XXIV.

Les résultats que nous venons d'obtenir montrent encore par un nouvel exemple combien la question de la rotation se trouve intimement liée à la théorie des fonctions elliptiques. C'est même à l'étude d'un problème de Mécanique qu'est due la considération de ces nouveaux éléments analytiques $\Phi_s(u)$, très voisins des fonctions $\varphi(x, \omega)$, $\varphi_1(x, \omega)$, $\chi(x, \omega)$, $\chi_1(x, \omega)$, employées au commencement de ce travail pour intégrer l'équation de Lamé, mais qui en sont néanmoins distincts et offrent un ensemble de propriétés propres. Il est nécessaire, en effet, d'attribuer à la constante λ quatre valeurs particulières pour en déduire ces dernières fonctions, et de là résultent, pour les multiplicateurs de chacune d'elles, des déterminations essentiellement différentes, tandis que la propriété essentielle qui réunit en un seul système les fonctions $\Phi_s(u)$, c'est d'avoir, sauf le signe, les mêmes multiplicateurs. Je me bornerai à leur égard à considérer, pour en donner l'intégrale complète, les équations différentielles auxquelles elles satisfont, équations linéaires et du second ordre comme celle de Lamé; mais auparavant je dois d'abord montrer comment les formules de Jacobi résultent de l'expression à laquelle nous venons de parvenir, $Z_s = N\Phi_s(u)$, où N désigne une constante. J'emploie, à cet effet, la valeur de R_s, qu'on obtient facilement sous la forme

$$R_s = \frac{\sigma\, \theta_{1-s}(a)\, e^{-\frac{i\pi a}{2K} + i\lambda K'}}{i\, \theta_1'(0)}$$

et où l'on doit faire $a = -\omega$. En se rappelant la détermination du facteur σ, et écrivant pour un moment

$$\Omega = \sigma \frac{e^{\frac{i\pi\omega}{2K} + i\lambda K'}}{i\, \theta_1'(0)};$$

nous obtenons ainsi

$$R_0 = -i\Omega\, \theta_1(\omega), \qquad R_1 = i\Omega\, \theta_0(\omega), \qquad R_2 = \Omega\, \theta_3(\omega), \qquad R_3 = \Omega\, \theta_2(\omega).$$

Or on a

$$A = \frac{i}{k \operatorname{cn} \omega} Z_1, \qquad B = \frac{\operatorname{dn} \omega}{k \operatorname{cn} \omega} Z_2, \qquad C = -\frac{\operatorname{sn} \omega}{\operatorname{cn} \omega} Z_0, \qquad V = -in Z_3;$$

de là résultent, si l'on remplace N par Ω N et les quantités θ_s par Θ, H, ..., les valeurs suivantes

$$A = \frac{iN}{k \operatorname{cn} \omega} \frac{H(u-\omega)\, e^{\lambda u}}{i\, \Theta(\omega)\, \Theta(u)} = \frac{N}{\sqrt{kk'}} \frac{H(u-\omega)\, e^{\lambda u}}{H_1(\omega)\, \Theta(u)},$$

$$B = \frac{\operatorname{dn} \omega\, N}{k \operatorname{cn} \omega} \frac{H_1(u-\omega)\, e^{\lambda u}}{\Theta_1(\omega)\, \Theta(u)} = \frac{N}{\sqrt{k}} \frac{H_1(u-\omega)\, e^{\lambda u}}{H_1(\omega)\, \Theta(u)},$$

$$C = \frac{\operatorname{sn} \omega\, N}{\operatorname{cn} \omega} \frac{\Theta(u-\omega)\, e^{\lambda u}}{i\, H(\omega)\, \Theta(u)} = \frac{N}{\sqrt{k'}} \frac{\Theta(u-\omega)\, e^{\lambda u}}{i\, H_1(\omega)\, \Theta(u)},$$

$$V = -inN \frac{\Theta_1(u-\omega)\, e^{\lambda u}}{H_1(\omega)\, \Theta(u)}.$$

Je ne m'arrête pas à la détermination de la constante N qui s'obtient comme on l'a déjà vu au paragraphe XIV, page 300, elle a pour valeur $H'(0)e^{i\nu}$, et nous retrouvons bien, sauf le changement de λ en $i\lambda$, les résultats qu'il fallait obtenir.

Je reviens encore un moment sur la désignation par $\theta_s(u)$ des quatre fonctions fondamentales de Jacobi, afin de la rapprocher de la notation qui résulte de la définition même de ces fonctions, par la série

$$\theta_{\mu,\nu}(u) = e^{-\frac{\mu\nu i\pi}{2}} \sum (-1)^{m\nu}\, e^{\frac{i\pi}{K}\left[(2m+\mu)u + \frac{1}{4}(2m+\mu)^2 iK'\right]}.$$

Supposant μ et ν égaux à zéro ou à l'unité, on a donc en même temps

$$\begin{aligned} \Theta(u) &= \theta_0(u) = \theta_{0,1}(u), \\ H(u) &= \theta_1(u) = \theta_{1,1}(u), \\ H_1(u) &= \theta_2(u) = \theta_{1,0}(u), \\ \Theta_1(u) &= \theta_3(u) = \theta_{0,0}(u); \end{aligned}$$

et, en premier lieu, je remarquerai que le système des quatre équations fondamentales

$$\begin{aligned} \Theta(u+iK') &= i\, H(u)\, e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}, \\ H(u+iK') &= i\, \Theta(u)\, e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}, \\ H_1(u+iK') &= \Theta_1(u)\, e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}, \\ \Theta_1(u+iK') &= H_1(u)\, e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')}, \end{aligned}$$

peut être remplacé par la relation unique dont j'ai déjà fait usage, à savoir

$$\theta_s(u+i\mathrm{K}') = \sigma\,\theta_{1-s}(u)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2u+i\mathrm{K}')}.$$

On doit y joindre les suivantes

$$\begin{aligned}\theta_s(u+\mathrm{K}) &= \sigma'\,\theta_{3-s}(u),\\ \theta_s(u+\mathrm{K}+i\mathrm{K}') &= \sigma''\,\theta_{2+s}(u)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2u+i\mathrm{K}')},\end{aligned}$$

les facteurs σ, σ', σ'' ayant pour valeurs

$$\sigma = -e^{-\frac{i\pi}{4}(s+1)(s+2)(2s+1)}, \qquad \sigma' = e^{\frac{i\pi}{2}s(s-1)}, \qquad \sigma'' = e^{-\frac{i\pi}{4}s(s-1)};$$

puis celles-ci

$$\begin{aligned}\theta_s(u+2\mathrm{K}) &= (-1)^{\frac{1}{2}s(s+1)}\,\theta_s(u),\\ \theta_s(u+2i\mathrm{K}') &= -(-1)^{\frac{1}{2}s(s-1)}\,\theta_s(u)\,e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(u+i\mathrm{K}')}.\end{aligned}$$

Je remarquerai enfin qu'en passant du système de deux indices à un indice unique on est amené à exprimer, d'une manière générale, s au moyen de μ et ν. Si nous avons égard à la convention admise que s est pris suivant le module 4, on trouve aisément l'expression

$$s \equiv -1-\mu+\nu+2\mu\nu.$$

Cela étant, soit de même

$$s' \equiv -1-\mu'+\nu'+2\mu'\nu',$$

et désignons par S la quantité relative aux sommes $\mu+\mu'$ et $\nu+\nu'$. Les admirables travaux de M. Weierstrass ayant montré de quelle importance est, pour la théorie des fonctions abéliennes, l'addition des indices dans les fonctions θ à n variables, où entrent $2n$ quantités analogues à μ et ν, on est amené, dans le cas le plus simple des fonctions elliptiques, à chercher l'expression de S en s et s'. M. Lipschitz m'a communiqué la solution de cette question par la formule élégante

$$\mathrm{S} \equiv -1-s-s'-2ss' \qquad (\mathrm{mod}\,4),$$

et voici comment l'éminent géomètre la démontre. Écrivons l'égalité précédemment donnée : $s\equiv -1-\mu+\nu+2\mu\nu$ sous cette forme

$$2s+1 \equiv (2\mu+1)(2\nu-1) \qquad (\mathrm{mod}\,8),$$

et remarquons qu'on peut poser, μ et ν étant zéro ou l'unité,

$$2\mu+1 \equiv 3^{\mu}, \qquad 2\nu-1 \equiv -7^{\nu} \qquad (\mathrm{mod}\,8).$$

On en conclura

$$2s+1 \equiv -3^{\mu}7^{\nu} \qquad (\mathrm{mod}\,8);$$

or les relations analogues

$$2s'+1 \equiv -3^{\mu'}7^{\nu'}, \qquad 2\mathrm{S}+1 \equiv -3^{\mu+\mu'}7^{\nu+\nu'} \qquad (\mathrm{mod}\,8)$$

donneront immédiatement

$$2\mathrm{S}+1 \equiv -(2s+1)(2s'+1) \qquad (\mathrm{mod}\,8),$$

et l'on en conclut l'équation qu'il s'agissait d'obtenir.

XXV.

Nous avons vu que le système des quatre fonctions représentées, en faisant $s=0, 1, 2, 3$, par l'expression

$$\Phi_s(u) = \frac{\theta_s(u+a)\,e^{\lambda u}}{\mathrm{R}_s\,\theta_0(u)},$$

où a et λ sont des constantes quelconques et R_s le résidu correspondant au pôle $u=i\mathrm{K}'$ de $\dfrac{\theta_s(u+a)\,e^{\lambda u}}{\theta_0(u)}$, conduit aux équations différentielles suivantes (§ XXIII, p. 331),

$$\begin{aligned}ik\,\mathrm{cn}\,u\,\Phi_s(u) &= [\lambda+\mathrm{D}_a\log\theta_{1-s}(a)]\,\Phi_{2+s}(u)-\mathrm{D}_u\,\Phi_{2+s}(u),\\ k\,\mathrm{sn}\,u\,\Phi_s(u) &= [\lambda+\mathrm{D}_a\log\theta_{1-s}(a)]\,\Phi_{1-s}(u)-\mathrm{D}_u\,\Phi_{1-s}(u),\\ i\,\mathrm{dn}\,u\,\Phi_s(u) &= [\lambda+\mathrm{D}_a\log\theta_{1-s}(a)]\,\Phi_{3-s}(u)-\mathrm{D}_u\,\Phi_{3-s}(u).\end{aligned}$$

Ces relations me paraissent appeler l'attention, comme donnant d'elles-mêmes des équations linéaires du second ordre, dont la solution complète s'obtient, ainsi que celle de Lamé, dans le cas de $n=1$, par des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, ayant la demi-période $i\mathrm{K}'$ pour infini simple. Pour y parvenir facilement, il convient de représenter les quantités $ik\,\mathrm{cn}\,u$, $k\,\mathrm{sn}\,u$, $i\,\mathrm{dn}\,u$ par U_1, U_2, U_3, de manière à avoir sous forme entièrement symétrique

$$\mathrm{D}_u\mathrm{U}_1 = -\mathrm{U}_2\mathrm{U}_3, \qquad \mathrm{D}_u\mathrm{U}_2 = -\mathrm{U}_1\mathrm{U}_3, \qquad \mathrm{D}_u\mathrm{U}_3 = -\mathrm{U}_1\mathrm{U}_2.$$

