SUR LES

DÉVELOPPEMENTS DE $F(x) = \mathrm{sn}^a x\, \mathrm{cn}^b x\, \mathrm{dn}^c x$

OÙ LES EXPOSANTS SONT ENTIERS.

Académie royale des Sciences de Stockholm, Bihang III, n° 10, 1875, p. 3-10.

Le mode de calcul que je proposerais résulte de la proposition suivante :

Soit $\mathfrak{F}(z)$ une fonction uniforme ayant pour périodes $2K$ et $2iK'$; si l'on considère un rectangle dont les côtés parallèles aux axes Ox et Oy; soient $AB = 2K$, $AD = 2K'$, la somme S des résidus de $\mathfrak{F}(z)$ pour les valeurs de l'argument qui répondent à des points compris dans l'intérieur du rectangle est nulle. C'est ce que donne, en effet, l'intégration de $\mathfrak{F}(z)\,dz$ suivant le contour ABCD, car en appelant p pour un moment l'affixe de A, on obtient ainsi la relation

$$\int_0^{2K} \mathfrak{F}(p+z)\,dz + \int_0^{2iK'} \mathfrak{F}(p+2K+z)\,dz - \int_0^{2iK'} \mathfrak{F}(p+z)\,dz - \int_0^{2K} \mathfrak{F}(p+2iK'+z)\,dz = 2i\pi S$$

ou bien

$$\int_0^{2K} [\mathfrak{F}(p+z) - \mathfrak{F}(p+2iK'+z)]\,dz - \int_0^{2iK'} [\mathfrak{F}(p+z) - \mathfrak{F}(p+2K+z)]\,dz = 2i\pi S,$$

et les conditions

$$\mathfrak{F}(z+2K) = \mathfrak{F}(z), \qquad \mathfrak{F}(z+2iK') = \mathfrak{F}(z)$$

donnent sur le champ

$$S = 0.$$

Ce principe posé, je distingue à l'égard de $F(x)$, d'après les relations

$$F(x+2K) = (-1)^{a+b} F(x), \qquad F(x+2iK') = (-1)^{b+c} F(x)$$

quatre cas différents, suivant que la périodicité étant celle de $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$, $\mathrm{dn}\,x$, $\mathrm{sn}^2 x$, on aura

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} F(x+2K) = -F(x), \\ F(x+2iK') = +F(x), \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} F(x+2K) = -F(x), \\ F(x+2iK') = -F(x, \end{cases}$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} F(x+2K) = +F(x), \\ F(x+2iK') = -F(x), \end{cases}$$

$$\text{(IV)} \qquad \begin{cases} F(x+2K) = +F(x), \\ F(x+2iK) = +F(x), \end{cases}$$

et j'en ferai successivement l'application aux fonctions

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{F(z)}{\mathrm{sn}(x-z)}, \qquad \frac{F(z)}{\mathrm{cn}(x-z)}, \qquad \frac{F(z)}{\mathrm{dn}(x-z)}, \qquad \frac{F(z)}{\mathrm{sn}^2(x-z)}.$$

Considérant d'abord le premier cas, j'observe que toutes les valeurs de z qui rendent le numérateur infini et le dénominateur nul sont

$$z = iK' + 2mK + 2niK', \qquad z = x + 2mK + 2niK',$$

m et n étant des nombres entiers. On a donc, à l'intérieur du rectangle ABCD, qu'à considérer deux quantités qui peuvent être ramenées à $z = iK'$, $z = x$, pour en déduire les résidus correspondants, c'est-à-dire les coefficients de $\frac{1}{\varepsilon}$ dans les développements suivant les puissances ascendantes de ε, de $F(iK'+\varepsilon)$, $F(x+\varepsilon)$. Soit, à cet effet, en écrivant les seuls termes qui contiennent ε en dénominateur,

$$\mathrm{F}(i\mathrm{K}'+\varepsilon)=\frac{\mathrm{A}}{\varepsilon}+\frac{\mathrm{A}_1}{\varepsilon^2}+\ldots+\frac{\mathrm{A}_n}{\varepsilon^{n+1}}$$

ou sous une forme préférable

$$\mathrm{F}(i\mathrm{K}'+\varepsilon)=\mathrm{A}\,\varepsilon^{-1}+\mathrm{A}_1\mathrm{D}_\varepsilon\,\varepsilon^{-1}+\ldots+\mathrm{A}_n\mathrm{D}_\varepsilon^n\,\varepsilon^{-1}.$$

En multipliant membre à membre avec l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{sn}(x-i\mathrm{K}'-\varepsilon)}=k\operatorname{sn}(x-\varepsilon)=k\Big[&\operatorname{sn}x-\frac{\varepsilon}{1}\mathrm{D}_x\operatorname{sn}x+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\mathrm{D}_x^2\operatorname{sn}x+\ldots\\&+(-1)^n\frac{\varepsilon^n}{1.2\ldots n}\mathrm{D}_x^n\operatorname{sn}x+\ldots\Big],\end{aligned}$$

il vient, pour le coefficient de $\frac{1}{\varepsilon}$ dans le produit des seconds membres, l'expression

$$k(\mathrm{A}\operatorname{sn}x+\mathrm{A}_1\mathrm{D}_x\operatorname{sn}x+\ldots+\mathrm{A}_n\mathrm{D}_x^n\operatorname{sn}x).$$

L'autre résidu correspondant à $z=x$ étant évidemment $-\mathrm{F}(x)$, la relation $\mathrm{S}=0$ donne la formule

$$\mathrm{F}(x)=k(\mathrm{A}\operatorname{sn}x+\mathrm{A}_1\mathrm{D}_x\operatorname{sn}x+\ldots+\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n^n\operatorname{sn}x).$$

Dans le second cas, où $\mathfrak{F}(z)=\frac{\mathrm{F}(z)}{\operatorname{cn}(x-z)}$, le développement de $\frac{1}{\operatorname{cn}(x-i\mathrm{K}'-\varepsilon)}$ conduit à un calcul tout semblable; mais j'observerai que, ayant

$$\frac{1}{\operatorname{cn}(x-i\mathrm{K}')}=-\frac{ik}{k'}\operatorname{cn}(x-\mathrm{K}),$$

on peut poser

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{cn}(x-i\mathrm{K}'-\varepsilon)}=-\frac{ik}{k'}\Big[&\operatorname{cn}(x-\mathrm{K})-\frac{\varepsilon}{1}\mathrm{D}_x\operatorname{cn}(x-\mathrm{K})\\&+\frac{\varepsilon^2}{1.2}\mathrm{D}_x^2\operatorname{cn}(x-\mathrm{K})-\ldots\Big];\end{aligned}$$

multipliant membre avec l'égalité précédemment employée

$$\mathrm{F}(i\mathrm{K}'+\varepsilon)=\mathrm{A}\,\varepsilon^{-1}+\mathrm{A}_1\mathrm{D}_\varepsilon\,\varepsilon^{-1}+\mathrm{A}_2\mathrm{D}_\varepsilon^2\,\varepsilon^{-1}+\ldots$$

le résidu cherché s'obtient donc sous la forme suivante :

$$-\frac{ik}{k'}[\mathrm{A}\operatorname{cn}(x-\mathrm{K})+\mathrm{A}_1\mathrm{D}_x\operatorname{cn}(x-\mathrm{K})+\ldots+\mathrm{A}_n\mathrm{D}_x^n\operatorname{cn}(x-\mathrm{K})].$$

Maintenant, l'équation $\operatorname{cn}(x-z)=0$ donne la solution

$$z=x-\mathrm{K},$$

et le résidu qui lui correspond a pour valeur

$$\frac{\mathrm{F}(x-\mathrm{K})}{k'},$$

d'où la relation

$$\mathrm{F}(x-\mathrm{K})=ik[\mathrm{A}\operatorname{cn}(x-\mathrm{K})+\mathrm{A}_1\mathrm{D}_x\operatorname{cn}(x-\mathrm{K})+\ldots].$$

et, en changeant x en $x+\mathrm{K}$,

$$\mathrm{F}(x)=ik(\mathrm{A}\operatorname{cn}x+\mathrm{A}_1\mathrm{D}_x\operatorname{cn}x+\ldots+\mathrm{A}_n\mathrm{D}_x^n\operatorname{cn}x).$$

Le troisième cas, en faisant usage de la relation

$$\frac{1}{\operatorname{dn}(x-i\mathrm{K}')}=k'\operatorname{dn}(x-\mathrm{K}-i\mathrm{K}'),$$

donne de même

$$\mathrm{F}(x)=-i(\mathrm{A}\operatorname{dn}x+\mathrm{A}_1\mathrm{D}_x\operatorname{dn}x+\ldots+\mathrm{A}_n\mathrm{D}_x^n\operatorname{dn}x);$$

mais la quatrième se présente différemment, le résidu de la fonction $\frac{\mathrm{F}(z)}{\operatorname{sn}^2(x-z)}$ pour $z=x$ étant $\mathrm{F}'(x)$, on obtient, en effet,

$$\mathrm{F}'(x)=-k^2(\mathrm{A}\operatorname{sn}^2x+\mathrm{A}_1\mathrm{D}_x\operatorname{sn}^2x+\ldots+\mathrm{A}_n\mathrm{D}_x^n\operatorname{sn}^2x).$$

