NOTE

SUR UNE FORMULE DE JACOBI.

Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége,
2[e] série, t. VI, 1879, p. 1-7,
et *Mathematische Annalen*, t. X, 1877.

Les belles recherches de M. Tchebichef et de M. Heine sur l'intégrale $\int_0^b \frac{f(z)}{x-z}dz$ ont montré dans les parties élevées de l'Analyse le rôle et l'importance de la théorie élémentaire des fractions continues algébriques. C'est une nouvelle application de cette théorie que j'ai l'honneur de présenter à la Société, et qui aura pour objet la relation importante dont Jacobi a fait la découverte, à savoir

$$\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n} = C\sin[(n+1)\arccos x],$$

C désignant une constante.

Je rappellerai, d'abord, qu'étant proposée une fonction $f(x)$, développable en série infinie de la forme

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + \ldots,$$

toute réduite, ou fraction convergente $\frac{F_1(x)}{F(x)}$, dont le dénominateur est un polynome de degré n en x, s'obtient directement comme il suit.

On détermine en premier lieu ce dénominateur par la condition que le produit $f(x)\,F(x)$, étant ordonné suivant les puissances

décroissantes de la variable, manque des termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{x^n}$; cela fait, le numérateur $F_1(x)$ est donné par la partie entière du même produit, qui est évidemment du degré $n-1$. On voit, en effet, qu'ayant ainsi la relation

$$f(x)\,F(x) = F_1(x) + \frac{\varepsilon_1}{x^{n+1}} + \frac{\varepsilon_2}{x^{n+2}} + \ldots,$$

et, par conséquent,

$$f(x) = \frac{F_1(x)}{F(x)} + \frac{1}{F(x)}\left(\frac{\varepsilon_1}{x^{n+1}} + \frac{\varepsilon_2}{x^{n+2}} + \ldots\right),$$

les développements suivant les puissances décroissantes de la fonction $f(x)$ et de la fraction rationnelle $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ coïncideront jusqu'au terme en $\frac{1}{x^{2n+1}}$, le développement de $\frac{1}{F(x)}$ commençant par un terme en $\frac{1}{x^n}$. De plus, les polynomes $F(x)$ et $F_1(x)$, sauf un facteur constant commun, seront déterminés d'une manière unique.

Cela posé, soit, en particulier,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{x^5} + \ldots;$$

il sera aisé, dans ce cas, de former $F(x)$ et $F_1(x)$ pour toute valeur de n. Soit, pour cela,

$$(x+\sqrt{x^2-1})^n = F(x) + \sqrt{x^2-1}\,F_1(x),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} F(x) &= \cos n(\arccos x), \\ F_1(x) &= \sin n(\arccos x); \end{aligned}$$

je dis que ces polynomes entiers de degrés n et $n-1$ donnent précisément les deux termes des réduites. On a, en effet,

$$x - \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{x} + \ldots;$$

d'où

$$(x-\sqrt{x^2-1})^n = \frac{1}{x^n} + \ldots;$$

l'équation proposée, si l'on y change le signe du radical, donne, par conséquent,

$$\frac{1}{x^n} + \ldots = F(x) - \sqrt{x^2-1}\, F_1(x),$$

et, enfin,

$$\frac{F(x)}{\sqrt{x^2-1}} = F_1(x) + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{1}{x^n} + \ldots\right) = F_1(x) + \frac{1}{x^{n+1}} + \ldots.$$

La condition posée, comme définition des réduites, se trouve ainsi complètement remplie. Or, on peut encore la réaliser d'une autre manière, comme on va voir. Formons la dérivée d'ordre n de l'expression

$$(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}};$$

il est aisé de voir d'abord qu'elle sera de la forme $\frac{P}{\sqrt{x^2-1}}$, P étant un polynome entier en x de degré n. Soit ensuite, en développant suivant les puissances décroissantes de la variable

$$(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}} = x^{2n-1} + a x^{2n-3} + \ldots + \lambda x + \frac{\varepsilon}{x} + \frac{\varepsilon_1}{x^3} + \ldots;$$

je remarquerai qu'en prenant la dérivée d'ordre n, la partie entière du second membre conduira à un polynome P_1 de degré $n-1$, tandis que la partie contenant les puissances négatives de la variable donnera une série infinie commençant par un terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$.

Nous trouvons donc encore la relation

$$\frac{P}{\sqrt{x^2-1}} = P_1 + \frac{\varepsilon'}{x^{n+1}} + \frac{\varepsilon''}{x^{n+2}} + \ldots$$

qui détermine, sauf un facteur commun constant, comme nous l'avons dit, les polynomes entiers qui y entrent. On en conclut, en désignant par N une constante numérique,

$$P = N \cos n(\operatorname{arc}\cos x),$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^n (x^2-1)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n} = \frac{N \cos n(\operatorname{arc}\cos x)}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Or le coefficient de x^{n-1} dans le premier membre a pour valeur

$$n(n+1)(n+2)\ldots(2n-1);$$

et comme on a

$$\cos n(\operatorname{arc}\cos x) = 2^{n-1}x^n + \ldots,$$

cette constante se trouve déterminée par la condition

$$n(n+1)(n+2)\ldots(2n-1) = 2^{n-1}N;$$

d'où l'on tire

$$N = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)}{2^{n-1}} = \frac{1.2.3\ldots(2n-1)}{2^{n-1}\,1.2.3\ldots(n-1)},$$

ou encore

$$N = \frac{1.2.3\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n-2)} = 1.3.5\ldots(2n-1).$$

La formule de Jacobi que nous avions en vue d'établir est une conséquence immédiate de ce résultat; car en mettant la relation obtenue sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\frac{d^n (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n} &= (-1)^n N \frac{\cos n(\operatorname{arc}\cos x)}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= (-1)^{n-1} N \cos n(\operatorname{arc}\cos x)\frac{d \operatorname{arc}\cos x}{dx},\end{aligned}$$

on en conclut, en intégrant par rapport à x,

$$\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}N}{n}\sin n(\operatorname{arc}\cos x).$$

Nous n'ajoutons point de constante, attendu que les deux membres s'évanouissent quand on suppose $x=1$; cela étant, il suffit, comme on voit, de changer n en $n+1$, pour arriver au théorème proposé, la valeur de la constante C étant

$$C = (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{n+1}.$$

Paris, août 1873.

SUR QUELQUES APPLICATIONS DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LXXXV, 1877, p. 689, 728, 821, 870, 984, 1085, 1185; t. LXXXVI, 1878, p. 271, 422, 622, 777, 850; t. LXXXIX, 1879, p. 1001, 1092; t. XC, 1880, p. 106, 201, 478, 643, 761; t. XCIII, 1881, p. 920, 1098; t. XCIV, 1882, p. 186, 372, 477, 594, 753.

La théorie analytique de la chaleur donne pour l'importante question de l'équilibre des températures d'un corps solide homogène, soumis à des sources calorifiques constantes, une équation aux différences partielles dont l'intégration, dans le cas de l'ellipsoïde, a été l'une des belles découvertes auxquelles est attaché le nom de Lamé. Les résultats obtenus par l'illustre géomètre découlent principalement de l'étude approfondie d'une équation différentielle linéaire du second ordre, que j'écrirai avec les notations de la théorie des fonctions elliptiques, sous la forme suivante :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y,$$

k étant le module, n un nombre entier et h une constante. Lamé a montré que, pour des valeurs convenables de cette constante, on y satisfait par des polynomes entiers en $\operatorname{sn} x$

$$y = \operatorname{sn}^n x + h_1 \operatorname{sn}^{n-2} x + h_2 \operatorname{sn}^{n-4} x + \ldots,$$

dont les termes sont de même parité, puis encore par ces expressions :

$$y = (\operatorname{sn}^{n-1} x + h'_1 \operatorname{sn}^{n-3} x + h'_2 \operatorname{sn}^{n-5} x + \ldots)\operatorname{cn} x,$$
$$y = (\operatorname{sn}^{n-1} x + h''_1 \operatorname{sn}^{n-3} x + h''_2 \operatorname{sn}^{n-5} x + \ldots)\operatorname{dn} x,$$
$$y = (\operatorname{sn}^{n-2} x + h'''_1 \operatorname{sn}^{n-4} x + h'''_2 \operatorname{sn}^{n-6} x + \ldots)\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x.$$

M. Liouville a ensuite introduit, dans la question physique, la considération de la seconde solution de l'équation différentielle, d'où il a tiré des théorèmes du plus grand intérêt (¹). C'est également cette seconde solution, dont la nature et les propriétés ont été approfondies par M. Heine, qui a montré l'analogie de ces deux genres de fonctions de Lamé avec les fonctions sphériques, et leurs rapports avec la théorie des fractions continues algébriques. On doit de plus à l'éminent géomètre une extension de ses profondes recherches à des équations différentielles linéaires du second ordre beaucoup plus générales, qui se rattachent aux intégrales abéliennes, comme celle de Lamé aux fonctions elliptiques (²).

Je me suis placé à un autre point de vue en me proposant d'obtenir, quel que soit h, l'intégrale générale de cette équation, et c'est l'objet principal des recherches qu'on va lire. On verra que la solution est toujours, comme dans les cas particuliers considérés par Lamé, une fonction uniforme de la variable, mais qui n'est plus doublement périodique. Elle est, en effet, donnée par la formule

$$y = \mathrm{C}\,\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}'\,\mathrm{F}(-x),$$

où la fonction $\mathrm{F}(x)$, qui satisfait à ces deux conditions

$$\mathrm{F}(x + 2\mathrm{K}) = \mu\,\mathrm{F}(x),$$
$$\mathrm{F}(x + 2i\mathrm{K}') = \mu'\,\mathrm{F}(x),$$

dans lesquelles les facteurs μ et μ' sont des constantes, s'exprime comme il suit. Soit, pour un moment,

$$\Phi(x) = \frac{\mathrm{H}(x+\omega)}{\Theta(x)} e^{\left[\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right]x};$$

nous aurons

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{D}_x^{n-1}\,\Phi(x) - \mathrm{A}_1\,\mathrm{D}_x^{n-3}\,\Phi(x) + \mathrm{A}_2\,\mathrm{D}_x^{n-5}\,\Phi(x) - \ldots;$$

(¹) *Comptes rendus*, 1ᵉʳ sem. 1845, p 1386 et 1609; *Journal de Mathématiques*, t. XI, p. 217 et 261.

