XII.

J'aborde maintenant la détermination des six coefficients a, b, c, a', b', c' en introduisant les quantités

$$\mathrm{A} = a + ia', \qquad \mathrm{B} = b + ib', \qquad \mathrm{C} = c + ic',$$

et partant des relations suivantes:

$$\begin{gathered} \mathrm{A}\,a'' + \mathrm{B}\,b'' + \mathrm{C}\,c'' = 0, \\ i\mathrm{A} - \mathrm{B}\,c'' + \mathrm{C}\,b'' = 0, \end{gathered}$$

qu'il est facile de démontrer. La première est une suite des égalités

$$aa'' + bb'' + cc'' = 0, \qquad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0,$$

et la seconde résulte de celles-ci :

$$a = b'c'' - c'b'', \qquad a' = b''c - c''b, \qquad a'' = bc' - cb', \qquad \ldots.$$

Qu'on prenne, en effet, les valeurs de a et a', on en déduira

$$a + ia' = (b' - ib)c'' - b''(c' - ic),$$

ce qui revient bien à la relation énoncée. Cela posé, je fais usage des équations de Poisson rappelées plus haut, et qui donnent

$$\mathrm{D}_t\mathrm{A} = \mathrm{B}r - \mathrm{C}q, \qquad \mathrm{D}_t\mathrm{B} = \mathrm{C}p - \mathrm{A}r, \qquad \mathrm{D}_t\mathrm{C} = \mathrm{A}q - \mathrm{B}p,$$

puis, en remplaçant p, q, r par $\alpha a''$, $\beta b''$, $\gamma c''$,

$$\mathrm{D}_t\mathrm{A} = \mathrm{B}c''\gamma - \mathrm{C}b''\beta, \qquad \mathrm{D}_t\mathrm{B} = \mathrm{C}a''\alpha - \mathrm{A}c''\gamma, \qquad \mathrm{D}_t\mathrm{C} = \mathrm{A}b''\beta - \mathrm{B}a''\alpha.$$

Mettons maintenant dans la première les expressions de B et C en A, qu'on tire de nos deux relations, à savoir

$$\mathrm{B} = \frac{a''b'' - ic''}{a''^2 - 1}\mathrm{A}, \qquad \mathrm{C} = \frac{a''c'' + ib''}{a''^2 - 1}\mathrm{A};$$

on obtiendra aisément

$$\frac{\mathrm{D}_t\mathrm{A}}{\mathrm{A}} = \frac{(\gamma - \beta)a''b''c'' - i(\gamma c''^2 + \beta b''^2)}{a''^2 - 1},$$

ou bien encore

$$\frac{\mathrm{D}_t\mathrm{A}}{\mathrm{A}} = \frac{a''\mathrm{D}_t a'' + i(\alpha a''^2 - \delta)}{a''^2 - 1},$$

et, par un simple changement de lettres, on en conclut, sans nouveau calcul,

$$\frac{\mathrm{D}_t\mathrm{B}}{\mathrm{B}} = \frac{b''\mathrm{D}_t b'' + i(\beta b''^2 - \delta)}{b''^2 - 1},$$

$$\frac{\mathrm{D}_t\mathrm{C}}{\mathrm{C}} = \frac{c''\mathrm{D}_t c'' + i(\gamma c''^2 - \delta)}{c''^2 - 1}.$$

Ces formules seront plus simples si l'on fait

$$\mathrm{A} = \mathrm{a}\,e^{i\alpha t}, \qquad \mathrm{B} = \mathrm{b}\,e^{i\beta t}, \qquad \mathrm{C} = \mathrm{c}\,e^{i\gamma t};$$

car il vient ainsi

$$\frac{\mathrm{D}_t\mathrm{a}}{\mathrm{a}} = \frac{a''\mathrm{D}_t a'' + i(\alpha - \delta)}{a''^2 - 1},$$

$$\frac{\mathrm{D}_t\mathrm{b}}{\mathrm{b}} = \frac{b''\mathrm{D}_t b'' + i(\beta - \delta)}{b''^2 - 1},$$

$$\frac{\mathrm{D}_t\mathrm{c}}{\mathrm{c}} = \frac{c''\mathrm{D}_t c'' + i(\gamma - \delta)}{c''^2 - 1}.$$

Cela étant, j'envisage la première, et pour un instant je pose $a''^2 - 1 = \mathfrak{a}^2$, ce qui donnera

$$\frac{\mathrm{D}_t\mathrm{a}}{\mathrm{a}} = \frac{\mathfrak{a}\,\mathrm{D}_t\mathfrak{a} + i(\alpha - \delta)}{\mathfrak{a}^2} = \frac{\mathrm{D}_t\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}} + i\,\frac{\alpha - \delta}{\mathfrak{a}^2}.$$

On en conclut ensuite, en différentiant,

$$\frac{\mathrm{D}_t^2\mathrm{a}}{\mathrm{a}} - \left(\frac{\mathrm{D}_t\mathrm{a}}{\mathrm{a}}\right)^2 = \frac{\mathrm{D}_t^2\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}} - \left(\frac{\mathrm{D}_t\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}}\right)^2 - 2i\,\frac{(\alpha - \delta)\mathrm{D}_t\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}^3};$$

puis encore, par l'élimination de $\dfrac{\mathrm{D}_t\mathrm{a}}{\mathrm{a}}$,

$$\frac{\mathrm{D}_t^2\mathrm{a}}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{D}_t^2\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}} - \frac{(\alpha - \delta)^2}{\mathfrak{a}^4};$$

mais, comme conséquence de l'équation différentielle,

$$(\mathrm{D}_t a'')^2 = (\gamma - \beta)^2 b''^2 c''^2 = [\delta - \beta - (\alpha - \beta)a''^2][\gamma - \delta - (\gamma - \alpha)a''^2],$$

on a la suivante :

$$\frac{\mathfrak{a}^2}{1 + \mathfrak{a}^2}(\mathrm{D}_t\mathfrak{a})^2 = -(\delta - \alpha)^2 - (\delta - \alpha)(\beta + \gamma - 2\alpha)\mathfrak{a}^2 - (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)\mathfrak{a}^4,$$

qui peut s'écrire

$$(D_t \mathfrak{a})^2 + \frac{(\delta-\alpha)^2}{\mathfrak{a}^2}$$
$$= -(\delta-\alpha)^2 - (\delta-\alpha)(\beta+\gamma-2\alpha)(1+\mathfrak{a}^2) - (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\mathfrak{a}^2+\mathfrak{a}^4).$$

Or on en tire, en différentiant et divisant ensuite les deux membres par $2\mathfrak{a} D_t \mathfrak{a}$,

$$\frac{D_t^2 \mathfrak{a}}{\mathfrak{a}} - \frac{(\delta-\alpha)^2}{\mathfrak{a}^4}$$
$$= -[(\delta-\alpha)(\beta+\gamma-2\alpha) + (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)] - 2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\mathfrak{a}^2.$$

Nous avons donc, après avoir remplacé $\mathfrak{a}^2$ par $a''^2 - 1$,

$$\frac{D_t^2 \mathrm{a}}{\mathrm{a}} = (\beta-\alpha)(\gamma-\delta) - (\delta-\alpha)(\gamma-\alpha) - 2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)a''^2;$$

c'est le résultat que j'avais en vue d'obtenir.

XIII.

Deux voies s'ouvrent maintenant pour parvenir aux expressions de A, B, C; voici d'abord la plus élémentaire. Revenant aux formules

$$\mathrm{B} = \frac{a''b'' - ic''}{a''^2-1}\mathrm{A}, \qquad \mathrm{C} = \frac{a''c'' + ib''}{a''^2-1}\mathrm{A},$$

je remplace a'', b'', c'' par les valeurs obtenues au paragraphe XI, page 293 :

$$a'' = -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn} \omega}, \qquad b'' = \frac{\operatorname{dn}\omega \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}\omega}, \qquad c'' = \frac{\operatorname{sn}\omega \operatorname{dn} u}{i \operatorname{cn}\omega},$$

et, au moyen des relations relatives à l'addition des arguments, j'obtiens ces résultats :

$$\frac{a''b'' - ic''}{a''^2-1} = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn}\omega + \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2\omega} = \frac{\operatorname{cn}(u-\omega)}{\operatorname{sn}(u-\omega)},$$
$$\frac{a''c'' + ib''}{a''^2-1} = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega + \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{i(\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2\omega)} = \frac{1}{i\operatorname{sn}(u-\omega)},$$

de sorte que nous pouvons écrire

$$\mathrm{B} = \frac{\operatorname{cn}(u-\omega)}{\operatorname{sn}(u-\omega)}\mathrm{A}, \qquad \mathrm{C} = \frac{\mathrm{A}}{i\operatorname{sn}(u-\omega)}.$$

Cela posé, j'envisage l'expression

$$\frac{D_t \mathrm{a}}{\mathrm{a}} = \frac{a'' D_t a'' + i(\alpha-\delta)}{a''^2-1} = \frac{(\gamma-\beta)a''b''c'' + i(\alpha-\delta)}{a''^2-1}$$

et je fais le même calcul, après avoir remplacé $\gamma-\beta$ et $\alpha-\delta$ par les valeurs suivantes :

$$\gamma-\beta = in\frac{\operatorname{cn}\omega}{\operatorname{sn}\omega \operatorname{dn}\omega}, \qquad \alpha-\delta = in\frac{\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}\omega},$$

qu'on tire facilement des équations posées page 293 :

$$\operatorname{cn}\omega = \sqrt{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\delta}}, \qquad \operatorname{dn}\omega = \sqrt{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}}, \qquad \operatorname{sn}\omega = i\sqrt{\frac{\delta-\alpha}{\gamma-\delta}}$$

et de $n = \sqrt{(\delta-\alpha)(\gamma-\beta)}$. L'expression à laquelle nous parvenons ainsi,

$$\frac{D_t \mathrm{a}}{\mathrm{a}} = n\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u + \operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2\omega},$$

nous offre une fonction doublement périodique, dont les périodes sont $2\mathrm{K}$, $2i\mathrm{K}'$, et qui a deux pôles, $u=\omega$, $u=i\mathrm{K}'$. Les résidus correspondant à ces pôles étant $+1$ et -1, la décomposition en éléments simples donne immédiatement

$$\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u + \operatorname{sn}\omega\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2\omega} = \frac{\mathrm{H}'(u-\omega)}{\mathrm{H}(u-\omega)} - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + \mathrm{C},$$

et la constante se détermine en faisant, par exemple, $u=0$; on obtient de cette manière

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{H}'(\omega)}{\mathrm{H}(\omega)} - \frac{\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}\omega} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}.$$

Nous pouvons donc écrire, après avoir pris pour variable $u = n(t-t_0)$,

$$\frac{D_u \mathrm{a}}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{H}'(u-\omega)}{\mathrm{H}(u-\omega)} - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)},$$

et, si l'on désigne par $\mathrm{N}e^{i\nu}$ une nouvelle constante à laquelle nous donnons cette forme, parce qu'elle doit être, en général, supposée imaginaire, on aura

$$\mathrm{a} = \mathrm{N}e^{i\nu}\frac{\mathrm{H}(u-\omega)}{\Theta(u)}e^{\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}u}.$$

De cette formule résulte ensuite

$$A = \mathrm{N}\, e^{i(\nu+\alpha t_0)} \frac{\mathrm{H}(u-\omega)}{\Theta(u)} e^{\left[\frac{i\alpha}{n} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u},$$

ou plus simplement, en mettant $\nu - \alpha t_0$ au lieu de ν,

$$A = \mathrm{N}\, e^{i\nu} \frac{\mathrm{H}(u-\omega)}{\Theta(u)} e^{\left[\frac{i\alpha}{n} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u},$$

et l'on en conclut immédiatement

$$B = \frac{\mathrm{cn}(u-\omega)}{\mathrm{sn}(u-\omega)} A = \sqrt{k'}\, \mathrm{N}\, e^{i\nu} \frac{\mathrm{H}_1(u-\omega)}{\Theta(u)} e^{\left[\frac{i\alpha}{n} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u},$$
$$C = \frac{1}{i\,\mathrm{sn}(u-\omega)} A = \sqrt{k}\, \mathrm{N}\, e^{i\nu} \frac{\Theta(u-\omega)}{i\,\Theta(u)} e^{\left[\frac{i\alpha}{n} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u}.$$

Des deux indéterminées N et ν qui figurent dans ces expressions, la dernière seule subsistera comme quantité arbitraire; N, qui est réel et positif, se détermine comme nous allons le montrer.

XIV.

Je fais à cet effet, pour plus de simplicité, dans les expressions précédentes,

$$\frac{i\alpha}{n} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = i\lambda,$$

en observant que cette quantité λ est réelle, car on a $\omega = i\upsilon$, ainsi que nous l'avons fait voir (p. 293). Cela étant, nous pouvons écrire

$$A = \sqrt{k}\,\mathrm{N} \frac{\Theta(u-\omega)\, e^{i(\lambda u+\nu)}}{\Theta(u)} \mathrm{sn}(u-\omega),$$
$$B = \sqrt{k}\,\mathrm{N} \frac{\Theta(u-\omega)\, e^{i(\lambda u+\nu)}}{\Theta(u)} \mathrm{cn}(u-\omega),$$
$$C = \sqrt{k}\,\mathrm{N} \frac{\Theta(u-\omega)\, e^{i(\lambda u+\nu)}}{i\,\Theta(u)},$$

et je remarque tout d'abord que ces formules permettent de vérifier facilement les conditions auxquelles doivent satisfaire les neuf

coefficients $a, b, c, \ldots$. En premier lieu, nous en déduisons

$$Aa'' + Bb'' + Cc'' = \sqrt{k}\,\mathrm{N} \frac{\Theta(u-\omega)\, e^{i(\lambda u+\nu)}}{\mathrm{cn}\,\omega\, \Theta(u)}$$
$$\times [-\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}(u-\omega) + \mathrm{dn}\,\omega\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}(u-\omega) - \mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,u].$$

Or on a

$$\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{sn}(u-\omega) - \mathrm{dn}\,\omega\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}(u-\omega) + \mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,u = 0,$$

cette équation étant l'une des relations fondamentales pour l'addition des arguments [Jacobi, *Œuvres complètes*, t. II, p. 325, équation (16)], et nous obtenons ainsi

$$aa'' + bb'' + cc'' = 0, \qquad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0.$$

Je remarque ensuite que la somme des carrés $A^2 + B^2 + C^2$ s'évanouit comme contenant en facteur $\mathrm{sn}^2(u-\omega) + \mathrm{cn}^2(u-\omega) - 1$, et nous en concluons

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2, \qquad aa' + bb' + cc' = 0.$$

Ayant d'ailleurs

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = \left(\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{cn}\,\omega}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{dn}\,\omega\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,\omega}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,\omega}\right)^2$$
$$= \frac{1-\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{cn}^2\omega} + \frac{(1-k^2\mathrm{sn}^2\omega)\,\mathrm{sn}^2 u}{\mathrm{cn}^2\omega} - \frac{(1-k^2\mathrm{sn}^2 u)\,\mathrm{sn}^2\omega}{\mathrm{cn}^2\omega} = 1,$$

les six relations que nous avons en vue seront complètement vérifiées dès que N sera déterminé de manière à obtenir $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ [1].