Or, le théorème $\mathrm{S}=0$, appliqué à la fonction $\mathrm{F}(z)$, remplissant actuellement les conditions

$$\mathrm{F}(z+2\mathrm{K})=\mathrm{F}(z),\qquad\mathrm{F}(z+2i\mathrm{K}')=\mathrm{F}(z)$$

et qui n'a qu'un seul résidu, fait voir que ce résidu est nul. Ayant ainsi $\mathrm{A}=0$, on parvient, en intégrant les deux membres, à la relation cherchée

$$\mathrm{F}(z)=\text{const.}-k^2(\mathrm{A}_1\operatorname{sn}^2x+\mathrm{A}_2\mathrm{D}_x\operatorname{sn}^2x+\ldots+\mathrm{A}_n\mathrm{D}_x^{n-1}\operatorname{sn}^2x)$$

qui donnera comme les précédentes, au moyen des coefficients A,

$A_1, \ldots$, le développement de $F(x)$ en série de sinus et de cosinus. Ce point établi, je reprends l'égalité

$$F(iK'+\varepsilon) = A\varepsilon^{-1} + A_1 D_\varepsilon \varepsilon^{-1} + \ldots + A_n D_\varepsilon^n \varepsilon^{-1},$$

et, observant que les formules

$$\operatorname{sn}(iK'+x) = \frac{1}{k \operatorname{sn} x},$$

$$\operatorname{cn}(iK'+x) = \frac{\operatorname{dn} x}{ik \operatorname{sn} x} = \frac{k'}{ik \operatorname{sn}\left(k'x, \frac{ik'}{k}\right)},$$

$$\operatorname{dn}(iK'+x) = \frac{\operatorname{cn} x}{i \operatorname{sn} x} = \frac{1}{\operatorname{sn}(ix, k')},$$

permettent d'écrire

$$F(iK'+x) = \left(\frac{1}{k}\right)^a \left(\frac{k'}{ik}\right)^b \frac{1}{\operatorname{sn}^a x \operatorname{sn}^b\left(k'x, \frac{ik'}{k}\right) \operatorname{sn}^c(ix, k')},$$

je suis amené à m'occuper de développement de $\frac{1}{\operatorname{sn} x}$ suivant les puissances ascendantes de la variable. Or, un moyen simple de l'obtenir résulte de la formule suivante :

$$\frac{k+ik'}{\operatorname{sn}\left(\frac{k+ik'}{2}x, \frac{k-ik'}{k+ik'}\right)} = \frac{1}{\operatorname{sn} x} + \frac{i}{\operatorname{sn}(ix, k')},$$

car, en posant

$$\frac{1}{\operatorname{sn} x} = \frac{1}{x} + \Pi_1(k)x + \Pi_2(k)x^3 + \ldots + \Pi_n(k)x^{2n-1} + \ldots$$

de sorte que

$$\Pi_n(k) = \alpha + \beta k^2 + \gamma k^4 + \ldots + \beta k^{2n-2} + \alpha k^{2n}$$

on en déduira

$$\frac{(k+ik')^{2n}}{2^{2n-1}} \Pi_n\left(\frac{k-ik'}{k+ik'}\right) = \Pi_n(k) + (-1)^n \Pi_n(k'),$$

et cette relation détermine les coefficients $\beta, \gamma, \ldots$ au moyen de α qui est donné d'avance par le développement connu de $\frac{1}{\operatorname{sn} x}$.

Soit, par exemple, $n = 4$; en faisant

$$k = \cos\varphi,$$

d'où

$$k' = \sin\varphi, \qquad k + ik' = e^{i\varphi},$$

on aura facilement

$$\begin{aligned} &64[\Pi_4(k) + \Pi_4(k')] \\ &\quad = 163\alpha + 104\beta + 48\gamma + (28\alpha + 24\beta + 16\gamma)\cos 4\varphi + \alpha \cos 8\varphi, \end{aligned}$$

puis

$$(k+ik')^8 \Pi_4\left(\frac{k-ik'}{k+ik'}\right) = 2\alpha\cos 8\varphi + 2\beta\cos 4\varphi + \gamma$$

et, par conséquent, les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma &= 2(163\alpha + 104\beta + 48\gamma), \\ \beta &= 28\alpha + 24\beta + 16\gamma ; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\Pi_4(k) = \frac{127 - 284k^2 + 186k^4 - 284k^6 + 127k^8}{15 \times (2.3.4.5.6.7.8)}.$$

Le développement de $\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}$ me semble aussi mériter une attention particulière, et je remarquerai en premier lieu que, en posant

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x} = \frac{1}{x^2} + \Phi_1(k) + \Phi_2(k)x^2 + \ldots + \Phi_n(k)x^{2n-2} + \ldots,$$

le coefficient $\Phi_n(k)$ s'obtient au moyen de $\Pi_n(k)$ comme il suit :

$$(2^{2n-1}-2)\Phi_n(k) = (2n-1)\left[2^{2n-1}\Pi_n(k) + (-1)^n(1+k)^{2n}\Pi_n\left(\frac{1-k}{1+k}\right)\right].$$

C'est la conséquence, en effet, de la relation

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 \frac{x}{2}} = D_x\left[\frac{1}{\operatorname{sn} x} + \frac{i(1+k)}{\operatorname{sn}\left(\frac{1+k}{2}ix, \frac{1-k}{1+k}\right)}\right],$$

et inversement en partant de celle-ci

$$2D_x\frac{1}{\operatorname{sn} x} = \frac{2}{\operatorname{sn}^2 x} - \left[\frac{i(1+k)}{\operatorname{sn}\left(\frac{1+k}{2}ix, \frac{1-k}{1+k}\right)}\right]^2 - 1 - k^2,$$

on exprimera $\Pi_n(k)$ au moyen de $\Phi_n(k)$.

Voici le système des formules qui conduisent à ces résultats sur $\frac{1}{\operatorname{sn} x}$ et $\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}$:

$$\frac{i(1+k)}{\operatorname{sn}\left(\frac{1+k}{2} i x, \frac{1-k}{1+k}\right)} = \frac{\operatorname{cn} x + \operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x},$$

$$\frac{k+ik'}{\operatorname{sn}\left(\frac{k+ik'}{2} x, \frac{k-ik'}{k+ik'}\right)} = \frac{1+\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x},$$

$$\frac{1+k'}{\operatorname{sn}\left(\frac{1+k'}{2} x, \frac{1-k'}{1+k'}\right)} = \frac{1+\operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x},$$

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2 \frac{x}{2}} = \frac{(1+\operatorname{cn} x)(1+\operatorname{dn} x)}{\operatorname{sn}^2 x};$$

j'en tirerai cette dernière conclusion

$$\begin{aligned} &\left[\frac{i(1+k)}{\operatorname{sn}\left(\frac{1+k}{2} i x, \frac{1-k}{1+k}\right)}\right]^2 + \left[\frac{k+ik'}{\operatorname{sn}\left(\frac{k+ik'}{2} x, \frac{k-ik'}{k+ik'}\right)}\right]^2 \\ &+ \left[\frac{1+k'}{\operatorname{sn}\left(\frac{1+k'}{2} x, \frac{1-k'}{1+k'}\right)}\right]^2 - \frac{2}{\operatorname{sn}^2 \frac{x}{2}} - \frac{4}{\operatorname{sn}^2 x} + 2(1+k^2) = 0, \end{aligned}$$

qui donne, pour le calcul direct de $\Phi_n(k)$, la relation

$$\begin{aligned} &(k+ik)^{2n}\Phi_n\left(\frac{k-ik'}{k+ik'}\right) + (1+k')^{2n}\Phi_n\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) \\ &\qquad + (-1)^n(1+k)^{2n}\Phi_n\left(\frac{1-k}{1+k}\right) = (4^n+2)\,\Phi_n(k). \end{aligned}$$

Mais une remarque est d'abord à faire sur la forme algébrique des polynomes $\Phi(k)$. Les égalités

$$\operatorname{sn}\left(kx, \frac{1}{k}\right) = k \operatorname{sn} x, \qquad \frac{1}{\operatorname{sn}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sn}^2(ix, k')} = 1$$

montrent, en effet, que

$$k^{2n}\Phi_n\left(\frac{1}{k}\right) = \Phi_n(k),$$
$$\Phi_n(k') = (-1)^n \Phi_n(k).$$

On est amené à rechercher l'expression la plus générale des polynomes entiers $\varphi(x)$ de degré n satisfaisant aux conditions

$$x^n \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x),$$
$$\varphi(1-x) = (-1)^n \varphi(x).$$

Supposons d'abord n impair; en faisant $x = \frac{1}{2}$ dans ces deux égalités et $x = -1$ dans la première seulement, on en conclura