(²) *Journal de Crelle* (*Beitrag zur Theorie des Anziehung und der Warme* t. 29); *Journal de M. Borchardt* (*Ueber die Lameschen Functionen; Einige Eigenschaften der Lameschen Functionen* dans le Tome 56, et *Die Lameschen Functionen verchiedener Ordnungen*, t. 57). Le premier de ces Mémoires, paru en 1845, mais daté du 19 avril 1844, contient une application de la seconde solution de l'équation de Lamé, qui a été par conséquent découverte par M. Heine, indépendamment des travaux de M. Liouville, et à la même époque.

les quantités $\operatorname{sn}^2\omega$ et λ^2 sont des fonctions rationnelles du module et de h, et les coefficients $A_1, A_2, \ldots$, des fonctions entières. On a, par exemple,

$$A_1 = \frac{(n-1)(n-2)}{2(2n-1)}\left[h + \frac{n(n+1)(1+k^2)}{3}\right],$$

$$\begin{aligned} A_2 = {} & \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{8(2n-1)(2n-3)} \\ & \times \left[h^2 + \frac{2n(n+1)(1+k^2)}{3}h + \frac{n^2(n+1)^2}{9}(1+k^2)^2 \right. \\ & \qquad \left. - \frac{2n(n+1)(2n-1)}{15}(1-k^2+k^4)\right], \end{aligned}$$

. . . .

Je m'occuperai, avant de traiter le cas général où le nombre n est quelconque, des cas particuliers de $n = 1$ et $n = 2$. Le premier s'applique à la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, lorsqu'il n'y a point de forces accélératrices, et nous conduira aux formules données par Jacobi dans son admirable Mémoire sur cette question (*Œuvres complètes*, t. II, p. 139, et *Comptes rendus*, 30 juillet 1849). J'y rattacherai encore la détermination de la figure d'équilibre d'un ressort, qui a été le sujet de travaux de Binet et de Wantzel (*Comptes rendus*, 1er sem. 1844, p. 1115 et 1197). Le second se rapportant au pendule sphérique, j'aurai ainsi réuni quelques-unes des plus importantes applications qui aient été faites jusqu'ici de la théorie des fonctions elliptiques.

I.

La méthode que je vais exposer, pour intégrer l'équation de Lamé, repose principalement sur des expressions, par les quantités $\Theta(x)$, $H(x)$, ..., des fonctions $F(x)$, satisfaisant aux conditions énoncées tout à l'heure

$$\begin{aligned} F(x+2K) &= \mu\, F(x), \\ F(x+2iK') &= \mu' F(x), \end{aligned}$$

qui s'obtiennent ainsi :

Soit, en désignant par A un facteur constant,

$$f(x) = A\,\frac{H(x+\omega)\,e^{\lambda x}}{H(x)};$$

les relations fondamentales

$$\begin{aligned} H(x+2K) &= -H(x), \\ H(x+2iK') &= -H(x)\,e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')} \end{aligned}$$

donneront celles-ci :

$$\begin{aligned} f(x+2K) &= f(x)\,e^{2\lambda K}, \\ f(x+2iK') &= f(x)\,e^{-\frac{i\pi\omega}{K}+2i\lambda K'}. \end{aligned}$$

Disposant donc de ω et λ de manière à avoir

$$\begin{aligned} \mu &= e^{2\lambda K}, \\ \mu' &= e^{-\frac{i\pi\omega}{K}+2i\lambda K'}, \end{aligned}$$

on voit que le quotient $\frac{F(x)}{f(x)}$ est ramené aux fonctions doublement périodiques, d'où cette première forme générale et dont il sera souvent fait usage :

$$F(x) = f(x)\,\Phi(x),$$

la fonction $\Phi(x)$ n'étant assujettie qu'aux conditions

$$\Phi(x+2K) = \Phi(x), \qquad \Phi(x+2iK') = \Phi(x).$$

En voici une seconde, qui est fondamentale pour notre objet. Je remarque que les relations

$$\begin{aligned} f(x+2K) &= \mu\, f(x), \\ f(x+2iK') &= \mu' f(x), \end{aligned}$$

ont pour conséquence celles-ci :

$$\begin{aligned} f(x-2K) &= \frac{1}{\mu} f(x), \\ f(x-2iK') &= \frac{1}{\mu'} f(x), \end{aligned}$$

de sorte que le produit

$$\Phi(z) = F(z)\,f(x-z)$$

sera, quel que soit x, une fonction doublement périodique de z.

Cela étant, nous allons calculer les résidus $\Phi(z)$, pour les diverses valeurs de l'argument qui la rendent infinie, dans l'intérieur du rectangle des périodes; et, en égalant leur somme à zéro, nous obtiendrons immédiatement l'expression cherchée. Remarquons à cet effet que $f(x)$ ne devient infinie qu'une fois pour $x=0$, et que, son résidu ayant pour valeur

$$\frac{\mathrm{A}\,\mathrm{H}(\omega)}{\mathrm{H}'(0)},$$

on peut disposer de A, de manière à le faire égal à l'unité. Posant donc, en adoptant cette détermination,

$$f(x)=\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(x+\omega)\,e^{\lambda x}}{\mathrm{H}(\omega)\,\mathrm{H}(x)},$$

on voit que le résidu correspondant à la valeur $z=x$ de $\Phi(z)$ sera $-\mathrm{F}(x)$. Ceux qui proviennent des pôles de $\mathrm{F}(z)$ s'obtiennent ensuite sous la forme suivante. Soit $z=a$ l'un d'eux, et posons en conséquence, pour ε infiniment petit,

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(a+\varepsilon)=\mathrm{A}\varepsilon^{-1}+\mathrm{A}_1\mathrm{D}_\varepsilon\varepsilon^{-1}+\mathrm{A}_2\mathrm{D}_\varepsilon^2\varepsilon^{-1}+\ldots\\ +\mathrm{A}_\alpha\mathrm{D}_\varepsilon^\alpha\varepsilon^{-1}+a_0+a_1\varepsilon+a_2\varepsilon^2+\ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x-a-\varepsilon)=f(x-a)-\frac{\varepsilon}{1}\mathrm{D}_x f(x-a)\\ +\frac{\varepsilon^2}{1.2}\mathrm{D}_x^2 f(x-a)-\ldots+\frac{(-1)^\alpha\varepsilon^\alpha}{1.2\ldots\alpha}\mathrm{D}_x^\alpha f(x-a)+\ldots,\end{aligned}$$

le coefficient du terme en $\frac{1}{\varepsilon}$ dans le produit des seconds membres, qui est la quantité cherchée, se trouve immédiatement, en remarquant que

$$\mathrm{D}_\varepsilon^n\varepsilon^{-1}=(-1)^n\frac{1.2\ldots n}{\varepsilon^{n+1}},$$

et a pour expression

$$\mathrm{A}\,f(x-a)+\mathrm{A}_1\mathrm{D}_x f(x-a)+\mathrm{A}_2\mathrm{D}_x^2 f(x-a)+\ldots+\mathrm{A}_\alpha\mathrm{D}_x^\alpha f(x-a).$$

La somme des résidus de la fonction $\Phi(z)$, égalée à zéro, nous conduit ainsi à la relation

$$\mathrm{F}(x)=\Sigma[\mathrm{A}\,f(x-a)+\mathrm{A}_1\mathrm{D}_x f(x-a)+\ldots+\mathrm{A}_\alpha\mathrm{D}_x^\alpha f(x-a)],$$

où le signe Σ se rapporte, comme il a été dit, à tous les pôles de $\mathrm{F}(z)$ qui sont à l'intérieur du rectangle des périodes.

II.

La fonction $\mathrm{F}(x)$ comprend les fonctions doublement périodiques; en supposant égaux à l'unité les multiplicateurs μ et μ', je vais immédiatement rechercher ce que l'on tire, dans cette hypothèse, du résultat auquel nous venons de parvenir. Tout d'abord les relations

$$\mu=e^{2\lambda\mathrm{K}},\qquad \mu'=e^{-\frac{i\pi\omega}{\mathrm{K}}+2i\lambda\mathrm{K}'}$$

donnant nécessairement $\lambda=0$ et $\omega=2m\mathrm{K}$, ou, ce qui revient au même, $\omega=0$, le nombre m étant entier, la quantité

$$f(x)=\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(x+\omega)}{\mathrm{H}(\omega)\,\mathrm{H}(x)}e^{\lambda x}$$

devient infinie et la formule semble inapplicable. Mais il arrive seulement qu'elle subit un changement de forme analytique, qui s'obtient de la manière la plus facile, comme on va voir. Supposons, en effet, $\lambda=0$ et ω infiniment petit; on aura, en développant suivant les puissances croissantes de ω,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{H}'(0)}{\mathrm{H}(\omega)}&=\frac{1}{\omega}+\left(\frac{1+k^2}{6}-\frac{\mathrm{J}}{2\mathrm{K}}\right)\omega+\ldots,\\ \frac{\mathrm{H}(x+\omega)}{\mathrm{H}(x)}&=1+\frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)}\omega+\ldots;\end{aligned}$$

d'où

$$f(x)=\frac{1}{\omega}+\frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)}+\left(\frac{1+k^2}{6}-\frac{\mathrm{J}}{2\mathrm{K}}\right)\omega+\ldots.$$