---

[1] Les équations

$$iA = Bc'' - Cb'', \quad iB = Ca'' - Ac'', \quad iC = Ab'' - Ba'',$$

dont la première a été employée précédemment, page 294, et qui contiennent les suivantes ;

$$a = b'c'' - c'b'', \qquad b = c'a'' - a'c'', \qquad c = a'b'' - b'a'',$$
$$a' = b''c - c''b, \qquad b' = c''a - a''c, \qquad c' = a''b - b''a,$$

se vérifient aussi de la manière la plus facile. Les relations auxquelles elles conduisent, à savoir :

$$\mathrm{cn}\,\omega = \mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}(u-\omega) + \mathrm{dn}\,\omega\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(u-\omega),$$
$$\mathrm{cn}\,u = \mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{cn}(u-\omega) - \mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(u-\omega),$$
$$\mathrm{dn}\,\omega\,\mathrm{sn}\,u = \mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{sn}(u-\omega) + \mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}(u-\omega),$$

figurent, en effet, dans le Tableau donné par Jacobi sous les nos 9, 10 et 11.

Formons pour cela les carrés des modules de A, B, C; en remarquant que, par le changement de i en $-i$, ω se change en $-\omega$, on trouve immédiatement

$$a^2+a'^2 = k\mathrm{N}^2 \frac{\Theta(u+\omega)\Theta(u-\omega)}{\Theta^2(u)} \operatorname{sn}(u+\omega)\operatorname{sn}(u-\omega),$$

$$b^2+b'^2 = k\mathrm{N}^2 \frac{\Theta(u+\omega)\Theta(u-\omega)}{\Theta^2(u)} \operatorname{cn}(u+\omega)\operatorname{cn}(u-\omega),$$

$$c^2+c'^2 = k\mathrm{N}^2 \frac{\Theta(u+\omega)\Theta(u-\omega)}{\Theta^2(u)};$$

d'où, en ajoutant membre à membre,

$$2 = k\mathrm{N}^2 \frac{\Theta(u+\omega)\Theta(u-\omega)}{\Theta^2(u)}[\operatorname{sn}(u+\omega)\operatorname{sn}(u-\omega)+\operatorname{cn}(u+\omega)\operatorname{cn}(u-\omega)+1].$$

Formons enfin les trois produits

$$(b-ib')(c+ic'),\quad (c-ic')(a+ia'),\quad (a-ia')(b+ib');$$

nous trouverons

$$(b-ib')(c+ic') = -\frac{\Theta(0)\mathrm{H}_1(0)\mathrm{H}_1(u+\omega)\Theta(u-\omega)}{\mathrm{H}_1^2(\omega)\Theta^2(u)}\,i.$$

$$(c-ic')(a+ia') = -\frac{\Theta_1(0)\mathrm{H}_1(0)\Theta(u+\omega)\mathrm{H}(u-\omega)}{i\,\mathrm{H}_1^2(\omega)\Theta^2(u)},$$

$$(a-ia')(b+ib') = \frac{\Theta(0)\Theta_1(0)\mathrm{H}(u+\omega)\mathrm{H}_1(u-\omega)}{\mathrm{H}_1^2(\omega)\Theta^2(u)};$$

or les relations élémentaires

$$\begin{aligned}
\Theta(0)\mathrm{H}_1(0)\mathrm{H}_1(u+\omega)\Theta(u-\omega) &= -\mathrm{H}(\omega)\Theta_1(\omega)\mathrm{H}(u)\Theta_1(u)+\mathrm{H}_1(\omega)\Theta(\omega)\Theta(u)\mathrm{H}_1(u),\\
\Theta_1(0)\mathrm{H}_1(0)\Theta(u+\omega)\mathrm{H}(u-\omega) &= -\mathrm{H}(\omega)\Theta(\omega)\mathrm{H}_1(u)\Theta_1(u)+\mathrm{H}_1(\omega)\Theta_1(\omega)\Theta(u)\mathrm{H}(u),\\
\Theta(0)\Theta_1(0)\mathrm{H}(u+\omega)\mathrm{H}_1(u-\omega) &= \Theta(\omega)\Theta_1(\omega)\mathrm{H}(u)\mathrm{H}_1(u)+\mathrm{H}(\omega)\mathrm{H}_1(\omega)\Theta(u)\Theta_1(u)
\end{aligned}$$

conduisent facilement à ces égalités

$$\begin{aligned}
(b-ib')(c+ic') &= -b''c''+ia'',\\
(c-ic')(a+ia') &= -c''a''+ib'',\\
(a-ia')(b+ib') &= -a''b''+ic'';
\end{aligned}$$

d'où l'on tire ce nouveau système de conditions :

$$\begin{aligned}
bc+b'c'+b''c'' &= 0, & bc'-cb' &= a'',\\
ca+c'a'+c''a'' &= 0, & ca'-ac' &= b'',\\
ab+a'b'+a''b'' &= 0, & ab'-ba' &= c''.
\end{aligned}$$

Or les formules élémentaires

$$\operatorname{sn}(u+\omega)\operatorname{sn}(u-\omega) = \frac{\operatorname{sn}^2 u-\operatorname{sn}^2\omega}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2\omega},$$

$$\operatorname{cn}(u+\omega)\operatorname{cn}(u-\omega) = -1+\frac{\operatorname{cn}^2 u+\operatorname{cn}^2\omega}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2\omega},$$

donnent

$$\operatorname{sn}(u+\omega)\operatorname{sn}(u-\omega)+\operatorname{cn}(u+\omega)\operatorname{cn}(u-\omega)+1 = \frac{2\operatorname{cn}^2\omega}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2\omega};$$

on a d'ailleurs

$$\frac{\Theta^2(0)\Theta(u+\omega)\Theta(u-\omega)}{\Theta^2(u)\Theta^2(\omega)} = 1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2\omega;$$

nous obtenons donc

$$1 = k\mathrm{N}^2\frac{\Theta^2(\omega)\operatorname{cn}^2\omega}{\Theta^2(0)},$$

et par conséquent, après une réduction facile,

$$\mathrm{N} = \frac{\Theta_1(0)}{\mathrm{H}_1(\omega)}.$$

On en conclut les résultats de Jacobi, que nous gardons sous la forme suivante :

$$a+ia' = \frac{\Theta_1(0)\mathrm{H}(u-\omega)e^{i(\lambda u+\nu)}}{\mathrm{H}_1(\omega)\Theta(u)},$$

$$b+ib' = \frac{\Theta(0)\mathrm{H}_1(u-\omega)e^{i(\lambda u+\nu)}}{\mathrm{H}_1(\omega)\Theta(u)},$$

$$c+ic' = \frac{\mathrm{H}_1(0)\Theta(u-\omega)e^{i(\lambda u+\nu)}}{i\,\mathrm{H}_1(\omega)\Theta(u)},$$

et il ne nous reste plus qu'à y joindre les expressions des vitesses de rotation autour des axes fixes Ox, Oy, Oz.

Ces quantités, que je désignerai par v, v', v'', ont pour valeurs

$$\begin{aligned}
v &= a\,p+b\,q+c\,r,\\
v' &= a'p+b'q+c'r,\\
v'' &= a''p+b''q+c''r,
\end{aligned}$$

ou encore, en remplaçant p, q, r, par $\alpha a''$, $\beta b''$, $\gamma c''$,

$$\begin{aligned}
v &= aa''\alpha+bb''\beta+cc''\gamma,\\
v' &= a'a''\alpha+b'b''\beta+c'c''\gamma,\\
v'' &= a''^2\alpha+b''^2\beta+c''^2\gamma = \delta.
\end{aligned}$$

Cela posé, soit $v + iv' = \mathrm{V}$; nous pouvons écrire

$$\mathrm{V} = \mathrm{A}\,a''\alpha + \mathrm{B}\,b''\beta + \mathrm{C}\,c''\gamma,$$

et, si nous employons de nouveau les égalités

$$\mathrm{B} = \frac{a''b'' - ic''}{a''^2 - 1}\mathrm{A}, \qquad \mathrm{C} = \frac{a''c'' + ib''}{a''^2 - 1}\mathrm{A},$$

on obtiendra la formule

$$\mathrm{V} = \frac{(\delta - \alpha)a'' + i(\gamma - \beta)b''c''}{a''^2 - 1}\mathrm{A}.$$

Or, au moyen des relations

$$\delta - \alpha = -in\frac{\operatorname{sn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}\omega}, \qquad \gamma - \beta = in\frac{\operatorname{cn}\omega}{\operatorname{sn}\omega \operatorname{dn}\omega}$$

et des valeurs de a'', b'', c'', il vient

$$\begin{aligned}\frac{(\delta - \alpha)a'' + i(\gamma - \beta)b''c''}{a''^2 - 1} &= -in\frac{\operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}u \operatorname{dn}\omega + \operatorname{sn}u \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2\omega} \\ &= -in\frac{\operatorname{dn}(u - \omega)}{\operatorname{sn}(u - \omega)};\end{aligned}$$

l'expression précédente de A nous donne donc immédiatement

$$\mathrm{V} = -in\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta_1(u - \omega)\,e^{i(\lambda u + \nu)}}{\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(u)}.$$

Voici maintenant la seconde méthode que j'ai annoncée pour parvenir à la détermination des quantités A, B, C.

XV.

Je reprends l'équation différentielle du second ordre, obtenue au paragraphe XII, page 296, à savoir :

$$\mathrm{D}_t^2\,\mathrm{a} = [(\beta - \alpha)(\gamma - \delta) - (\delta - \alpha)(\gamma - \alpha) - 2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)a''^2]\mathrm{a},$$

et j'y joins les deux suivantes, qui s'en tirent par un changement de lettres

$$\mathrm{D}_t^2\,\mathrm{b} = [(\gamma - \beta)(\alpha - \delta) - (\delta - \beta)(\alpha - \beta) - 2(\gamma - \beta)(\alpha - \beta)b''^2]\mathrm{b},$$
$$\mathrm{D}_t^2\,\mathrm{c} = [(\alpha - \gamma)(\beta - \delta) - (\delta - \gamma)(\beta - \gamma) - 2(\alpha - \gamma)(\beta - \gamma)c''^2]\mathrm{c}.$$

Cela posé, au moyen des expressions de a'', b'', c'', en fonction de u, et de ces formules qu'on établit sans peine,

$$\begin{aligned}\alpha - \beta &= in\frac{k^2\operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega}{\operatorname{dn}\omega}, & \beta - \delta &= in\frac{k'^2\operatorname{sn}\omega}{\operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}, \\ \alpha - \delta &= in\frac{\operatorname{sn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}\omega}, & \gamma - \beta &= in\frac{\operatorname{cn}\omega}{\operatorname{sn}\omega \operatorname{dn}\omega}, \\ \gamma - \alpha &= in\frac{\operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}\omega}, & \gamma - \delta &= in\frac{\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega},\end{aligned}$$

nous obtenons, par un calcul facile,

$$(\beta-\alpha)(\gamma-\delta)-(\delta-\alpha)(\gamma-\alpha)-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)a''^2 = n^2[2k^2\operatorname{sn}^2u - 1 - k^2 + k^2\operatorname{sn}^2\omega],$$
$$(\gamma-\beta)(\alpha-\delta)-(\delta-\beta)(\alpha-\beta)-2(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)b''^2 = n^2\left[2k^2\operatorname{sn}^2u - 1 - k^2 + k^2\frac{\operatorname{cn}^2\omega}{\operatorname{dn}^2\omega}\right],$$
$$(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)-(\delta-\gamma)(\beta-\gamma)-2(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)c''^2 = n^2\left[2k^2\operatorname{sn}^2u - 1 - k^2 + \frac{1}{\operatorname{sn}^2\omega}\right].$$

Prenant donc pour variable indépendante u au lieu de t, on aura

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_u^2\,\mathrm{a} &= [2k^2\operatorname{sn}^2u - 1 - k^2 + k^2\operatorname{sn}^2\omega]\mathrm{a}, \\ \mathrm{D}_u^2\,\mathrm{b} &= \left[2k^2\operatorname{sn}^2u - 1 - k^2 + k^2\frac{\operatorname{cn}^2\omega}{\operatorname{dn}^2\omega}\right]\mathrm{b}, \\ \mathrm{D}_u^2\,\mathrm{c} &= \left[2k^2\operatorname{sn}^2u - 1 - k^2 + \frac{1}{\operatorname{sn}^2\omega}\right]\mathrm{c},\end{aligned}$$

et nous nous trouvons, par conséquent, amenés à trois des quatre formes canoniques de l'équation de Lamé, qui ont été considérées au paragraphe VI, page 280. La solution générale de ces équations nous donne donc, en désignant les constantes arbitraires par P, Q, R, P′, Q′, R′,

$$\begin{aligned}\mathrm{a} &= \mathrm{P}\frac{\mathrm{H}(u - \omega)\,e^{\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}u}}{\Theta(u)} + \mathrm{P}'\frac{\mathrm{H}(u + \omega)\,e^{-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}u}}{\Theta(u)}, \\ \mathrm{b} &= \mathrm{Q}\frac{\mathrm{H}_1(u - \omega)\,e^{\frac{\Theta_1'(\omega)}{\Theta_1(\omega)}u}}{\Theta(u)} + \mathrm{Q}'\frac{\mathrm{H}_1(u + \omega)\,e^{-\frac{\Theta_1'(\omega)}{\Theta_1(\omega)}u}}{\Theta(u)}, \\ \mathrm{c} &= \mathrm{R}\frac{\Theta(u - \omega)\,e^{\frac{\mathrm{H}'(\omega)}{\mathrm{H}(\omega)}u}}{\Theta(u)} + \mathrm{R}'\frac{\Theta(u + \omega)\,e^{-\frac{\mathrm{H}'(\omega)}{\mathrm{H}(\omega)}u}}{\Theta(u)},\end{aligned}$$

et l'on en conclut, si l'on écrit, pour plus de simplicité, P, Q, R,

... au lieu de $\mathrm{P}e^{i\alpha i_0}$, $\mathrm{Q}e^{i\beta t_0}$, $\mathrm{R}e^{it_0}$, ...,

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}\,\frac{\mathrm{H}(u-\omega)}{\Theta(u)}\,e^{\left[\frac{i\alpha}{n}+\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u} + \mathrm{P}'\,\frac{\mathrm{H}(u+\omega)}{\Theta(u)}\,e^{\left[\frac{i\alpha}{n}-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u},$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{Q}\,\frac{\mathrm{H}_1(u-\omega)}{\Theta(u)}\,e^{\left[\frac{i\beta}{n}+\frac{\Theta_1'(\omega)}{\Theta_1(\omega)}\right]u} + \mathrm{Q}'\,\frac{\mathrm{H}_1(u+\omega)}{\Theta(u)}\,e^{\left[\frac{i\beta}{n}-\frac{\Theta_1'(\omega)}{\Theta_1(\omega)}\right]u},$$

$$\mathrm{C} = \mathrm{R}\,\frac{\Theta(u-\omega)}{\Theta(u)}\,e^{\left[\frac{i\gamma}{n}+\frac{\mathrm{H}'(\omega)}{\mathrm{H}(\omega)}\right]u} + \mathrm{R}'\,\frac{\Theta(u+\omega)}{\Theta(u)}\,e^{\left[\frac{i\gamma}{n}-\frac{\mathrm{H}'(\omega)}{\mathrm{H}(\omega)}\right]u}.$$

La détermination des six constantes qui entrent dans ces expressions se fait très facilement, comme on va le voir.