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \qquad \varphi(2) = 0, \qquad \varphi(-1) = 0,$$

par où l'on voit que $\varphi(x)$ contient le facteur

$$(x+1)(2x-1)(x-2).$$

Soit donc, pour un moment,

$$\varphi(x) = (x+1)(2x-1)(x-2)\psi(x);$$

le polynome de degré pair $\psi(x)$ sera réciproque et vérifiera la condition

$$\psi(1-x) = \psi(x),$$

car le produit $(x+1)(2x-1)(x-2)$ change de signe quand on y remplace x par $1-x$. Le cas de n impair est ainsi ramené à celui de n pair que je vais considérer en posant $n = 2m$. J'observe à cet effet que, en posant

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - A(x^2 - x + 1)^m,$$

où A est une constante arbitraire, on aura encore

$$x^{2m}\varphi_1\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi_1(x),$$
$$\varphi_1(1-x) = \varphi_1(x).$$

Cela posé, déterminons A de manière que $\varphi_1(x)$ admette la racine $x = 0$; la condition

$$\varphi_1(1-x) = \varphi_1(x)$$

fait voir qu'on introduira en même temps la racine $x = 1$, de sorte qu'on peut faire

$$\varphi_1(x) = x(1-x)\varphi_2(x).$$

Or, on trouve à l'égard du nouveau polynome $\varphi(x)$ les relations

$$\varphi_2(1-x)=\varphi_2(x),$$
$$x^{2m-3}\varphi_2\left(\frac{1}{x}\right)=-\varphi_2(x)$$

qui donnent pour $x=1$

$$\varphi_2(1)=0 \quad \text{et} \quad \varphi_2(0)=0;$$

donc, comme tout à l'heure, $\varphi_2(x)$ admet le facteur $x(1-x)$, par où l'on voit qu'on doit faire

$$\varphi_1(x)=[x(1-x)]^2\,\varphi_3(x),$$

d'où résultera

$$\varphi_3(1-x)=\varphi_3(x),$$
$$x^{2m-6}\,\varphi_3\left(\frac{1}{x}\right)=\varphi_3(x).$$

Ainsi $\varphi_3(x)$ est un polynome de même nature que $\varphi(x)$, mais du degré $2m-6$, de sorte que, en raisonnant sur le nouveau polynome comme sur le précédent, on arrivera de proche en proche à l'expression cherchée

$$\begin{aligned}\varphi(x)=A(x^2-x+1)^m &+ B(x^2-x+1)^{m-3}\,(x^2-x)^2\\ &+ C(x^2-x+1)^{m-6}\,(x^2-x)^4\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ L(x^2-x+1)^{m-3p}(x^2-x)^{2p},\end{aligned}$$

p désignant l'entier contenu dans $\frac{m}{3}$, et l'on en conclut, en faisant $x=k^2$,

$$\begin{aligned}\Phi_n(k)&=A(1-k^2k'^2)^m+B(1-k^2k'^2)^{m-3}k^4k'^4\\ &+C(1-k^2k'^2)^{m-6}k^8k'^8+\ldots+L(1-k^2k'^2)^{m-3p}k^{4p}k'^{4p}.\end{aligned}$$

Cette forme, canonique si je puis dire, des coefficients du développement de $\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}$ suivant les puissances croissantes de la variable, contiendra au plus, sous forme homogène, deux coefficients inconnus, jusqu'aux limites $n=10$ et $n=13$, suivant que n est pair ou impair. Et si l'on écrit pour abréger

$$\Phi_n(k)=\Sigma H(1-k^2k'^2)^{m-3h}(kk'^4)^{2h},$$

on aura les formules suivantes :

$$(1+k)^{2n}\Phi_n\left(\frac{1-k}{1+k}\right)=\Sigma H(1+14k^2+k^4)^{m-3h}(4kk'^4)^{2h},$$
$$(1+k')^{2n}\Phi_n\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)=\Sigma H(16-16k^2+k^4)^{m-3h}(4k'k^4)^{2h},$$
$$(k+ik')^{2n}\Phi_n\left(\frac{k-ik'}{k+ik'}\right)=\Sigma H(1-16k^2k'^2)^{m-3h}(4ikk')^{2h},$$

qui permettent d'employer la relation

$$\begin{aligned}(k+ik')^{2n}\Phi_n\left(\frac{k-ik'}{k+ik'}\right)&+(1+k')^{2n}\Phi_n\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)\\ &+(1+k)^{2n}\Phi\left(\frac{1-k}{1+k}\right)=(4^n+2)\,\Phi_n(k).\end{aligned}$$

Soit, par exemple, $n=6$; on aura

$$\Phi_6(k)=A(1-k^2k'^2)^3+B(kk')^4,$$

et l'hypothèse particulière

$$k^2k'^2=1,$$

d'où l'on tire

$$k^6=-1,$$

puis

$$1+14k^2+k^4=15k^2,\quad 16-16k^2+k^4=-15k'^2,\quad 1-16k^2+16k^4=-15,$$

et enfin

$$(4kk'^4)^2+(4k^4k')^2+(4ikk')^2=-48k^4k'^4=-48,$$

conduira à l'égalité

$$15^3A+1382B=0.$$

Soit encore $n=4$; de la valeur $\Phi_4(k)=A(1-k^2k'^2)^2$ qui est immédiatement connue, nous tirerons celle de $\Pi_4(k)$ au moyen de la relation générale

$$2^{2n-1}(2n-1)\Pi_n(k)=2^{2n-1}\Phi_n(k)-(-1)^n(1+k)^{2n}\Phi_n\left(\frac{1-k}{1+k}\right),$$

et l'expression précédemment calculée se retrouve, en effet, sous la forme suivante :

$$127-284k^2+186k^4-284k^6+127k^8=2^7(1-k^2+k^4)^2-(1+14k^2+k^4)^2.$$

SUR UN THÉORÈME D'EISENSTEIN.

Proceedings of the London Mathematical Society, t. VII, p. 173-175.
Read april 13 th, 1876.

M. Heine en donnant la démonstration du théorème célèbre d'Eisenstein, sur les développements en série des racines des équations algébriques, $f(y, x) = 0$, dans le *Journal de Crelle* (t. 48, p. 267), y a ajouté cette remarque extrêmement importante, qu'on peut ramener les coefficients supposés commensurables d'un tel développement, à être tous entiers, sauf le premier, par le changement de x en kx (¹). C'est une simplification de la méthode employée par l'éminent géomètre, que je me propose d'indiquer en peu de mots. Considérons d'abord l'ensemble des divers développements ordonnés suivant les puissances entières et positives de la variable, qu'on peut tirer de l'équation proposée. J'observerai avec M. Heine, que si deux ou plusieurs d'entre eux, commençant par les mêmes termes, ont la partie commune

$$a + bx + cx^2 + \ldots + kx^p,$$

la transformée

$$\mathrm{F}(z, x) = 0,$$

obtenue en posant

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots + kx^p + zx^{p+1},$$

(¹) Note added by the permission of M. Hermite. — This remark had already been made by Eisenstein himself: His Words are, *Endlich kann statt x immer ein solches Vielfache von x gesetzt werden, dass alle Coefficienten der Reihe in ganze Zahlen uebergehen* (See Eisenstein's note in the *Monatsberichte* of the Berlin Academy for July, 1852, p. 441; or the extract from it an earlier paper of M. Heine's in *Crelles Journal*, vol. XLV, p. 285). H.-J.-S. Smith.

aura cette propriété que, pour $x = 0$, toutes les racines seront nécessairement inégales. Cela étant, et désignant l'une d'elles supposée commensurable par z_0, je raisonnerai sur l'équation

$$\mathrm{F} = (z + z_0, x) = 0,$$

qui sera par conséquent de la forme suivante :

$$\begin{aligned} m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + \ldots \\ + z\,(n + n_1 x + n_2 x^2 + \ldots) \\ + z^2 (p + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots) \\ + \ldots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + z^\mu (s + s_1 x + s_2 x^2 + \ldots) = 0, \end{aligned}$$

les coefficients étant des nombres entiers et n devant essentiellement être supposé différent de zéro. Soit maintenant $z = nu$ et $x = n^2 t$; il viendra, après avoir divisé par n^2,

$$\begin{aligned} m_1 t + n^2 m_2 t^2 + \ldots \\ + u(1 + n n_1 t + n^3 n_2 t^2 + \ldots) \\ + u^2 (p + n^2 p_1 t + n^4 p_2 t^2 + \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + u^\mu n^{\mu-2} (s + n^2 s_1 t + n^4 s_2 t^2 + \ldots) = 0, \end{aligned}$$

