y,$$

dont la solution n'a encore été obtenue que pour $n=1$ et $n=2$. Au moyen des méthodes de M. Fuchs, permettant de reconnaître que l'intégrale est une fonction uniforme de la variable, et de l'importante proposition de M. Picard, que cette intégrale est dès lors une fonction doublement périodique de seconde espèce, la solution de l'équation de Lamé est donnée directement par l'application de principes généraux s'appliquant aux équations linéaires d'un ordre quelconque. J'exposerai néanmoins une méthode indépendante de ces principes; je m'attacherai ensuite, et ce sera mon principal but, à la question difficile de la détermination, sous forme entièrement explicite, des éléments de la solution. La considération du développement en série, qu'on tire de l'équation proposée lorsqu'on suppose $x=i\mathrm{K}'+\varepsilon$, aura, dans ce qui va suivre, une grande importance; voici, en premier lieu, comment on l'obtient.

## XLIV.

Soit, pour abréger,

$$\frac{1}{\mathrm{sn}^2\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon^2}+s_0+s_1\varepsilon^2+\ldots+s_i\varepsilon^{2i}+\ldots,$$

les expressions des premiers coefficients étant

$$s_0=\frac{1+k^2}{3},$$
$$s_1=\frac{1-k^2+k^4}{15},$$
$$s_2=\frac{2-3k^2-3k^4+2k^6}{189},$$
$$s_3=\frac{2(1-k^2+k^4)^2}{675}.$$



Je dis qu'on vérifie l'équation

$$\mathrm{D}_\varepsilon^2 y=\left[\frac{n(n+1)}{\mathrm{sn}^2\varepsilon}+h\right]y,$$

en posant

$$y=\frac{1}{\varepsilon^n}+\frac{h_1}{\varepsilon^{n-2}}+\ldots+\frac{h_i}{\varepsilon^{n-2i}}+\ldots.$$

La substitution donne en effet les conditions

$$(n-1)(n-2)h_1=h+n(n+1)(h_1+s_0),$$
$$(n-3)(n-4)h_2=hh_1+n(n+1)(h_2+s_0h_1+s_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et nous allons voir qu'elles déterminent de proche en proche les coefficients $h_1$, $h_2$, .... Mettons-les d'abord sous une forme plus simple; en éliminant la quantité $h$ au moyen de la première, on aura, après une réduction facile,

$$i(2n-2i+1)h_i=(2n-1)h_1h_{i-1}-m(s_1h_{i-2}+s_2h_{i-3}+\ldots+s_{i-1}),$$

où j'ai écrit, pour abréger, $n(n+1)=2m$.

Or, le facteur $2n-2i+1$ ne pouvant jamais être nul, on voit que le coefficient de rang quelconque $h_i$ s'obtient au moyen des précédents, $h_{i-1}$, $h_{i-2}$, .... En particulier, on trouve

$$h_2=\frac{(2n-1)h_1^2}{2(2n-3)}-\frac{ms_1}{2(2n-3)},$$
$$h_3=\frac{(2n-1)^2h_1^3}{6(2n-3)(2n-5)}-\frac{m(6n-7)s_1h_1}{6(2n-3)(2n-5)}-\frac{ms_2}{3(2n-5)}.$$

Ce premier développement obtenu, nous en concluons immédiatement un second. Effectivement, le coefficient $n(n+1)$ ne change pas si l'on remplace $n$ par $-(n+1)$, de sorte qu'en désignant par $h'_1$, $h'_2$, ... ce que deviennent $h_1$, $h_2$, ... par ce changement, l'équation différentielle sera de même satisfaite en prenant

$$y=\varepsilon^{n+1}+h'_1\varepsilon^{n+3}+h'_2\varepsilon^{n+5}+\ldots,$$

ou bien

$$y=\varepsilon^{n+1}(1+h'_1\varepsilon^2+h'_2\varepsilon^4+\ldots).$$

Je remarque enfin qu'en substituant dans l'expression

$$\mathrm{D}_\varepsilon^2 y-\left[\frac{n(n+1)}{\mathrm{sn}^2\varepsilon}+h\right]y$$

la partie de la première série représentée par

$$y = \frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{h_2}{\varepsilon^{n-2}} + \ldots + \frac{h_i}{\varepsilon^{n-2i}},$$

tous les termes en $\frac{1}{\varepsilon^{n+2}}, \frac{1}{\varepsilon^n}, \ldots, \frac{1}{\varepsilon^{n-2i+2}}$ disparaissent, de sorte que le résultat ordonné suivant les puissances croissantes de $\varepsilon$ commence par un terme en $\frac{1}{\varepsilon^{n-2i}}$. On en conclut qu'en supposant $n$ pair et égal à $2\nu$, ou bien $n = 2\nu - 1$, on n'aura aucun terme en $\frac{1}{\varepsilon}$, si l'on prend dans le premier cas

$$y = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-2}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon^2} + h_\nu,$$

et dans le second

$$y = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu-1}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-3}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon} + h_\nu \varepsilon.$$

Ce point établi, nous obtenons facilement, comme on va le voir, la solution générale de l'équation de Lamé.