Cela étant, si nous changeons successivement s en $2+s$, $1-s$, $3-s$, on obtiendra, en écrivant, pour abréger, Φ_s au lieu de $\Phi_s(u)$ et ε_s pour $\lambda + D_a \log \theta_{1-s}(a)$, ces trois groupes de deux équations, à savoir

$$\begin{cases} U_1 \Phi_s = \varepsilon_s \Phi_{2+s} - D_u \Phi_{2+s}, \\ U_1 \Phi_{2+s} = \varepsilon_{2+s} \Phi_s - D_u \Phi_s, \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_2 \Phi_s = \varepsilon_s \Phi_{1-s} - D_u \Phi_{1-s}, \\ U_2 \Phi_{1-s} = \varepsilon_{1-s} \Phi_s - D_u \Phi_s, \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_3 \Phi_s = \varepsilon_s \Phi_{3-s} - D_u \Phi_{3-s}, \\ U_2 \Phi_{3-s} = \varepsilon_{3-s} \Phi_s - D_u \Phi_s. \end{cases}$$

L'élimination successive des quantités Φ_{2+s}, Φ_{1-s}, Φ_{3-s} donne ensuite

$$\text{(I)} \quad D_u^2 \Phi_s - (\varepsilon_s + \varepsilon_{2+s} + D_u \log U_1) D_u \Phi_s + (\varepsilon_s \varepsilon_{2+s} + \varepsilon_{2+s} D_u \log U_1 - U_1^2)\Phi_s = 0,$$

$$\text{(II)} \quad D_u^2 \Phi_s - (\varepsilon_s + \varepsilon_{1-s} + D_u \log U_2) D_u \Phi_s + (\varepsilon_s \varepsilon_{1-s} + \varepsilon_{1-s} D_u \log U_2 - U_2^2)\Phi_s = 0,$$

$$\text{(III)} \quad D_u^2 \Phi_s - (\varepsilon_s + \varepsilon_{3-s} + D_u \log U_3) D_u \Phi_s + (\varepsilon_s \varepsilon_{3-s} + \varepsilon_{3-s} D_u \log U_3 - U_3^2)\Phi_s = 0.$$

Nous avons donc trois équations du second ordre dont une solution particulière est la fonction $\Phi_s(u)$; voici comment on parvient à les intégrer complètement.

Faisons successivement dans (I), (II) et (III)

$$\Phi_s = X_1 e^{\frac{u}{2}(\varepsilon_s + \varepsilon_{2+s})},$$

$$\Phi_s = X_2 e^{\frac{u}{2}(\varepsilon_s + \varepsilon_{1-s})},$$

$$\Phi_s = X_3 e^{\frac{u}{2}(\varepsilon_s + \varepsilon_{3-s})};$$

on aura pour transformées

$$D_u^2 X_1 - D_u \log U_1 D_u X_1 - (\delta_1^2 + \delta_1 D_u \log U_1 + U_1^2) X_1 = 0,$$

$$D_u^2 X_2 - D_u \log U_2 D_u X_2 - (\delta_2^2 + \delta_2 D_u \log U_2 + U_2^2) X_2 = 0,$$

$$D_u^2 X_3 - D_u \log U_3 D_u X_3 - (\delta_3^2 + \delta_3 D_u \log U_3 + U_3^2) X_3 = 0,$$

en posant, pour abréger l'écriture,

$$\delta_1 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_s - \varepsilon_{2+s}), \qquad \delta_2 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_s - \varepsilon_{1-s}), \qquad \delta_3 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_s - \varepsilon_{3-s}).$$

Je remarque maintenant que ces équations ne changent pas si, en remplaçant dans la première, la deuxième et la troisième, s par $2+s$, $1-s$ et $3-s$, on écrit dans toutes en même temps $-u$

au lieu de u. Par conséquent, on peut, d'une solution, en tirer une autre : la première, par exemple, qui est vérifiée en prenant

$$X_1 = \Phi_s(u) e^{-\frac{u}{2}(\varepsilon_s + \varepsilon_{2+s})},$$

le sera encore si l'on fait

$$X_1 = \Phi_{2+s}(-u) e^{+\frac{u}{2}(\varepsilon_s + \varepsilon_{2+s})}.$$

En employant les formules

$$\varepsilon_s = \lambda + D_a \log \theta_{1-s}(a), \qquad \varepsilon_{2+s} = \lambda + D_a \log \theta_{3-s}(a),$$

et mettant pour abréger θ_s au lieu de $\theta_s(a)$, on en conclut pour l'intégrale générale

$$X_1 = \frac{C\,\theta_s(u+a)}{\theta_0(u)} e^{-\frac{u}{2} D_a \log \theta_{1-s}\theta_{3-s}} + \frac{C'\,\theta_{2+s}(u-a)}{\theta_0(u)} e^{\frac{u}{2} D_a \log \theta_{1-s}\theta_{3-s}}.$$

Les solutions des deux autres équations seront semblablement

$$X_2 = \frac{C\,\theta_s(u+a)}{\theta_0(u)} e^{-\frac{u}{2} D_a \log \theta_s \theta_{1-s}} + \frac{C'\,\theta_{1-s}(u-a)}{\theta_0(u)} e^{\frac{u}{2} D_a \log \theta_s \theta_{1-s}},$$

$$X_3 = \frac{C\,\theta_s(u+a)}{\theta_0(u)} e^{-\frac{u}{2} D_a \log \theta_s \theta_{2+s}} + \frac{C'\,\theta_{3-s}(u-a)}{\theta_0(u)} e^{\frac{u}{2} D_a \log \theta_s \theta_{2+s}}.$$

XXVI.

Les relations qui nous ont servi de point de départ donnent lieu à d'autres combinaisons dont se tirent de nouvelles équations du second ordre analogues aux précédentes, et qu'il est important de former. On a, par exemple, comme on le voit facilement,

$$U_1(\varepsilon_s \Phi_{1-s} - D_u \Phi_{1-s}) = U_2(\varepsilon_s \Phi_{2+s} - D_u \Phi_{2+s}),$$

et l'on en conclut, en changeant s en $1-s$,

$$U_1(\varepsilon_{1-s} \Phi_s - D_u \Phi_s) = U_2(\varepsilon_{1-s} \Phi_{3-s} - D_u \Phi_{3-s}).$$

Joignons à cette équation la suivante

$$U_3 \Phi_{3-s} = \varepsilon_{3-s} \Phi_s - D_u \Phi_s,$$

et l'on trouvera, par l'élimination de Φ_{3-s},

$$D_u^2\Phi_s-(\varepsilon_{1-s}+\varepsilon_{3-s}+D_u\log U_2U_3)D_u\Phi_s+(\varepsilon_{1-s}\varepsilon_{3-s}+\varepsilon_{1-s}D_u\log U_2+\varepsilon_{3-s}D_u\log U_3)\Phi_s=0.$$

De simples changements de lettres donneront ensuite

$$D_u^2\Phi_s-(\varepsilon_{3-s}+\varepsilon_{2+s}+D_u\log U_3U_1)D_u\Phi_s+(\varepsilon_{3-s}\varepsilon_{2+s}+\varepsilon_{3-s}D_u\log U_3+\varepsilon_{2+s}D_u\log U_1)\Phi_s=0,$$
$$D_u^2\Phi_s-(\varepsilon_{1-s}+\varepsilon_{2+s}+D_u\log U_1U_2)D_u\Phi_s+(\varepsilon_{1-s}\varepsilon_{2+s}+\varepsilon_{2+s}D_u\log U_2+\varepsilon_{1-s}D_u\log U_1)\Phi_s=0.$$

Cela posé, je fais dans la première, la deuxième et la troisième de ces équations, les substitutions

$$\Phi_s=Y_1\,e^{\frac{u}{2}(\varepsilon_{1-s}+\varepsilon_{3-s})},$$
$$\Phi_s=Y_2\,e^{\frac{u}{2}(\varepsilon_{3-s}+\varepsilon_{2+s})},$$
$$\Phi_s=Y_3\,e^{\frac{u}{2}(\varepsilon_{1-s}+\varepsilon_{2+s})}.$$

J'écris aussi, pour abréger,

$$\delta'_1=\tfrac{1}{2}(\varepsilon_{1-s}-\varepsilon_{3-s}),\qquad \delta'_2=\tfrac{1}{2}(\varepsilon_{3-s}-\varepsilon_{2+s}),\qquad \delta''=\tfrac{1}{2}(\varepsilon_{1-s}-\varepsilon_{2+s});$$

les transformées qui en résultent, savoir

$$D_u^2Y_1-D_u\log U_2U_3D_uY_1-\left(\delta_1'^2-\delta'_1D_u\log\frac{U_2}{U_3}\right)Y_1=0,$$
$$D_u^2Y_2-D_u\log U_3U_1D_uY_2-\left(\delta_2'^2-\delta'_2D_u\log\frac{U_3}{U_1}\right)Y_2=0,$$
$$D_u^2Y_3-D_u\log U_1U_2D_uY_3-\left(\delta_3'^2-\delta'_3D_u\log\frac{U_1}{U_2}\right)Y_3=0,$$

se reproduisent comme les équations en X, lorsqu'on change s en $2+s$, $1-s$, $3-s$ et u en $-u$, les quantités δ et δ', ainsi que les dérivées logarithmiques, changeant de signe. On en conclut immédiatement pour les intégrales complètes les formules

$$Y_1=\frac{C\,\theta_s(u+a)}{\theta_0(a)}e^{-\frac{u}{2}D_a\log\theta_s\theta_{2+s}}+\frac{C'\,\theta_{2+s}(u-a)}{\theta_0(u)}e^{\frac{u}{2}D_a\log\theta_s\theta_{2+s}},$$
$$Y_2=\frac{C\,\theta_s(u+a)}{\theta_0(a)}e^{-\frac{u}{2}D_a\log\theta_{2+s}\theta_{3-s}}+\frac{C'\,\theta_{1-s}(u-a)}{\theta_0(u)}e^{\frac{u}{2}D_a\log\theta_{2+s}\theta_{3-s}},$$
$$Y_3=\frac{C\,\theta_s(u+a)}{\theta_0(u)}e^{-\frac{u}{2}D_a\log\theta_s\theta_{3-s}}+\frac{C'\,\theta_{3-s}(u-a)}{\theta_0(u)}e^{\frac{u}{2}D_a\log\theta_s\theta_{3-s}}.$$

Ce sont donc les mêmes quotients des fonctions θ qui figurent dans les valeurs de X_1 et Y_1, X_2 et Y_2, X_3 et Y_3, les exponentielles

qui multiplient ces quotients étant seules différentes. Cette circonstance fait présumer l'existence d'équations linéaires du second ordre plus générales, dont la solution s'obtiendrait en remplaçant, dans les expressions $CA+C'B$ des quantités X et Y, les fonctions déterminées A et B par Ae^{pu} et Be^{-pu}, où p est une constante quelconque ; voici comment on les obtient.