relation que j'écrirai ainsi

$$\begin{aligned} u = &- \frac{m_1 t + n^2 m_2 t^2 + \ldots}{1 + n n_1 t + \ldots} \\ &- u^2 \frac{p + n^2 p_1 t + \ldots}{1 + n n_1 t + \ldots} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &- u^\mu n^{\mu-2} \frac{s + n^2 s_1 t + \ldots}{1 + n n_1 t + \ldots}, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} u = \mathrm{M}_1 t + \mathrm{M}_2 t^2 + \ldots \\ + u^2 (\mathrm{P} + \mathrm{P}_1 t + \mathrm{P}_2 t^2 + \ldots) \\ + u^3 (\mathrm{Q} + \mathrm{Q}_1 t + \mathrm{Q}_2 t^2 + \ldots) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + u^\mu (\mathrm{S} + \mathrm{S}_1 t + \mathrm{S}_2 t^2 + \ldots), \end{aligned}$$

en observant que les séries infinies introduites dans le second membre ont toutes pour coefficients des nombres entiers. Faisant donc

$$u = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots,$$

on obtiendra les relations

$$\begin{aligned} a_1 &= M_1, \\ a_2 &= M_2 + P a_1^2, \\ a_3 &= M_3 + 2 P a_1 a_2 + P_1 a_1^2 + Q a_1^3, \end{aligned}$$

qui de proche en proche donnent les quantités $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en fonctions entières et à coefficients entiers de $M_1, M_2, \ldots, P, P_1, P_2, \ldots$. Nous démontrons immédiatement ainsi le résultat découvert par M. Heine, que la série infinie qui satisfait à l'équation algébrique entre t et u a tous ses coefficients entiers. Et si l'on revient aux variables x et z, on aura cette expression

$$z = \frac{a_1}{n} x + \frac{a_2}{n^3} x^2 + \frac{a_3}{n^5} x^3 + \ldots + \frac{a_i}{n^{2i-1}} x^i + \ldots,$$

que je vais considérer à l'égard de la puissance fractionnaire du binome $(1 - x)^{-\frac{m}{n}}$. Nous trouvons alors cette conséquence que

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}+1\right)\left(\frac{m}{n}+2\right)\ldots\left(\frac{m}{n}+i-1\right)}{1.2.3\ldots i} = \frac{m(m+n)(m+2n)\ldots[m+(i-1)n]}{1.2.3\ldots i.n^i} = \frac{a_i}{n^{2i-1}},$$

c'est-à-dire que l'expression

$$\frac{m(m+n)(m+2n)\ldots[m+(i-1)n]n^{i-1}}{1.2.3\ldots i}$$

est toujours un nombre entier

Le procédé, dont je viens de faire usage, s'applique également aux relations transcendantes. Considérons, par exemple, l'équation de Kepler

$$y = a + x \sin y;$$

on fera $y = a + u$, et on mettra la transformée

$$u = x \sin(a + u),$$

ou plutôt

$$\begin{aligned} u = {} & x \sin a \left(1 - \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{24} u^4 - \ldots\right) \\ & + x \cos a \left(u - \frac{1}{6} u^3 + \frac{1}{120} u^5 - \ldots\right), \end{aligned}$$

sous la forme suivante :

$$u(1 - x \cos a) = x \sin a - u^2 \frac{x \sin a}{2} - u^3 \frac{x \cos a}{6} - \ldots.$$

Nous sommes ainsi amené à introduire, au lieu de x, la quantité $\frac{x \sin a}{1 - x \cos a}$; en la désignant par ζ pour un moment, l'équation devient, en effet,

$$u = \zeta - u^2 \frac{\zeta}{2} - u^3 \frac{\zeta \cot a}{6}, \qquad \ldots,$$

et l'on tire très facilement

$$u = \zeta - \frac{1}{2} \zeta^3 - \frac{\cot a}{6} \zeta^4 - \ldots,$$

Dans les *Annales de l'Observatoire de Paris*, M. Serret avait déjà fait la remarque, que la valeur très simple $u = \zeta$, c'est-à-dire

$$y = a + \frac{x \sin a}{1 - x \cos a},$$

donnait une solution approchée du problème de Kepler, en négligeant seulement le cube de l'excentricité.

EXTRAIT

D'UNE

LETTRE DE M. CH. HERMITE A M. L. KÖNIGSBERGER.

SUR LE

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES DE LA VARIABLE.

Journal de Crelle, t. 81, 1876, p. 220-228.

Je me suis occupé de ces polynomes rationnels et entiers par rapport au module, qui se présentent dans les développements des fonctions $\sin \operatorname{am} x$, $\cos \operatorname{am} x$ et $\Delta \operatorname{am} x$ suivant les puissances croissantes de la variable, et dont les premiers seulement ont été calculés. Si l'on pose

$$\sin \operatorname{am} x = u - \frac{\mathfrak{P}_1 x^3}{1.2.3} + \frac{\mathfrak{P}_2 x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots + (-1)^m \frac{\mathfrak{P}_m x^{2m+1}}{1.2\ldots 2m+1} + \ldots,$$
$$\cos \operatorname{am} x = 1 - \frac{\mathfrak{Q}_1 x^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{Q}_2 x^4}{1.2.3.4} - \ldots + (-1)^m \frac{\mathfrak{Q}_m x^{2m}}{1.2\ldots 2m} + \ldots,$$
$$\Delta \operatorname{am} x = 1 - \frac{\mathfrak{R}_1 x^2}{1.2} + \frac{\mathfrak{R}_2 x^4}{1.2.3.4} - \ldots + (-1)^m \frac{\mathfrak{R}_m x^{2m}}{1.2\ldots 2m} + \ldots,$$

vous savez qu'on a ces expressions

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}_m &= 1 + P_1 \kappa^2 + P_2 \kappa^4 + \ldots + \kappa^{2m},\\
\mathfrak{Q}_m &= 1 + Q_1 \kappa^2 + Q_2 \kappa^4 + \ldots + Q_{m-1} \kappa^{2m-2},\\
\mathfrak{R}_m &= R_0 \kappa^2 + R_1 \kappa^4 + R_2 \kappa^6 + \ldots + \kappa^{2m}
\end{aligned}$$

avec les conditions

$$R_0 = Q_{m-1}, \quad R_1 = Q_{m-2}, \quad \ldots,$$

qui ramènent $\mathfrak{R}_m$ à $\mathfrak{Q}_m$. Mais ni la formule de Maclaurin ni les relations tirées de la transformation du second ordre, telles que celle-ci

$$(\kappa + i\kappa') \cos \operatorname{am}\left[(\kappa - i\kappa')x, \frac{\kappa + i\kappa'}{\kappa - i\kappa'}\right] + (\kappa - i\kappa') \cos \operatorname{am}\left[(\kappa + i\kappa')x, \frac{\kappa - i\kappa'}{\kappa + i\kappa'}\right] = 2\kappa \cos \operatorname{am}(x, \kappa),$$

que j'ai employée autrefois pour le calcul des quantités $\mathfrak{Q}_m$, ne paraissent pouvoir conduire à l'expression générale en fonction de m, des coefficients des diverses puissances de κ. C'est en suivant une autre voie que j'ai obtenu les résultats suivants, qui en montrent la composition arithmétique. Considérant en premier lieu le polynome $\mathfrak{P}_m$, on aura

$$\begin{aligned}
4^2 P_1 &= 3^{2m+1} - 8m - 3,\\
4^4 P_2 &= 5^{2m+1} - (8m - 4)3^{2m+1} + 32m^2 - 32m - 17,\\
4^6 P_3 &= 7^{2m+1} - (8m - 12)5^{2m+1} + (32m^2 - 88m + 30)3^{2m+1}\\
&\quad - \frac{1}{3}(256m^3 - 1056m^2 + 752m + 471),
\end{aligned}$$

....

A l'égard de $\mathfrak{Q}_m$ je trouve semblablement

$$\begin{aligned}
4^2 Q_1 &= 3^{2m} - 8m - 1,\\
4^4 Q_2 &= 5^{2m} - (8m - 8)3^{2m} + 32m^2 - 48m - 9,\\
4^6 Q_3 &= 7^{2m} - (8m - 16)5^{2m} + (32m^2 - 120m + 82)3^{2m}\\
&\quad - \frac{1}{3}(256m^3 - 288m^2 + 320m + 297),
\end{aligned}$$

....

Enfin pour $\mathfrak{R}_m$ on obtient (1)

$$\begin{aligned}
R_0 &= 2^{2m-2},\\
R_1 &= 2^{2m-6}[2^{2m} - 8m + 4],\\
R_2 &= 2^{2m-10}[3^{2m} - (8m - 12)2^{2m} + 32m^2 - 88m + 31],\\
R_3 &= 2^{2m-14}[4^{2m} - (8m - 20)3^{2m} + (32m^2 - 152m + 148)2^{2m}\\
&\quad - \frac{1}{3}(256m^3 - 1728m^2 + 3080m - 900)],
\end{aligned}$$

....

(1) Nous avons lieu de penser, d'après les calculs de M. Bourget, que les formules donnant Q_3 et R_3 ne sont pas exactes; c'est ce que montre la considération des cas particuliers $m = 2, 3$. E. P.