D'autre part, observons que les coefficients $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \ldots$ doivent être considérés comme dépendants de ω, et qu'on aura en particulier

$$\mathrm{A}=\mathfrak{a}+\mathfrak{a}'\omega+\ldots,$$

$\mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \ldots$ désignant les valeurs de A et de ses dérivées par rapport à ω pour $\omega=0$. Nous obtenons donc, en n'écrivant point les termes qui contiennent ω en facteur,

$$\mathrm{A}\,f(x-a)=\frac{\mathfrak{a}}{\omega}+\mathfrak{a}'+\mathfrak{a}\frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)}+\ldots$$

et, par conséquent,

$$\Sigma \mathrm{A} f(x-a) = \frac{1}{\omega}\Sigma \mathrm{a} + \Sigma \mathrm{a}' + \Sigma \mathrm{a} \frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} + \ldots.$$

Or voit que le coefficient de $\frac{1}{\omega}$ disparaît, les quantités a ayant une somme nulle comme résidus d'une fonction doublement périodique, et la différentiation donnant immédiatement, pour $\omega = 0$,

$$\mathrm{D}_x f(x) = \mathrm{D}_x \frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)}, \qquad \mathrm{D}_x^2 f(x) = \mathrm{D}_x^2 \frac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)}, \qquad \ldots,$$

nous parvenons à l'expression suivante, où $\mathrm{a}, \mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_\alpha$ sont les valeurs de $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_\alpha$ pour $\omega = 0$:

$$\mathrm{F}(x) = \Sigma \mathrm{a}' + \Sigma \left[\mathrm{a} \frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} + \mathrm{a}_1 \mathrm{D}_x \frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)} + \ldots + \mathrm{a}_\alpha \mathrm{D}_x^\alpha \frac{\mathrm{H}'(x-a)}{\mathrm{H}(x-a)}\right].$$

C'est la formule que j'ai établie directement, pour les fonctions doublement périodiques, dans une *Note sur la théorie des fonctions elliptiques*, ajoutée à la sixième édition du *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* de Lacroix (Hermite, *Œuvres*, t. II, p. 125).

III.

Revenant au cas général pour donner des exemples de la détermination de la fonction $f(x)$, qui joue le rôle d'élément simple, et du calcul des coefficients $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots$, je considérerai ces deux expressions :

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\Theta(x+a)\,\Theta(x+b)\ldots\Theta(x+l)\,e^{\lambda x}}{\Theta^n(x)},$$

$$\mathrm{F}_1(x) = \frac{\mathrm{H}(x+a)\,\mathrm{H}(x+b)\ldots\mathrm{H}(x+l)\,e^{\lambda x}}{\Theta^n(x)},$$

où $a, b, \ldots, l$ sont des constantes au nombre de n. On trouve d'abord aisément leurs multiplicateurs, au moyen des relations

$$\begin{aligned}
\Theta(x+2\mathrm{K}) &= +\,\Theta(x),\\
\mathrm{H}(x+2\mathrm{K}) &= -\,\mathrm{H}(x),\\
\Theta(x+2i\mathrm{K}') &= -\,\Theta(x)\,e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')},\\
\mathrm{H}(x+2i\mathrm{K}') &= -\,\mathrm{H}(x)\,e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(x+i\mathrm{K}')}.
\end{aligned}$$

Elles montrent qu'en posant

$$\omega = a + b + \ldots + l,$$

puis, comme précédemment,

$$\mu = e^{2\lambda\mathrm{K}},$$
$$\mu' = e^{-\frac{i\pi\omega}{\mathrm{K}} + 2i\lambda\mathrm{K}'},$$

on aura

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x+2\mathrm{K}) &= \mu\,\mathrm{F}(x), & \mathrm{F}_1(x+2\mathrm{K}) &= (-1)^n\mu\,\mathrm{F}_1(x),\\
\mathrm{F}(x+2i\mathrm{K}') &= \mu'\,\mathrm{F}(x), & \mathrm{F}_1(x+2i\mathrm{K}') &= \mu'\,\mathrm{F}_1(x).
\end{aligned}$$

Il en résulte que, quand n est pair, la fonction

$$f(x) = \frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(x+\omega)\,e^{\lambda x}}{\mathrm{H}(\omega)\,\mathrm{H}(x)},$$

ayant ces quantités μ et μ' pour multiplicateurs, peut servir d'élément simple pour nos deux expressions ; mais il n'en est plus de même relativement à la seconde $\mathrm{F}_1(x)$, dans le cas où n est impair : on voit aisément qu'il faut prendre alors pour élément simple la fonction

$$f_1(x) = \frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(x+\omega)\,e^{\lambda x}}{\Theta(\omega)\,\mathrm{H}(x)},$$

afin de changer le signe du premier multiplicateur, le résidu correspondant à $x = 0$ étant d'ailleurs égal à l'unité. Cela posé, comme $\mathrm{F}(x)$ et $\mathrm{F}_1(x)$ ne deviennent infinies que pour $x = i\mathrm{K}'$, ce sont les quantités $f(x - i\mathrm{K}')$ et $f_1(x - i\mathrm{K}')$ qui figureront dans notre formule. Il convient de leur attribuer une désignation particulière, et nous représenterons dorénavant la première par $\varphi(x)$ et la seconde par $\chi(x)$, en observant que les relations

$$\Theta(x+i\mathrm{K}') = i\,\mathrm{H}(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x+i\mathrm{K}')},$$
$$\mathrm{H}(x+i\mathrm{K}') = i\,\Theta(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4\mathrm{K}}(2x+i\mathrm{K}')}$$

donnent facilement, après y avoir changé x en $-x$, ces valeurs :

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(x+\omega)\,e^{\lambda x}}{\sqrt{\mu'}\,\mathrm{H}(\omega)\,\Theta(x)},$$

$$\chi(x) = \frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(x+\omega)\,e^{\lambda x}}{\sqrt{\mu'}\,\Theta(\omega)\,\Theta(x)}.$$

Nous avons maintenant à calculer dans les développements de $F(iK'+\varepsilon)$ et $F_1(iK'+\varepsilon)$, suivant les puissances croissantes de ε, la partie qui renferme les puissances négatives de cette quantité, et qu'on pourrait, pour abréger, nommer la partie principale. A cet effet, je remarque qu'en faisant, pour un moment,

$$F(x)=\frac{H(x)}{\Theta^n(x)},\qquad F_1(x)=\frac{H_1(x)}{\Theta^n(x)},$$

on aura

$$F(iK'+\varepsilon)=\frac{\sqrt{\mu'}\,H_1(\varepsilon)}{H^n(\varepsilon)},\qquad F_1(iK'+\varepsilon)=\frac{\sqrt{\mu'}\,H(\varepsilon)}{H^n(\varepsilon)}.$$

Nous développerons donc $H(\varepsilon)$ et $H_1(\varepsilon)$, par la formule de Maclaurin, jusqu'aux termes en ε^{n-1}, et nous multiplierons par la partie principale de $\frac{1}{H^n(\varepsilon)}$, qui s'obtient, comme on va voir, au moyen de la fonction de M. Weierstrass :

$$Al(x)_1=x-\frac{1+k^2}{6}x^3+\frac{1+4k^2+k^4}{120}x^5-\ldots.$$

On a en effet, d'après la définition même de l'illustre analyste,

$$H(x)=H'(0)\,e^{\frac{Jx^2}{2K}}\,Al(x)_1,$$

et l'on en déduit

$$\begin{aligned}\left[\frac{H'(0)}{H(\varepsilon)}\right]^n &= e^{-\frac{nJ\varepsilon^2}{2K}}\left[\varepsilon-\frac{1+k^2}{6}\varepsilon^3+\frac{1+4k^2+k^4}{120}\varepsilon^5-\ldots\right]^{-n}\\ &= e^{-\frac{nJ\varepsilon^2}{2K}}\left[\frac{1}{\varepsilon^n}+\frac{n(1+k^2)}{6}\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}+\ldots\right]\\ &= \frac{1}{\varepsilon^n}+n\left(\frac{1+k^2}{6}-\frac{J}{2K}\right)\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}+\ldots.\end{aligned}$$

IV.