Je remarque, en premier lieu, que nous pouvons poser

$$\frac{i\alpha}{n}+\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \frac{i\beta}{n}+\frac{\Theta_1'(\omega)}{\Theta_1(\omega)} = \frac{i\gamma}{n}+\frac{\mathrm{H}'(\omega)}{\mathrm{H}(\omega)} = i\lambda,$$

λ désignant la quantité déjà considérée au paragraphe XIV, page 298. On a, en effet,

$$\frac{\Theta_1'(\omega)}{\Theta_1(\omega)} - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \mathrm{D}_\omega \log \operatorname{dn}\omega = -\frac{k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega}{\operatorname{dn}\omega},$$

$$\frac{\mathrm{H}'(\omega)}{\mathrm{H}(\omega)} - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \mathrm{D}_\omega \log \operatorname{sn}\omega = \frac{\operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}\omega},$$

et les égalités précédentes sont vérifiées au moyen des relations

$$\alpha-\beta = in\,\frac{k^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{cn}\omega}{\operatorname{dn}\omega}, \qquad \gamma-\alpha = in\,\frac{\operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}\omega},$$

que nous avons données plus haut. Une conséquence importante découle de là : c'est qu'en changeant u en $u+4\mathrm{K}$, les fonctions $\frac{\mathrm{H}(u-\omega)e^{i\lambda u}}{\Theta(u)}$, $\frac{\mathrm{H}_1(u-\omega)e^{\lambda i u}}{\Theta(u)}$, $\frac{\Theta(u-\omega)e^{i\lambda u}}{\Theta(u)}$ se reproduisent multipliées par le même facteur $e^{4i\lambda\mathrm{K}}$, tandis que les quantités

$$\frac{\mathrm{H}(u+\omega)}{\Theta(u)}\,e^{\left[\frac{i\alpha}{n}-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]u}, \quad \frac{\mathrm{H}_1(u+\omega)}{\Theta(u)}\,e^{\left[\frac{i\beta}{n}-\frac{\Theta_1'(\omega)}{\Theta_1(\omega)}\right]u}, \quad \frac{\Theta(u+\omega)}{\Theta(u)}\,e^{\left[\frac{i\gamma}{n}-\frac{\mathrm{H}'(\omega)}{\mathrm{H}(\omega)}\right]u}$$

sont affectées des facteurs

$$e^{4i\mathrm{K}\left(\frac{2\alpha}{n}-\lambda\right)}, \quad e^{4i\mathrm{K}\left(\frac{2\beta}{n}-\lambda\right)}, \quad e^{4i\mathrm{K}\left(\frac{2\gamma}{n}-\lambda\right)},$$

essentiellement inégaux. Or on a obtenu, pour les quotients $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$, $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}$, des fonctions doublement périodiques, ne changeant point quand on met $u+4\mathrm{K}$ au lieu de u; il faut donc que les facteurs qui multiplient A, B, C, lorsqu'on remplace u par $u+4\mathrm{K}$, soient les mêmes, ce qui exige qu'on fasse $\mathrm{P}'=0$, $\mathrm{Q}'=0$, $\mathrm{R}'=0$. Ce point établi, j'écris, en modifiant convenablement la forme des constantes P, Q, R,

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}\,\frac{\Theta(u-\omega)\,e^{i\lambda u}}{\Theta(u)}\operatorname{sn}(u-\omega),$$

$$\mathrm{B} = \mathrm{Q}\,\frac{\Theta(u-\omega)\,e^{i\lambda u}}{\Theta(u)}\operatorname{cn}(u-\omega),$$

$$\mathrm{C} = \mathrm{R}\,\frac{\Theta(u-\omega)\,e^{i\lambda u}}{\Theta(u)},$$

et j'emploie la condition $\mathrm{A}a''+\mathrm{B}b''+\mathrm{C}c''=0$, qui conduit à l'égalité

$$-\mathrm{P}\operatorname{cn}u\operatorname{sn}(u-\omega)+\mathrm{Q}\operatorname{dn}\omega\operatorname{sn}u\operatorname{cn}(u-\omega)-i\mathrm{R}\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}u=0.$$

Or, en faisant $u=0$ et $u=\omega$, on en déduit

$$\mathrm{P}=\mathrm{Q}=i\mathrm{R};$$

de sorte qu'on peut poser

$$\mathrm{P}=\sqrt{k}\,\mathrm{N}\,e^{i\nu}, \qquad \mathrm{Q}=\sqrt{k}\,\mathrm{N}\,e^{i\nu}, \qquad \mathrm{R}=\frac{\sqrt{k}\,\mathrm{N}\,e^{i\nu}}{i},$$

ce qui nous donne les expressions de A, B, C obtenues au paragraphe XIV, page 298. Le calcul s'achève donc en déterminant, ainsi qu'on l'a fait plus haut, la valeur du facteur N.

XVI.

Les formules que nous venons d'établir ont été le sujet des travaux de plusieurs géomètres; M. Somoff en a donné une démonstration dans un Mémoire du *Journal de Crelle* (1), peu différente de celle de Jacobi, et qui repose aussi sur l'emploi des trois angles

(1) *Démonstration des formules de M. Jacobi relatives à la théorie de la rotation d'un corps solide*, t. XLII, p. 95.

d'Euler. M. Brill, dans un excellent travail intitulé : *Sul problema della rotazione dei corpi* (*Annali di Matematica*, série 2^e, t. III, p. 33), a employé le premier les équations différentielles de Poisson et les quantités $a + ia'$, $b + ib'$, $c + ic'$ dont j'ai fait usage, mais son analyse est entièrement différente de la mienne. C'est à un autre point de vue que s'est placé M. Chelini [1] en déduisant pour la première fois les conséquences analytiques de la belle théorie de Poinsot, que son auteur ni personne n'avait encore données d'une manière aussi approfondie. Je mentionnerai enfin deux récents Mémoires de M. Siacci, professeur à l'Université de Turin, et dont l'auteur a bien voulu, dans la lettre suivante, m'indiquer les points les plus essentiels :

« Turin, 24 décembre 1877.

» Poinsot, à la fin de son *Mémoire sur la rotation des corps*, démontre que la section diamétrale de l'ellipsoïde central, déterminée par le plan parallèle au couple d'impulsion, a son aire constante. Ce théorème a été le point de départ d'un Mémoire [2] dont les résultats se rattachent à la théorie des fonctions elliptiques aussi bien qu'à la théorie de la rotation. Je me suis d'abord proposé le problème de déterminer le mouvement des axes de cette section : pour abréger, je l'appellerai *section invariable*, et son plan, *plan invariable*. Une première solution du problème est suggérée par l'homothétie de la section invariable avec l'indicatrice de Dupin, relative à l'extrémité de l'axe instantané (pôle). La rotation d'un système de trois axes rectangulaires, dont les premiers coïncident avec les axes de la section, n'est que la résultante de deux rotations, l'une due au mouvement du pôle sur la poloïde, l'autre due au mouvement de l'ellipsoïde. Soient, sur ces axes, P_1, P_2, P_3 les composantes de la première vitesse angulaire; m_1, m_2, m_3 celles de la seconde. La résultante se composera de $P_1 + m_1$, $P_2 + m_2$, $P_3 + m_3$; et, comme le pôle reste sur un plan, on aura

$$(1) \qquad P_1 + m_1 = 0, \qquad P_2 + m_2 = 0, \qquad P_3 + m_3 = d\psi : dt,$$

(1) *Determinazione analitica della rotazione dei corpi liberi secundo i concette del signor Poinsot* (*Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, vol. X).

(2) *Memorie della Società italiana delle Scienze*, 3^e série, t. III.

ψ étant la longitude d'un des axes de la section. Soient $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$, $\sqrt{a_3}$ les demi-axes de l'ellipsoïde (le troisième est celui qui ne se couche jamais sur le plan invariable); x_1, x_2, x_3 les coordonnées du pôle; λ_1, λ_2, λ_3 ($\lambda_3 = 0$, λ_1, λ_2 sont les demi-axes carrés de la section) les racines de l'équation

$$(\lambda) \equiv \frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3 - \lambda} - 1 = 0.$$

On aura

$$m_r^2 = \frac{(a_1 - \lambda_r)(a_2 - \lambda_r)(a_3 - \lambda_r)}{(\lambda_r - \lambda_s)(\lambda_r - \lambda_{s'})}, \qquad 2 P_r\, dt = \frac{m_s m_{s'}}{\lambda_s - \lambda_{s'}} \left(\frac{d\lambda_s}{m_s^2} + \frac{d\lambda_{s'}}{m_{s'}^2} \right)$$

(r, s, s' étant trois nombres de la série 1, 2, 3). Comme $\lambda_1 \lambda_2 = \text{const.} = c^2$, on a $m_3 = \text{const.}$ C'est, en effet, la distance du centre O au plan fixe de contact; de même m_1, m_2 sont les distances de O des plans tangents aux surfaces (λ_1) et (λ_2). Au moyen de ces valeurs, les équations (1), qui reviennent en substance aux équations d'Euler, donnent t et ψ en fonction de $x = \lambda_1 + \lambda_2$. En posant $t = nu$ (n expression connue), on obtient

$$(2) \quad \psi = \mp \frac{u}{2} \left(\frac{d \log \operatorname{sn} i\sigma}{d\sigma} + \frac{d \log \operatorname{sn} i\tau}{d\tau} \right) \pm \frac{1}{2i} [\Pi(u, i\sigma) + \Pi(u, i\tau)],$$

$$(3) \quad \psi = \pm \frac{u}{2} \left[\frac{d \log \mathrm{H}(i\sigma)}{d\sigma} + \frac{d \log \mathrm{H}(i\tau)}{d\tau} \right] \pm \frac{1}{4i} \log \frac{\Theta(u - i\sigma)\Theta(u - i\tau)}{\Theta(u + i\sigma)\Theta(u + i\tau)},$$

et l'on prendra le signe supérieur ou inférieur, suivant que $m_3^2 >$ ou $< a_2$.

Le module est

$$k = \sqrt{\frac{a_3(a_2 - a_1)(c^2 - a_1 a_2)}{a_1(a_2 - a_3)(c^2 - a_2 a_3)}},$$

et σ et τ sont ainsi donnés

$$\tau = \int_0^{\mathrm{F}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad \sigma = \int_0^{\mathrm{G}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$\cos \left(\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{G}} \right) = \frac{c \pm a_3}{a_3 \pm c} \sqrt{\frac{a_3}{a_2}},$$

F étant un angle aigu négatif ou positif, suivant que $m_3^2 \gtrless a_2$ et G un angle positif, qui sera $<$ ou $> \frac{1}{2}\pi$, suivant que la zone entourée par la poloïde comprendra deux ombilics ou aucun : c'est, en effet, ce qui revient aux cas de $G \lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$ ou de $\sigma \lesseqgtr K'$. La double expression

$$c\,\frac{H(i\sigma)\sqrt{\Theta(u+i\tau)\Theta(u-i\tau)} \pm H(i\tau)\sqrt{\Theta(u+i\sigma)\Theta(u-i\sigma)}}{H(i\sigma)\sqrt{\Theta(u+i\tau)\Theta(u-i\tau)} \pm H(i\tau)\sqrt{\Theta(u+i\sigma)\Theta(u-i\sigma)}}$$

donne λ_1 et λ_2. L'étude de l'expression (3) démontre que le mouvement moyen des demi-axes de la section est donné par le terme multiplié par u, et l'inégalité par l'autre, lorsque $\sigma < K'$; lorsque $\sigma > K'$, le mouvement moyen et l'inégalité sont donnés par les mêmes termes en y changeant σ en $\sigma - 2K'$; et l'on trouve que, dans le second cas, le mouvement moyen coïncide avec celui des projections des demi-axes $\sqrt{a_1}$ et $\sqrt{a_2}$, et dans le premier avec celui des projections de $\sqrt{a_3}$ et de l'axe instantané.