Supposons que m soit un grand nombre; alors nous aurons, lorsque le module est réel et moindre que l'unité, ces valeurs limites, à savoir

$$\frac{\mathfrak{P}_m}{1.2\ldots(2m+1)} = \frac{2}{\kappa K'^{2m+2}},$$
$$\frac{\mathfrak{Q}_m}{1.2\ldots 2m} = \frac{2}{\kappa K'^{2m+1}},$$
$$\frac{\mathfrak{R}_m}{1.2\ldots 2m} = \frac{2}{K'^{2m-1}}.$$

Il en résulte que les développements en série, de $\sin\operatorname{am}x$, $\cos\operatorname{am}x$, $\Delta\operatorname{am}x$, tendent de plus en plus à se confondre dans leurs derniers termes, avec ces simples progressions

$$\frac{(-1)^m 2x^{2m+1}}{\kappa K'^{2m+2}}\left(1-\frac{x^2}{K'^2}+\frac{x^4}{K'^4}-\ldots\right),$$
$$\frac{(-1)^m 2x^{2m}}{\kappa K'^{2m+1}}\left(1-\frac{x^2}{K'^2}+\frac{x^4}{K'^4}-\ldots\right),$$
$$\frac{(-1)^m 2x^{2m}}{K'^{2m+1}}\left(1-\frac{x^2}{K'^2}+\frac{x^4}{K'^4}-\ldots\right),$$

et par suite seront convergents, lorsque le module de la variable sera moindre que K'.

Voici, après les quantités $\mathfrak{P}_m$, $\mathfrak{Q}_m$, $\mathfrak{R}_m$, deux nouvelles séries de polynomes, $\mathfrak{S}_m$ et $\mathfrak{T}_m$, définies par les relations suivantes :

$$\frac{1}{\sin\operatorname{am}x} = \frac{1}{x} + \mathfrak{S}_1 x + \frac{\mathfrak{S}_2 x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{\mathfrak{S}_m x^{2m-1}}{1.2\ldots(2m-1)} + \ldots,$$
$$\frac{1}{\sin^2\operatorname{am}x} = \frac{1}{x^2} + \mathfrak{T}_1 + \frac{\mathfrak{T}_2 x^2}{1.2} + \ldots + \frac{\mathfrak{T}_m x^{2m-2}}{1.2\ldots(2m-2)} + \ldots,$$

et qui présentent quelque intérêt, comme j'espère vous le montrer. On a d'abord ces expressions

$$\mathfrak{S}_m = S_0 - S_1\kappa^2 + S_2\kappa^4 - \ldots + (-1)^m S_m \kappa^{2m},$$
$$\mathfrak{T}_m = T_0 - T_1\kappa^2 + T_2\kappa^4 - \ldots + (-1)^m T_m \kappa^{2m},$$

et les coefficients qui sont toujours commensurables mais non plus entiers comme précédemment, sont donnés par ces formules où B_m

désigne le $m^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli

$$S_0 = \frac{2^{2m-1}-1}{m}B_m,$$
$$4S_1 = (-1)^m + 2(2^{2m-1}-1)B_m,$$
$$4^3S_2 = (-1)^m(8m-9) + (8m-14)(2^{2m-1}-1)B_m,$$
$$4^5S_3 = (-1)^m(32m^2-128m+101+3^{2m-1})$$
$$+\frac{1}{3}(64m^2-336m+416)(2^{2m-1}-1)B_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$T_0 = \frac{2^{2m-1}B_m}{m},$$
$$T_1 = 2^{2m-2}B_m,$$
$$T_2 = (-1)^m 2^{2m-7} + (4m-7)2^{2m-6}B_m,$$
$$T_3 = (-1)^m(m-2)2^{2m-8} + \frac{1}{3}(4m^2-21m+26)2^{2m-7}B_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ces dernières équations relatives à $\mathfrak{T}_m$ devant être appliquées seulement à partir de $m=2$.

On a, ensuite, en supposant que m soit un grand nombre, les expressions limites

$$\frac{\mathfrak{S}_m}{1.2\ldots(2m-1)} = \frac{2}{(2K)^{2m}} - \frac{(-1)^m}{(2K')^{2m}},$$
$$\frac{\mathfrak{T}_m}{1.2\ldots(2m-2)} = \frac{4m-1}{(2K)^{2m}} + \frac{(-1)^m(4m-1)}{(2K')^{2m}}.$$

Elles montrent que les développements de $\frac{1}{\sin\operatorname{am}x}$, $\frac{1}{\sin^2\operatorname{am}x}$ sont convergents, tant que le module de la variable est au-dessous de la plus petite des deux quantités $2K$ et $2K'$, ce qui est encore la conclusion, que donne immédiatement le théorème de Cauchy. C'est à l'égard des polynomes $\mathfrak{S}_m$ et $\mathfrak{T}_m$ qu'on tire de la théorie de la transformation de nombreuses propriétés que je vais indiquer succinctement. Les premières et les plus simples résultent des équations

$$\sin\operatorname{am}\left(\kappa x, \frac{1}{\kappa}\right) = \kappa\sin\operatorname{am}(x,\kappa),$$

$$\frac{1}{\sin^2\operatorname{am}(ix,\kappa')} + \frac{1}{\sin^2\operatorname{am}(x,\kappa)} = 1,$$

qui donnent, en faisant

$$\mathfrak{S}_m = \Pi(\varkappa), \qquad \mathfrak{T}_m = \Phi(\varkappa),$$

les conditions

$$\varkappa^{2m}\,\Pi\left(\frac{1}{\varkappa}\right) = \Pi(\varkappa),$$

$$\varkappa^{2m}\,\Phi\left(\frac{1}{\varkappa}\right) = \Phi(\varkappa),$$

$$\Phi(\varkappa') = (-1)^m\,\Phi(\varkappa).$$

On en déduit aisément pour $\Phi(\varkappa)$ les conséquences suivantes : supposant en premier lieu que m soit pair et posant $m=2n$, nous aurons cette expression canonique

$$\begin{aligned}\Phi(\varkappa) = {} & G(1-\varkappa^2+\varkappa^4)^n + G_1(1-\varkappa^2+\varkappa^4)^{n-3}\varkappa^4\varkappa'^4 \\ & + G_2(1-\varkappa^2+\varkappa^4)^{n-6}\varkappa^8\varkappa'^8 + \ldots + G_p(1-\varkappa^2+\varkappa^4)^{n-3p}\varkappa^{4p}\varkappa'^{4p},\end{aligned}$$

où p est l'entier contenu dans $\frac{n}{3}$. Supposons ensuite $m=2n+1$; la forme analytique précédente n'est modifiée que par l'introduction du facteur

$$(1+\varkappa^2)(2-\varkappa^2)(1-2\varkappa^2) = \varphi(\varkappa),$$

et l'on obtient

$$\begin{aligned}\Phi(\varkappa) = \varphi(\varkappa)\,[\,& H(1-\varkappa^2+\varkappa^4)^{n-1} + H_1(1-\varkappa^2+\varkappa^4)^{n-4}\varkappa^4\varkappa'^4 + \ldots \\ & + H_q(1-\varkappa^2+\varkappa^4)^{n-1-3q}\varkappa^{4q}\varkappa'^{4q}],\end{aligned}$$

q étant l'entier contenu dans $\frac{n-1}{3}$. Si nous continuons de désigner par B_m le $m^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli, les valeurs des premiers coefficients G et H seront

$$\begin{aligned}G &= \frac{2^{4n-2}B_{2n}}{n}, \\ G_1 &= 2^{4n-7} - 15.2^{4n-6}B_{2n}, \\ G_2 &= -2^{8n-16} + (240n-745)2^{4n-15} - (180n-9495)^{4n-14}B_{2n}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H &= \frac{2^{4n}B_{2n+1}}{2n+1}, \\ H_1 &= -2^{4n-6} - \frac{(30-93)2^{4n-5}B_{2n-1}}{2n+1}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Voici maintenant les propriétés algébriques remarquables auxquelles conduit la transformation du second ordre, en partant des relations

$$\frac{1+\varkappa}{\sin\operatorname{am}\left(\frac{1+\varkappa}{2}ix,\ \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right)} = \frac{1}{\sin\operatorname{am}(ix,\varkappa')} + \frac{\varkappa}{\sin\operatorname{am}\left(i\varkappa x,\ \frac{i\varkappa'}{\varkappa}\right)},$$

$$\frac{1+\varkappa'}{\sin\operatorname{am}\left(\frac{1+\varkappa'}{2}x,\ \frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}\right)} = \frac{1}{\sin\operatorname{am}(x,\varkappa)} + \frac{i\varkappa}{\sin\operatorname{am}\left(i\varkappa x,\ \frac{i\varkappa'}{\varkappa}\right)},$$

$$\frac{\varkappa+i\varkappa'}{\sin\operatorname{am}\left(\frac{\varkappa+i\varkappa'}{2}x,\ \frac{\varkappa-i\varkappa'}{\varkappa+i\varkappa'}\right)} = \frac{1}{\sin\operatorname{am}(x,\varkappa)} + \frac{i}{\sin\operatorname{am}(ix,\varkappa')}$$

auxquelles je joindrai encore celle-ci

$$\frac{1}{\sin^2\operatorname{am}\frac{x}{2}} = \frac{(1+\cos\operatorname{am}x)(1+\Delta\operatorname{am}x)}{\sin^2\operatorname{am}x};$$

j'en déduis les diverses conséquences suivantes.