Je vais appliquer ce qui précède au cas le plus simple, en supposant $n=2$ et $\lambda=0$, ce qui donnera

$$F(x)=\frac{\Theta(x+a)\,\Theta(x+b)}{\Theta^2(x)},$$
$$F_1(x)=\frac{H(x+a)\,H(x+b)}{\Theta^2(x)},$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}H(\varepsilon)&=\Theta(a)\,\Theta(b)+[\Theta(a)\,\Theta'(b)+\Theta(b)\,\Theta'(a)]\varepsilon+\ldots,\\ H_1(\varepsilon)&=H(a)\,H(b)+[H(a)\,H'(b)+H(b)\,H'(a)]\varepsilon+\ldots.\end{aligned}$$

Maintenant, la partie principale de $\frac{1}{H^2(\varepsilon)}$ ne contenant que le seul terme $\frac{1}{H'^2(0)}\frac{1}{\varepsilon^2}$, on a immédiatement

$$\frac{H'^2(0)}{\sqrt{\mu'}}F(iK'+\varepsilon)=\frac{H(a)\,H(b)}{\varepsilon^2}+\frac{H(a)\,H'(b)+H(b)\,H'(a)}{\varepsilon}+\ldots,$$
$$\frac{H'^2(0)}{\sqrt{\mu'}}F_1(iK'+\varepsilon)=\frac{\Theta(a)\,\Theta(b)}{\varepsilon^2}+\frac{\Theta(a)\,\Theta'(b)+\Theta(b)\,\Theta'(a)}{\varepsilon}+\ldots,$$

et, par conséquent, ces deux relations :

$$\frac{H'^2(0)\,\Theta(x+a)\,\Theta(x+b)}{\sqrt{\mu'}\,\Theta^2(x)}=-H(a)\,H(b)\,\varphi'(x)+[H(a)\,H'(b)+H(b)\,H'(a)]\,\varphi(x),$$
$$\frac{H'^2(0)\,H(x+a)\,H(x+b)}{\sqrt{\mu'}\,\Theta^2(x)}=-\Theta(a)\,\Theta(b)\,\varphi'(x)+[\Theta(a)\,\Theta'(b)+\Theta(b)\,\Theta'(a)]\,\varphi(x).$$

En y remplaçant $\varphi(x)$ par sa valeur $\frac{H'(0)\,\Theta(x+a+b)}{\sqrt{\mu'}\,H(a+b)\Theta(x)}$, je les écrirai sous la forme suivante, qui est plus simple :

$$\begin{aligned}&\frac{H'(0)\,H(a+b)\,\Theta(x+a)\,\Theta(x+b)}{H(a)\,H(b)\,\Theta^2(x)}\\ &\quad=-D_x\frac{\Theta(x+a+b)}{\Theta(x)}+\left[\frac{H'(a)}{H(a)}+\frac{H'(b)}{H(b)}\right]\frac{\Theta(x+a+b)}{\Theta(x)},\\ &\frac{H'(0)\,H(a+b)\,H(x+a)\,H(x+b)}{\Theta(a)\,\Theta(b)\,\Theta^2(x)}\\ &\quad=-D_x\frac{\Theta(x+a+b)}{\Theta(x)}+\left[\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)}\right]\frac{\Theta(x+a+b)}{\Theta(x)}.\end{aligned}$$

On en tire d'abord, à l'égard des fonctions Θ, cette remarque que, sous la condition

$$a+b+c+d=0,$$

on a l'égalité [1]

$$\begin{aligned}H'(0)\,H(a+b)\,H(a+c)\,H(b+c)=\;&\Theta'(a)\,\Theta(b)\,\Theta(c)\,\Theta(d)\\ &+\Theta'(b)\,\Theta(c)\,\Theta(d)\,\Theta(a)\\ &+\Theta'(c)\,\Theta(d)\,\Theta(a)\,\Theta(b)\\ &+\Theta'(d)\,\Theta(a)\,\Theta(b)\,\Theta(c).\end{aligned}$$

[1] Elle a été donnée par Jacobi, *Journal de Crelle* (*Formulæ novæ in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales*, t. 15, p. 199).

Mais c'est une autre conséquence que j'ai en vue, et qu'on obtient en mettant la première, par exemple, sous la forme

$$\Phi(x) = py - y',$$

où $\Phi(x)$ désigne le premier membre, y la fonction $\frac{\Theta(x+a+b)}{\Theta(x)}$, et p la constante $\frac{H'(a)}{H(a)} + \frac{H'(b)}{H(b)}$.

Si nous multiplions par e^{-px}, elle devient, en effet,

$$\Phi(x)\, e^{-px} = -D_x(y\, e^{-px}),$$

d'où

$$\int \Phi(x)\, e^{-px}\, dx = -y\, e^{-px}.$$

Ce résultat appelle l'attention sur un cas particulier des fonctions $\varphi(x)$, où, par suite d'une certaine détermination de λ, elles ne renferment plus qu'un paramètre. On voit qu'en posant

$$\varphi(x, a) = \frac{H'(0)\,\Theta(x+a)}{\sqrt{\mu'}\, H(a)\,\Theta(x)}\, e^{-\frac{H'(a)}{H(a)}x},$$

ce qui entraîne, pour le multiplicateur μ', la valeur

$$\mu' = e^{-\frac{i\pi a}{K} - 2iK'\frac{H'(a)}{H(a)}},$$

l'intégrale $\int \varphi(x, a)\,\varphi(x, b)\, dx$ s'obtient sous la forme finie explicite. Un calcul facile conduit en effet à la relation

$$\int \varphi(x, a)\,\varphi(x, b)\, dx = -\varphi(x, a+b)\, e^{\left[\frac{H'(a+b)}{H(a+b)} - \frac{H'(a)}{H(a)} - \frac{H'(b)}{H(b)}\right](x - iK')}.$$

Faisons, en second lieu,

$$\chi(x, a) = \frac{H'(0)\, H(x+a)}{\sqrt{\mu'}\,\Theta(a)\,\Theta(x)}\, e^{-\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}x},$$

en désignant alors par μ' la quantité

$$\mu' = e^{-\frac{i\pi a}{K} - 2iK'\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}},$$

et nous aurons semblablement

$$\int \chi(x, a)\,\chi(x, b)\, dx = -\varphi(x, a+b)\, e^{\left[\frac{H'(a+b)}{H(a+b)} - \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} - \frac{\Theta'(b)}{\Theta(b)}\right](x - iK')}.$$

On en déduit aisément qu'en désignant a et b deux racines, d'abord de l'équation $H'(x) = 0$, puis de l'équation $\Theta'(x) = 0$, on aura, dans le premier cas,

$$\int_0^{2K} \varphi(x, a)\,\varphi(x, b)\, dx = 0;$$

et dans le second,

$$\int_0^{2K} \chi(x, a)\,\chi(x, b)\, dx = 0,$$

sous la condition que les deux racines ne soient point égales et de signes contraires. Si l'on suppose $b = -a$, nous obtiendrons

$$\int_0^{2K} \varphi(x, a)\,\varphi(x, -a)\, dx = 2\left(J - \frac{K}{\operatorname{sn}^2 a}\right),$$

$$\int_0^{2K} \chi(x, a)\,\chi(x, -a)\, dx = 2\,(J - k^2 K \operatorname{sn}^2 a).$$

On voit les recherches auxquelles ces théorèmes ouvrent la voie et que je me réserve de poursuivre plus tard ; je me borne à les indiquer succinctement, afin de montrer l'importance des fonctions $\varphi(x)$ et $\chi(x)$. Voici maintenant comment on parvient à les définir par des équations différentielles.

V

Nous remarquerons, en premier lieu, que les fonctions $\varphi(x)$ et $\chi(x)$ peuvent être réduites l'une à l'autre; leurs expressions, si l'on y remplace le multiplicateur μ' par sa valeur, étant, en effet,

$$\varphi(x, \omega) = \frac{H'(0)\,\Theta(x+\omega)}{H(\omega)\,\Theta(x)}\, e^{-\frac{H'(\omega)}{H(\omega)}(x - iK') + \frac{i\pi\omega}{2K}},$$

$$\chi(x, \omega) = \frac{H'(0)\, H(x+\omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(x)}\, e^{-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}(x - iK') + \frac{i\pi\omega}{2K}},$$

on en déduit facilement les relations suivantes

$$\varphi(x, \omega + iK') = \chi(x, \omega),$$

$$\chi(x, \omega + iK') = \varphi(x, \omega),$$

dont nous ferons souvent usage. Cette propriété établie, nous rechercherons le développement, suivant les puissances croissantes de ε, de $\chi(i\mathrm{K}'+\varepsilon)$, qui jouera plus tard un rôle important, et dont nous allons, comme on va voir, tirer l'équation différentielle que nous avons en vue. Pour le former, je partirai de l'égalité

$$\mathrm{D}_x \log\chi(x) = \frac{\mathrm{H}'(x+\omega)}{\mathrm{H}(x+\omega)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)},$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{D}_\varepsilon \log\chi(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = \frac{\Theta'(\omega+\varepsilon)}{\Theta(\omega+\varepsilon)} - \frac{\mathrm{H}'(\varepsilon)}{\mathrm{H}(\varepsilon)} - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}.$$

Cela posé, nous aurons d'abord

$$\frac{\Theta'(\omega+\varepsilon)}{\Theta(\omega+\varepsilon)} - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \varepsilon\mathrm{D}_\omega\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} + \frac{\varepsilon^2}{1.2}\mathrm{D}_\omega^2\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} + \ldots;$$

mais, l'équation de Jacobi

$$\mathrm{D}_x\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} - k^2\,\mathrm{sn}^2 x$$

donnant en général

$$\mathrm{D}_x^{n+1}\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = -\mathrm{D}_x^n k^2\,\mathrm{sn}^2 x,$$

ce développement prend cette nouvelle forme

$$\begin{aligned}\frac{\Theta'(\omega+\varepsilon)}{\Theta(\omega+\varepsilon)} - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} &= \varepsilon\left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} - k^2\,\mathrm{sn}^2\omega\right)\\ &\quad - \frac{\varepsilon^2}{1.2}\mathrm{D}_\omega k^2\,\mathrm{sn}^2\omega - \frac{\varepsilon^3}{1.2.3}\mathrm{D}_\omega^2 k^2\,\mathrm{sn}^2\omega - \ldots\end{aligned}$$