» On peut tirer ψ de l'expression de la longitude (μ) d'une droite quelconque OR, dont l'extrémité a ξ_1, ξ_2, ξ_3 pour coordonnées. Je trouve ainsi

$$\psi + \text{arc tang}\left[\left(\frac{m_2 x_1 \xi_1}{a_1-\lambda_2} + \frac{m_2 x_2 \xi_2}{a_2-\lambda_2} + \frac{m_2 x_3 \xi_3}{a_3-\lambda_2}\right) : \left(\frac{m_1 x_1 \xi_1}{a_1-\lambda_1} + \frac{m_1 x_2 \xi_2}{a_2-\lambda_1} + \frac{m_1 x_3 \xi_3}{a_3-\lambda_1}\right)\right] = (\mu),$$

et je donne aussi l'expression développée de (μ). Comme ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont fonctions arbitraires de u, on voit l'infinité de formes qu'on peut donner à l'expression (2) de ψ.

» En faisant coïncider OR avec $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$, $\sqrt{a_3}$ et avec l'axe instantané, on obtient leurs longitudes μ_1, μ_2, μ_3, μ et l'on a

$$(4) \qquad \psi = \mu_r - \text{arc tang}\,\frac{m_2}{m_1}\,\frac{a_r-\lambda_1}{a_r-\lambda_2} = \mu - \text{arc tang}\,\frac{m_2}{m_1}.$$

» Ces quatre expressions de ψ contiennent les principaux théorèmes sur la transformation et sur l'addition des paramètres des intégrales elliptiques de troisième espèce, mais sous une forme nouvelle, à cause des termes circulaires.

» Le mouvement des projections des axes du corps et de l'axe instantané a été déterminé par Jacobi : leurs inégalités sont données au moyen d'une constante a, qui se trouve liée avec nos quantités par l'équation $\sigma + \tau = 2a$; mais aux expressions des mouvements moyens concourent les moments d'inertie du corps. Au moyen des quantités σ et τ, elles acquièrent, comme on a vu, une forme plus homogène. Si nous posons $\sigma - \tau = 2b$, les constantes du pro-

blème a_1, a_2, a_3, m_3 se transforment en a, b, c, k. Ainsi on a

$$\frac{a_1}{c} = \frac{\operatorname{sn} ia \operatorname{dn} ia \operatorname{cn} ib}{\operatorname{sn} ib \operatorname{dn} ib \operatorname{cn} ia}, \qquad \frac{a_2}{c} = \frac{\operatorname{sn} ia \operatorname{cn} ib \operatorname{dn} ib}{\operatorname{sn} ib \operatorname{cn} ia \operatorname{dn} ia}, \qquad \frac{a_3}{c} = \frac{\operatorname{sn} ib \operatorname{cn} ib \operatorname{dn} ia}{\operatorname{sn} ia \operatorname{cn} ia \operatorname{dn} ib},$$

$$\frac{x_1^2}{a_1} = \frac{\operatorname{cn}^2 u}{\operatorname{cn}^2 ib}, \qquad \frac{x_2^2}{a_2} = \frac{\operatorname{dn}^2 ib}{\operatorname{cn}^2 ib}\operatorname{sn}^2 u, \qquad \frac{x_3^2}{a_3} = -\frac{\operatorname{sn}^2 ib}{\operatorname{cn}^2 ib}\operatorname{dn}^2 u;$$

en changeant $x_r^2 : a_r$ en $m_3^2 x_r^2 : a_r^2$, on change b en a.

» J'ajouterai aux résultats de mon Mémoire le cosinus de direction des axes de la section invariable par rapport à l'axe instantané et aux axes du corps; ils sont

$$\frac{m_1}{\sqrt{m_1^2+m_2^2}} = \mp \frac{Y \operatorname{dn}(u+ia) - X \operatorname{dn}(u-ia)}{2i\sqrt{XY \operatorname{dn}(u+ia)\operatorname{dn}(u-ia)}},$$

$$\frac{m_2}{\sqrt{m_1^2+m_2^2}} = - \frac{Y \operatorname{dn}(u+ia) + X \operatorname{dn}(u-ia)}{2\sqrt{XY \operatorname{dn}(u+ia)\operatorname{dn}(u-ia)}},$$

$$\frac{m_1 x_1}{a_1-\lambda_1} = -\frac{Y\operatorname{sn}(u+ia)+X\operatorname{sn}(u-ia)}{2\operatorname{cn} ia\sqrt{XYZ}}, \qquad \frac{m_2 x_1}{a_1-\lambda_2} = \mp\frac{Y\operatorname{sn}(u+ia)-X\operatorname{sn}(u-ia)}{2i\operatorname{cn} ia\sqrt{XYZ}},$$

$$\frac{m_1 x_2}{a_2-\lambda_1} = -\frac{Y\operatorname{cn}(u+ia)+X\operatorname{cn}(u-ia)}{2\operatorname{cn} ia\sqrt{XYZ}}, \qquad \frac{m_2 x_2}{a_2-\lambda_2} = \mp\frac{Y\operatorname{cn}(u+ia)-X\operatorname{cn}(u-ia)}{2i\operatorname{cn} ia\sqrt{XYZ}},$$

$$\frac{m_1 x_3}{a_3-\lambda_1} = \mp\frac{Y-X}{2i\operatorname{cn} ia\sqrt{XYZ}}, \qquad \frac{m_2 x_3}{a_3-\lambda_2} = -\frac{Y+X}{2\operatorname{cn} ia\sqrt{XYZ}},$$

où

$$X^2 = 1 - k^2\operatorname{sn}^2 ib \operatorname{sn}^2(u+ia), \qquad Y^2 = 1 - k^2\operatorname{sn}^2 ib\operatorname{sn}^2(u-ia),$$

$$Z(1 - k^2\operatorname{sn}^2 ia\operatorname{sn}^2 u) = 1,$$

$$\frac{n}{\sqrt{c}} = \pm\frac{2\operatorname{sn} i\sigma\operatorname{sn} i\tau}{\sqrt{\operatorname{sn}^2 i\tau - \operatorname{sn}^2 i\sigma}}.$$

Les doubles signes se rapportent aux cas de $m_3^2 \gtrless a_2$, avec la convention que, suivant que $a + b >$ ou $< K'$, X, Y, ou bien $X\operatorname{sn}(u-ia)$, $Y\operatorname{sn}(u+ia)$ imaginaires conjugués, aient leur partie réelle positive. On tire ces expressions de (4). La substitution directe des valeurs x_1, x_2, x_3; m_1, m_2; λ_1, λ_2, donne des expressions assez simples, mais tout à fait différentes, et leur comparaison donne lieu à des formules remarquables. »

Les résultats dont on vient de voir l'indication succincte sont les premiers qui aient été ajoutés aux travaux de Jacobi dans la théorie de la rotation; mais je dois signaler encore, en raison de l'intérêt que j'y attache, un point non mentionné dans le résumé précédent. Remplaçons, dans le plan invariable, les axes fixes Ox, Oy par deux autres également rectangulaires, mais mobiles, Ox_1, Oy_1, dont le premier soit constamment parallèle à la direction du rayon vecteur de l'erpoloïde; M. Chelini a introduit, en suivant la méthode de Poinsot, les angles des axes d'inertie avec les droites Ox_1, Oy_1, Oz, et donné ce système de formules, où ι désigne le rayon vecteur de l'erpoloïde

$$\cos(x_1 x') = \frac{(\alpha-\delta)a''}{\iota}, \qquad \cos(y_1 x') = \frac{(\gamma-\beta)b''c''}{\iota}, \qquad \cos(z_1 x') = a'',$$

$$\cos(x_1 y') = \frac{(\beta-\delta)b''}{\iota}, \qquad \cos(y_1 y') = \frac{(\alpha-\gamma)c''a''}{\iota}, \qquad \cos(z_1 y') = b'',$$

$$\cos(x_1 z') = \frac{(\gamma-\delta)c''}{\iota}, \qquad \cos(y_1 z') = \frac{(\beta-\alpha)a''b''}{\iota}, \qquad \cos(z_1 z') = c''.$$

C'est le passage des neuf cosinus de M. Chelini à ceux de Jacobi, qu'il était important d'effectuer pour compléter la déduction analytique de la théorie de Poinsot, alors même que, par cette voie, on ne dût peut-être pas y arriver de la manière la plus rapide. Je renverrai, sur ce point essentiel, aux beaux Mémoires de M. Siacci, en me bornant à remarquer les relations suivantes, dans lesquelles $V_1 = v - iv'$,

$$\cos(x_1 x') + i\cos(y_1 x') = \frac{1}{\iota} AV_1,$$

$$\cos(x_1 y') + i\cos(y_1 y') = \frac{1}{\iota} BV_1,$$

$$\cos(x_1 z') + i\cos(y_1 z') = \frac{1}{\iota} CV_1,$$

et j'y ajouterai quelques formules relatives à l'erpoloïde.

XVII.

Si l'on met, au lieu de ξ, η, ζ, dans les équations du paragraphe X, page 290, les quantités suivantes :

$$\xi = p\rho, \qquad \eta = q\rho, \qquad \zeta = r\rho,$$

où p, q, r sont les composantes de la vitesse et ρ une indéterminée, on aura, pour déterminer la position de l'axe instantané de

rotation par rapport aux axes fixes, les formules

$$x = (a\,p + b\,q + c\,r)\rho = v\,\rho,$$
$$y = (a'p + b'q + c'r)\rho = v'\rho,$$
$$z = (a''p + b''q + c''r)\rho = v''\rho,$$

dont la dernière est simplement $z = \delta\rho$. Or, l'erpoloïde étant la trace de cet axe mobile sur le plan tangent à l'ellipsoïde central, $z=\delta$, on voit qu'il suffit de faire $\rho = 1$ pour obtenir les coordonnées de cette courbe, exprimées en fonction du temps, ou de la variable u. Nous avons ainsi $x = v$, $y = v'$; mais ce sont plutôt les quantités $x + iy$ et $x - iy$ qu'il convient de considérer, et je poserai en conséquence

$$x + iy = -in\frac{H'(0)\,\Theta_1(u-\omega)\,e^{i(\lambda u+\nu)}}{H_1(\omega)\,\Theta(u)} = \Phi(u),$$

$$x - iy = +in\frac{H'(0)\,\Theta_1(u+\omega)\,e^{-i(\lambda u+\nu)}}{H_1(\omega)\,\Theta(u)} = \Phi_1(u),$$

ce qui permettra d'employer les conditions caractéristiques

$$\Phi(u+2K) = \mu\,\Phi(u), \qquad \Phi(u+2iK') = -\mu'\,\Phi(u),$$

$$\Phi_1(u+2K) = \frac{1}{\mu}\Phi_1(u), \qquad \Phi_1(u+2iK') = -\frac{1}{\mu'}\Phi_1(u),$$

où j'ai fait

$$\mu = e^{2i\lambda K}, \qquad \mu' = e^{\frac{i\pi\omega}{K} - 2\lambda K'}.$$

Elles montrent, en effet, que les produits $\Phi(u)\Phi_1(u)$, $D_u\Phi(u)D_u\Phi_1(u)$, et en général $D_u^m\Phi(u)D_u^n\Phi_1(u)$, quels que soient m et n, sont des fonctions doublement périodiques, ayant $2K$ et $2iK'$ pour périodes. En particulier, nous envisagerons l'expression

$$D_u\Phi(u)\,D_u\Phi_1(u) = x'^2 + y'^2,$$

puis les coefficients de i dans les suivantes

$$D_u\Phi(u) \quad \Phi_1(u) = xx' + yy' + i(xy' - yx'),$$
$$D_u^2\Phi(u)\,D_u\Phi_1(u) = x'x'' + y'y'' + i(x'y'' - y'x''),$$

ces fonctions doublement périodiques donnant, par les formules connues, les éléments de l'arc, du secteur et le rayon de courbure. J'emploierai, pour les obtenir, la formule de décomposition en éléments simples, rappelée au commencement de ce travail (§ I, p. 270), et dont l'application sera facile, $\Phi(u)$ et $\Phi_1(u)$ ayant pour pôle unique $u = i\mathrm{K}'$. N'ayant ainsi à considérer qu'un seul élément simple, $\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$, il suffit d'avoir les développements suivant les puissances croissantes de ε de $\Phi(i\mathrm{K}'+\varepsilon)$ et $\Phi_1(i\mathrm{K}'+\varepsilon)$; ils s'obtiennent comme on va voir.

Je remarque d'abord que, au moyen de la fonction $\varphi_1(x, \omega)$, définie au paragraphe VI, page 280, on peut écrire

$$\Phi(u) = \mathrm{C}\,\varphi_1(u, -\omega)\, e^{\frac{i\delta u}{n}}, \qquad \Phi_1(u) = \mathrm{C}_1\,\varphi_1(x, \omega)\, e^{-\frac{i\delta u}{n}},$$

C et C_1, désignant des constantes. C'est ce qu'on voit en joignant aux relations précédemment employées,

$$i\lambda = \frac{i\alpha}{n} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \frac{i\beta}{n} + \frac{\Theta_1'(\omega)}{\Theta_1(\omega)} = \frac{i\gamma}{n} + \frac{\mathrm{H}'(\omega)}{\mathrm{H}(\omega)},$$

la suivante

$$i\lambda = \frac{i\delta}{n} + \frac{\mathrm{H}_1'(\omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)},$$

qui résulte de la condition $\alpha - \delta = in\frac{\operatorname{sn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}\omega}$ (§ XV, p. 303), en la mettant sous la forme

$$\frac{i\alpha}{n} - \frac{i\delta}{n} = \mathrm{D}_\omega \log \operatorname{cn}\omega = \frac{\mathrm{H}_1'(\omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)} - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}.$$

Cela posé, l'équation $i\varphi_1(u, \omega) = \chi(u, \omega + \mathrm{K} + i\mathrm{K}')$ montre qu'on a le développement de $\varphi_1(i\mathrm{K}'+\varepsilon, \omega)$ en changeant simplement ω en $\omega + \mathrm{K} + i\mathrm{K}'$ dans la formule de la page 279 :

$$\chi(i\mathrm{K}'+\varepsilon, \omega) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\Omega\varepsilon - \frac{1}{3}\Omega_1\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\Omega_2\varepsilon^3 + \ldots,$$

et il vient ainsi, en nous bornant aux seuls termes nécessaires,

$$i\varphi_1(i\mathrm{K}'+\varepsilon, \omega) = \frac{1}{\varepsilon} - \left(\frac{k'^2}{\operatorname{cn}^2\omega} + \frac{2k^2-1}{3}\right)\frac{\varepsilon}{2} - \frac{k'^2 \operatorname{sn}\omega \operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}^3\omega}\frac{\varepsilon^2}{3} - \ldots.$$

Désignons par S_1, pour abréger, la série du second membre, et par S ce qu'elle devient lorsqu'on change i en $-i$, c'est-à-dire ω en $-\omega$, puisqu'on a $\omega = i\upsilon$; on aura les expressions

$$\Phi(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = \mathrm{RS}\, e^{\frac{i\delta\varepsilon}{n}}, \qquad \Phi_1(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = \mathrm{R}_1\mathrm{S}_1\, e^{-\frac{i\delta\varepsilon}{n}},$$

où R et R_1 sont deux nouvelles constantes, dont la signification se montre d'elle-même. Il est clair, en effet, que ces quantités sont les résidus des fonctions $\Phi(u)$ et $\Phi_1(u)$ pour $u = i\mathrm{K}'$, de sorte qu'on trouve immédiatement les valeurs

$$\mathrm{R} = -n\, e^{\frac{i\pi\omega}{2\mathrm{K}} - \lambda\mathrm{K}' + i\nu}, \qquad \mathrm{R}_1 = +n\, e^{-\frac{i\pi\omega}{2\mathrm{K}} + \lambda\mathrm{K}' - i\nu},$$

et par suite la relation $\mathrm{RR}_1 = -n^2$. Voici maintenant les applications de nos formules.