XXVII.

Considérons en général une équation linéaire du second ordre à laquelle nous donnerons la forme suivante

$$PX''-P'X'+QX=0,$$

où P et Q sont des fonctions quelconques de la variable u, et dont l'intégrale soit

$$X=CA+C'B.$$

Je dis que, si l'on connaît le produit de deux solutions particulières, et qu'on fasse en conséquence

$$AB=R,$$

nous pourrons obtenir l'équation qui aurait pour solution l'expression plus générale

$$\mathfrak{X}=CA\,e^{pu}+C'B\,e^{-pu}.$$

J'observe à cet effet que, le résultat de l'élimination des constantes C et C' étant

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{X} & A & B \\ \mathfrak{X}' & Ap+A' & -Bp+B' \\ \mathfrak{X}'' & Ap^2+2A'p+A'' & Bp^2-2B'p+B'' \end{vmatrix}=0,$$

le développement du déterminant donne pour l'équation cherchée

$$\mathfrak{P}\mathfrak{X}''-\mathfrak{P}'\mathfrak{X}'+\mathfrak{Q}\mathfrak{X}=0,$$

les nouvelles fonctions $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ ayant pour expressions

$$\mathfrak{P}=AB'-BA'-2ABp,$$
$$\mathfrak{Q}=A'B''-B'A''+(AB''-4A'B'+BA'')p-3(AB'-BA')p^2+2ABp^3.$$

Or on a, quelles que soient les solutions particulières A et B, la relation

$$AB' - BA' = Pg,$$

en désignant par g une constante dont voici la détermination.

Donnons à la variable une valeur $u = u_0$ qui annule B dans cette équation et la suivante

$$AB' + BA' = R',$$

et soient P_0 et R'_0 les valeurs que prennent P et R'; on trouvera immédiatement la condition

$$P_0 g = R'_0.$$

La constante g étant ainsi connue, nous avons déjà la formule

$$\mathfrak{p} = Pg - 2Rp.$$

Pour obtenir $\mathfrak{Q}$, je remarque d'abord qu'on peut écrire

$$A'B'' - B'A'' = \frac{P'B' - QB}{P} A' - \frac{P'A' - QA}{P} B' = Qg,$$

puis semblablement

$$AB'' + BA'' = \frac{P'B' - QB}{P} A + \frac{P'A' - QA}{P} B = \frac{P'R' - 2QR}{P};$$

nous avons d'ailleurs

$$AB'' + 2A'B' + BA'' = R'',$$

par conséquent

$$AB'' - 4A'B' + BA'' = -\frac{2PR'' - 3P'R' + 6QR}{P},$$

et l'on en conclut la valeur cherchée

$$\mathfrak{Q} = Qg - \frac{2PR'' - 3P'R' + 6QR}{P} p - 3Pgp^2 + 2Rp^3.$$

Ce point établi, j'envisage, dans les équations différentielles en X_1, X_2, X_3, les expressions du produit AB, que je désignerai successivement par $R_1(u)$, $R_2(u)$, $R_3(u)$, en faisant

$$R_1(u) = \frac{\theta_1'^2(0)\,\theta_s(u+a)\,\theta_{2+s}(u-a)}{\theta_0^2(u)\,\theta_{1-s}(a)\,\theta_{3-s}(a)},$$

$$R_2(u) = \frac{\theta_1'^2(0)\,\theta_s(u+a)\,\theta_{1-s}(u-a)}{\theta_0^2(u)\,\theta_s(a)\,\theta_{1-s}(a)},$$

$$R_3(u) = \frac{\theta_1'^2(0)\,\theta_s(u+a)\,\theta_{3-s}(u-a)}{\theta_0^2(u)\,\theta_{1-s}(a)\,\theta_{2+s}(a)}.$$

Les formules élémentaires concernant les fonctions θ donneraient ces quantités pour chaque valeur de s, mais j'y parviendrai par une autre voie en conservant l'indice variable. Et d'abord, au moyen des relations

$$\theta_s(u + 2K) = (-1)^{\frac{s(s+1)}{2}} \theta_s(u),$$

$$\theta_s(u + 2iK') = (-1)^{\frac{(s+1)(s+2)}{2}} \theta_s(u)\, e^{-\frac{i\pi}{K}(u+iK')},$$

on obtient

$$R_1(u+2K) = -R_1(u), \qquad R_1(u+2iK') = -R_1(u),$$
$$R_2(u+2K) = -R_2(u), \qquad R_2(u+2iK') = +R_2(u),$$
$$R_3(u+2K) = +R_3(u), \qquad R_3(u+2iK') = -R_3(u).$$

Les fonctions $R_1(u)$, $R_2(u)$, $R_3(u)$ possèdent ainsi la même périodicité que $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{dn} u$, par conséquent les quantités proportionnelles U_1, U_2, U_3, ayant le seul pôle $u = iK'$ à l'intérieur du rectangle des périodes $2K$, $2iK'$, et pour résidu correspondant l'unité, peuvent servir, à leur égard, d'éléments simples. Employons maintenant l'équation

$$\theta_s(u + iK') = \sigma\, \theta_{1-s}(u)\, e^{-\frac{i\pi}{4K}(2u+iK')},$$

où j'ai posé

$$\sigma = -e^{-\frac{i\pi}{4}(s+1)(s+2)(2s+1)},$$

et désignons par σ_1, σ_2, σ_3 ce que devient σ, et, changeant s en $2+s$, $1-s$, $3-s$, nous trouverons (¹)

$$R_1(iK' + \varepsilon) = -\sigma\sigma_1 \frac{\theta_1'^2(0)\,\theta_{1-s}(a+\varepsilon)\,\theta_{3-s}(-a+\varepsilon)}{\theta_1^2(\varepsilon)\,\theta_{1-s}(a)\,\theta_{3-s}(a)},$$

$$R_2(iK' + \varepsilon) = -\sigma\sigma_2 \frac{\theta_1'^2(0)\,\theta_{1-s}(a+\varepsilon)\,\theta_s(-a+\varepsilon)}{\theta_1^2(\varepsilon)\,\theta_{1-s}(a)\,\theta_s(a)},$$

$$R_3(iK' + \varepsilon) = -\sigma\sigma_3 \frac{\theta_1'^2(0)\,\theta_{1-s}(a+\varepsilon)\,\theta_{2+s}(-a+\varepsilon)}{\theta_1^2(\varepsilon)\,\theta_{1-s}(a)\,\theta_{2+s}(a)}.$$

Cela étant, comme on peut introduire à volonté un facteur constant dans la fonction R, je prends, au lieu des expressions précédentes,

---

(¹) On démontre facilement qu'on a

$$\sigma\sigma_1 = +i, \qquad \sigma\sigma_2 = (-1)^{\frac{s(s-1)}{2}}, \qquad \sigma\sigma_3 = +i.$$

celles-ci, qui en diffèrent seulement par le signe ou le facteur $\pm i$, savoir

$$R_1(iK'+\varepsilon) = \frac{\theta_1'^2(0)\,\theta_{1-s}(a+\varepsilon)\,\theta_{3-s}(a-\varepsilon)}{\theta_1^2(\varepsilon)\,\theta_{1-s}(a)\,\theta_{3-s}(a)},$$
$$R_2(iK'+\varepsilon) = \frac{\theta_1'^2(0)\,\theta_{1-s}(a+\varepsilon)\,\theta_{s}(a-\varepsilon)}{\theta_1^2(\varepsilon)\,\theta_{1-s}(a)\,\theta_{s}(a)},$$
$$R_3(iK'+\varepsilon) = \frac{\theta_1'^2(0)\,\theta_{1-s}(a+\varepsilon)\,\theta_{2+s}(a-\varepsilon)}{\theta_1^2(\varepsilon)\,\theta_{1-s}(a)\,\theta_{2+s}(a)}.$$

Développant donc suivant les puissances de ε et faisant usage des quantités δ, précédemment introduites, qui donnent

$$\frac{\theta'_{1-s}(a)}{\theta_{1-s}(a)} - \frac{\theta'_{3-s}(a)}{\theta_{3-s}(a)} = 2\delta_1,$$
$$\frac{\theta'_{1-s}(a)}{\theta_{1-s}(a)} - \frac{\theta'_{s}(a)}{\theta_{s}(a)} = 2\delta_2,$$
$$\frac{\theta'_{1-s}(a)}{\theta_{1-s}(a)} - \frac{\theta'_{2+s}(a)}{\theta_{2+s}(a)} = 2\delta_3,$$

nous obtenons, pour les parties principales, les quantités

$$\frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{2\delta_1}{\varepsilon},\quad \frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{2\delta_2}{\varepsilon},\quad \frac{1}{\varepsilon^2}+\frac{2\delta_3}{\varepsilon},$$

et l'on en conclut les valeurs suivantes, qu'il s'agissait d'obtenir :

$$R_1(u) = 2\delta_1 U_1 - D_u U_1,$$
$$R_2(u) = 2\delta_2 U_2 - D_u U_2,$$
$$R_3(u) = 2\delta_3 U_3 - D_u U_3.$$

Ces résultats nous permettent de former les fonctions $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$; mais, pour la deuxième, le calcul est un peu long, et je me bornerai à en retenir cette conclusion, que dans les trois cas on parvient, en désignant par U une quantité qui soit successivement U_1, U_2, U_3, à des expressions de cette forme

$$\mathfrak{P} = \alpha U + \alpha' D_u U,$$
$$\mathfrak{Q} = \beta U + \beta' D_u U + \beta'' D_u^2 U,$$

où les coefficients α et β sont des constantes. Leur complication tient à ce qu'ils sont exprimés au moyen des quantités a et p qui figurent explicitement dans l'intégrale, et nous allons voir comment l'introduction d'autres éléments conduit à des valeurs beaucoup plus simples.

XXVIII.