Joignons-y le résultat qu'on tire de l'équation de M. Weierstrass

$$\mathrm{H}(\varepsilon) = \mathrm{H}'(0)\,e^{\frac{\mathrm{J}\varepsilon^2}{2\mathrm{K}}}\,\mathrm{Al}(\varepsilon)_1,$$

en prenant la dérivée logarithmique des deux membres,

$$\frac{\mathrm{H}'(\varepsilon)}{\mathrm{H}(\varepsilon)} = \varepsilon\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} + \frac{\mathrm{Al}'(\varepsilon)_1}{\mathrm{Al}(\varepsilon)_1},$$

et nous aurons

$$\mathrm{D}_\varepsilon \log\chi(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = -\varepsilon k^2\,\mathrm{sn}^2\omega - \frac{\varepsilon^2}{1.2}\mathrm{D}_\omega k^2\,\mathrm{sn}^2\omega - \ldots - \frac{\mathrm{Al}'(\varepsilon)_1}{\mathrm{Al}(\varepsilon)_1},$$

d'où, par conséquent,

$$\begin{aligned}\chi(i\mathrm{K}'+\varepsilon) &= \frac{e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}k^2\,\mathrm{sn}^2\omega - \frac{\varepsilon^3}{2.3}\mathrm{D}_\omega k^2\,\mathrm{sn}^2\omega - \ldots}}{\mathrm{Al}(\varepsilon)_1}\\ &= e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}k^2\,\mathrm{sn}^2\omega - \frac{\varepsilon^3}{2.3}\mathrm{D}_\omega k^2\,\mathrm{sn}^2\omega - \ldots}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1+k^2}{6}\varepsilon + \frac{7+8k^2+7k^4}{360}\varepsilon^3 + \ldots\right),\end{aligned}$$

sans qu'il soit besoin d'introduire un facteur constant dans le second membre, puisque le premier terme de son développement est $\frac{1}{\varepsilon}$, comme il le faut d'après la nature de la fonction $\chi(x)$. Cette formule donne le résultat cherché par un calcul facile ; elle montre qu'en posant

$$\chi(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\Omega\varepsilon - \frac{1}{3}\Omega_1\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\Omega_2\varepsilon^3 - \ldots,$$

on aura

$$\begin{aligned}\Omega &= k^2\,\mathrm{sn}^2\omega - \frac{1+k^2}{3},\\ \Omega_1 &= k^2\,\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{cn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,\omega,\\ \Omega_2 &= 2k^4\,\mathrm{sn}^4\omega - \frac{2(k^2+k^4)}{3}\mathrm{sn}^2\omega - \frac{7-22k^2+7k^4}{45},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

En voici une première application.

VI.

Considérons, pour la décomposer en éléments simples, la fonction $k^2\,\mathrm{sn}^2 x\,\chi(x)$, qui a les multiplicateurs de $\chi(x)$ et ne devient infinie que pour $x = i\mathrm{K}'$. On devra, à cet effet, en posant $x = i\mathrm{K}'+\varepsilon$, former la partie principale de son développement suivant les puissances croissantes de ε, que nous obtenons immédiatement en multipliant membre à membre les deux égalités

$$\chi(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\Omega\varepsilon - \ldots,$$

$$\frac{1}{\mathrm{sn}^2\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{3}(1+k^2) - \ldots.$$

Il vient ainsi

$$k^2 \operatorname{sn}^2(i\mathrm{K}'+\varepsilon)\,\chi(i\mathrm{K}'+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^3} + \left[\frac{1}{3}(1+k^2) - \frac{1}{2}\Omega\right]\frac{1}{\varepsilon} + \ldots$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{D}_\varepsilon^2\,\varepsilon^{-1} + \left[\frac{1}{2}(1+k^2) - \frac{1}{2}k^2\operatorname{sn}^2\omega\right]\varepsilon^{-1} + \ldots,$$

et l'on en conclut la formule suivante

$$k^2 \operatorname{sn}^2 x\,\chi(x) = \frac{1}{2}\mathrm{D}_x^2\,\chi(x) + \left[\frac{1}{2}(1+k^2) - \frac{1}{2}k^2\operatorname{sn}^2\omega\right]\chi(x).$$

Elle montre que, en posant $y = \chi(x)$, nous obtenons une solution de l'équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (2k^2\operatorname{sn}^2 x - 1 - k^2 + k^2\operatorname{sn}^2\omega)\,y,$$

qui est celle de Lamé dans le cas le plus simple où l'on suppose $n = 1$, la constante $h = -1 - k^2 + k^2\operatorname{sn}^2\omega$ étant quelconque, puisque ω est arbitraire ; et, comme cette équation ne change pas lorsqu'on change x en $-x$, la solution obtenue en donne une seconde, $y = \chi(-x)$, d'où, par suite, l'intégrale complète sous la forme

$$y = \mathrm{C}\,\chi(x) + \mathrm{C}'\,\chi(-x).$$

A ce résultat il est nécessaire de joindre ceux qu'on obtient quand on remplace successivement ω par $\omega + i\mathrm{K}'$, $\omega + \mathrm{K}$, $\omega + \mathrm{K} + i\mathrm{K}'$, ce qui conduit aux équations

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(2k^2\operatorname{sn}^2 x - 1 - k^2 + \frac{1}{\operatorname{sn}^2\omega}\right)y,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(2k^2\operatorname{sn}^2 x - 1 - k^2 + \frac{k^2\operatorname{cn}^2\omega}{\operatorname{dn}^2\omega}\right)y,$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(2k^2\operatorname{sn}^2 x - 1 - k^2 + \frac{\operatorname{dn}^2\omega}{\operatorname{cn}^2\omega}\right)y.$$

La première, d'après l'égalité $\chi(x, \omega + i\mathrm{K}') = \varphi(x, \omega)$, a pour intégrale

$$y = \mathrm{C}\,\varphi(x) + \mathrm{C}'\,\varphi(-x);$$

et, en introduisant ces nouvelles fonctions, à savoir

$$i\,\chi_1(x, \omega) = \chi(x, \omega + \mathrm{K}),$$
$$i\,\varphi_1(x, \omega) = \varphi(x, \omega + \mathrm{K}),$$

nous aurons, sous une forme semblable, pour la seconde et la troisième,

$$y = \mathrm{C}\,\chi_1(x) + \mathrm{C}'\,\chi_1(-x),$$
$$y = \mathrm{C}\,\varphi_1(x) + \mathrm{C}'\,\varphi_1(-x).$$

Les expressions de $\varphi_1(x)$ et $\chi_1(x)$ s'obtiennent aisément à l'aide des fonctions $\Theta_1(x) = \Theta(x + \mathrm{K})$, $\mathrm{H}_1(x) = \mathrm{H}(x + \mathrm{K})$; on trouve ainsi

$$\varphi_1(x, \omega) = \frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta_1(x+\omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(x)}\,e^{-\frac{\mathrm{H}_1'(\omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)}(x - i\mathrm{K}') + \frac{i\pi\omega}{2\mathrm{K}}},$$
$$\chi_1(x, \omega) = \frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}_1(x+\omega)}{\Theta_1(\omega)\,\Theta(x)}\,e^{-\frac{\Theta_1'(\omega)}{\Theta_1(\omega)}(x - i\mathrm{K}') + \frac{i\pi\omega}{2\mathrm{K}}}.$$

Nous allons en voir un premier usage dans la recherche des solutions de l'équation de Lamé par des fonctions doublement périodiques.

VII.

Nous supposons à cet effet $\omega = 0$ dans les équations précédentes, en exceptant toutefois celle où se trouve le terme $\frac{1}{\operatorname{sn}^2\omega}$ qui deviendrait infini. On obtient ainsi, pour la constante h, les déterminations suivantes :

$$h = -1 - k^2, \qquad h = -1, \qquad h = -k^2.$$

Ce sont précisément les quantités qu'on trouve en appliquant la méthode de Lamé ; et en même temps nous tirons des valeurs des fonctions $\chi(x)$, $\chi_1(x)$, $\varphi_1(x)$, pour $\omega = 0$, les solutions auxquelles conduit son analyse

$$y = \sqrt{k}\,\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)}, \qquad y = \sqrt{kk'}\,\frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)}, \qquad y = \sqrt{k'}\,\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)},$$

ou, plus simplement, puisqu'on peut les multiplier par des facteurs constants,

$$y = \operatorname{sn} x, \qquad y = \operatorname{cn} x, \qquad y = \operatorname{dn} x.$$

Mais une circonstance se présente maintenant, qui demande un examen attentif. On ne peut plus, en effet, déduire de ces expressions d'autres qui en soient distinctes par le changement de signe de la variable, et il faut, par suite, employer une nouvelle méthode pour obtenir l'intégrale complète. Représentons, dans ce but, la solution générale de l'une quelconque de nos trois équations, en laissant ω indéterminé, par la formule

$$y = \mathrm{C}\,\mathrm{F}(x, \omega) + \mathrm{C}'\,\mathrm{F}(-x, \omega).$$

Je la mettrai d'abord sous cette forme équivalente

$$y = \mathrm{C}\,\mathrm{F}(x, \omega) + \mathrm{C}'\,\mathrm{F}(x, -\omega);$$

puis, en développant suivant les puissances croissantes de ω, je ferai

$$\mathrm{F}(x, \omega) = \mathrm{F}_0(x) + \omega\,\mathrm{F}_1(x) + \omega^2\,\mathrm{F}_2(x) + \ldots,$$

ce qui permettra d'écrire

$$y = (\mathrm{C} + \mathrm{C}')\,\mathrm{F}_0(x) + \omega(\mathrm{C} - \mathrm{C}')\,\mathrm{F}_1(x) + \omega^2(\mathrm{C} + \mathrm{C}')\,\mathrm{F}_2(x) + \ldots,$$

ou encore

$$y = \mathrm{C}_0\,\mathrm{F}_0(x) + \mathrm{C}_1\,\mathrm{F}_1(x) + \omega\,\mathrm{C}_0\,\mathrm{F}_2(x) + \ldots,$$

en posant, d'après la méthode de d'Alembert,

$$\mathrm{C}_0 = \mathrm{C} + \mathrm{C}', \qquad \mathrm{C}_1 = \omega(\mathrm{C} - \mathrm{C}').$$