XVIII.

Je pars des équations suivantes

$$\mathrm{D}_\varepsilon\Phi(i\mathrm{K}'+\varepsilon)\,\mathrm{D}_\varepsilon\Phi_1(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = -n^2\left(\mathrm{S}' + \frac{i\delta}{n}\mathrm{S}\right)\left(\mathrm{S}_1' - \frac{i\delta}{n}\mathrm{S}_1\right),$$

$$\mathrm{D}_\varepsilon\Phi(i\mathrm{K}'+\varepsilon) \quad \Phi_1(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = -n^2\left(\mathrm{S}' + \frac{i\delta}{n}\mathrm{S}\right)\mathrm{S}_1,$$

$$\mathrm{D}_\varepsilon^2\Phi(i\mathrm{K}'+\varepsilon)\,\mathrm{D}_\varepsilon\Phi_1(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = -n^2\left(\mathrm{S}'' + \frac{2i\delta}{n}\mathrm{S}' - \frac{\delta^2}{n^2}\mathrm{S}\right)\left(\mathrm{S}_1' - \frac{i\delta}{n}\mathrm{S}_1\right),$$

et je me borne à la partie principale des développements en faisant, dans les deux dernières, abstraction des termes réels; le calcul donne pour résultats

$$-\frac{\mathrm{P}}{\varepsilon^2} - \frac{n^2}{\varepsilon^4}, \quad -\frac{n\delta}{\varepsilon^2}, \quad -\frac{\mathrm{Q}}{n\varepsilon^2},$$

si l'on écrit, pour abréger,

$$\mathrm{P} = \frac{n^2k'^2}{\operatorname{cn}^2\omega} + \frac{n^2(2k^2-1)}{3} + \delta^2,$$

$$\mathrm{Q} = -\frac{2n^3k'^2\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn}\omega}{i\operatorname{cn}^3\omega} + \frac{3\delta n^2k'^2}{\operatorname{cn}^2\omega} + \delta n^2(2k^2-1) + \delta^3 \text{ (1)}.$$

(1) M. Magnus de Sparre a signalé (*C. R.*, t. XCIX, 1889, p. 906) l'oubli du signe $-$ devant le premier terme de la quantité Q. Il en a conclu que l'équation déterminant les points stationnaires pouvait s'écrire

$$\operatorname{sn}^2 u = \beta\,\frac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}\,\frac{\beta\gamma+\alpha\beta+\alpha\gamma}{\delta(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)-2\alpha\beta\gamma}$$

et a retrouvé le théorème démontré antérieurement par Hess dans sa thèse (Munich, 1880) que l'erpoloïde n'a pas de points stationnaires réels (Cf. Hess, *Ueber die Herpolodie*, *Math. Ann.*, t. XXVII, 1886, p. 465). E. P.

Remplaçant donc $\frac{1}{\varepsilon^2}$ et $\frac{1}{\varepsilon^4}$ par $-\mathrm{D}_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}$, $-\frac{1}{6}\mathrm{D}_\varepsilon^3 \frac{1}{\varepsilon}$, on obtiendra, en désignant par C, C′, C″ des constantes,

$$\begin{aligned}
x'^2 + y'^2 &= \mathrm{C} + \mathrm{P}\mathrm{D}_u \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + \frac{1}{6} n^2 \mathrm{D}_u^3 \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},\\
xy' - yx' &= \mathrm{C}' + n\delta \mathrm{D}_u \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},\\
x'y'' - y'x'' &= \mathrm{C}'' + \frac{\mathrm{Q}}{n} \mathrm{D}_u \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}.
\end{aligned}$$

Employons enfin la relation $\mathrm{D}_u \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} - k^2 \operatorname{sn}^2 u$, et nous parviendrons, en modifiant convenablement les constantes, aux expressions suivantes,

$$\begin{aligned}
x'^2 + y'^2 &= \mathrm{C} + \left(n^2 - \delta^2 - \frac{n^2 k'^2}{\operatorname{cn}^2 \omega}\right) k^2 \operatorname{sn}^2 u - n^2 k^4 \operatorname{sn}^4 u,\\
xy' - yx' &= \mathrm{C}' - \delta n k^2 \operatorname{sn}^2 u,\\
xy'' - yx'' &= \mathrm{C}'' - \frac{\mathrm{Q}}{n} k^2 \operatorname{sn}^2 u.
\end{aligned}$$

Pour déterminer C, C′, C″, je supposerai $u = 0$; il suffira ainsi de connaître les valeurs des fonctions $\Phi(u)$, $\Phi_1(u)$ et de leurs premières dérivées quand on pose $u = 0$; or on obtient, par un calcul facile dont je me borne à donner le résultat,

$$\begin{aligned}
e^{-i\nu}\Phi(u) &= -in \frac{\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}\omega} + \beta \frac{\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}\omega} u + i \frac{n^2 k^2 \operatorname{cn}^2\omega + \beta^2 \operatorname{dn}^2\omega}{n \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega} \frac{u^2}{2} + \ldots,\\
e^{+i\nu}\Phi_1(u) &= +in \frac{\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}\omega} + \beta \frac{\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{cn}\omega} u - i \frac{n^2 k^2 \operatorname{cn}^2\omega + \beta^2 \operatorname{dn}^2\omega}{n \operatorname{cn}\omega \operatorname{dn}\omega} \frac{u^2}{2} + \ldots;
\end{aligned}$$

on en conclut

$$\mathrm{C} = \beta^2 \frac{\operatorname{dn}^2\omega}{\operatorname{cn}^2\omega}, \qquad \mathrm{C}' = n\beta \frac{\operatorname{dn}^2\omega}{\operatorname{cn}^2\omega}, \qquad \mathrm{C}'' = \beta \frac{n^2 k^2 \operatorname{cn}^2\omega + \beta^2 \operatorname{dn}^2\omega}{n \operatorname{cn}^2\omega}.$$

Soient donc S l'aire d'un secteur, s la longueur de l'arc et R le rayon de courbure de l'erpoloïde; nous aurons

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_u \mathrm{S} &= n\left(\beta \frac{\operatorname{dn}^2\omega}{\operatorname{cn}^2\omega} - \delta k^2 \operatorname{sn}^2 u\right),\\
(\mathrm{D}_u s)^2 &= \beta^2 \frac{\operatorname{dn}^2\omega}{\operatorname{cn}^2\omega} + \left(n^2 - \delta^2 - \frac{n^2 k'^2}{\operatorname{cn}^2\omega}\right) k^2 \operatorname{sn}^2 u - n^2 k^4 \operatorname{sn}^4 u,\\
\mathrm{R} &= \frac{n \operatorname{cn}^2\omega \left[\beta^2 \frac{\operatorname{dn}^2\omega}{\operatorname{cn}^2\omega} + \left(n^2 - \delta^2 - \frac{n^2 k'^2}{\operatorname{cn}^2\omega^2}\right) k^2 \operatorname{sn}^2 u - n^2 k^4 \operatorname{sn}^4 u\right]^{\frac{3}{2}}}{\beta(n^2 k^2 \operatorname{cn}^2\omega + \beta^2 \operatorname{dn}^2\omega) - \mathrm{Q} k^2 \operatorname{cn}^2\omega \operatorname{sn}^2 u}.
\end{aligned}$$

Ces formules donnent lieu à quelques remarques.

J'observerai, en premier lieu, qu'on tire de la première, en comptant l'aire à partir de $t = t_0$ où $u = 0$,

$$\mathrm{S} = n\beta \frac{\operatorname{dn}^2\omega}{\operatorname{cn}^2\omega} u - n\delta\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} u - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}\right] = nu\left(\beta \frac{\operatorname{dn}^2\omega}{\operatorname{cn}^2\omega} - \delta \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\right) + n\delta \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)};$$

il en résulte que, u devenant $u + 2\mathrm{K}$, le secteur s'accroît de la quantité constante

$$2n\left(\beta \frac{\operatorname{dn}^2\omega}{\operatorname{cn}^2\omega} \mathrm{K} - \delta \mathrm{J}\right),$$

ou, sous une autre forme,

$$2\sqrt{\frac{\delta - \alpha}{\gamma - \beta}}\,[(\gamma - \delta)\beta\mathrm{K} - (\gamma - \beta)\delta\mathrm{J}].$$

Je démontrerai ensuite que le trinome en $\operatorname{sn} u$ qui se présente dans l'élément de l'arc, et dont les racines sont réelles et de signes contraires, a sa racine positive comprise entre 1 et $\frac{1}{k}$. En faisant, en effet, $\operatorname{sn} u = 1$, puis $\operatorname{sn} u = \frac{1}{k}$, nous trouvons pour résultats les quantités

$$\frac{\alpha^2(\gamma - \delta)(\delta - \beta)}{(\gamma - \beta)(\delta - \alpha)}, \quad \frac{\gamma^2(\beta - \delta)}{\gamma - \beta},$$

dont la première est positive et la seconde négative. On verra sans peine aussi qu'en introduisant $\operatorname{dn} u$ au lieu de $\operatorname{sn} u$, il prend la forme suivante, qui est assez simple,

$$\frac{\gamma^2(\beta - \delta)}{\gamma - \beta} - [\gamma(\alpha + \beta - 2\delta) - \alpha\beta] \operatorname{dn}^2 u - (\gamma - \beta)(\delta - \alpha) \operatorname{dn}^4 u.$$

Enfin, et en dernier lieu, je remarquerai que les constantes qui entrent dans le dénominateur du rayon de courbure peuvent s'écrire ainsi

$$\mathrm{Q} = \delta(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) + 2\alpha\beta\gamma;$$

$$\frac{\beta(n^2 k^2 \operatorname{cn}^2\omega + \beta^2 \operatorname{dn}^2\omega)}{\operatorname{cn}^2\omega} = \frac{\beta(\gamma - \delta)(\beta\alpha + \beta\gamma - \alpha\gamma)}{\gamma - \beta}\ (^1).$$

---

(1) Nous supprimons ici quelques lignes relatives à la formule donnant les points stationnaires, inexacte comme il a été indiqué dans la note de la page 313.

E. P.

XIX.

Après l'erpoloïde, je considère encore la courbe sphérique décrite par un point déterminé du corps pendant la rotation, et dont les équations sont

$$\begin{aligned} x &= a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta, \\ y &= a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \\ z &= a''\xi + b''\eta + c''\zeta. \end{aligned}$$

Je remarquerai tout d'abord que les éléments géométriques, qui conservent la même valeur quand on passe d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre quelconque, seront des fonctions doublement périodiques du temps. Si l'on pose, en effet,

$$\begin{aligned} D_t^n x &= a\,\xi_n + b\,\eta_n + c\,\zeta_n, \\ D_t^n y &= a'\xi_n + b'\eta_n + c'\zeta_n, \\ D_t^n z &= a''\xi_n + b''\eta_n + c''\zeta_n, \end{aligned}$$

les équations de Poisson donnent facilement

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= D_t\xi_n + q\,\zeta_n - r\,\eta_n, \\ \eta_{n+1} &= D_t\eta_n + r\,\xi_n - p\,\zeta_n, \\ \zeta_{n+1} &= D_t\zeta_n + p\,\eta_n - q\,\xi_n, \end{aligned}$$

et ces relations permettent d'exprimer de proche en proche, pour toute valeur de n, les quantités ξ_n, η_n, ζ_n par des fonctions rationnelles et entières de a'', b'', c''. On trouvera, en particulier,

$$\xi_1 = b''\beta\zeta - c''\gamma\eta, \qquad \eta_1 = c''\gamma\xi - a''\alpha\zeta, \qquad \zeta_1 = a''\alpha\eta - b''\beta\xi,$$

et, par conséquent, en désignant par s l'arc de la courbe, nous aurons la formule

$$(D_t s)^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2.$$

On obtient ensuite, pour le rayon de courbure R et le rayon de torsion R_1, les expressions suivantes

$$R^2 = \frac{(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2)^3}{u^2 + v^2 + w^2}, \qquad R_1 = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{\Delta},$$

où j'ai fait, pour abréger,

$$u = \eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2, \qquad v = \zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1, \qquad w = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}.$$

C'est à l'élément de l'arc que je m'arrêterai un moment, afin de tirer quelques conséquences de la forme analytique remarquable que présente la quantité $\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2$. Nous avons, en effet, la relation

$$\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 = 0,$$

qui donne facilement

$$(\xi^2 + \zeta^2)(D_t s)^2 = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\eta_1^2 + (\zeta\xi_1 - \xi\zeta_1)^2,$$

et, par suite, cette décomposition en facteurs imaginaires conjugués, où j'écris, pour abréger, $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$,

$$(\xi^2 + \zeta^2)(D_t s)^2 = (\zeta\xi_1 - \xi\zeta_1 + i\rho\eta_1)(\zeta\xi_1 - \xi\zeta_1 - i\rho\eta_1).$$