Soient U et U_1 deux fonctions doublement périodiques de seconde espèce ayant chacune un pôle unique $u=0$, et représentées par les formules

$$U = \frac{H(u+\alpha)\,e^{pu}}{H(u)},\qquad U_1 = \frac{H(u+\beta)\,e^{qu}}{H(u)};$$

je me propose de former en général l'équation du second ordre, admettant pour intégrale l'expression

$$\mathfrak{X} = CU + C'U_1,$$

qui est

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{X} & U & U_1 \\ \mathfrak{X}' & U' & U_1' \\ \mathfrak{X}'' & U'' & U_1'' \end{vmatrix} = \mathfrak{P}\mathfrak{X}'' - \mathfrak{P}'\mathfrak{X}' + \mathfrak{Q}\mathfrak{X} = 0,$$

en posant

$$\mathfrak{P} = UU_1' - U_1U',\qquad \mathfrak{Q} = U'U_1'' - U_1'U''.$$

Nommons pour un moment μ et μ' les multiples de A, ν et ν' ceux de B; on voit d'abord que les coefficients $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ sont des fonctions de seconde espèce aux multiplicateurs $\mu\nu$ et $\mu'\nu'$, ayant de même pour seul pôle $u=0$, qui est un infini double pour $\mathfrak{P}$ et un infini triple pour $\mathfrak{Q}$. L'équation $\mathfrak{P}=0$ n'admet ainsi à l'intérieur du rectangle des périodes que deux racines, $u=a$ et $u=b$, et, en décomposant en éléments simples les fonctions de première espèce, $\frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}}$ et $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}}$, on aura les expressions suivantes,

$$\frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}} = \frac{H'(u-a)}{H(u-a)} + \frac{H'(u-b)}{H(u-b)} - 2\frac{H'(u)}{H(u)} + \lambda,$$
$$\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}} = \frac{P\,H'(u-a)}{H(u-a)} + \frac{Q\,H'(u-b)}{H(u-b)} + \frac{R\,H'(u)}{H(u)} + S,$$

où P, Q, ... sont des constantes assujetties à la condition

$$P+Q+R=0.$$

Les quantités a et b, que nous venons d'introduire, représentent donc, à l'égard de l'équation différentielle, des points que M. Weierstrass nomme *à apparence singulière*, $u=0$ étant seul un point singulier. Ce sont les véritables éléments qu'il convient d'employer comme appropriés à la formation de l'équation différentielle, au lieu des constantes α, β, p, q qui entrent dans les fonctions A et B. Je me fonderai, à cet effet, sur le lemme suivant, qui donnera, par un calcul facile, la détermination des coefficients P, Q, ...

Considérons l'équation différentielle

$$y'' - f(u)y' + g(u)y = 0,$$

où les fonctions uniformes $f(u)$, $g(u)$ admettent seulement des infinis simples qui soient, d'une part, $u = 0$ et de l'autre $u = a$, b, c, ... Posons d'abord, en développant suivant les puissances croissantes de ε,

$$f(\varepsilon) = -\frac{2}{\varepsilon} + \mathrm{F} + \ldots, \qquad g(\varepsilon) = \frac{\mathrm{G}}{\varepsilon} + \ldots,$$

et en second lieu, pour les diverses quantités a, b, c, ...,

$$f(a+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + f_a + \ldots, \qquad g(a+\varepsilon) = \frac{g_a}{\varepsilon} + g_a^1 + \ldots.$$

Si l'on a, d'autre part,

$$\mathrm{F} + \mathrm{G} = 0,$$

puis, pour toutes les quantités a, b, c, ...,

$$g_a^1 = g_a(f_a - g_a),$$

l'intégrale de l'équation proposée sera une fonction uniforme ayant pour seul point singulier $u = 0$, et, dans le domaine de ce point, les intégrales nommées *fondamentales* par M. Fuchs seront de la forme $\varphi_1(u)$ et $\frac{1}{u} + \varphi_2(u)$, où $\varphi_1(u)$ et $\varphi_2(u)$ représentent des séries qui procèdent suivant les puissances ascendantes entières et positives de la variable.

XXIX.

Ce sont ces belles et importantes découvertes de M. Fuchs dans la théorie générale des équations différentielles linéaires qui permettent ainsi d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes

pour que l'intégrale complète de l'équation considérée soit une fonction uniforme de la variable. Il n'est pas inutile, à l'égard de ces conditions, de remarquer qu'elles se conservent, comme on le vérifie aisément, dans les transformées auxquelles conduit la substitution $y = ze^{-\alpha u}$, à savoir

$$z'' - [2\alpha + f(u)]z' + [\alpha^2 + \alpha f(u) + g(u)]z = 0.$$

J'observe encore qu'on peut supposer doublement périodiques les fonctions $f(u)$ et $g(u)$, en convenant que les quantités $u = 0$, $u = a$, $u = b$, ..., au lieu de représenter tous leurs pôles, désigneront seulement ceux de ces pôles qui sont à l'intérieur du rectangle des périodes. Soit donc, en nous plaçant dans ce cas,

$$f(u) = \frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}},$$

$$g(u) = \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}},$$

ou bien, d'après la remarque qui vient d'être faite,

$$f(u) = 2\alpha + \frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}},$$

$$g(u) = \alpha^2 + \alpha\frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}} + \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{P}},$$

α étant une constante arbitraire. Je disposerai de cette constante de sorte qu'on ait

$$f(u) = \frac{\mathrm{H}'(u-a)}{\mathrm{H}(u-a)} + \frac{\mathrm{H}'(u-b)}{\mathrm{H}(u-b)} - 2\frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)} + \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)},$$

et par conséquent, d'après les formules connues,

$$f(u) = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-a)} + \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-b)}.$$

Cela étant, il est clair qu'on peut écrire, avec trois indéterminées, A, B, C,

$$g(u) = \frac{\mathrm{A} \operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-a)} + \frac{\mathrm{B} \operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-b)} + \mathrm{C},$$

et nous tirerons sur-le-champ de ces expressions les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{F} &= -\frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} - \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b},\\
\mathrm{G} &= -\mathrm{A} - \mathrm{B},\\
f_a &= -\frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} + \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)},\\
g_a &= \mathrm{A},\\
g_a^1 &= -\frac{\mathrm{A} \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} + \frac{\mathrm{B} \operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)} + \mathrm{C}.
\end{aligned}$$

Or la condition

$$g_a^1 = g_a(f_a - g_a)$$

conduit à

$$\frac{\operatorname{sn} b(\mathrm{A}-\mathrm{B})}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)} - \mathrm{A}^2 - \mathrm{C} = 0;$$

le second pôle $u = b$ donne semblablement

$$\frac{\operatorname{sn} a(\mathrm{B}-\mathrm{A})}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b-a)} - \mathrm{B}^2 - \mathrm{C} = 0,$$

et l'on conclut enfin de l'équation $\mathrm{F}+\mathrm{G}=0$

$$\frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} + \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b} + \mathrm{A} + \mathrm{B} = 0.$$

Je remarque immédiatement que cette dernière relation n'est point distincte des deux autres et qu'elle en résulte en les retranchant membre à membre et divisant par $\mathrm{A}-\mathrm{B}$. En l'employant avec la première, nous trouvons, par l'élimination de B,

$$\mathrm{A}^2 - 2\mathrm{A}\frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)} - \frac{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b}{\operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2(a-b)} + \mathrm{C} = 0,$$

ou encore

$$\left[\mathrm{A} - \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)}\right]^2 - \frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)} + \mathrm{C} = 0.$$

Remplaçant désormais C par $\frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)} - \mathrm{C}^2$, on voit qu'on aura

$$\mathrm{A} = \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)} + \mathrm{C},$$

et par conséquent

$$\mathrm{B} = \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b-a)} - \mathrm{C}.$$

Telles sont donc, exprimées au moyen de la nouvelle indéterminée C, les valeurs très simples des constantes A et B pour lesquelles, d'après les principes de M. Fuchs, l'intégrale complète de l'équation

$$\begin{aligned}
y'' &- \left[\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-a)} + \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-b)}\right] y'\\
&+ \left[\frac{\mathrm{A} \operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-a)} + \frac{\mathrm{B} \operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-b)} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)} - \mathrm{C}^2\right] y = 0
\end{aligned}$$

est une fonction uniforme de la variable avec le seul pôle $u = 0$.

Nous sommes assurés de plus, par une proposition générale de M. Picard (*Comptes rendus* du 21 juillet 1879, p. 140, et du 19 janvier 1880, p. 128), que cette intégrale s'exprime dès lors par deux fonctions périodiques de seconde espèce. Si donc on restitue, en faisant la substitution $y = ze^{\alpha u}$, une constante arbitraire dont il a été disposé pour simplifier les calculs, il est certain que la nouvelle équation différentielle contiendra, comme cas particuliers, toutes celles dont il a été précédemment question. C'est, en effet, ce que je ferai bientôt voir; mais je veux auparavant obtenir une confirmation de l'important théorème du jeune géomètre en effectuant directement l'intégration de cette équation et donner ainsi, avant d'aborder des cas plus généraux, un nouvel exemple du procédé déjà employé pour l'équation de Lamé dans le cas le plus simple de $n = 1$.

XXX.

Considérons la fonction doublement périodique de seconde espèce la plus générale, admettant pour seul pôle $u = 0$, à savoir

$$f(u) = \frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(u+\omega)}{\Theta(\omega)\,\mathrm{H}(u)}\, e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right] u},$$

et proposons-nous de déterminer ω et λ de telle sorte qu'elle soit une solution de l'équation proposée. Soit, à cet effet, $\Phi(u)$ le résultat de la substitution de $f(u)$ dans son premier membre. Les coefficients de l'équation ayant pour périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$, on voit que cette quantité est une fonction de seconde espèce, ayant les mêmes multiplicateurs que $f(u)$, qui pourra, par conséquent, remplir à son égard le rôle d'élément simple. On voit aussi que les pôles de $\Phi(u)$ sont $u=a$, $u=b$, $u=0$, les deux premiers représentant des infinis simples et le troisième un infini triple. Nous aurons donc

$$\Phi(u)=\mathfrak{A}\,f(u-a)+\mathfrak{B}\,f(u-b)+\mathfrak{C}\,f(u)+\mathfrak{C}'\,f'(u)+\mathfrak{C}''\,f''(u),$$

et la condition $\Phi(u)=0$ entraîne ces cinq équations

$$\mathfrak{A}=0,\qquad \mathfrak{B}=0,\qquad \mathfrak{C}=0,\qquad \mathfrak{C}'=0,\qquad \mathfrak{C}''=0,$$

qu'il est aisé de former, comme on va voir.