Si l'on suppose maintenant $\omega = 0$, on parvient à la formule

$$y = \mathrm{C}_0\,\mathrm{F}_0(x) + \mathrm{C}_1\,\mathrm{F}_1(x),$$

qu'il faudra appliquer en faisant successivement

$$\mathrm{F}(x, \omega) = \chi(x), \qquad \mathrm{F}(x, \omega) = \chi_1(x), \qquad \mathrm{F}(x, \omega) = \varphi_1(x);$$

mais le calcul sera plus simple si l'on prend

$$\mathrm{F}(x, \omega) = \frac{\mathrm{H}(x + \omega)}{\Theta(x)}\, e^{-\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}x},$$

$$\mathrm{F}(x, \omega) = \frac{\mathrm{H}_1(x + \omega)}{\Theta(x)}\, e^{-\frac{\Theta'_1(\omega)}{\Theta_1(\omega)}x},$$

$$\mathrm{F}(x, \omega) = \frac{\Theta_1(x + \omega)}{\Theta(x)}\, e^{-\frac{\mathrm{H}'_1(\omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)}x},$$

ces quantités ne différant des précédentes que par des facteurs constants. Observant donc que, pour $\omega = 0$, on a

$$\mathrm{D}_\omega \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}, \qquad \mathrm{D}_\omega \frac{\Theta'_1(\omega)}{\Theta_1(\omega)} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} - k^2, \qquad \mathrm{D}_\omega \frac{\mathrm{H}'_1(\omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} - 1,$$

nous obtenons immédiatement les valeurs que prennent leurs dérivées par rapport à ω, dans cette hypothèse de $\omega = 0$

$$\mathrm{F}_1(x) = \frac{\mathrm{H}'(x)}{\Theta(x)} - \frac{\mathrm{J}\,\mathrm{H}(x)}{\mathrm{K}\,\Theta(x)}x,$$

$$\mathrm{F}_1(x) = \frac{\mathrm{H}'_1(x)}{\Theta(x)} - \frac{(\mathrm{J} - k^2\mathrm{K})\,\mathrm{H}_1(x)}{\mathrm{K}\,\Theta(x)}x,$$

$$\mathrm{F}_1(x) = \frac{\Theta'_1(x)}{\Theta(x)} - \frac{(\mathrm{J} - \mathrm{K})\,\Theta_1(x)}{\mathrm{K}\,\Theta(x)}x.$$

La solution générale de l'équation de Lamé, dans les cas particuliers que nous venons de considérer, peut donc se représenter par les formules suivantes :

1° $h = -1 - k^2$, $\quad y = \mathrm{C}\,\mathrm{sn}\,x + \mathrm{C}'\,\mathrm{sn}\,x\left[\dfrac{\mathrm{H}'(x)}{\mathrm{H}(x)} - \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}x\right]$,

2° $h = -1$, $\quad y = \mathrm{C}\,\mathrm{cn}\,x + \mathrm{C}'\,\mathrm{cn}\,x\left[\dfrac{\mathrm{H}'_1(x)}{\mathrm{H}_1(x)} - \dfrac{\mathrm{J} - k^2\mathrm{K}}{\mathrm{K}}x\right]$,

3° $h = -k^2$, $\quad y = \mathrm{C}\,\mathrm{dn}\,x + \mathrm{C}'\,\mathrm{dn}\,x\left[\dfrac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} - \dfrac{\mathrm{J} - \mathrm{K}}{\mathrm{K}}x\right]$.

VIII.

Un dernier point me reste à traiter avant d'aborder, au moyen des résultats qui viennent d'être obtenus, le problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe, dans le cas où il n'y a point de forces accélératrices. On a vu que les quantités $\varphi(x)$, $\chi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\chi_1(x)$ sont les produits d'une exponentielle par les fonctions périodiques

$$\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(x + \omega)}{\mathrm{H}(\omega)\,\Theta(x)}, \quad \frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(x + \omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(x)}, \quad \frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta_1(x + \omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(x)}, \quad \frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}_1(x + \omega)}{\Theta_1(\omega)\,\Theta(x)},$$

développables par conséquent en séries simples de sinus et cosinus de multiples entiers de $\frac{\pi x}{\mathrm{K}}$. Ces séries ont été données pour la première fois par Jacobi, à l'occasion même de ses recherches sur la rotation; et, comme l'observe l'illustre auteur, elles sont d'une grande importance dans la théorie des fonctions elliptiques. Je vais montrer comment on peut y parvenir au moyen de l'équation suivante

$$\begin{aligned}\int_0^{2\mathrm{K}} \mathrm{F}(x_0+x)\,dx &+ \int_0^{2i\mathrm{K}'} \mathrm{F}(x_0+2\mathrm{K}+x)\,dx \\ &- \int_0^{2\mathrm{K}} \mathrm{F}(x_0+2i\mathrm{K}'+x)\,dx - \int_0^{2i\mathrm{K}'} \mathrm{F}(x_0+x)\,dx = 2i\pi\mathrm{S},\end{aligned}$$

où, les quatre intégrales étant rectilignes, S représente la somme des résidus de la fonction $\mathrm{F}(x)$ qui correspondent aux pôles situés à l'intérieur du rectangle dont les sommets ont pour affixes les quantités x_0, $x_0+2\mathrm{K}$, $x_0+2\mathrm{K}+2i\mathrm{K}'$, $x_0+2i\mathrm{K}'$. Supposons à cet effet qu'on ait

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x+2\mathrm{K}) &= \mu\,\mathrm{F}(x),\\ \mathrm{F}(x+2i\mathrm{K}') &= \mu'\,\mathrm{F}(x);\end{aligned}$$

on obtiendra la relation

$$(1-\mu')\int_0^{2\mathrm{K}} \mathrm{F}(x_0+x)\,dx - (1-\mu)\int_0^{2i\mathrm{K}'} \mathrm{F}(x_0+x)\,dx = 2i\pi\mathrm{S},$$

et, si l'on admet en outre que le multiplicateur μ soit égal à l'unité, on en conclura le résultat suivant :

$$\int_0^{2\mathrm{K}} \mathrm{F}(x_0+x)\,dx = \frac{2i\pi\mathrm{S}}{1-\mu'}.$$

Cela posé, soit, en désignant par n un nombre entier quelconque,

$$\mathrm{F}(x) = \frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(x+\omega)}{\mathrm{H}(\omega)\,\Theta(x)}\,e^{-\frac{i\pi n x}{\mathrm{K}}};$$

on aura

$$\mu = 1, \qquad \mu' = e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(\omega+2ni\mathrm{K}')},$$

et, en prenant la constante x_0 dans des limites telles que le pôle unique de $\mathrm{F}(x)$ qui est à l'intérieur du rectangle soit $x = i\mathrm{K}'$, nous obtiendrons pour le résidu correspondant, et par conséquent pour S, la valeur

$$\mathrm{S} = e^{-\frac{i\pi}{2\mathrm{K}}(\omega+2ni\mathrm{K}')}.$$

De là résulte, pour l'intégrale définie, l'expression suivante,

$$\int_0^{2\mathrm{K}} \mathrm{F}(x_0+x)\,dx = \frac{2i\pi\,e^{-\frac{i\pi}{2\mathrm{K}}(\omega+2ni\mathrm{K}')}}{1-e^{-\frac{i\pi}{\mathrm{K}}(\omega+2ni\mathrm{K}')}} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega+2ni\mathrm{K}')},$$

et l'on voit qu'en posant l'équation

$$\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(x_0+x+\omega)}{\mathrm{H}(\omega)\,\Theta(x_0+x)} = \sum \mathrm{A}_n\,e^{\frac{i\pi n(x_0+x)}{\mathrm{K}}},$$

on en déduit immédiatement la détermination de A_n. Nous avons, en effet,

$$2\mathrm{K}\,\mathrm{A}_n = \int_0^{2\mathrm{K}} \mathrm{F}(x_0+x)\,dx,$$

et, par conséquent,

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\mathrm{A}_n = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega+2ni\mathrm{K}')}.$$

La constante x_0 que j'ai introduite pour plus de généralité, et aussi pour éviter qu'un pôle de $\mathrm{F}(x)$ se trouve sur le contour d'intégration, peut maintenant sans difficulté être supposée nulle. Nous parvenons ainsi à une première formule de développement

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(x+\omega)}{\mathrm{H}(\omega)\,\Theta(x)} = \sum \frac{e^{\frac{i\pi n x}{\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega+2ni\mathrm{K}')},$$

dont les trois autres résultent, comme on va le voir. Qu'on change, en effet, ω en $\omega+i\mathrm{K}'$, on en conclura d'abord

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(x+\omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(x)}\,e^{-\frac{i\pi x}{2\mathrm{K}}} = \sum \frac{e^{\frac{i\pi n x}{\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}[\omega+(2n+1)i\mathrm{K}']};$$

puis en multipliant les deux membres par l'exponentielle, et posant $m = 2n+1$,

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(x+\omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(x)} = \sum \frac{e^{\frac{i\pi m x}{2\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega+mi\mathrm{K}')}.$$

Mettons enfin, dans les deux formules que nous venons d'établir, $\omega + \mathrm{K}$ à la place de K, et l'on obtiendra les suivantes, qui nous restaient à trouver :

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta_1(x+\omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(x)} = \sum \frac{e^{\frac{i\pi n x}{\mathrm{K}}}}{\cos\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega + 2ni\mathrm{K}')},$$

$$\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}_1(x+\omega)}{\Theta_1(\omega)\,\Theta(x)} = \sum \frac{e^{\frac{i\pi m x}{2\mathrm{K}}}}{\cos\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega + mi\mathrm{K}')}.$$

Voici à leur sujet quelques remarques.

IX.