Or les valeurs de a'', b'', c'', à savoir

$$a'' = -\sqrt{\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \alpha}}\operatorname{cn} u, \qquad b'' = \sqrt{\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \beta}}\operatorname{sn} u, \qquad c'' = \sqrt{\frac{\delta - \alpha}{\gamma - \alpha}}\operatorname{dn} u,$$

conduisent à l'expression suivante

$$\begin{aligned} \zeta\xi_1 - \xi\zeta_1 + i\rho\eta_1 = {} & \alpha\sqrt{\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \alpha}}(\xi\eta + i\rho\zeta)\operatorname{cn} u \\ & + \beta\sqrt{\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \beta}}(\xi^2 + \zeta^2)\operatorname{sn} u \\ & - \gamma\sqrt{\frac{\delta - \alpha}{\gamma - \alpha}}(\eta\zeta - i\rho\xi)\operatorname{dn} u, \end{aligned}$$

et nous allons facilement en déduire les valeurs particulières des coordonnées ξ, η, ζ, pour lesquelles l'arc de la courbe sphérique, au lieu de dépendre d'une transcendante compliquée, s'obtient sous forme finie explicite. Je me fonderai, à cet effet, sur cette remarque, que le produit de deux fonctions linéaires

$$\Pi(u) = (A\operatorname{cn} u + B\operatorname{sn} u + C\operatorname{dn} u)(A'\operatorname{cn} u + B'\operatorname{sn} u + C'\operatorname{dn} u)$$

devient le carré d'une fonction uniforme si l'on a

$$A^2 k'^2 + B^2 - C^2 k'^2 = 0, \qquad A'^2 k'^2 + B'^2 - C'^2 k'^2 = 0.$$

A cet effet, j'observe que les formules

$$\operatorname{sn} 2u = \frac{2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u},$$

$$\operatorname{cn} 2u = \frac{1 - 2 \operatorname{sn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^4 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u},$$

$$\operatorname{dn} 2u = \frac{1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^4 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}$$

permettent d'écrire

$$\begin{aligned} &A \operatorname{cn} 2u + B \operatorname{sn} 2u + C \operatorname{dn} 2u \\ &\quad = \frac{A + C - 2(A + Ck^2) \operatorname{sn}^2 u + (A + C) k^2 \operatorname{sn}^4 u + 2B \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u}. \end{aligned}$$

Cela étant, soit, en désignant par g et h deux constantes,

$$\begin{aligned} A + C - 2(A + Ck^2) \operatorname{sn}^2 u + (A + C) k^2 \operatorname{sn}^4 u \\ + 2B \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u = (g \operatorname{sn} u + h \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)^2, \end{aligned}$$

on verra que les quatre équations résultant de l'identification se réduisent aux trois suivantes

$$A + C = h^2, \qquad 2(A + Ck^2) = h^2(1 + k^2) - g^2, \qquad B = gh;$$

or l'élimination de g et h conduit immédiatement à la condition

$$A^2 k'^2 + B^2 - C^2 k'^2 = 0.$$

Soit de même ensuite

$$A' \operatorname{cn} 2u + B' \operatorname{sn} 2u + C' \operatorname{dn} 2u = \frac{(g' \operatorname{sn} u + h' \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)^2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u},$$

sous la condition semblable

$$A'^2 k'^2 + B'^2 - C'^2 k'^2 = 0;$$

nous en conclurons, pour $\sqrt{\Pi(2u)}$, l'expression suivante

$$\sqrt{\Pi(2u)} = \frac{(g \operatorname{sn} u + h \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)(g' \operatorname{sn} u + h' \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u},$$

ou, en développant,

$$\sqrt{\Pi(2u)} = \frac{gg' \operatorname{sn}^2 u + hh'[1 - (1 + k^2) \operatorname{sn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^4 u] + (gh' + hg') \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 u};$$

on en déduit ensuite facilement, si l'on change u en $\frac{u}{2}$,

$$2\sqrt{\Pi(u)} = \frac{2}{k^2} gg'(\operatorname{dn} u - \operatorname{cn} u) + (gh' + hg') \operatorname{sn} u + hh'(\operatorname{dn} u + \operatorname{cn} u).$$

Voici maintenant l'application de la remarque que nous venons d'établir.

XX.

Revenant à l'expression précédemment donnée des facteurs de $(D_t s)^2$, je pose

$$A = \alpha\sqrt{\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \alpha}}(\xi\eta + i\rho\zeta), \qquad B = \beta\sqrt{\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \beta}}(\xi^2 + \zeta^2), \qquad C = -\gamma\sqrt{\frac{\delta - \alpha}{\gamma - \alpha}}(\eta\zeta - i\rho\xi),$$

$$A' = \alpha\sqrt{\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \alpha}}(\xi\eta - i\rho\zeta), \qquad B' = \beta\sqrt{\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \beta}}(\xi^2 + \zeta^2), \qquad C' = -\gamma\sqrt{\frac{\delta - \alpha}{\gamma - \alpha}}(\eta\zeta + i\rho\xi),$$

et j'observe que, au moyen de la valeur $k'^2 = \frac{(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)}{(\beta - \gamma)(\alpha - \delta)}$, nos conditions se présentent sous la forme suivante

$$\frac{\alpha^2}{\alpha - \delta}(\xi\eta + i\rho\zeta)^2 + \frac{\beta^2}{\beta - \delta}(\xi^2 + \zeta^2)^2 + \frac{\gamma^2}{\gamma - \delta}(\eta\zeta - i\rho\xi)^2 = 0,$$

$$\frac{\alpha^2}{\alpha - \delta}(\xi\eta - i\rho\zeta)^2 + \frac{\beta^2}{\beta - \delta}(\xi^2 + \zeta^2)^2 + \frac{\gamma^2}{\gamma - \delta}(\eta\zeta + i\rho\xi)^2 = 0.$$

Elles donnent immédiatement $\xi\eta\zeta = 0$; et nous poserons en conséquence:

1° $\quad \xi = 0, \quad \left(\frac{\gamma^2}{\gamma - \delta} - \frac{\alpha^2}{\alpha - \delta}\right)\eta^2 + \left(\frac{\beta^2}{\beta - \delta} - \frac{\alpha^2}{\alpha - \delta}\right)\zeta^2 = 0,$

2° $\quad \eta = 0, \quad \left(\frac{\alpha^2}{\alpha - \delta} - \frac{\beta^2}{\beta - \delta}\right)\zeta^2 + \left(\frac{\gamma^2}{\gamma - \delta} - \frac{\beta^2}{\beta - \delta}\right)\xi^2 = 0,$

3° $\quad \zeta = 0, \quad \left(\frac{\beta^2}{\beta - \delta} - \frac{\gamma^2}{\gamma - \delta}\right)\xi^2 + \left(\frac{\alpha^2}{\alpha - \delta} - \frac{\gamma^2}{\gamma - \delta}\right)\eta^2 = 0.$

Soit, pour abréger,

$$\begin{aligned} a &= (\alpha - \delta)(\gamma - \beta)(\gamma\delta + \beta\delta - \gamma\beta), \\ b &= (\beta - \delta)(\alpha - \gamma)(\alpha\delta + \gamma\delta - \alpha\gamma), \\ c &= (\gamma - \delta)(\beta - \alpha)(\beta\delta + \alpha\delta - \beta\alpha); \end{aligned}$$

au moyen de ces quantités, qu'on verra facilement vérifier les relations

$$a + b + c = 0, \qquad \frac{a\alpha^2}{\alpha - \delta} + \frac{b\beta^2}{\beta - \delta} + \frac{c\gamma^2}{\gamma - \delta} = 0,$$

nous obtenons les trois systèmes de valeurs

$$\begin{array}{llll} 1^{\circ} & \xi = 0, & \eta^2 = c, & \zeta^2 = b, \\ 2^{\circ} & \eta = 0, & \zeta^2 = a, & \xi^2 = c, \\ 3^{\circ} & \zeta = 0, & \xi^2 = b, & \eta^2 = a. \end{array}$$

Maintenant je vais démontrer que, de ces diverses solutions, la première est seule réelle et répond à la question proposée.

Pour cela, je rappelle que les constantes α, β, γ, δ satisfont aux conditions

$$\text{(I)} \qquad \alpha < \beta < \delta < \gamma,$$

ou à celles-ci

$$\text{(II)} \qquad \alpha > \beta > \delta > \gamma.$$

et j'observe qu'on aura, dans les deux cas,

$$(\alpha - \delta)(\gamma - \beta) < 0, \qquad (\beta - \delta)(\alpha - \gamma) > 0, \qquad (\gamma - \delta)(\beta - \alpha) > 0.$$

J'ajoute à ces résultats les suivants

$$\gamma\delta + \beta\delta - \gamma\beta > 0, \qquad \alpha\delta + \gamma\delta - \alpha\gamma > 0, \qquad \beta\delta + \alpha\delta - \beta\alpha > 0,$$

qui donneront, comme on voit,

$$a < 0, \qquad b > 0, \qquad c > 0.$$

On peut écrire, en effet,

$$\begin{aligned} \gamma\delta + \beta\delta - \gamma\beta &= \beta\delta + (\delta - \beta)\gamma, \\ \alpha\delta + \gamma\delta - \gamma\alpha &= \alpha\delta + (\delta - \alpha)\gamma, \\ \beta\delta + \alpha\delta - \beta\alpha &= \alpha\delta + (\delta - \alpha)\beta, \end{aligned}$$

et, dans le premier système de conditions, on voit ainsi que les premiers membres sont tous positifs. Nous ferons ensuite, en passant au second système,

$$\begin{aligned} \gamma\delta + \beta\delta - \gamma\beta &= \gamma\delta + (\delta - \gamma)\beta, \\ \alpha\delta + \gamma\delta - \alpha\gamma &= \gamma\delta + (\delta - \gamma)\alpha; \end{aligned}$$

mais ces transformations faciles ne suffisent plus, à l'égard de la troisième quantité $\beta\delta + \alpha\delta - \beta\alpha$, pour reconnaître qu'elle est toujours positive comme les autres. Il est nécessaire, en effet, d'introduire une condition nouvelle, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > \frac{1}{\gamma}$, ayant son origine dans la définition des quantités $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, qui sont proportionnelles aux moments principaux d'inertie. Nous écrirons, dans ce cas,

$$\beta\delta + \alpha\delta - \alpha\beta = \alpha\beta\delta\left[\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right) + \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\delta}\right)\right],$$

et le dernier résultat qui nous restait à établir se trouve démontré. Les valeurs réelles ainsi obtenues pour les coordonnées ξ, η, ζ, à savoir $\xi = 0$, $\eta = \sqrt{b}$, $\zeta = \sqrt{c}$, donnent, en prenant les radicaux avec le double signe, quatre points qui décrivent des courbes rectifiables, ou plutôt deux droites remarquables : $\xi = 0, \eta = \pm\sqrt{\frac{c}{b}}\,\zeta$, dont tous les points décrivent pendant la rotation du corps de telles courbes. Pour former l'expression de l'arc s, observons que, d'après l'égalité $a + b + c = 0$, on peut écrire $i\rho = \sqrt{a}$, ce qui donne les valeurs suivantes :

$$A = \zeta\alpha\sqrt{\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \alpha}\,a}, \qquad B = \zeta\beta\sqrt{\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \beta}\,b}, \qquad C = \zeta\gamma\sqrt{\frac{\delta - \alpha}{\gamma - \alpha}\,c}.$$

On a ensuite

$$A' = -A, \qquad B' = B, \qquad C' = C,$$

et nous en concluons

$$\begin{aligned} &(A \operatorname{cn} u + B \operatorname{sn} u + C \operatorname{dn} u)(A' \operatorname{cn} u + B' \operatorname{sn} u + C' \operatorname{dn} u) \\ &\quad = (B \operatorname{sn} u + C \operatorname{dn} u)^2 - A^2 \operatorname{cn}^2 u. \end{aligned}$$

La condition $A^2 k'^2 + B^2 - C^2 k'^2 = 0$ conduit enfin à cette nouvelle transformation

$$\begin{aligned} &(B \operatorname{sn} u + C \operatorname{dn} u)^2 - A^2 \operatorname{cn}^2 u \\ &\quad = (B \operatorname{sn} u + C \operatorname{dn} u)^2 - \frac{C^2 k'^2 - B^2}{k'^2}(\operatorname{dn}^2 u - k'^2 \operatorname{sn}^2 u) \\ &\quad = \left(C k' \operatorname{sn} u + \frac{B}{k'} \operatorname{dn} u\right)^2, \end{aligned}$$

et il vient, en définitive, après quelques réductions, pour l'expression de l'arc de la courbe sphérique,

$$s = \gamma\sqrt{\frac{\beta-\delta}{\beta-\gamma}(\beta\delta+\alpha\delta-\beta\alpha)(\delta-\alpha)(\gamma-\beta)}\int k \operatorname{sn} u\, du$$
$$+\beta\sqrt{\frac{\gamma-\delta}{\gamma-\alpha}(\alpha\delta+\gamma\delta-\alpha\gamma)(\delta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\int \operatorname{dn} u\, du,$$

puis, en effectuant les intégrations,

$$s = \gamma\sqrt{\frac{\beta-\delta}{\beta-\gamma}(\beta\delta+\alpha\delta-\beta\alpha)(\delta-\alpha)(\gamma-\beta)}\log(\operatorname{dn} u - k\operatorname{cn} u)$$
$$+\beta\sqrt{\frac{\gamma-\delta}{\gamma-\alpha}(\alpha\delta+\gamma\delta-\alpha\gamma)(\delta-\alpha)(\gamma-\alpha)}\operatorname{am} u.$$

Il en résulte que, u devenant $u+4\mathrm{K}$, l'arc s'accroît de la quantité constante

$$2\pi\beta\sqrt{\frac{\gamma-\delta}{\gamma-\alpha}(\alpha\delta+\gamma\delta-\alpha\gamma)(\delta-\alpha)(\gamma-\alpha)}.$$

XXI.