Nous avons pour cela à décomposer en éléments simples les produits de $f(u)$ et $f'(u)$ par deux quantités de la même forme $\dfrac{\operatorname{sn} p}{\operatorname{sn} u \operatorname{sn}(u-p)}$, c'est-à-dire à chercher les parties principales des développements de ces produits, d'abord suivant les puissances de u, puis, en posant $u=p+\varepsilon$, suivant les puissances de ε. Or il résulte de l'expression de $f(u)$ qu'on a

$$f(u)=\chi(i\mathrm{K}'+u)\,e^{\lambda u},$$

$\chi(u)$ désignant la fonction considérée au paragraphe V, page 277, et par conséquent

$$\begin{aligned} f(u) &= \left[\frac{1}{u}-\frac{1}{2}\left(k^2\operatorname{sn}^2\omega-\frac{1+k^2}{3}\right)u+\ldots\right]e^{\lambda u} \\ &= \frac{1}{u}+\lambda+\frac{1}{2}\left(\lambda^2-k^2\operatorname{sn}^2\omega+\frac{1+k^2}{3}\right)u+\ldots. \end{aligned}$$

On trouve ensuite

$$\frac{\operatorname{sn} p}{\operatorname{sn} u\operatorname{sn}(u-p)}=-\frac{1}{u}-\frac{\operatorname{cn} p\operatorname{dn} p}{\operatorname{sn} p}-\left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2 p}-\frac{1+k^2}{3}\right)u+\ldots$$

et sans nouveau calcul, en remplaçant u par $-\varepsilon$,

$$\frac{\operatorname{sn} p}{\operatorname{sn}(p+\varepsilon)\operatorname{sn}\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}-\frac{\operatorname{cn} p\operatorname{dn} p}{\operatorname{sn} p}+\left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2 p}-\frac{1+k^2}{3}\right)\varepsilon+\ldots.$$

Ces développements nous donnent les formules

$$\frac{\operatorname{sn} p}{\operatorname{sn} u\operatorname{sn}(u-p)}f(u)=f(p)f(u-p)-\left(\lambda+\frac{\operatorname{cn} p\operatorname{dn} p}{\operatorname{sn} p}\right)f(u)+f'(u),$$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sn} p}{\operatorname{sn} u\operatorname{sn}(u-p)}f'(u) &= f'(p)f(u-p)-\frac{1}{2}\left(\lambda^2-k^2\operatorname{sn}^2\omega-\frac{2}{\operatorname{sn}^2 p}+1+k^2\right)f(u) \\ &\quad -\frac{\operatorname{cn} p\operatorname{dn} p}{\operatorname{sn} p}f'(u)+\frac{1}{2}f''(u), \end{aligned}$$

et l'on en conclut, en faisant successsivement $p=a$, $p=b$, les expressions cherchées

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mathrm{A}\,f(a)-f'(a), \\ \mathfrak{B} &= \mathrm{B}\,f(b)-f'(b), \\ \mathfrak{C} &= \lambda^2-\mathrm{A}\left(\lambda+\frac{\operatorname{cn} a\operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a}\right)-\mathrm{B}\left(\lambda+\frac{\operatorname{cn} b\operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b}\right)-\mathrm{C}^2+\frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)} \\ &\quad -k^2\operatorname{sn}^2\omega-\frac{1}{\operatorname{sn}^2 a}-\frac{1}{\operatorname{sn}^2 b}+1+k^2, \\ \mathfrak{C}' &= \mathrm{A}+\mathrm{B}+\frac{\operatorname{cn} a\operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a}+\frac{\operatorname{cn} b\operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b}, \\ \mathfrak{C}'' &= 0. \end{aligned}$$

Ces résultats obtenus, nous observons d'abord que $\mathfrak{C}'$ s'évanouit, d'après une des relations trouvées entre A et B; j'ajoute que l'équation $\mathfrak{C}=0$ est une conséquence des deux premières; par conséquent, les cinq conditions se réduisent, comme il est nécessaire, à deux seulement, qui serviront à déterminer ω et λ. Nous recourrons, pour l'établir, à la transformation suivante de la valeur de $\mathfrak{C}$. Soit, pour abréger l'écriture,

$$\begin{aligned} \mathrm{G} &= \left(\lambda-\mathrm{C}+\frac{\operatorname{cn} b\operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b}\right)\left(\lambda+\mathrm{C}+\frac{\operatorname{cn} a\operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a}\right), \\ \mathrm{H} &= \left(\mathrm{A}-\mathrm{C}+\frac{\operatorname{cn} b\operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b}\right)\left(\mathrm{B}+\mathrm{C}+\frac{\operatorname{cn} a\operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a}\right); \end{aligned}$$

on a identiquement

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= \mathrm{G}-\mathrm{H}+(\mathrm{A}-\mathrm{C})(\mathrm{B}+\mathrm{C})-k^2\operatorname{sn}^2\omega \\ &\quad +\frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)}-\frac{1}{\operatorname{sn}^2 a}-\frac{1}{\operatorname{sn}^2 a}+1+k^2, \end{aligned}$$

et plus simplement déjà

$$\mathfrak{C}=\mathrm{G}-\mathrm{H}-k^2\operatorname{sn}^2\omega-\frac{1}{\operatorname{sn}^2 a}-\frac{1}{\operatorname{sn}^2 b}+1+k^2.$$

les valeurs de A et B que je rappelle

$$\mathrm{A}=\frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a\operatorname{sn}(a-b)}+\mathrm{C},\qquad \mathrm{B}=\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b\operatorname{sn}(b-a)}-\mathrm{C},$$

donnant

$$(\mathrm{A}-\mathrm{C})(\mathrm{B}+\mathrm{C})=-\frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)}.$$

Nous obtenons ensuite, en faisant usage de ces expressions,

$$\begin{aligned}\mathrm{H} &= \left[\frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)} + \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b}\right]\left[\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b-a)} + \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a}\right] \\ &= -\frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)} + \frac{1}{\operatorname{sn}(a-b)}\left(\frac{\operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 a} - \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn}^2 b}\right) + \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn} b}.\end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\operatorname{sn}(a-b)}\left(\frac{\operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 a} - \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn}^2 b}\right) - \\ &\quad = \left(\frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b}\right)\left(\frac{\operatorname{sn}^3 b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{sn}^3 a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}\right) \\ &\quad = -\frac{\operatorname{sn}^2 a + \operatorname{sn}^2 b}{\operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b} - \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn} b} + 1 + k^2,\end{aligned}$$

et la valeur de H qui en résulte, à savoir

$$\mathrm{H} = -\frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 a} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 b} + 1 + k^2,$$

donne cette nouvelle réduction

$$\mathfrak{C} = \mathrm{G} - k^2 \operatorname{sn}^2 \omega + \frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)}.$$

C'est maintenant qu'il est nécessaire d'introduire les conditions $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{A} = \frac{f'(a)}{f(a)}$, $\mathrm{B} = \frac{f'(b)}{f(b)}$. Or, au moyen des valeurs de A, de B et de l'expression

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{\Theta'(x+\omega)}{\Theta(x+\omega)} - \frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)} - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} + \lambda, \\ &= -k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn} \omega \operatorname{sn}(x+\omega) - \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x} + \lambda,\end{aligned}$$

on en tire

$$\begin{aligned}\lambda - \mathrm{C} &= \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)} + \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} \omega \operatorname{sn}(a+\omega), \\ \lambda + \mathrm{C} &= \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b-a)} + \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b} + k^2 \operatorname{sn} b \operatorname{sn} \omega \operatorname{sn}(b+\omega).\end{aligned}$$

Cela étant, une réduction qui se présente facilement donne

$$\begin{aligned}\lambda - \mathrm{C} + \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b} &= \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a-b)} + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} \omega \operatorname{sn}(a+\omega), \\ \lambda + \mathrm{C} + \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} &= \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(b-a)} + k^2 \operatorname{sn} b \operatorname{sn} \omega \operatorname{sn}(b+\omega),\end{aligned}$$

et nous pouvons écrire en conséquence

$$\begin{aligned}\mathrm{G} = &\left[\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a-b)} + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} \omega \operatorname{sn}(a+\omega)\right] \\ &\times\left[\frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(b-a)} + k^2 \operatorname{sn} b \operatorname{sn} \omega \operatorname{sn}(b+\omega)\right].\end{aligned}$$

Je considérerai cette expression comme une fonction doublement périodique de ω, ayant pour infinis simples $\omega = i\mathrm{K}' - a$, $\omega = i\mathrm{K}' - b$, et pour infini double $\omega = i\mathrm{K}'$. Elle présente cette circonstance que les résidus qui correspondent aux infinis simples sont nuls. En effet, des deux facteurs dont elle se compose, le premier s'évanouit en faisant $\omega = i\mathrm{K}' - b$, et le second pour $\omega = i\mathrm{K}' - a$. Il en résulte que le résidu relatif au troisième pôle $\omega = i\mathrm{K}'$ est également nul, de sorte qu'en décomposant en éléments simples on obtient

$$\mathrm{G} = -\mathrm{D}_\omega \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} + \text{const.} = k^2 \operatorname{sn}^2 \omega + \text{const.}$$

Posons, afin de déterminer la constante, $\omega = 0$; nous trouverons finalement

$$\mathrm{G} = k^2 \operatorname{sn}^2 \omega - \frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)},$$

et de là résulte, comme il importait essentiellement de le démontrer, que l'équation $\mathfrak{C} = 0$ est une conséquence des relations $\mathfrak{A} = 0$ et $\mathfrak{B} = 0$.

XXXI.

La détermination des constantes ω et λ s'effectue au moyen des deux équations

$$\begin{aligned}\lambda - \mathrm{C} &= \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)} + \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a} + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} \omega \operatorname{sn}(a+\omega), \\ \lambda + \mathrm{C} &= \frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b-a)} + \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b} + k^2 \operatorname{sn} b \operatorname{sn} \omega \operatorname{sn}(b+\omega),\end{aligned}$$

que nous avons maintenant à traiter. En les retranchant et après une réduction qui s'offre facilement, elles donnent d'abord

$$\begin{aligned}&k^2 \operatorname{sn} \omega [\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b+\omega) - \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a+\omega)] \\ &\quad - 2\frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b} - 2\mathrm{C} = 0,\end{aligned}$$

et nous démontrerons immédiatement, le premier membre étant une fonction doublement périodique, qu'on n'aura, dans le rectangle des périodes $2K$ et $2iK'$, que deux valeurs pour l'inconnue. En effet, la fonction, qui au premier abord paraît avoir les trois pôles $\omega = iK' - a$, $\omega = iK' - b$, $\omega = iK'$, ne possède en réalité que les deux premiers, le résidu relatif au troisième, qui est un infini simple, étant nul, comme on le vérifie aisément. Ce point établi, nous donnerons, pour éviter des longueurs de calcul, une autre forme à l'équation, en employant l'identité suivante

$$\begin{aligned}&\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b+\omega) - \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a+\omega)\\ &\quad = \operatorname{sn}(b-a)\operatorname{sn}(a+b+\omega)[1 - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+\omega)\operatorname{sn}(b+\omega)],\end{aligned}$$

à laquelle je m'arrête un moment. Elle est la conséquence immédiate de la relation mémorable obtenue par Jacobi, dans un article intitulé : *Formulæ novæ in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales* (*Journal de Crelle*, t. XV, p. 201, et *Gesammelte Werke*, t. I, p. 337), à savoir

$$\begin{aligned}&E(u) + E(a) + E(b) - E(u+a+b)\\ &\quad = k^2 \operatorname{sn}(u+a)\operatorname{sn}(u+b)\operatorname{sn}(a+b)[1 - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(u+a+b)].\end{aligned}$$

Qu'on change en effet a en $-a$, puis u en $a+\omega$, on aura

$$\begin{aligned}&E(a+\omega) - E(a) + E(b) - E(b+\omega)\\ &\quad = k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(b-a)\operatorname{sn}(a+b+\omega)[1 - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+\omega)\operatorname{sn}(b+\omega)]\end{aligned}$$

et il suffit de remarquer que le premier membre, étant la différence des quantités

$$E(a+\omega) - E(a) - E(\omega), \qquad E(b+\omega) - E(b) - E(\omega),$$

peut être remplacé par

$$k^2 \operatorname{sn}\omega[\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b+\omega) - \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a+\omega)].$$

On y parvient encore d'une autre manière au moyen de la relation précédemment démontrée

$$\begin{aligned}G = {}&\left[\frac{\operatorname{sn} a}{\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a-b)} + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(a+\omega)\right]\\ &\times\left[\frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(b-a)} + k^2 \operatorname{sn} b \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(b+\omega)\right] = k^2 \operatorname{sn}^2\omega - \frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)},\end{aligned}$$

car on en tire

$$\begin{aligned}&\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+\omega) - \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(b+\omega)\\ &\quad = \operatorname{sn}\omega \operatorname{sn}(b-a)[1 - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+\omega)\operatorname{sn}(b+\omega)],\end{aligned}$$

ce qui donne la formule proposée en changeant a en $-a$, b en $-b$ et ω en $\omega + a + b$.