Elles sont d'une forme différente de celles de Jacobi et l'on peut s'en servir utilement dans beaucoup de questions que je ne puis aborder en ce moment. Je me contenterai, sans en faire l'étude, d'indiquer succinctement comment on en tire les sommes des séries suivantes

$$\Sigma f(2ni\mathrm{K}')\,e^{\frac{i\pi n x}{\mathrm{K}}}, \qquad \Sigma f(mi\mathrm{K}')\,e^{\frac{i\pi m x}{2\mathrm{K}}},$$

où $f(z)$ est une fonction rationnelle de $\sin\frac{\pi z}{2\mathrm{K}}$ et $\cos\frac{\pi z}{2\mathrm{K}}$, sans partie entière et assujettie à la condition $f(z+2\mathrm{K}) = -f(z)$. Il suffit, en effet, d'employer la décomposition de cette fonction en éléments simples, c'est-à-dire en termes tels que $\mathrm{D}_z^{\alpha}\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(z+\omega)}$, pour obtenir immédiatement la valeur des séries proposées, au moyen de ces deux expressions

$$\Sigma\,\mathrm{D}_\omega^{\alpha}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega + 2ni\mathrm{K}')}\right] e^{\frac{i\pi n x}{\mathrm{K}}} = \mathrm{D}_\omega^{\alpha}\,\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\Theta(x+\omega)}{\mathrm{H}(\omega)\,\Theta(x)},$$

$$\Sigma\,\mathrm{D}_\omega^{\alpha}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega + mi\mathrm{K}')}\right] e^{\frac{i\pi m x}{2\mathrm{K}}} = \mathrm{D}_\omega^{\alpha}\,\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\,\frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(x+\omega)}{\Theta(\omega)\,\Theta(x)}.$$

J'ajouterai encore qu'on retrouve les résultats de Jacobi, si l'on

réunit les termes qui correspondent à des valeurs de l'indice égales et de signes contraires. Il vient ainsi, en effet, en désignant par m un nombre qu'on fera successivement pair et impair,

$$\begin{aligned}\frac{e^{\frac{i\pi m x}{2\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega+mi\mathrm{K}')} + \frac{e^{-\frac{i\pi m x}{2\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega-mi\mathrm{K}')} &= \frac{2\cos\frac{m\pi x}{2\mathrm{K}}\cos\frac{m\pi i\mathrm{K}'}{2\mathrm{K}}\sin\frac{\pi\omega}{2\mathrm{K}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega+mi\mathrm{K}')\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega-mi\mathrm{K}')}\\ &\quad - i\,\frac{2\sin\frac{m\pi x}{2\mathrm{K}}\sin\frac{m\pi i\mathrm{K}'}{2\mathrm{K}}\cos\frac{\pi\omega}{2\mathrm{K}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega+mi\mathrm{K}')\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega-mi\mathrm{K}')};\end{aligned}$$

employons ensuite les équations du paragraphe 35 des *Fundamenta*, qui donnent

$$\cos\frac{m\pi i\mathrm{K}'}{2\mathrm{K}} = \frac{1+q^m}{2\sqrt{q^m}},$$

$$\sin\frac{m\pi i\mathrm{K}'}{2\mathrm{K}} = i\,\frac{1-q^m}{2\sqrt{q^m}},$$

$$\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega+mi\mathrm{K}')\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega-mi\mathrm{K}') = \frac{1-2q^m\cos\frac{\pi\omega}{\mathrm{K}}+q^{2m}}{4q^m},$$

et nous parviendrons à cette nouvelle forme

$$\begin{aligned}\frac{e^{\frac{i\pi m x}{2\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega+mi\mathrm{K}')} + \frac{e^{-\frac{i\pi m x}{2\mathrm{K}}}}{\sin\frac{\pi}{2\mathrm{K}}(\omega-mi\mathrm{K}')} &= \frac{4\sqrt{q^m}(1+q^m)\sin\frac{\pi\omega}{2\mathrm{K}}}{1-2q^m\cos\frac{\pi\omega}{\mathrm{K}}+q^{2m}}\cos\frac{m\pi x}{2\mathrm{K}}\\ &\quad + \frac{4\sqrt{q^m}(1-q^m)\cos\frac{\pi\omega}{2\mathrm{K}}}{1-2q^m\cos\frac{\pi\omega}{\mathrm{K}}+q^{2m}}\sin\frac{m\pi x}{2\mathrm{K}}.\end{aligned}$$

C'est celle qu'on voit dans la lettre adressée à l'Académie des Sciences et publiée dans les *Comptes rendus* du 30 juillet 1849; car, en introduisant la constante $b = \frac{i\omega}{\mathrm{K}'}$, on peut écrire

$$\sin\frac{\pi\omega}{2\mathrm{K}} = \frac{q^{\frac{1}{2}b} - q^{-\frac{1}{2}b}}{2i},$$

$$\cos\frac{\pi\omega}{2\mathrm{K}} = \frac{q^{\frac{1}{2}b} + q^{-\frac{1}{2}b}}{2},$$

et

$$1 - 2q^m \cos\frac{\pi\omega}{K} + q^{2m} = (1 - q^{m+b})(1 - q^{m-b}).$$

Mais une faute d'impression, reproduite dans les *Œuvres complètes*, t. II, p. 143, et dans le *Journal de Crelle*, t. XXXIX, p. 297, s'est glissée dans ces formules. Les équations (3), (4), (5), (6) renferment en effet les quantités

$$\sqrt{q(1+q)},\quad \sqrt{q^3(1+q^3)},\quad \ldots \quad \text{et} \quad \sqrt{q(1-q)},\quad \sqrt{q^3(1-q^3)},\quad \ldots,$$

qui doivent être remplacées par

$$\sqrt{q}(1+q),\quad \sqrt{q^3}(1+q^3),\quad \ldots \quad \text{et} \quad \sqrt{q}(1-q),\quad \sqrt{q^3}(1-q^3),\quad \ldots.$$

On peut d'ailleurs parvenir par d'autres méthodes à ces résultats importants. M. Somoff les obtient en décomposant la quantité

$$\frac{(1-qvz)(1-q^3vz)(1-q^5vz)\ldots(1-qv^{-1}z^{-1})(1-q^3v^{-1}z^{-1})(1-q^5v^{-1}z^{-1})\ldots}{(z-1)(1-q^2z)(1-q^4z)\ldots(1-q^2z^{-1})(1-q^4z^{-1})\ldots}$$

en fractions simples

$$\frac{A_0}{z-1} + \sum \frac{A_m}{1-q^{2m}z} + \sum \frac{B_m}{z-q^{2m}}.$$

Le P. Joubert m'a communiqué la remarque qu'on peut, en suivant la même marche, partir de ces expressions finies

$$\frac{z(z-q^{1-b})(z-q^{3-b})\ldots(z-q^{2n-1-b})(1-q^{1+b}z)(1-q^{3+b}z)\ldots(1-q^{2n-1+b}z)}{(z-q)(z-q^3)\ldots(z-q^{2n+1})(1-qz)(1-q^3z)\ldots(1-q^{2n+1}z)},$$

$$\frac{z(z-q^{2-b})(z-q^{4-b})\ldots(z-q^{2n-b})(1-q^{2+b}z)(1-q^{4+b}z)\ldots(1-q^{2n+b}z)}{(z-q)(z-q^3)\ldots(z-q^{2n+1})(1-qz)(1-q^3z)\ldots(1-q^{2n+1}z)},$$

et faire grandir indéfiniment le nombre n.

Enfin, et en dernier lieu, je remarque qu'au moyen de la formule

$$\int_0^{2K} F(x_0+x)\,dx = \frac{2i\pi S}{1-\mu'},$$

qui a été le point de départ de mon procédé, nous pouvons très simplement démontrer les relations établies au paragraphe IV, page 227 :

$$\int_0^{2K} \frac{\Theta(x+a)\,\Theta(x+b)}{\Theta^2(x)}\,dx = 0,$$

$$\int_0^{2K} \frac{H(x+a)\,H(x+b)}{\Theta^2(x)}\,dx = 0,$$

où a et b désignent, dans la première, deux racines de l'équation $H'(x) = 0$, et dans la seconde, deux racines de l'équation $\Theta'(x) = 0$. Si l'on prend, en effet, successivement

$$F(x) = \frac{\Theta(x+a)\,\Theta(x+b)}{\Theta^2(x)},$$

$$F(x) = \frac{H(x+a)\,H(x+b)}{\Theta^2(x)},$$

on aura $\mu = 1$ et μ' différant de l'unité, sauf la supposition que nous excluons de $b = -a$. On obtient d'ailleurs, dans le premier cas,

$$S = \frac{H(a)\,H'(b) + H(b)\,H'(a)}{H'^2(0)}\sqrt{\mu'},$$

et, dans le second,

$$S = \frac{\Theta(a)\,\Theta'(b) + \Theta(b)\,\Theta'(a)}{H'^2(0)}\sqrt{\mu'},$$

de sorte que, sous les conditions admises, les deux valeurs de S s'évanouissent. Cela étant, nous pouvons, dans la relation ainsi démontrée,

$$\int_0^{2K} F(x_0+x)\,dx = 0,$$

supposer $x_0 = 0$; car l'intégrale est une fonction continue de x_0, non seulement dans le voisinage de cette valeur particulière, mais dans l'intervalle des deux parallèles à l'axe des abscisses, menées à la même distance K' au-dessus et au-dessous de cet axe.

X.