Soit d'abord, pour abréger l'écriture,

$$\Pi' = (-1)^m\,\Pi(\varkappa'), \qquad \Pi'' = (-1)^m\varkappa^{2m}\,\Pi\left(\frac{i\varkappa'}{\varkappa}\right),$$

puis

$$\Pi_0 = (-1)^m(1+\varkappa)^{2m}\,\Pi\left(\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right),$$

$$\Pi_1 = (1+\varkappa')^{2m}\,\Pi\left(\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}\right),$$

$$\Pi_2 = (\varkappa+i\varkappa')^{2m}\,\Pi\left(\frac{\varkappa-i\varkappa'}{\varkappa+i\varkappa'}\right);$$

on aura en premier lieu

$$\begin{aligned}\Pi_0 &= 2^{2m-1}(\Pi'+\Pi''), \\ \Pi_1 &= 2^{2m-1}(\Pi''+\Pi), \\ \Pi_2 &= 2^{2m-1}(\Pi+\Pi')\end{aligned}$$

et il est aisé de voir que l'une quelconque de ces équations suffit pour déterminer sauf un facteur constant les coefficients du polynome $\Pi(x)$.

Je remarquerai ensuite que $\Phi(x)$ se conclut immédiatement de $\Pi(\varkappa)$; on a, en effet,

$$\Phi(\varkappa) = \frac{(2m-1)2^{2m-2}}{2^{2m-2}-1}(\Pi+\Pi'+\Pi''),$$

et les trois quantités suivantes, à savoir

$$\Phi_0 = (-1)^m (1+\varkappa)^{2m}\, \Phi\left(\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right),$$

$$\Phi_1 = (1+\varkappa')^{2m}\, \Phi\left(\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}\right),$$

$$\Phi_2 = (\varkappa + i\varkappa')^{2m}\, \Phi\left(\frac{\varkappa - i\varkappa'}{\varkappa + i\varkappa'}\right),$$

s'expriment par ces formules

$$\Phi_0 = \frac{(2m-1)2^{2m-2}}{2^{2m-2}-1}(\Pi_0 + 2\Pi),$$

$$\Phi_1 = \frac{(2m-1)2^{2m-2}}{2^{2m-2}-1}(\Pi_1 + 2\Pi'),$$

$$\Phi_2 = \frac{(2m-1)2^{2m-2}}{2^{2m-2}-1}(\Pi_2 + 2\Pi'').$$

Enfin on peut, d'une manière inverse, déterminer d'abord le polynome $\Phi(\varkappa)$, en employant à cet effet la relation

$$(2^{2m}+2)\,\Phi(\varkappa) = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2,$$

qui est une conséquence des précédentes. On en déduira ensuite

$$\Pi(\varkappa) = \frac{1}{(2m-1)2^{2m-1}}(2^{2m-1}\Phi - \Phi_0),$$

puis

$$\Pi_0 = \frac{1}{2m-1}(\Phi_0 - 2\Phi),$$

$$\Pi_1 = \frac{1}{2m-1}(\Phi_1 - 2\Phi),$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2m-1}(\Phi_2 - 2\Phi).$$

Ces résultats manifestent entre $\Pi(\varkappa)$ et $\Phi(\varkappa)$ une dépendance réciproque, que ne pouvait guère faire prévoir leur origine; ils conduisent aussi à remarquer les deux combinaisons linéaires suivantes :

$$\Theta(\varkappa) = (2^{m-1}+1)\,\Phi(\varkappa) - (2m-1)2^{m-1}\,\Pi(\varkappa),$$
$$\Theta_1(\varkappa) = (2^{m-1}-1)\,\Phi(\varkappa) - (2m-1)2^{m-1}\,\Pi(\varkappa).$$

Nous aurons, en effet,

$$(1+\varkappa)^{2m}\,\Theta\left(\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right) = (-1)^m 2^m\, \Theta(\varkappa),$$

$$(1+\varkappa)^{2m}\,\Theta_1\left(\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right) = (-1)^{m+1} 2^m\, \Theta_1(\varkappa),$$

et de là résulte, comme vous allez voir, une forme canonique pour ces deux nouveaux polynomes.

Je cherche en premier lieu l'expression la plus générale des polynomes entiers $\varphi(x)$, de degré m en x^2, tels qu'on ait

$$x^{2m}\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x), \tag{1}$$

$$(1+x)^{2m}\varphi\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2^m\varphi(x), \tag{2}$$

et je ferai d'abord cette remarque que, si $\varphi(x)$ est supposé s'annuler avec la variable, il contient le facteur $x^2(1-x^2)^2$. Soit à cet effet, dans l'équation (2), $x=0$; on en conclut que $\varphi(x)$ s'annule pour $x=1$ et admet par suite le facteur $x^2(1-x^2)$, puisqu'il ne renferme que des puissances paires de la variable. Or, en posant

$$\varphi(x) = x^2(1-x^2)\,\psi(x),$$

l'équation (1) donne

$$x^{2m-6}\psi\left(\frac{1}{x}\right) = -\psi(x),$$

ce qui montre immédiatement que $\psi(x)$ s'évanouit pour $x=\pm 1$. J'ajoute qu'en faisant

$$\psi(x) = (1-x^2)\,\chi(x)$$

ou bien

$$\varphi(x) = x^2(1-x^2)^2\,\chi(x),$$

on obtiendra à l'égard de $\chi(x)$

$$x^{2m-8}\chi\left(\frac{1}{x}\right) = \chi(x),$$

$$(1+x)^{2m-8}\chi\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2^{m-4}\chi(x),$$

c'est-à-dire les équations caractéristiques du polynome proposé $\varphi(x)$, en y changeant m en $m-4$.

Une seconde remarque va maintenant en donner l'expression générale. Soit pour un moment

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - \mathrm{A}(1+x^2)^m,$$

A étant une constante arbitraire; on voit immédiatement qu'on aura

$$x^{2m}\varphi_1\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi_1(x),$$

$$(1+x)^{2m}\varphi_1\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2^m\varphi_1(x).$$

Or, en disposant de A de manière que $\varphi_1(x)$ s'annule avec x, on le ramène, comme nous l'avons vu, au produit d'un polynome de même nature, de degré $2m-8$, multiplié par le facteur $x^2(1-x^2)^2$. Opérant donc sur ce nouveau polynome comme sur le précédent, il est clair qu'on parviendra de proche en proche à l'expression cherchée

$$\begin{aligned}\varphi(x) = {} & A(1+x^2)^m + A_1(1+x^2)^{m-4}x^2(1-x^2)^2 \\ & + A_2(1+x^2)^{m-8}x^4(1-x^2)^4 + \ldots + A_r(1+x^2)^{m-4r}x^{4r}(1-x^2)^{4r},\end{aligned}$$

r désignant l'entier contenu dans $\frac{m}{4}$. Mais ce résultat ne nous suffit pas et nous avons encore à considérer les polynomes qui satisfont aux conditions,

$$x^{2m}\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x),$$

$$(1+x)^{2m}\varphi\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -2^m\varphi(x).$$

Or, en faisant

$$\frac{1-x}{1+x} = x,$$

c'est-à-dire

$$x^2+2x-1 = 0,$$

la seconde équation donne

$$\varphi(x) = 0,$$

de sorte que $\varphi(x)$ est divisible par x^2+2x-1, et, par conséquent, aussi par x^2-2x-1, attendu que $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Ayant

$$(x^2+2x-1)(x^2-2x-1) = x^4-6x^2+1,$$

faisons

$$\varphi(x) = (x^4-6x^2+1)\psi(x);$$

on trouvera aisément les conditions

$$x^{2m-4}\psi\left(\frac{1}{x}\right) = \psi(x),$$

$$(1+x)^{2m-4}\psi\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2^{m-2}\psi(x),$$

qui sont celles du premier cas. Nous obtenons ainsi les expressions canoniques des polynomes $\Theta(x)$, $\Theta_1(x)$, et, par conséquent, les valeurs de $\Pi(x)$ et $\Phi(x)$ sous une forme algébrique semblable. Mais c'est trop m'étendre sur ces polynomes qui m'ont surtout occupé au point de vue de l'usage qu'on peut en faire dans le développement en série des puissances et produits de puissances des fonctions $\sin \operatorname{am} x$, $\cos \operatorname{am} x$, $\Delta \operatorname{am} x$. Cette question déjà traitée par M. C.-O. Meyer (*Entwickelung der elliptischen Functionen*

$$\Delta^{\pm r}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\cos^{\pm s}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\sin^{\pm t}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\int_0^x \Delta^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,dx,$$

nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von x, ce journal, t. XXXVII) joue un grand rôle dans la méthode de calcul des perturbations que M. Hugo Gylden a publiée dans les Mémoires de Saint-Pétersbourg (*Studien auf dem Gebiete der Störungstheorie*, 7e série, t. XVI), et où j'ai vu avec le plus vif intérêt les fonctions elliptiques recevoir une application heureuse et habile à la Mécanique céleste....