Cela posé, soit $\upsilon = \omega + \frac{a+b}{2}$; faisons aussi, pour abréger, $\alpha = \frac{a+b}{2}$, $\beta = \frac{a-b}{2}$; nous trouverons, par cette formule,

$$\begin{aligned}&\operatorname{sn}\omega[\operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b+\omega) - \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a+\omega)]\\ &\quad = -\operatorname{sn} 2\beta \operatorname{sn}(\upsilon+\alpha)\operatorname{sn}(\upsilon-\alpha)\\ &\qquad \times[1 - k^2 \operatorname{sn}(\alpha+\beta)\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\upsilon+\beta)\operatorname{sn}(\upsilon-\beta)].\end{aligned}$$

Or, on voit que le second membre devient ainsi une fonction rationnelle de $\operatorname{sn}^2\upsilon$; on peut, en outre, supprimer au numérateur et au dénominateur le facteur $1 - k^2 \operatorname{sn}^2\upsilon \operatorname{sn}^2\alpha$, de sorte qu'il se réduit à l'expression

$$-\frac{\operatorname{sn} 2\beta(1 - k^2 \operatorname{sn}^4\beta)(\operatorname{sn}^2\upsilon - \operatorname{sn}^2\alpha)}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{sn}^2\beta)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2\upsilon \operatorname{sn}^2\beta)}.$$

Remarquant encore qu'on a

$$\operatorname{sn} 2\beta(1 - k^2 \operatorname{sn}^4\beta) = 2 \operatorname{sn}\beta \operatorname{cn}\beta \operatorname{dn}\beta,$$

nous poserons, pour simplifier l'écriture,

$$L = \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{sn}^2\beta}{k^2 \operatorname{sn}\beta \operatorname{cn}\beta \operatorname{dn}\beta}\left(\frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b} + C\right),$$

et l'équation en $\operatorname{sn}\upsilon$ sera simplement

$$\frac{\operatorname{sn}^2\upsilon - \operatorname{sn}^2\alpha}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\upsilon \operatorname{sn}^2\beta} = -L.$$

On en tire

$$\operatorname{sn}^2\upsilon = \frac{\operatorname{sn}^2\alpha - L}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\beta L}, \quad \operatorname{cn}^2\upsilon = \frac{\operatorname{cn}^2\alpha + \operatorname{dn}^2\beta L}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\beta L}, \quad \operatorname{dn}^2\upsilon = \frac{\operatorname{dn}^2\alpha + k^2 \operatorname{cn}^2\beta L}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2\beta L},$$

et, si l'on fait

$$\mathfrak{L} = (\operatorname{sn}^2\alpha - L)(\operatorname{cn}^2\alpha + \operatorname{dn}^2\beta L)(\operatorname{dn}^2\alpha + k^2 \operatorname{cn}^2\beta L)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2\beta L),$$

ces valeurs donnent

$$\operatorname{sn}\upsilon \operatorname{cn}\upsilon \operatorname{dn}\upsilon = \frac{\sqrt{\mathfrak{L}}}{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2\beta L)^2}.$$

Nous ferons usage de cette expression pour le calcul de λ, qui nous reste à déterminer. A cet effet je reprends, pour les ajouter membre à membre, les équations

$$\lambda - \mathrm{C} = \frac{\mathrm{sn}\, b}{\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{sn}(a-b)} + \frac{\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a}{\mathrm{sn}\, a} + k^2 \,\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{sn}\,\omega \,\mathrm{sn}(a+\omega),$$

$$\lambda + \mathrm{C} = \frac{\mathrm{sn}\, a}{\mathrm{sn}\, b \,\mathrm{sn}(b-a)} + \frac{\mathrm{cn}\, b \,\mathrm{dn}\, b}{\mathrm{sn}\, b} + k^2 \,\mathrm{sn}\, b \,\mathrm{sn}\,\omega \,\mathrm{sn}(b+\omega),$$

et j'obtiens, comme on le voit facilement,

$$2\lambda = k^2[\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{sn} \quad \mathrm{sn}(a+\omega) + \mathrm{sn}\, b \,\mathrm{sn}\,\omega \,\mathrm{sn}(b+\omega)],$$

ou bien encore

$$\begin{aligned} 2\lambda = k^2[&\quad \mathrm{sn}(\alpha+\beta)\,\mathrm{sn}(\upsilon-\alpha)\,\mathrm{sn}(\upsilon+\beta) \\ &+ \mathrm{sn}(\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}(\upsilon-\alpha)\,\mathrm{sn}(\upsilon-\beta)]. \end{aligned}$$

Maintenant, un calcul sans difficulté donne en premier lieu l'expression

$$\begin{aligned} \lambda = &\quad \frac{k^2 \,\mathrm{sn}\,\alpha \,\mathrm{cn}\,\alpha \,\mathrm{dn}\,\alpha(\mathrm{sn}^2\upsilon - \mathrm{sn}^2\beta)}{(1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2\upsilon \,\mathrm{sn}^2\alpha)(1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2\alpha \,\mathrm{sn}^2\beta)} \\ &+ \frac{k^2 \,\mathrm{sn}\,\upsilon \,\mathrm{cn}\,\upsilon \,\mathrm{dn}\,\upsilon(\mathrm{sn}^2\beta - \mathrm{sn}^2\alpha)}{(1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2\upsilon \,\mathrm{sn}^2\alpha)(1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2\upsilon \,\mathrm{sn}^2\beta)}; \end{aligned}$$

on en conclut ensuite la valeur cherchée, à savoir

$$\begin{aligned} \lambda = &\quad \frac{k^2 \,\mathrm{sn}\,\alpha \,\mathrm{cn}\,\alpha \,\mathrm{dn}\,\alpha[\mathrm{sn}^2\alpha - \mathrm{sn}^2\beta - (1 - k^2 \,\mathrm{sn}^4\beta)\mathrm{L}]}{(1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2\alpha \,\mathrm{sn}^2\beta)[1 - k^2 \,\mathrm{sn}^4\alpha + k^2(\mathrm{sn}^2\alpha - \mathrm{sn}^2\beta)\mathrm{L}]} \\ &+ \frac{k^2(\mathrm{sn}^2\beta - \mathrm{sn}^2\alpha)\sqrt{\mathfrak{L}}}{(1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2\alpha \,\mathrm{sn}^2\beta)[1 - k^2 \,\mathrm{sn}^4\alpha + k^2(\mathrm{sn}^2\alpha - \mathrm{sn}^2\beta)\mathrm{L}]}. \end{aligned}$$

Cette expression devient illusoire lorsqu'on suppose d'abord $1 - k^2 \mathrm{sn}^2\alpha \,\mathrm{sn}^2\beta = 0$, c'est-à-dire

$$\alpha + \beta = a = i\mathrm{K}',$$

ou bien

$$\alpha - \beta = b = i\mathrm{K}',$$

puis en faisant

$$1 - k^2 \,\mathrm{sn}^4\alpha + k^2(\mathrm{sn}^2\alpha - \mathrm{sn}^2\beta)\mathrm{L} = 0.$$

La première condition, ayant pour effet de rendre infinis les coefficients de l'équation différentielle, doit être écartée; mais la

seconde appelle l'attention, et je m'y arrêterai un moment, afin d'obtenir la nouvelle forme analytique que prend l'intégrale dans ce cas singulier.

XXXII.

Remarquons en premier lieu que cette condition se trouve en posant

$$\mathrm{sn}^2\upsilon = \frac{\mathrm{sn}^2\alpha - \mathrm{L}}{1 - k^2 \,\mathrm{sn}^2\beta \,\mathrm{L}} = \frac{1}{k^2 \,\mathrm{sn}^2\alpha},$$

c'est-à-dire $\upsilon = \alpha + i\mathrm{K}'$, et donne par conséquent $\omega = i\mathrm{K}'$. Cela étant, je fais dans la solution de l'intégrale, qui est représentée par la formule

$$\frac{\Theta(u+\omega)}{\mathrm{H}(u)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u}, \qquad \omega = i\mathrm{K}' + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit, et je développe suivant les puissances croissantes de ε la différence $\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}$. Or, l'expression précédemment employée

$$2\lambda = k^2[\mathrm{sn}\, a \,\mathrm{sn}\,\omega \,\mathrm{sn}(a+\omega) + \mathrm{sn}\, b \,\mathrm{sn}\,\omega \,\mathrm{sn}(b+\omega)]$$

donne facilement

$$\lambda = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a}{2 \,\mathrm{sn}\, a} - \frac{\mathrm{cn}\, b \,\mathrm{dn}\, b}{2 \,\mathrm{sn}\, b} + \ldots;$$

nous avons d'ailleurs

$$\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \frac{\mathrm{H}'(\varepsilon)}{\mathrm{H}(\varepsilon)} - \frac{i\pi}{2\mathrm{K}} = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{i\pi}{2\mathrm{K}} + \ldots,$$

et l'on conclut, pour $\varepsilon = 0$, la limite finie

$$\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \frac{i\pi}{2\mathrm{K}} - \frac{\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a}{2 \,\mathrm{sn}\, a} - \frac{\mathrm{cn}\, b \,\mathrm{dn}\, b}{2 \,\mathrm{sn}\, b}.$$