Dans la théorie de la rotation d'un corps autour d'un point fixe O, le mouvement d'un point quelconque du solide se détermine en rapportant ce point aux axes principaux d'inertie Ox', Oy', Oz', immobiles dans le corps, mais entraînés par lui, et dont on donne la position à un instant quelconque par rapport à des axes fixes Ox, Oy, Oz, le plan des xy étant le plan invariable et l'axe Oz la perpendiculaire de ce plan. Soient donc x, y, z les coordonnées d'un point du corps par rapport aux axes fixes, et ξ, η, ζ les coordonnées par rapport aux axes mobiles ; ces quantités seront liées par les relations

$$x = a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta,$$
$$y = a'\xi + b'\eta + c'\zeta,$$
$$z = a''\xi + b''\eta + c''\zeta,$$

et la question consiste à obtenir en fonction du temps les neuf coefficients $a, b, c, \ldots$. Jacobi le premier en a donné une solution complète et définitive, qui offre l'une des plus belles applications de calcul à la Mécanique et ouvre en même temps des voies nouvelles dans la théorie des fonctions elliptiques. C'est à l'étude des résultats si importants découverts par l'immortel géomètre que je dois les recherches exposées dans ce travail, et tout d'abord l'intégration de l'équation de Lamé, dans le cas dont je viens de m'occuper, où l'on suppose $n = 1$; on va voir en effet comment la théorie de la rotation, lorsqu'il n'y a point de force accélératrice, se trouve étroitement liée à cette équation.

Pour cela je partirai des relations suivantes, données dans le Tome II du *Traité de Mécanique* de Poisson, page 135 :

$$\frac{da}{dt} = br - cq, \qquad \frac{da'}{dt} = b'r - c'q, \qquad \frac{da''}{dt} = b''r - c''q,$$
$$\frac{db}{dt} = cp - ar, \qquad \frac{db'}{dt} = c'p - a'r, \qquad \frac{db''}{dt} = c''p - a''r,$$
$$\frac{dc}{dt} = aq - bp, \qquad \frac{dc'}{dt} = a'q - b'p, \qquad \frac{dc''}{dt} = a''q - b''p,$$

dans lesquelles p, q, r sont les composantes rectangulaires de la vitesse de rotation, par rapport aux mobiles Ox', Oy', Oz'. Cela étant, des conditions connues

$$p = \alpha a'', \qquad q = \beta b'', \qquad r = \gamma c'',$$

où α, β, γ sont des constantes, on tire immédiatement les équations

$$\frac{da''}{dt} = (\gamma - \beta) b'' c'', \qquad \frac{db''}{dt} = (\alpha - \gamma) c'' a'', \qquad \frac{dc''}{dt} = (\beta - \alpha) a'' b'',$$

dont une première intégrale algébrique est donnée par l'égalité

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1,$$

et une seconde intégrale par celle-ci :

$$\alpha a''^2 + \beta b''^2 + \gamma c''^2 = \delta,$$

δ étant une constante arbitraire. Ces quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont liées aux constantes A, B, C, h, l du Mémoire de Jacobi par les relations

$$\alpha = \frac{l}{A}, \qquad \beta = \frac{l}{B}, \qquad \gamma = \frac{l}{C}, \qquad \delta = \frac{h}{l};$$

elles sont donc du signe de l qui peut être positif ou négatif, comme représentant le moment d'impulsion dans le plan invariable. Dans ces deux cas, β sera compris entre α et γ, puisqu'on suppose B compris entre A et C ; mais j'admettrai, pour fixer les idées, que l soit positif. On voit de plus que, δ étant une moyenne entre α, β, γ, peut être plus grand ou plus petit que β : la première hypothèse donne $Bh > l^2$, et Jacobi suppose alors $A > B > C$; dans la seconde, on a $Bh < l^2$, avec $A < B < C$; ces conditions prendront, avec nos constantes, la forme suivante :

$$\text{(I)} \qquad \alpha < \beta < \delta < \gamma,$$
$$\text{(II)} \qquad \alpha > \beta > \delta > \gamma,$$

et nous allons immédiatement en faire usage en recherchant les expressions des coefficients a'', b'', c'', par des fonctions elliptiques du temps.

XI.

J'observe, en premier lieu, qu'on obtient, si l'on exprime a'' et c'' au moyen de b'', les valeurs

$$(\gamma - \alpha) a''^2 = \gamma - \delta - (\gamma - \beta) b''^2, \qquad (\gamma - \alpha) c''^2 = \delta - \alpha - (\beta - \alpha) b''^2.$$

Posons maintenant

$$a''^2 = \frac{\gamma - \delta}{\gamma - \alpha} V^2, \qquad b''^2 = \frac{\gamma - \delta}{\gamma - \beta} U^2, \qquad c''^2 = \frac{\delta - \alpha}{\gamma - \alpha} W^2,$$

puis

$$k^2 = \frac{(\beta - \alpha)(\gamma - \delta)}{(\delta - \alpha)(\gamma - \beta)};$$

il viendra plus simplement

$$V^2 = 1 - U^2, \qquad W^2 = 1 - k^2 U^2.$$

Introduisons, en outre, la quantité $n^2 = (\delta - \alpha)(\gamma - \beta)$; l'équation $\frac{db''}{dt} = (\alpha - \gamma)c''a''$ prend cette forme :

$$\frac{dU}{dt} = n\,VW,$$

et l'on en conclut, en désignant par t_0 une constante arbitraire,

$$U = \mathrm{sn}[n(t - t_0), k], \qquad V = \mathrm{cn}[n(t - t_0), k], \qquad W = \mathrm{dn}[n(t - t_0), k].$$

J'ajoute que les quantités $\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \alpha}$, $\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \beta}$, $\frac{\delta - \alpha}{\gamma - \alpha}$, $(\delta - \alpha)(\gamma - \beta)$ sont toutes positives et que k^2 est positif et moindre que l'unité, sous les conditions (I) et (II). A l'égard du module il suffit en effet de remarquer que l'identité

$$(\delta - \alpha)(\gamma - \beta) = (\gamma - \alpha)(\delta - \beta) + (\beta - \alpha)(\gamma - \delta)$$

donne

$$k'^2 = \frac{(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}{(\delta - \alpha)(\gamma - \beta)},$$

de sorte que k^2 et k'^2, étant évidemment positifs, sont par cela même tous deux inférieurs à l'unité. Ce point établi, désignons par $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ des facteurs égaux à ± 1; en convenant de prendre dorénavant les racines carrées avec le signe $+$, nous pourrons écrire

$$a'' = \varepsilon\sqrt{\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \alpha}}\,V, \qquad b'' = \varepsilon'\sqrt{\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \beta}}\,U, \qquad c'' = \varepsilon''\sqrt{\frac{\delta - \alpha}{\gamma - \alpha}}\,W,$$

et la substitution dans les équations

$$\frac{da''}{dt} = (\gamma - \beta)b''c'', \qquad \frac{db''}{dt} = (\alpha - \gamma)c''a'', \qquad \frac{dc''}{dt} = (\beta - \alpha)a''b'',$$

donnera les conclusions suivantes. Admettons d'abord les conditions (I) : les trois différences $\beta - \gamma$, $\alpha - \gamma$, $\alpha - \beta$ seront négatives, et l'on trouvera

$$\varepsilon = -\varepsilon'\varepsilon'', \qquad \varepsilon' = -\varepsilon''\varepsilon, \qquad \varepsilon'' = -\varepsilon\varepsilon';$$

mais sous les conditions (II), ces mêmes quantités étant positives,

nous aurons

$$\varepsilon = \varepsilon'\varepsilon'', \qquad \varepsilon' = \varepsilon''\varepsilon, \qquad \varepsilon'' = \varepsilon\varepsilon';$$

ainsi, en faisant, avec Jacobi, $\varepsilon = -1$, $\varepsilon' = +1$, on voit qu'il faudra prendre $\varepsilon'' = +1$ dans le premier cas et la valeur contraire $\varepsilon'' = -1$ dans le second. Cela posé, et en convenant toujours que les racines carrées soient positives, je dis qu'on peut déterminer un argument ω par les deux conditions

$$\mathrm{cn}\,\omega = \sqrt{\frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \delta}}, \qquad \mathrm{dn}\,\omega = \sqrt{\frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta}};$$

d'où nous tirons

$$\frac{\mathrm{dn}\,\omega}{\mathrm{cn}\,\omega} = \sqrt{\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \beta}};$$

ces quantités satisfont en effet à la relation

$$dn^2\omega - k^2 cn^2\omega = k'^2,$$

comme on le vérifie aisément. Je remarque, en outre, que $\mathrm{cn}\,\omega$ et $\mathrm{dn}\,\omega$ étant des fonctions paires, on peut encore à volonté disposer du signe de ω. Or, ayant $\frac{\mathrm{sn}^2\omega}{\mathrm{cn}^2\omega} = \frac{\alpha - \delta}{\gamma - \alpha}$, nous fixerons ce signe de manière que, suivant les conditions (I) ou (II), $\frac{\mathrm{sn}\,\omega}{i\,\mathrm{cn}\,\omega}$, qui est une fonction impaire, soit égal à $+\sqrt{\frac{\delta - \alpha}{\gamma - \alpha}}$ ou à $-\sqrt{\frac{\delta - \alpha}{\gamma - \alpha}}$. Nous éviterons, en définissant la constante ω comme on vient de le faire, les doubles signes qui figurent dans les relations de Jacobi ; ainsi, à l'égard de a'', b'', c'', on aura, dans tous les cas, les formules suivantes, où je fais pour abréger $u = n(t - t_0)$:

$$a'' = -\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{cn}\,\omega}, \qquad b'' = \frac{\mathrm{dn}\,\omega\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,\omega}, \qquad c'' = \frac{\mathrm{sn}\,\omega\,\mathrm{dn}\,u}{i\,\mathrm{cn}\,\omega}.$$

Enfin il est facile de voir que $\omega = i\upsilon$, υ étant réel ; de la formule $\mathrm{cn}(i\upsilon, k) = \frac{1}{\mathrm{cn}(\upsilon, k')}$, on conclut, en effet, $\mathrm{cn}(\upsilon, k') = \sqrt{\frac{\gamma - \delta}{\gamma - \alpha}}$, valeur qui est dans les deux cas non seulement réelle, mais moindre que l'unité.