Je terminerai cette étude de la rotation en indiquant encore un point de vue sous lequel on peut traiter la question et où l'on évitera le défaut de symétrie des méthodes précédemment exposées, qui donnent d'abord les quantités A, B, C ; puis, par un calcul différent, la quantité V, en séparant ainsi des expressions composées de la même manière avec les quatre fonctions fondamentales de Jacobi. Des transformations algébriques faciles des équations de la rotation, lorsqu'on suppose en général le corps sollicité par des forces quelconques, permettent, en effet, d'associer les composantes de la vitesse aux neuf cosinus ; elles seront le point de départ du nouveau procédé que je vais donner pour le cas où il n'y a point de forces accélératrices. Avant de les exposer, je rappelle d'abord les équations d'Euler

$$\begin{aligned}
\mathrm{a}\,\mathrm{D}_t p &= (\mathrm{b}-\mathrm{c})qr + \mathrm{P},\\
\mathrm{b}\,\mathrm{D}_t q &= (\mathrm{c}-\mathrm{a})rp + \mathrm{Q},\\
\mathrm{c}\,\mathrm{D}_t r &= (\mathrm{a}-\mathrm{b})pq + \mathrm{R},
\end{aligned}$$

où les moments d'inertie sont désignés par a, b, c et celles de

Poisson, dont j'ai déjà fait usage,

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_t a'' &= b'' r - c'' q,\\
\mathrm{D}_t b'' &= c'' p - a'' r,\\
\mathrm{D}_t c'' &= a'' q - b'' p,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_t \mathrm{A} &= \mathrm{B}\, r - \mathrm{C} q,\\
\mathrm{D}_t \mathrm{B} &= \mathrm{C} p - \mathrm{A}\, r,\\
\mathrm{D}_t \mathrm{C} &= \mathrm{A}\, q - \mathrm{B}\, p.
\end{aligned}$$

Cela étant, soit, comme précédemment,

$$\begin{aligned}
v &= a\,p + b\,q + c\,r,\\
v' &= a'p + b'q + c'r,\\
v'' &= a''p + b''q + c''r,\\
\mathrm{V} &= \mathrm{A}\,p + \mathrm{B}\,q + \mathrm{C}\,r;
\end{aligned}$$

en écrivant, pour abréger,

$$\Delta = p\mathrm{D}_t p + q\mathrm{D}_t q + r\mathrm{D}_t r - (a''p + b''q + c''r)(a''\mathrm{D}_t p + b''\mathrm{D}_t q + c''\mathrm{D}_t r),$$

nous aurons, comme conséquence, les relations suivantes, que je vais démontrer :

I.

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}\Delta &= \mathrm{V}(\mathrm{D}_t p - a''\mathrm{D}_t v'') + i\mathrm{D}_t\mathrm{V}\,\mathrm{D}_t a'',\\
\mathrm{B}\Delta &= \mathrm{V}(\mathrm{D}_t q - b''\mathrm{D}_t v'') + i\mathrm{D}_t\mathrm{V}\,\mathrm{D}_t b'',\\
\mathrm{C}\Delta &= \mathrm{V}(\mathrm{D}_t r - c''\mathrm{D}_t v'') + i\mathrm{D}_t\mathrm{V}\,\mathrm{D}_t c'',
\end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}a'' &= \mathrm{A}v'' + i\mathrm{D}_t\mathrm{A},\\
\mathrm{V}b'' &= \mathrm{B}v'' + i\mathrm{D}_t\mathrm{B},\\
\mathrm{V}c'' &= \mathrm{C}v'' + i\mathrm{D}_t\mathrm{C};
\end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned}
i\mathrm{C}\mathrm{D}_t b'' &= \mathrm{B}\,r + ic''\mathrm{D}_t\mathrm{B},\\
i\mathrm{A}\mathrm{D}_t c'' &= \mathrm{C}p + ia''\mathrm{D}_t\mathrm{C},\\
i\mathrm{B}\mathrm{D}_t a'' &= \mathrm{A}q + ib''\mathrm{D}_t\mathrm{A};
\end{aligned}$$

IV.

$$\begin{aligned}
i\mathrm{B}\mathrm{D}_t c'' &= \mathrm{C}q + ib''\mathrm{D}_t\mathrm{C},\\
i\mathrm{C}\mathrm{D}_t a'' &= \mathrm{A}\,r + ic''\mathrm{D}_t\mathrm{A},\\
i\mathrm{A}\mathrm{D}_t b'' &= \mathrm{B}p + ia''\mathrm{D}_t\mathrm{B}.
\end{aligned}$$

A cet effet, je remarque que, en écrivant Δ sous la forme

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\mathrm{D}_t(p^2+q^2+r^2) - v''\mathrm{D}_t v'',$$

la condition $p^2+q^2+r^2 = v^2+v'^2+v''^2$ donne immédiatement

$$\Delta = v\mathrm{D}_t v + v'\mathrm{D}_t v'.$$

Observons encore qu'on tire des équations

$$v = ap + bq + cr,\qquad v' = a'p + b'q + c'r,$$

en employant les égalités $ab' - ba' = c''$, $ca' - ac' = b''$, l'expression suivante :

$$a'v - av' = b''r - c''q = D_t a''.$$

On a d'ailleurs immédiatement

$$D_t p - a'' D_t v'' = a D_t v + a' D_t v',$$

et ces résultats transforment l'équation

$$A\Delta = V(D_t p - a'' D_t v'') + i D_t V D_t a''$$

dans la suivante

$$\begin{aligned}&(a + ia')(v D_t v + v' D_t v') \\ &\quad = (v + iv')(a D_t v + a' D_t v') + i(D_t v + i D_t v')(a'v - av'),\end{aligned}$$

qui est une identité.

Passons à l'égalité $Va'' = Av'' + iD_t A$; il suffit d'y remplacer les quantités V, v'', $D_t A$ par les expressions en A, B, C, p, q, r, ce qui donne

$$(Ap + Bq + Cr)a'' = A(a''p + b''q + c''r) + i(Br - Cq),$$

et par conséquent encore une identité, en l'écrivant ainsi

$$q(Ba'' - Ab'' + iC) + r(Ca'' - Ac'' - iB) = 0.$$

Enfin les équations

$$iAD_t c'' = Cp + iD_t C a'', \qquad iAD_t b'' = Bp + iD_t B a''$$

des systèmes III et IV conduisent, par un calcul semblable, en se servant des expressions de $D_t c''$ et $D_t b''$, aux mêmes égalités

$$Ab'' - Ba'' = iC, \qquad Ac'' - Ca'' = -iB;$$

elles se trouvent donc encore vérifiées ; or toutes les autres équations, dans les quatre systèmes, se démontreraient de même, ou se déduisent de celles que nous venons d'établir par un simple changement de lettres.

XXII.

J'applique maintenant ces résultats au cas où il n'y a point de forces accélératrices, et je pose à cet effet $p = \alpha a''$, $q = \beta b''$,

$r = \gamma c''$, $v'' = \delta$, ce qui donne d'abord

$$\Delta = \alpha^2 a'' D_t a'' + \beta^2 b'' D_t b'' + \gamma^2 c'' D_t c'' = (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) a'' b'' c''.$$

Ayant ensuite

$$D_t p - a'' D_t v'' = \alpha(\gamma - \beta) b'' c'',$$

on voit que, en supprimant le facteur $(\gamma - \beta)\, b''c''$, l'équation

$$A\Delta = V(D_t p - a'' D_t v'') + i D_t V D_t a''$$

devient simplement

$$Aa''(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) = V\alpha + i D_t V.$$

Dans les trois autres systèmes, les réductions sont encore plus faciles, et nous nous trouvons ainsi amenés aux relations suivantes :

I.

$$\begin{aligned} Aa''(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) &= V\alpha + iD_t V, \\ Bb''(\beta - \gamma)(\beta - \alpha) &= V\beta + iD_t V, \\ Cc''(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) &= V\gamma + iD_t V; \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} Va'' &= A\delta + iD_t A, \\ Vb'' &= B\delta + iD_t B, \\ Vc'' &= C\delta + iD_t C; \end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned} iCa''(\alpha - \gamma) &= B\gamma + iD_t B, \\ iAb''(\beta - \alpha) &= C\alpha + iD_t C, \\ iBc''(\gamma - \beta) &= A\beta + iD_t A; \end{aligned}$$

IV.

$$\begin{aligned} iBa''(\beta - \alpha) &= C\beta + iD_t C, \\ iCb''(\gamma - \beta) &= A\gamma + iD_t A, \\ iAc''(\alpha - \gamma) &= B\alpha + iD_t B. \end{aligned}$$

La question est maintenant d'obtenir quatre fonctions A, B, C, V, qui vérifient à la fois les douze équations. Nous ferons un premier pas vers notre but, par un changement d'inconnues, en posant

$$A = \frac{i}{k \operatorname{cn} \omega}\mathfrak{a}, \qquad B = \frac{\operatorname{dn} \omega}{k \operatorname{cn} \omega}\mathfrak{b}, \qquad C = -\frac{\operatorname{sn} \omega}{\operatorname{cn} \omega}\mathfrak{c}, \qquad V = -in\mathfrak{v};$$

nous prendrons aussi la quantité u pour variable indépendante à la place de t ; enfin, en employant les expressions de a'', b'', c'', on trouvera les transformées suivantes de nos équations :

I.

$$\begin{aligned} ik \operatorname{cn} u\, \mathfrak{a} &= \frac{i\alpha}{n}\mathfrak{v} - D_u \mathfrak{v}, \\ k \operatorname{sn} u\, \mathfrak{b} &= \frac{i\beta}{n}\mathfrak{v} - D_u \mathfrak{v}, \\ i \operatorname{dn} u\, \mathfrak{c} &= \frac{i\gamma}{n}\mathfrak{v} - D_u \mathfrak{v}; \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} ik \operatorname{cn} u\, \mathfrak{v} &= \frac{i\delta}{n}\mathfrak{a} - D_u \mathfrak{a}, \\ k \operatorname{sn} u\, \mathfrak{v} &= \frac{i\delta}{n}\mathfrak{b} - D_u \mathfrak{b}, \\ i \operatorname{dn} u\, \mathfrak{v} &= \frac{i\delta}{n}\mathfrak{c} - D_u \mathfrak{c}; \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc}
\text{III.} & \text{IV.} \\
ik \operatorname{cn} u\, \mathfrak{c} = \dfrac{i\gamma}{n}\mathfrak{b} - D_u \mathfrak{b}, & ik \operatorname{cn} u\, \mathfrak{b} = \dfrac{i\beta}{n}\mathfrak{c} - D_u \mathfrak{c}, \\
k \operatorname{sn} u\, \mathfrak{a} = \dfrac{i\alpha}{n}\mathfrak{c} - D_u \mathfrak{c}, & k \operatorname{sn} u\, \mathfrak{c} = \dfrac{i\gamma}{n}\mathfrak{a} - D_u \mathfrak{a}, \\
i \operatorname{dn} u\, \mathfrak{b} = \dfrac{i\beta}{n}\mathfrak{a} - D_u \mathfrak{a}, & i \operatorname{dn} u\, \mathfrak{a} = \dfrac{i\alpha}{n}\mathfrak{b} - D_u \mathfrak{b}.
\end{array}$$

Je ne m'arrêterai point aux calculs faciles qui donnent ces résultats, et je remarque immédiatement qu'il convient de les disposer dans ce nouvel ordre, à savoir

$$\begin{array}{lll}
ik \operatorname{cn} u\, \mathfrak{a} = \dfrac{i\alpha}{n}\mathfrak{d} - D_u \mathfrak{d}, & k \operatorname{sn} u\, \mathfrak{a} = \dfrac{i\alpha}{n}\mathfrak{c} - D_u \mathfrak{c}, & i \operatorname{dn} u\, \mathfrak{a} = \dfrac{i\alpha}{n}\mathfrak{b} - D_u \mathfrak{b}, \\
ik \operatorname{cn} u\, \mathfrak{b} = \dfrac{i\beta}{n}\mathfrak{c} - D_u \mathfrak{c}, & k \operatorname{sn} u\, \mathfrak{b} = \dfrac{i\beta}{n}\mathfrak{d} - D_u \mathfrak{d}, & i \operatorname{dn} u\, \mathfrak{b} = \dfrac{i\beta}{n}\mathfrak{a} - D_u \mathfrak{a}, \\
ik \operatorname{cn} u\, \mathfrak{c} = \dfrac{i\gamma}{n}\mathfrak{b} - D_u \mathfrak{b}, & k \operatorname{sn} u\, \mathfrak{c} = \dfrac{i\gamma}{n}\mathfrak{a} - D_u \mathfrak{a}, & i \operatorname{dn} u\, \mathfrak{c} = \dfrac{i\gamma}{n}\mathfrak{d} - D_u \mathfrak{d}, \\
ik \operatorname{cn} u\, \mathfrak{d} = \dfrac{i\delta}{n}\mathfrak{a} - D_u \mathfrak{a}, & k \operatorname{sn} u\, \mathfrak{d} = \dfrac{i\delta}{n}\mathfrak{b} - D_u \mathfrak{b}, & i \operatorname{dn} u\, \mathfrak{d} = \dfrac{i\delta}{n}\mathfrak{c} - D_u \mathfrak{c}.
\end{array}$$

Par là se trouvent mises en évidence trois substitutions remarquables, qui correspondent aux multiplications des quatre fonctions par $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{dn} u$, à savoir

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ \mathfrak{d} & \mathfrak{c} & \mathfrak{b} & \mathfrak{a} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ \mathfrak{c} & \mathfrak{d} & \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \\ \mathfrak{b} & \mathfrak{a} & \mathfrak{d} & \mathfrak{c} \end{pmatrix};$$

elles ont la propriété caractéristique de laisser invariables les quantités du type $(\mathfrak{a} - \mathfrak{b})(\mathfrak{c} - \mathfrak{d})$, et, si on les applique deux fois, chacune d'elles donne la substitution identique. Représentons les quatre lettres $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ par X_s pour les valeurs 0, 1, 2, 3 de l'indice, en convenant de prendre cet indice suivant le module 4; elles s'expriment comme il suit

$$\begin{pmatrix} X_s \\ X_{3-s} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_s \\ X_{2+s} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_s \\ X_{1-s} \end{pmatrix}.$$

Si l'on adopte un autre ordre, en supposant que Z_s donne $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$ pour $s = 0, 1, 2, 3$, on retrouvera encore, sauf un certain échange, les mêmes fonctions de l'indice, à savoir

$$\begin{pmatrix} Z_s \\ Z_{2+s} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Z_s \\ Z_{1-s} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} Z_s \\ Z_{3-s} \end{pmatrix}.$$

C'est cette disposition qu'il convient de garder, et semblablement nous désignerons les constantes $\frac{i\gamma}{n}, \frac{i\alpha}{n}, \frac{i\beta}{n}, \frac{i\delta}{n}$ par ε_s pour $s = 0, 1, 2, 3$; cela étant, nous pouvons comprendre, dans ces trois seules équations, le système de nos douze relations :

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{aligned} ik \operatorname{cn} u\, Z_s &= \varepsilon_s Z_{2+s} - D_u Z_{2+s}, \\ k \operatorname{sn} u\, Z_s &= \varepsilon_s Z_{1-s} - D_u Z_{1-s}, \\ i \operatorname{dn} u\, Z_s &= \varepsilon_s Z_{3-s} - D_u Z_{3-s}. \end{aligned} \right.$$

Le résultat relatif aux quantités X_s ne diffère de celui-ci qu'en ce que $ik \operatorname{cn} u$, $k \operatorname{sn} u$, $i \operatorname{dn} u$ se trouvent remplacés respectivement par $i \operatorname{dn} u$, $ik \operatorname{cn} u$, $k \operatorname{sn} u$; en désignant $\frac{i\alpha}{n}, \frac{i\beta}{n}, \frac{i\gamma}{n}, \frac{i\delta}{n}$ par η_s pour $s = 0, 1, 2, 3$, nous aurons, en effet,

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} ik \operatorname{cn} u\, X_s &= \eta_s X_{3-s} - D_u X_{3-s}, \\ k \operatorname{sn} u\, X_s &= \eta_s X_{2+s} - D_u X_{2+s}, \\ i \operatorname{dn} u\, X_s &= \eta_s X_{1-s} - D_u X_{1-s}. \end{aligned} \right.$$

Avant d'aller plus loin, je crois devoir montrer comment ces deux systèmes d'équations se ramènent l'un à l'autre, par un changement très simple de la variable et des constantes.