Lamothe-de-Meursac (Charente-Inférieure), 2 octobre 1875.

EXTRAIT

D'UNE

LETTRE DE M. CH. HERMITE A M. PAUL MANSION.

SUR

UNE FORMULE DE M. DELAUNAY.

Nouvelle Correspondance mathématique, t. II, 1876, p. 54-55.

M. Delaunay, dans sa *Thèse sur la distinction des maxima et minima qui dépendent du calcul des variations* (*Journal de M. Liouville*, t. VI, p. 212) a donné, sans démonstration, la formule suivante :

$$\mathrm{P}\mathrm{D}_x^m \mathrm{Q} = \mathrm{D}_x^m \mathrm{PQ} - m_1 \mathrm{D}_x^{m-1} \mathrm{P}'\mathrm{Q} + m_2 \mathrm{D}_x^{m-2} \mathrm{P}''\mathrm{Q} + \ldots + (-1)^m \mathrm{P}^{(m)}\mathrm{Q},$$

où P et Q sont deux fonctions de x, m_1, m_2, ... étant les coefficients de x, x^2, ... dans la puissance $(1+x)^m$. On peut l'établir facilement, si l'on observe que tous les termes du second membre donnent, en développant les dérivations indiquées, des résultats compris dans cette formule

$$\mathrm{AP}^{(m)}\mathrm{Q} + \mathrm{BP}^{(m-1)}\mathrm{Q}' + \mathrm{CP}^{(m-2)}\mathrm{Q}'' + \ldots + \mathrm{LPQ}^{(m)},$$

les coefficients A, B, C, ..., L dépendant seulement de m. Leur somme peut donc être représentée par l'expression de même nature

$$a\mathrm{P}^{(m)}\mathrm{Q} + b\mathrm{P}^{(m-1)}\mathrm{Q}' + c\mathrm{P}^{(m-2)}\mathrm{Q}'' + \ldots + l\mathrm{PQ}^{(m)};$$

et il suffira, pour obtenir les coefficients numériques a, b, ..., l, de faire une hypothèse particulière convenable sur les fonctions P

et Q. Soit, à cet effet,

$$\mathrm{P} = e^{px}, \qquad \mathrm{Q} = e^{qx}.$$

On sera ainsi conduit à l'identité

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}^m e^{(p+q)x} - m_1 p \mathrm{D}^{m-1} e^{(p+q)x} + m_2 p^2 \mathrm{D}^{m-2} e^{(p+q)x} - \ldots + (-1)^m p^m e^{(p+q)x} \\ &\quad = e^{(p+q)x}(ap^m + bp^{m-1}q + \ldots + lq^m). \end{aligned}$$

Or, en effectuant les dérivations et supprimant dans les deux membres le facteur exponentiel, elle prend cette forme

$$\begin{aligned} &(p+q)^m - m_1 p(p+q)^{m-1} + m_2 p^2 (p+q)^{m-2} - \ldots + (-1)^m p^m \\ &\quad = ap^m + bp^{m-1} + \ldots + lq^m; \end{aligned}$$

et le premier membre se réduisant à $(p+q-p)^m$, c'est-à-dire simplement à q^m, on voit qu'en effet les coefficients a, b, ... disparaissent, sauf le dernier qui a pour valeur l'unité.

Paris, 25 novembre 1875.

SUR

L'AIRE D'UN SEGMENT DE COURBE CONVEXE.

Nouvelle Correspondance mathématique, t. II, 1876. Question 95.

THÉORÈME. — AMB *étant un arc de courbe plane, convexe, on projette* A *sur la tangente* BA' *en* B, *et l'on projette* B *sur la tangente* AB' *en* A. *Cela posé, si l'on néglige les quantités du* CINQUIÈME ORDRE, *le segment* AMB *est équivalent au* $\frac{1}{6}$ *de la somme des triangles rectangles* AA'B, BB'A.

SUR UN EXEMPLE

DE

RÉDUCTION D'INTÉGRALES ABÉLIENNES, AUX FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1re année, 1876, p. 1-16.

Dans une Note du Tome 8 du *Journal de Crelle*, p. 416, Jacobi, en généralisant un résultat obtenu par Legendre, a montré que les deux intégrales abéliennes de première espèce $\int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ et $\int \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}}$, où l'on suppose

$$R(z) = z(1-z)(1-abz)(1+az)(1+bz),$$

peuvent être ramenées, aux intégrales elliptiques, par la même substitution

$$\sqrt{z} = \frac{k'+l'}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+\sqrt{1-l^2\sin^2\varphi}},$$

dont on déduit les relations

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \frac{1}{2}(k'+l')[F(k,\varphi)+F(l,\varphi)],$$

$$\int_0^z \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}} = \frac{(k'+l')^2}{2(l'-k')}[F(k,\varphi)-F(l,\varphi)].$$

Les valeurs des modules k, l et de leurs compléments k', l' sont données par les formules suivantes, où je pose pour abréger $c = \sqrt{(1+a)(1+b)}$, à savoir :

$$k = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{c}, \qquad l = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{c},$$

$$k' = \frac{1-\sqrt{ab}}{c}, \qquad l' = \frac{1+\sqrt{ab}}{c}.$$

De ce résultat, extrêmement remarquable, ne semble avoir été tiré jusqu'ici d'autre conclusion que celle indiquée par Jacobi lui-même, et qui consiste à obtenir la partie réelle et le coefficient de i, dans l'intégrale $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(e+if)\sin^2\varphi}}$. Si l'on représente cette quantité par $\mathrm{A}+i\mathrm{B}$, l'illustre géomètre en conclut, en effet, les expressions

$$\mathrm{A} = g\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}}, \qquad \mathrm{B} = h\int_0^z \frac{z\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}},$$

en prenant pour les paramètres a et b, qui figurent dans $\mathrm{R}(z)$, les valeurs

$$a = \frac{\sqrt{(1-e)^2+f^2}+e-1}{\sqrt{e^2+f^2}-e}, \qquad b = \frac{\sqrt{(1-e)^2+f^2}+e-1}{\sqrt{e^2+f^2}+e},$$

et pour les facteurs g et h, celles-ci,

$$g = \left[\sqrt{(1-e)^2+f^2}-e+1\right]^{-\frac{1}{2}}, \qquad h = \frac{\left[\sqrt{(1-e)^2+f^2}+e-1\right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(1-e)^2+f^2}+e+1}.$$

Je me propose de faire voir qu'il a une portée beaucoup plus étendue, et qu'il ouvre une voie nouvelle, même après les belles découvertes de Clebsch, dans la recherche difficile des intégrales de différentielles algébriques, qui peuvent se réduire aux fonctions elliptiques. Il offre, en effet, le premier exemple, et le seul connu jusqu'ici, de la réduction d'un type d'intégrales qui contient essentiellement deux fonctions de première espèce, obtenue en introduisant deux intégrales elliptiques de modules différents. J'ai rencontré récemment dans une recherche, où je ne présumais point devoir le trouver, un second exemple qui a appelé mon

attention sur les formules de Jacobi, et que je vais indiquer succinctement.

Soit

$$\mathrm{R}(z) = (z^2-a)(8z^3-6az-b);$$

on aura en premier lieu

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{(2ax-b)(x^2-a)}}$$

en prenant

$$x = \frac{4z^3-3az}{a},$$

et, si l'on pose ensuite

$$y = \frac{2z^3-b}{3(z^2-a)},$$

on obtiendra la relation

$$\int \frac{z\,dz}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{dy}{\sqrt{y^3-3ay+b}}.$$

On est ainsi, par induction, conduit à croire qu'il existe pour les irrationnelles algébriques, dont le nombre caractéristique, ordinairement désigné par p, est supérieur à l'unité, des cas de réduction de leurs intégrales aux fonctions elliptiques, dans lesquels les p fonctions de première espèce seraient exprimées par autant d'intégrales elliptiques différentes, au moyen de p substitutions. Sans insister sur l'intérêt et la difficulté des recherches qui se présentent afin d'essayer de confirmer cette induction, je me propose, dans cette Note, d'achever, si je puis dire, la réduction aux fonctions elliptiques des intégrales abéliennes considérées par Jacobi, et d'arriver par là à une sorte de jonction entre la théorie des sinus d'amplitude et celles des fonctions de Göpel et de M. Rosenheim, où le rapprochement des formules et des relations qui les concernent pourra donner, ce me semble, des observations utiles.

I.