## XLV.

Je considère l'élément simple des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, en le prenant sous la forme suivante,

$$f(x) = e^{\lambda(x - iK')} \chi(x),$$

où l'on a, comme au paragraphe V,

$$\chi(x) = \frac{H'(0)\, H(x+\omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(x)}\, e^{-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}(x - iK') + \frac{i\pi\omega}{2K}}.$$

Le résidu qui correspond au pôle unique $x = iK'$ sera ainsi égal à l'unité, et nous pourrons écrire

$$f(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + H_0 + H_1 \varepsilon + \ldots + H_i \varepsilon^i + \ldots.$$

Cela posé, je dis que les expressions

$$F(x) = -\frac{D_x^{2\nu-1} f(x)}{\Gamma(2\nu)} - h_1 \frac{D_x^{2\nu-3} f(x)}{\Gamma(2\nu-2)} - \ldots - h_{\nu-1} D_x f(x),$$
$$F(x) = +\frac{D_x^{2\nu-2} f(x)}{\Gamma(2\nu-1)} + h_1 \frac{D_x^{2\nu-4} f(x)}{\Gamma(2\nu-3)} + \ldots + h_{\nu-1} \quad f(x)$$



satisferont, suivant les cas de $n = 2\nu$ et $n = 2\nu - 1$, à l'équation différentielle en déterminant convenablement les constantes $\omega$ et $\lambda$.

Pour le démontrer, je remarque que, si l'on pose $x = iK' + \varepsilon$, les parties principales de leurs développements proviendront du seul terme $\frac{1}{\varepsilon}$ qui entre dans $f(iK' + \varepsilon)$, et seront, par conséquent,

$$\frac{1}{\varepsilon^{2\nu}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-2}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon^2}$$

et

$$\frac{1}{\varepsilon^{2\nu-1}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-3}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon}.$$

Disposons maintenant de $\omega$ et $\lambda$, de telle sorte que dans le premier cas le terme constant soit égal à $h_\nu$ et le coefficient de $\varepsilon$, dans le suivant, égal à zéro; nous poserons pour cela les conditions

$$H_{2\nu-1} + h_1 H_{2\nu-3} + h_2 H_{2\nu-5} + \ldots + h_{\nu-1} H_1 + h_\nu = 0,$$
$$2\nu H_{2\nu} + (2\nu - 2) h_1 H_{2\nu-2} + (2\nu - 4) h_2 H_{2\nu-4} + \ldots + 2 h_{\nu-1} H_2 = 0.$$

Et semblablement, dans le second cas, faisons en sorte que le terme constant soit nul et le coefficient de $\varepsilon$ égal à $h_\nu$, en écrivant

$$H_{2\nu-2} + h_1 H_{2\nu-4} + h_2 H_{2\nu-6} + \ldots + h_{\nu-1} H_0 = 0,$$
$$(2\nu - 1) H_{2\nu-1} + (2\nu - 3) h_1 H_{2\nu-3} + \ldots + h_{\nu-1} H_1 - h_\nu = 0.$$

On a donc ces deux développements, à savoir :

$$F(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-2}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon^2} + h_\nu + \ldots,$$

puis

$$F(iK' + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{2\nu-1}} + \frac{h_1}{\varepsilon^{2\nu-3}} + \ldots + \frac{h_{\nu-1}}{\varepsilon} + h_\nu \varepsilon + \ldots;$$

il en résulte que les deux fonctions doublement périodiques de seconde espèce

$$D_x^2 F(x) - [n(n+1) k^2 \operatorname{sn}^2 x + h] F(x),$$

étant finies pour $x = iK'$, sont par conséquent nulles. Nous avons ainsi démontré que l'équation se trouve vérifiée en faisant $y = F(x)$, de sorte que l'expression

$$y = C F(x) + C' F(-x)$$

en donne l'intégrale générale.