Je me fonderai, à cet effet, sur les formules de la transformation du premier ordre

$$\operatorname{cn}\left(iku, \frac{ik'}{k}\right) = \frac{1}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{sn}\left(iku, \frac{ik'}{k}\right) = \frac{ik \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{dn}\left(iku, \frac{ik'}{k}\right) = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u},$$

en les écrivant de la manière suivante, où j'ai fait, pour abréger, $l = \frac{ik'}{k}$,

$$\begin{aligned} k' \operatorname{cn}(iku, l) &= - \operatorname{dn}(u - K + 2iK'), \\ l \operatorname{sn}(iku, l) &= + \operatorname{cn}(u - K + 2iK'), \\ \operatorname{dn}(iku, l) &= - \operatorname{sn}(u - K + 2iK'). \end{aligned}$$

Changeons, en effet, u en $u - K + 2iK'$, et désignons par Z'_s ce que devient ainsi Z_s ; les équations (I) donneront celles-ci

$$\begin{aligned} ikl \operatorname{sn}(iku, l) Z'_s &= \varepsilon_s Z'_{2+s} - D_u Z'_{2+s}, \\ - k' \operatorname{dn}(iku, l) Z'_s &= \varepsilon_s Z'_{1-s} - D_u Z'_{1-s}, \\ - ik' \operatorname{cn}(iku, l) Z'_s &= \varepsilon_s Z'_{3-s} - D_u Z'_{3-s}. \end{aligned}$$

Soit encore Z''_s le résultat de la substitution de $\frac{u}{ik}$ au lieu de u, on trouvera, si l'on remarque que $il = -\frac{k'}{k}$,

$$l\,\mathrm{sn}(u,\,l)Z''_s = \frac{\varepsilon_s}{ik}Z'_{2+s} - D_u Z''_{2+s},$$

$$i\,\mathrm{dn}(u,\,l)Z''_s = \frac{\varepsilon_s}{ik}Z''_{1-s} - D_u Z''_{1-s},$$

$$il\,\mathrm{cn}(u,\,l)Z''_s = \frac{\varepsilon_s}{ik}Z''_{3-s} - D_u Z''_{3-s};$$

nous sommes donc ainsi ramené aux équations (II), en y remplaçant les constantes η_s par $\frac{\varepsilon_s}{ik}$, ce qui entraîne le changement de k en l.

Je vais montrer maintenant comment la théorie des fonctions elliptiques donne la solution de ces nouvelles équations auxquelles nous a conduit le problème de la rotation.

XXIII.

Je représenterai dans ce qui va suivre les fonctions $\Theta(u), \mathrm{H}(u), \mathrm{H}_1(u), \Theta_1(u)$ par $\theta_0(u), \theta_1(u), \theta_2(u), \theta_3(u)$, en adoptant une notation employée pour la première fois par Jacobi dans ses leçons à l'Université de Kœnigsberg, dont plusieurs auteurs ont depuis fait usage. L'une quelconque des quatre fonctions fondamentales sera ainsi désignée par $\theta_s(u)$, et je ferai de plus la convention que l'indice sera pris suivant le module 4, afin de pouvoir lui supposer une valeur entière quelconque. Cela posé, soit R_s le résidu correspondant au pôle $u = iK'$ de la quantité $\frac{\theta_s(u+a)e^{\lambda u}}{\theta_0(u)}$, où a et λ sont des constantes quelconques, et posons

$$\Phi_s(u) = \frac{\theta_s(u+a)e^{\lambda u}}{R_s\,\theta_0(u)}.$$

Nous définissons ainsi un système de quatre fonctions comprenant comme cas particulier $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$, $\mathrm{dn}\,u$ lorsqu'on suppose $a = 0$, $\lambda = 0$, mais qui, en général, ne sont point doublement périodiques, et se reproduisent multipliées par des constantes, lorsqu'on change

u en $u + 2K$ et en $u + 2iK'$ (1). On a en effet, en posant $\mu = e^{2\lambda K}$, $\mu' = e^{-\frac{i\pi a}{K} + 2i\lambda K'}$, les relations suivantes:

$$\Phi_s(u + 2K) = \mu(-1)^{\frac{1}{2}s(s+1)}\Phi_s(u),$$

$$\Phi_s(u + 2iK) = \mu'(-1)^{\frac{1}{2}s(s-1)}\Phi_s(u),$$

et, en passant aux valeurs particulières de l'indice, les multiplicateurs seront indiqués comme il suit :

$\Phi_0(s)$,	$+\mu$,	$+\mu'$,
$\Phi_1(s)$,	$-\mu$,	$+\mu'$,
$\Phi_2(s)$,	$-\mu$,	$-\mu'$,
$\Phi_3(s)$,	$+\mu$,	$-\mu'$.

L'étude de leurs propriétés pourrait peut-être former un chapitre nouveau dans la théorie des fonctions elliptiques, mais en ce moment je dois me borner à en tirer la solution que j'ai en vue du problème de la rotation. Je partirai de ce que les rotations $\Phi_s(u)$, ayant un pôle $u = iK'$ à l'intérieur du rectangle des périodes et pour résidu correspondant l'unité, peuvent jouer le rôle d'éléments simples à l'égard des fonctions qui ont les mêmes multiplicateurs. Telles seront, par exemple, les quantités

$$\mathrm{cn}\,u\,\Phi_s(u), \quad \mathrm{sn}\,u\,\Phi_s(u), \quad \mathrm{dn}\,u\,\Phi_s(u);$$

si l'on remarque qu'en mettant $2+s$, $1-s$, $3-s$, au lieu de s, le facteur $(-1)^{\frac{1}{2}s(s+1)}$ se produit multiplié par -1, -1, $+1$, tandis que $(-1)^{\frac{1}{2}s(s-1)}$ est multiplié successivement par -1, $+1$, -1, on reconnaît en effet qu'elles ont respectivement les multiplicateurs des fonctions

$$\Phi_{2+s}(u), \quad \Phi_{1-s}(u), \quad \Phi_{3-s}(u).$$

---

(1) Peut-être pourrait-on, afin d'abréger, convenir de désigner les quantités de cette nature sous le nom de *fonctions doublement périodiques de seconde espèce*, les fonctions périodiques de première espèce correspondant au cas où les multiplicateurs seraient égaux à l'unité. Enfin les quantités telles que $\Theta(u)$, $\mathrm{H}(u)$, ..., les fonctions intermédiaires de MM. Briot et Bouquet, où les multiplicateurs sont des exponentielles, recevraient par analogie le nom de *fonctions périodiques de troisième espèce*.

Nous voyons aussi qu'elles n'admettent que le pôle $u = i\mathrm{K}'$, dans le rectangle des périodes, de sorte que la décomposition en éléments simples s'obtiendra immédiatement au moyen de la partie principale des trois développements

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cn}(i\mathrm{K}'+\varepsilon)\,\Phi_s(i\mathrm{K}'+\varepsilon),\\
&\mathrm{sn}(i\mathrm{K}'+\varepsilon)\,\Phi_s(i\mathrm{K}'+\varepsilon),\\
&\mathrm{dn}(i\mathrm{K}'+\varepsilon)\,\Phi_s(i\mathrm{K}'+\varepsilon).
\end{aligned}$$

Or on a, sans aucun terme constant dans les seconds membres,

$$ik\,\mathrm{cn}(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}, \qquad k\,\mathrm{sn}(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}, \qquad i\,\mathrm{dn}(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon},$$

et par conséquent il suffit de calculer les deux premiers termes du développement de l'autre facteur $\Phi_s(i\mathrm{K}'+\varepsilon)$, c'est-à-dire le terme en $\frac{1}{\varepsilon}$, et le terme constant. J'emploie à cet effet la relation, sur laquelle je reviendrai tout à l'heure,

$$\theta_s(u+i\mathrm{K}') = \sigma\,\theta_{1-s}(u)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2u+i\mathrm{K}')},$$

où σ est égal à i pour $s=0$, $s=1$, et à l'unité si l'on suppose $s=2$, $s=3$, de sorte qu'on peut faire $\sigma = -e^{-\frac{i\pi}{4}(s+1)(s+2)(2s+1)}$. On en conclut l'expression suivante

$$\Phi_s(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = \mathrm{A}\,\frac{\theta_{1-s}(a+\varepsilon)\,e^{\lambda\varepsilon}}{\theta_1(\varepsilon)},$$

A désignant un facteur constant, et par suite ce développement, que je limite à ses deux premiers termes

$$\Phi_s(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = \frac{\mathrm{A}\,\theta_{1-s}(a)}{\theta_1'(0)}\left[\frac{1}{\varepsilon} + \lambda + \mathrm{D}_a \log\theta_{1-s}(a)\right].$$

Mais A doit être tel que le coefficient de $\frac{1}{\varepsilon}$ soit l'unité; nous avons donc simplement

$$\Phi_s(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + \lambda + \mathrm{D}_a\log\theta_{1-s}(a),$$

et l'on voit que les parties principales des développements des fonctions

$$\begin{aligned}
&ik\,\mathrm{cn}(i\mathrm{K}'+\varepsilon)\,\Phi_s(i\mathrm{K}'+\varepsilon),\\
&k\,\mathrm{sn}(i\mathrm{K}'+\varepsilon)\,\Phi_s(i\mathrm{K}'+\varepsilon),\\
&i\,\mathrm{dn}(i\mathrm{K}'+\varepsilon)\,\Phi_s(i\mathrm{K}'+\varepsilon)
\end{aligned}$$

se réduisent à cette seule et même expression dans les trois cas, à savoir

$$\frac{1}{\varepsilon^2} + [\lambda + \mathrm{D}_a\log\theta_{1-s}(a)]\,\frac{1}{\varepsilon}.$$

La formule générale de décomposition en éléments simples nous donne en conséquence les relations suivantes

$$\begin{aligned}
ik\,\mathrm{cn}\,u\,\Phi_s(u) &= [\lambda + \mathrm{D}_a\log\theta_{1-s}(a)]\,\Phi_{2+s}(u) - \mathrm{D}_u\,\Phi_{2+s}(u),\\
k\,\mathrm{sn}\,u\,\Phi_s(u) &= [\lambda + \mathrm{D}_a\log\theta_{1-s}(a)]\,\Phi_{1-s}(u) - \mathrm{D}_u\,\Phi_{1-s}(u),\\
i\,\mathrm{dn}\,u\,\Phi_s(u) &= [\lambda + \mathrm{D}_a\log\theta_{1-s}(a)]\,\Phi_{3-s}(u) - \mathrm{D}_u\,\Phi_{3-s}(u);
\end{aligned}$$

et l'on voit qu'on les identifiera aux équations (I), obtenues dans le paragraphe précédent, en disposant des indéterminées a et λ de manière à avoir

$$\varepsilon_s = \lambda + \mathrm{D}_a\log\theta_{1-s}(a).$$

Reprenons, à cet effet, les égalités données, paragraphe XV, page 303,

$$\alpha-\beta = in\,\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega}{\mathrm{dn}\,\omega}, \qquad \alpha-\delta = in\,\frac{\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega}{\mathrm{cn}\,\omega}, \qquad \gamma-\alpha = in\,\frac{\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega}{\mathrm{sn}\,\omega},$$

en les écrivant d'abord de cette manière (*voir* p. 304):

$$\frac{i\alpha}{n} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \frac{i\beta}{n} + \frac{\Theta_1'(\omega)}{\Theta_1(\omega)} = \frac{i\gamma}{n} + \frac{\mathrm{H}'(\omega)}{\mathrm{H}(\omega)} = \frac{i\delta}{n} + \frac{\mathrm{H}_1'(\omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)}.$$

Rappelons ensuite que les constantes $\frac{i\gamma}{n}, \frac{i\alpha}{n}, \frac{i\beta}{n}, \frac{i\delta}{n}$ ont été désignées par ε_s pour $s = 0, 1, 2, 3$, et elles prendront, en introduisant les quantités $\theta_s(\omega)$, cette nouvelle forme

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 + \mathrm{D}_\omega\log\theta_0(\omega) &= \varepsilon_2 + \mathrm{D}_\omega\log\theta_3(\omega)\\
&= \varepsilon_0 + \mathrm{D}_\omega\log\theta_1(\omega) = \varepsilon_3 + \mathrm{D}_\omega\log\theta_2(\omega).
\end{aligned}$$

Il en résulte que l'expression

$$\varepsilon_s + \mathrm{D}_\omega\log\theta_{1-s}(\omega)$$

reste la même pour toutes les valeurs de s; par conséquent, on satisfait immédiatement à la condition posée en faisant

$$a = -\omega \qquad \text{et} \qquad \lambda = \varepsilon_s + \mathrm{D}_\omega\log\theta_{1-s}(\omega).$$