Remplaçant donc $\Theta(u + i\mathrm{K}')$ par $i\mathrm{H}(u)e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2u + i\mathrm{K}')}$, on voit qu'au lieu de la fonction doublement périodique de seconde espèce nous obtenons l'exponentielle $e^{-\left(\frac{\mathrm{cn}\, a \,\mathrm{dn}\, a}{2 \,\mathrm{sn}\, a} + \frac{\mathrm{cn}\, b \,\mathrm{dn}\, b}{2 \,\mathrm{sn}\, b}\right)u}$, qui devient ainsi une des solutions de l'équation différentielle. Nous par-venons à l'autre solution en employant, au lieu de $\upsilon = \alpha + i\mathrm{K}'$, la valeur égale et de signe contraire $\upsilon = -\alpha - i\mathrm{K}'$, d'où l'on tire $\omega = -2\alpha - i\mathrm{K}' = -a - b - i\mathrm{K}'$, et par conséquent

$$\lambda = \frac{\operatorname{sn}^2 a + \operatorname{sn}^2 b}{2\operatorname{sn}(a+b)\operatorname{sn} a \operatorname{sn} b}, \qquad \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = -\frac{\mathrm{H}'(a+b)}{\mathrm{H}(a+b)} + \frac{i\pi}{2\mathrm{K}}.$$

Des réductions qui s'offrent d'elles-mêmes en employant la formule

$$\frac{\mathrm{H}'(a+b)}{\mathrm{H}(a+b)} = \frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)} + \frac{\mathrm{H}'(b)}{\mathrm{H}(b)} - \frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a+b)} - \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{\operatorname{sn} b}$$

donnent ensuite

$$\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)} + \frac{\mathrm{H}'(b)}{\mathrm{H}(b)} - \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{2\operatorname{sn} a} - \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{2\operatorname{sn} b} + \frac{i\omega}{2\mathrm{K}}.$$

La seconde intégrale devient donc

$$\frac{\mathrm{H}(u-a-b)}{\mathrm{H}(u)} e^{\left[\frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)} + \frac{\mathrm{H}'(b)}{\mathrm{H}(b)} - \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{2\operatorname{sn} a} - \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{2\operatorname{sn} b}\right] u},$$

et l'on voit que, pour le cas singulier considéré, la solution générale est représentée par la relation suivante,

$$y\, e^{\left(\frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{2\operatorname{sn} a} + \frac{\operatorname{cn} b \operatorname{dn} b}{2\operatorname{sn} b}\right) u} = \mathrm{C} + \mathrm{C}' \frac{\mathrm{H}(u-a-b)}{\mathrm{H}(u)} e^{\left[\frac{\mathrm{H}'(a)}{\mathrm{H}(a)} + \frac{\mathrm{H}'(b)}{\mathrm{H}(b)}\right] u}.$$

XXXIII.

Un dernier point me reste maintenant à traiter; j'ai encore à montrer comment les équations différentielles obtenues aux paragraphes XVII et XVIII se tirent comme cas particulier de l'équation que nous venons de considérer, ou plutôt de celle qui en résulte si l'on change u en $u + i\mathrm{K}'$, à savoir

$$\begin{aligned} &y'' - [k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u-a) + k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(u-b)]\, y' \\ &+ \left[\mathrm{A} k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u-a) + \mathrm{B} k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(u-b) + \frac{1}{\operatorname{sn}^2(a-b)} - \mathrm{C}^2\right] y = 0. \end{aligned}$$

Je me fonde, à cet effet, sur ce que les deux déterminations de la quantité $\upsilon = \omega + \frac{a+b}{2}$ peuvent être supposées égales et de signes contraires, de sorte que, en désignant par ω et ω' les valeurs

correspondantes de ω, on a la condition $\omega + \omega' = -a - b$. Qu'on se reporte maintenant aux expressions données au paragraphe XXV (p. 337) :

$$\mathrm{X}_1 = \frac{\mathrm{C}\,\theta_s(u+a)}{\theta_0(u)} e^{-\frac{u}{2}\mathrm{D}_a \log \theta_{1-s}\theta_{3-s}} + \frac{\mathrm{C}'\,\theta_{2+s}(u-a)}{\theta_0(u)} e^{\frac{u}{2}\mathrm{D}_a \log \theta_{1-s}\theta_{3-s}},$$

$$\mathrm{X}_2 = \frac{\mathrm{C}\,\theta_s(u+a)}{\theta_0(u)} e^{-\frac{u}{2}\mathrm{D}_a \log \theta_s\theta_{1-s}} + \frac{\mathrm{C}'\,\theta_{1-s}(u-a)}{\theta_0(u)} e^{\frac{u}{2}\mathrm{D}_a \log \theta_s\theta_{1-s}},$$

$$\mathrm{X}_3 = \frac{\mathrm{C}\,\theta_s(u+a)}{\theta_0(u)} e^{-\frac{u}{2}\mathrm{D}_a \log \theta_s\theta_{2+s}} + \frac{\mathrm{C}'\,\theta_{3-s}(u-a)}{\theta_0(u)} e^{\frac{u}{2}\mathrm{D}_a \log \theta_s\theta_{2+s}}.$$

On voit aisément que les quantités qui jouent le rôle des constantes ω et ω' ont pour somme, successivement, $\mathrm{K} + i\mathrm{K}'$, $i\mathrm{K}'$, K. C'est, en effet, la conséquence des relations déjà remarquées

$$\theta_s(u + i\mathrm{K}') = \sigma\, \theta_{1-s}(u)\, e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(u + i\mathrm{K}')},$$
$$\theta_s(u + \mathrm{K}) = \sigma'\, \theta_{3-s}(u),$$
$$\theta_s(u + \mathrm{K} + i\mathrm{K}') = \sigma''\, \theta_{2+s}(u)\, e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2u + i\mathrm{K}')}.$$

D'après cela, je ferai successivement $a + b = \mathrm{K} + i\mathrm{K}'$, $i\mathrm{K}'$, K; je poserai en outre, en changeant d'inconnue dans ces divers cas,

$$y = z\, e^{-\frac{u}{2}\mathrm{D}_a \log \operatorname{cn} a}, \quad z\, e^{-\frac{u}{2}\mathrm{D}_a \log \operatorname{sn} a}, \quad z\, e^{-\frac{u}{2}\mathrm{D}_a \log \operatorname{dn} a}.$$

Or, en considérant, pour abréger, seulement le premier de ces cas, voici le calcul et le résultat auquel il conduit. La condition supposée $b = \mathrm{K} + i\mathrm{K}' - a$ donne d'abord

$$\operatorname{sn} b = \frac{\operatorname{dn} a}{k \operatorname{cn} a}, \quad \operatorname{sn}(u-b) = -\frac{\operatorname{dn}(u+a)}{k \operatorname{cn}(u+a)}, \quad \operatorname{sn}(a-b) = -\frac{\operatorname{dn} 2a}{k \operatorname{cn} 2a},$$

et nous obtenons, pour la transformée en z, l'équation suivante :

$$\begin{aligned} &z'' - \left[k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u-a) - \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} a \operatorname{dn}(u+a)}{\operatorname{cn} a \operatorname{cn}(u+a)} - \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{cn} a}\right] z' \\ &+ \left[\mathrm{P} k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(u-a) - \mathrm{Q} \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} a \operatorname{dn}(u+a)}{\operatorname{cn} a \operatorname{cn}(u+a)} + \mathrm{R}\right] z = 0, \end{aligned}$$

où j'ai fait, pour abréger,

$$\mathrm{P} = \mathrm{A} - \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a}{2\operatorname{cn} a}, \quad \mathrm{Q} = \mathrm{B} - \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a}{2\operatorname{cn} a}, \quad \mathrm{R} = \frac{\operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}{4\operatorname{cn}^2 a} + \frac{k^2 \operatorname{cn}^2 2a}{\operatorname{dn}^2 2a} - \mathrm{C}^2.$$

Soit maintenant

$$\mathfrak{P} = \mathrm{cn}(u+a)(1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 a) = \mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,u - \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u;$$

on trouvera d'abord que le coefficient de z' est simplement

$$\mathrm{D}_u \log \mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{P}'}{\mathfrak{P}}.$$

Représentons ensuite par $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{P}}$ le coefficient de z ; au moyen de la formule élémentaire,

$$\mathrm{sn}(u-a)\,\mathrm{cn}(u+a) = \frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,a - \mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 a},$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} = {} & \mathrm{P}k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,a(\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,a - \mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a)\\ & - \mathrm{Q}\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}(\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,a - k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a)\\ & + \mathrm{R}(\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,a - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a),\end{aligned}$$

ou bien, en réunissant les termes semblables,

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} = {} & (\mathrm{P}+\mathrm{Q})k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}\,u\\ & - \left(\mathrm{P}k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{cn}\,a + \mathrm{Q}\frac{\mathrm{dn}^2 a}{\mathrm{cn}\,a} + \mathrm{R}\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\right)\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u + \mathrm{R}\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,u.\end{aligned}$$

Soit maintenant $\mathrm{C} = \delta - \frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{2\,\mathrm{cn}\,a}$; cette nouvelle forme de la constante donnera, après quelques réductions,

$$\begin{aligned}\mathfrak{C} = {} & -k^2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}\,u\\ & + \Big[\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\delta^2 + \mathrm{cn}\,a(1-2k^2\,\mathrm{sn}^2 a)\,\delta\\ & \qquad + k^2\,\mathrm{sn}^3 a\,\mathrm{dn}\,a - \frac{k^2\,\mathrm{cn}^2 2a}{\mathrm{dn}^2 2a}\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\Big]\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\\ & - \left[\mathrm{cn}\,a\,\delta^2 - \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\delta - \frac{k^2\,\mathrm{cn}^2 2a}{\mathrm{dn}^2 2a}\,\mathrm{cn}\,a\right]\mathrm{cn}\,u.\end{aligned}$$

Or, en faisant successivement $a = 0$, puis $a = \mathrm{K}$, on tire de là les équations

$$\begin{gathered}\mathrm{cn}\,u\,z'' - \mathrm{D}_u\,\mathrm{cn}\,u\,z' - [k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\delta + (\delta^2 - k^2)\,\mathrm{cn}\,u]z = 0,\\ \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,z'' - \mathrm{D}_u\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,z' - [\mathrm{cn}\,u\,\delta + \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\delta^2]z = 0;\end{gathered}$$

ce sont précisément les relations en X_1 et Y_1 des paragraphes XXV et XXVI, en supposant dans la première $\delta = \delta_1$ et dans la seconde $\delta = -\delta'_1$.

XXXIV.

Les fonctions doublement périodiques de seconde espèce avec un pôle simple, qu'on pourrait nommer *unipolaires*, donnent, comme nous l'avons vu, la solution découverte par Jacobi du problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe, lorsqu'il n'y a pas de forces accélératrices. Ces mêmes quantités s'offrent encore dans une autre question mécanique importante, la recherche de la figure d'équilibre d'un ressort soumis à des forces quelconques, que je vais traiter succinctement. On sait que Binet a réussi le premier à ramener aux quadratures l'expression des coordonnées de l'élastique, dans le cas le plus général où la courbe est à double courbure (*Comptes rendus*, t. XVIII, p. 1115, et t. XIX, p. 1). Son analyse et ses résultats ont été immédiatement beaucoup simplifiés par Wantzel [1], et j'adopterai la marche de l'éminent géomètre en me proposant de conduire la question à son terme et d'obtenir explicitement les coordonnées de la courbe en fonction de l'arc. Mais d'abord je crois devoir considérer le cas particulier où l'élastique est supposée plane et où l'on a, en désignant l'arc par s (*Mécanique* de Poisson, t. I, p. 608),

$$ds = \frac{2c^2\,dx}{\sqrt{4c^4 - (2ax - x^2)^2}}, \qquad dy = \frac{(2ax - x^2)\,dx}{\sqrt{4c^4 - (2ax - x^2)^2}}.$$

Soit alors

$$x = a - \sqrt{2c^2 + a^2}\sqrt{1 - \mathrm{X}^2}, \qquad k'^2 = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{4c^2};$$

on obtient facilement

$$ds = \frac{c\,d\mathrm{X}}{\sqrt{(1-\mathrm{X}^2)(1-k^2\mathrm{X}^2)}},$$

de sorte qu'on peut prendre $\mathrm{X} = \mathrm{sn}\left(\frac{s - s_0}{c}\right)$, s_0 étant une constante arbitraire. Mais il est préférable de faire $\mathrm{X} = \mathrm{sn}\left(\frac{s-s_0}{c} + \mathrm{K}\right)$;

[1] WANTZEL, enlevé à la Science par une mort prématurée à l'âge de 37 ans, en 1840, a laissé d'excellents travaux, parmi lesquels un Mémoire extrêmement remarquable, sur les nombres incommensurables, publié dans le *Journal de l'École Polytechnique*, t. XV, p. 151, et une Note sur l'intégration des équations de la courbe élastique à double courbure (*Comptes rendus*, t. XVIII, p. 1197).

nous parviendrons ainsi à des expressions mieux appropriées au cas important qui a été considéré par Poisson, où c est supposé une ligne dont la longueur est très grande par rapport à a, s et x. En premier lieu, les formules

$$\operatorname{cn}(z+\mathrm{K}) = -k'\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z}, \qquad k^2 = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{4c^2}$$

donnent, pour l'abscisse,

$$x = a + \frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}\,\frac{\operatorname{sn}\left(\dfrac{s-s_0}{c}\right)}{\operatorname{dn}\left(\dfrac{s-s_0}{c}\right)}.$$

La valeur de l'ordonnée, à savoir

$$2c^2 y = \int (2ax - x^2)\,ds = \int \left[a^2 - (2c^2+a^2)\operatorname{cn}^2\left(\frac{s-s_0}{c}+\mathrm{K}\right)\right] ds,$$

s'obtient ensuite immédiatement en employant la relation

$$\int_0^z k^2 \operatorname{cn}^2(z+\mathrm{K})\,dz = k^2 z + \mathrm{D}_z \log \mathrm{Al}(z)_3.$$

Or ces formules conduisent comme il suit aux développements de x et y suivant les puissances décroissantes de c. J'emploie à cet effet la série

$$\frac{\operatorname{sn} z}{\operatorname{dn} z} = z + \frac{k^2-k'^2}{6}z^3 + \frac{1-16k^2k'^2}{120}z^5 + \ldots,$$

et je remarque qu'en désignant par $\mathrm{F}_n(k)$ le coefficient de z^{2n+1}, qui est un polynome de degré n en k^2, on a la relation suivante :

$$\mathrm{F}_n(k') = (-1)^n\,\mathrm{F}_n(k).$$

Nous en concluons facilement pour n pair l'expression

$$\mathrm{F}_n(k) = \alpha_0 + \alpha_1(kk')^2 + \alpha_2(kk')^4 + \ldots + \alpha_{\frac{1}{2}n}(kk')^n,$$

et pour n impair

$$\mathrm{F}_n(k) = (k^2-k'^2)\left[\beta_0 + \beta_1(kk')^2 + \ldots + \beta_{\frac{n-1}{2}}(kk')^{n-1}\right].$$

Cela étant, les formules

$$k^2k'^2 = \frac{1}{4} - \frac{a^4}{16c^4} \qquad \text{et} \qquad k^2 - k'^2 = \frac{a^2}{2c^2}$$

montrent que le terme général $\mathrm{F}_n(k)z^{2n+1}$, qui est de l'ordre $\frac{1}{c^{2n+1}}$, lorsqu'on remplace z par $\frac{s-s_0}{c}$, devient, si l'on suppose n impair, de l'ordre $\frac{1}{c^{2n+3}}$. Nous pourrons donc écrire, en négligeant $\frac{1}{c^8}$ dans la parenthèse,

$$x = a + \frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c^2}\left[s - s_0 + \frac{a^2(s-s_0)^3}{12c^4} - \frac{(s-s_0)^5}{40c^4}\right].$$

Remplaçons enfin le facteur $\frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c^2}$ par $1-\frac{a^4}{8c^4}$, et prenons $s_0 = a$; il viendra, avec le même ordre d'approximation,

$$x = s - \frac{s-a}{120c^4}\left[3(s-a)^4 - 10a^2(s-a)^2 + 15a^4\right].$$

Le développement de $c^2 y$ résulte ensuite de l'équation

$$\int_0^z k^2\operatorname{cn}^2(z+\mathrm{K})\,dz = \frac{k^2k'^2}{3}z^3 + \frac{k^2k'^2(k^2-k'^2)}{3.5}z^5 + \frac{k^2k'^2(2-17k^2k'^2)}{5.7.9}z^7 + \ldots;$$

mettant $\frac{s-a}{c}$ au lieu de z et déterminant la constante amenée par l'intégration de manière qu'on ait $y = 0$ pour $s = a$, on en tire, par un calcul facile,

$$2c^2 y = as^2 - \frac{s^3+2a^3}{3} + \frac{(s-a)^3}{420c^4}\left[3(s-a)^4 - 14a^2(s-a)^2 + 35a^4\right].$$

Le second membre, dans cette expression de l'ordonnée, est exact aux termes près de l'ordre $\frac{1}{c^8}$, comme la valeur trouvée pour l'abscisse.

XXXV.

Les équations différentielles de l'élastique, dans le cas le plus général où la courbe est à double courbure, se ramènent par un choix convenable de coordonnées, comme l'a remarqué Wantzel, à la forme suivante,

$$\begin{aligned} y'z'' - y''z' &= \alpha x' + \beta y, \\ z'x'' - z''x' &= \alpha y' - \beta x, \\ x'y'' - x''y' &= \alpha z' + \gamma, \end{aligned}$$

où $x', y', z', x'', y'', z''$ désignent les dérivées par rapport à l'arc s de x, y, z et α, β, γ des constantes dont les deux premières sont essentiellement positives.

Cela étant, j'observai en premier lieu que, si on les ajoute après les avoir multipliées respectivement, d'abord par x', y', z', puis par x'', y'', z'', on obtient

$$\alpha(x'^2+y'^2+z'^2)+\beta(x'y-xy')+\gamma z'=0,$$
$$\alpha(x'x''+y'y''+z'z'')+\beta(x''y-xy'')+\gamma z''=0.$$

Or la première de ces relations donne, par la différentiation,

$$2\alpha(x'x''+y'y''+z'z'')+\beta(x''y-xy'')+\gamma z''=0;$$

nous avons donc

$$x'x''+y'y''+z'z''=0,$$

d'où

$$x'^2+y'^2+z'^2=\text{const.},$$

et l'on voit que, en prenant la constante égale à l'unité, on satisfera à la condition que l'arc s soit, comme on l'a admis, la variable indépendante.

Cela posé, et après avoir écrit les équations précédentes de cette manière,

$$\beta(xy'-x'y)=\gamma z'+\alpha, \qquad \beta(xy''-x''y)=\gamma z'',$$

j'en déduis

$$\beta[(xy'-x'y)z''-(xy''-x''y)z']=\alpha z'';$$

mais le premier membre, étant écrit ainsi,

$$\beta[(y'z''-y''z')x+(z'x''-z''x')y],$$

se réduit à

$$\beta[(\alpha x'+\beta y)x+(\alpha y'-\beta x)y]=\alpha\beta(xx'+yy'),$$

de sorte que nous avons

$$\beta(xx'+yy')=z'',$$

puis par l'intégration, en désignant par δ une constante arbitraire,

$$\beta(x^2+y^2)=2(z'-\delta).$$

Soit maintenant $z'=\zeta$; nous remplacerons le système des équations à intégrer par celles-ci,

$$\beta(x^2+y^2)=2(\zeta-\delta),$$
$$\beta(xx'+yy')=\zeta',$$
$$x'^2+y'^2=1-\zeta^2,$$
$$\beta(xy'-x'y)=\gamma\zeta+\alpha.$$

Or l'identité

$$(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)=(xx'+yy')^2+(xy'-x'y)^2$$

donne en premier lieu

$$\zeta'^2=2\beta(\zeta-\delta)(1-\zeta^2)-(\gamma\zeta+\alpha)^2,$$

et l'on trouve ensuite facilement

$$\frac{x'+iy'}{x+iy}=\frac{\zeta'+i(\gamma\zeta+\alpha)}{2(\zeta-\delta)};$$

ces résultats obtenus, les expressions des coordonnées en fonction de l'arc s'en déduisent comme il suit.

Soient a, b, c les racines de l'équation

$$2\beta(\zeta-\delta)(1-\zeta^2)-(\gamma\zeta+\alpha)^2=0,$$

de sorte qu'on ait

$$\zeta'^2=-2\beta(\zeta-a)(\zeta-b)(\zeta-c).$$

Désignons aussi par ζ_0 une des valeurs de ζ, qu'on doit, d'après la condition $x'^2+y'^2+\zeta^2=1$, supposer comprise entre $+1$ et -1. Le facteur β étant positif, comme nous l'avons dit, le polynome $2\beta(\zeta-a)(\zeta-b)(\zeta-c)$ sera négatif en faisant $\zeta=\zeta_0$. Mais il prend pour $\zeta=+1$ et $\zeta=-1$ les valeurs positives $(\gamma+\alpha)^2$ et $(\gamma-\alpha)^2$; par conséquent, les racines a, b, c sont réelles, et, si on les suppose rangées par ordre décroissant de grandeur, a sera compris entre $+1$ et ζ_0, b entre ζ_0 et -1, et c entre -1 et $-\infty$. Remarquons aussi que, ayant pour $z=\zeta$ un résultat positif, il est nécessaire que cette constante δ soit supérieure à a ou comprise entre b et c. Mais la relation $x^2+y^2=2(\zeta-\delta)$ montre que la seconde hypothèse est seule possible, car dans la première x^2+y^2 serait négatif. Cela posé, puisque ζ a pour limites a et b, nous