En posant pour abréger $x = \sin^2\varphi$, je reprends la substitution de Jacobi sous cette autre forme, donnée aussi par le grand géomètre,

$$x = \frac{c^2 z}{(1+az)(1+bz)},$$

et d'où l'on tire facilement

$$1 - x = \frac{(1-z)(1-abz)}{(1+az)(1+bz)},$$

$$1 - k^2 x = \frac{(1-\sqrt{ab}\,z)^2}{(1+az)(1+bz)},$$

et, par suite,

$$\text{(A)} \qquad \Delta(x, k) = \sqrt{R(z)}\,\frac{c(1-\sqrt{ab}\,z)}{(1+az)^2(1+bz)^2},$$

si l'on écrit pour abréger

$$\Delta(x, k) = \sqrt{x(1-x)(1-k^2 x)}.$$

Cette relation conduit comme conséquence, en y changeant le signe du radical $\sqrt{ab}$, à la suivante :

$$\text{(B)} \qquad \Delta(x, l) = \sqrt{R(z)}\,\frac{c(1+\sqrt{ab}\,z)}{(1+az)^2(1+bz)^2},$$

où le nouveau module l est déterminé par la condition

$$l = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{c}.$$

Or, ayant

$$\frac{dx}{dz} = \frac{c^2(1-abz^2)}{(1+az)^2(1+bz)^2},$$

on en tire sur-le-champ les deux égalités

$$\frac{dx}{\Delta(x, k)} = \frac{c(1+\sqrt{ab}\,z)\,dz}{\sqrt{R(z)}},$$

$$\frac{dx}{\Delta(x, l)} = \frac{c(1-\sqrt{ab}\,z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

Je me propose maintenant d'en poursuivre les conséquences, et, conformément à la nature des intégrales abéliennes de première classe, je chercherai à réduire aux fonctions elliptiques la somme des deux intégrales semblables

$$\int \frac{f(X)\,dX}{\sqrt{R(X)}} + \int \frac{f(Y)\,dY}{\sqrt{R(Y)}},$$

en prenant pour X et Y des fonctions algébriques de deux variables indépendantes x et y, et pour $f(X)$ et $f(Y)$ les mêmes fonctions rationnelles de X et Y. On y parvient en considérant l'équation

$$F^2(z) - R(z) = 0,$$

où $F(z)$ est un polynome de troisième degré en z, déterminé de telle manière qu'elle admette comme facteur, d'une part le polynome du second degré

$$\Phi(z) = x(1+az)(1+bz) - c^2 z,$$

avec la condition (A),

$$\sqrt{R(z)} = \Delta(x, k)\,\frac{(1+az)^2(1+bz)^2}{c(1-\sqrt{ab}\,z)};$$

et, en second lieu, le facteur semblable

$$\Phi_1(z) = y(1+az)(1+bz) - c^2 z,$$

et avec la condition (B),

$$\sqrt{R(z)} = \Delta(y, l)\,\frac{(1+az)^2(1+bz)^2}{c(1+\sqrt{ab}\,z)}.$$

Nous allons voir, en effet, que les quantités X et Y seront les racines de l'équation du second degré en z, représentée par le quotient entier

$$\frac{F^2(z) - R(z)}{\Phi(z)\,\Phi_1(z)} = 0.$$

II.

Je ferai usage, à cet effet, du théorème d'Abel, en supposant la fonction rationnelle $f(x)$ réduite simplement à $\frac{1}{x-g}$, où g est une constante indéterminée, et j'en déduirai la relation suivante. Soient $z = x_0$, $z = x_1$ les racines de l'équation

$$x(1+az)(1+bz) - c^2 z = 0;$$

puis $x = y_0$, $z = y_1$ celles de l'équation semblable

$$y(1+az)(1+bz) - c^2 z = 0;$$

on aura comme on sait

$$\frac{1}{\sqrt{R(g)}}\log\frac{F(g)+\sqrt{R(g)}}{F(g)-\sqrt{R(g)}} = \int\frac{dx_0}{(x_0-g)\sqrt{R(x_0)}}+\int\frac{dx_1}{(x_1-g)\sqrt{R(x_1)}}$$
$$+\int\frac{dy_0}{(y_0-g)\sqrt{R(y_0)}}+\int\frac{dy_1}{(y_1-g)\sqrt{R(y_1)}}$$
$$+\int\frac{dX}{(X-g)\sqrt{R(X)}}+\int\frac{dY}{(Y-g)\sqrt{R(Y)}}.$$

Maintenant on va voir que les deux sommes d'intégrales

$$\int\frac{dx_0}{(x_0-g)\sqrt{R(x_0)}}+\int\frac{dx_1}{(x_1-g)\sqrt{R(x_1)}}$$

et

$$\int\frac{dy_0}{(y_0-g)\sqrt{R(y_0)}}+\int\frac{dy_1}{(y_1-g)\sqrt{R(y_1)}}$$

se réduisent aux fonctions elliptiques.

Considérons, en effet, la première qui se rapporte aux racines de l'équation

$$\Phi(z) = x(1+az)(1+bz)-c^2z = 0$$

et où l'on se rappelle qu'il faut prendre pour chacune de ces racines

$$\sqrt{R(z)} = \Delta(x,k)\frac{(1+az)^2(1+bz)^2}{c(1-\sqrt{ab}\,z)}.$$

Je transformerai d'abord comme il suit cette relation. Après l'avoir mise sous la forme

$$\sqrt{R(z)}\,c(1-\sqrt{ab}\,z)^2 = \Delta(x,k)(1+az)^2(1+bz)^2(1-\sqrt{ab}\,z),$$

je multiplie membre à membre avec la suivante :

$$1-k^2x = \frac{(1-\sqrt{ab}\,z)^2}{(1+az)(1+bz)},$$

ce qui donne, en simplifiant,

$$\sqrt{R(z)}\,c(1-k^2x) = \Delta(x,k)(1+az)(1+bz)(1-\sqrt{ab}\,z).$$

On introduit ainsi, dans le second membre, la quantité

$$\frac{d\Phi}{dx} = (1+az)(1+bz),$$

ce qui permet d'écrire

$$\sqrt{R(z)}\,c(1-k^2x) = \Delta(x,k)(1-\sqrt{ab}\,z)\frac{d\Phi}{dx}.$$

Or, il vient en différentiant l'équation $\Phi(z)=0$:

$$\frac{d\Phi}{dz}dz = -\frac{d\Phi}{dx}dx,$$

et l'on conclut facilement, en divisant membre à membre,

$$\frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \frac{c(1-k^2x)\,dc}{(\sqrt{ab}\,z-1)\Phi'(z)\Delta(x,k)},$$

puis

$$\frac{dz}{(z-g)\sqrt{R(z)}} = \frac{c(1-k^2x)\,dx}{(\sqrt{ab}\,z-1)(z-g)\Phi'(z)\Delta(x,k)}.$$

Supposant maintenant $z=x_0$, puis $z=x_1$ et ajoutant membre à membre, on est conduit à calculer la fonction symétrique

$$\frac{1}{(\sqrt{ab}\,x_0-1)(x_0-g)\Phi'(x_0)}+\frac{1}{(\sqrt{ab}\,x_1-1)(x_1-g)\Phi'(x_1)}$$

des racines de l'équation $\Phi(z)=0$, qu'il est aisé d'obtenir. Écrivons, en effet,

$$\frac{1}{(\sqrt{ab}\,z-1)(z-g)} = \frac{1}{(\sqrt{ab}\,g-1)}\left(\frac{1}{z-g}-\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}\,z-1}\right),$$

et la valeur cherchée résultera de la formule élémentaire

$$\frac{1}{\Phi(x)} = \frac{1}{(x-x_0)\Phi'(x_0)}+\frac{1}{(x-x_1)\Phi'(x_1)},$$

en faisant successivement $x=g$ et $x=\frac{1}{\sqrt{ab}}$. Ce calcul, fort simple, conduit à joindre à la constante g une autre h, qui en dépend par la relation

$$h = \frac{c^2g}{(1+ag)(1+bg)},$$

de sorte qu'on a

$$\sqrt{R(g)} = \Delta(h,k)\frac{(1+ag)^2(1+bg)^2}{c(1-\sqrt{ab}\,g)}.$$

De cette manière on obtient

$$\frac{dx_0}{(x_0-g)\sqrt{R(x_0)}}+\frac{dx_1}{(x_1-g)\sqrt{R(x_1)}}=-\frac{a+b+\sqrt{ab}+abg}{c(1+ag)(1+bg)}\frac{dx}{\Delta(x,k)}$$
$$+\frac{\Delta(h,k)}{\sqrt{R(g)}(x-h)}\frac{dx}{\Delta(x,k)},$$

et, par conséquent,

$$\int\frac{dx_0}{(x_0-g)\sqrt{R(x_0)}}+\int\frac{dx_1}{(x_1-g)\sqrt{R(x_1)}}=-\frac{a+b+\sqrt{ab}+abg}{c(1+ag)(1+bg)}\int\frac{dx}{\Delta(x,k)}$$
$$+\frac{\Delta(h,k)}{\sqrt{R(g)}}\int\frac{dx}{(x-h)\Delta(x,k)}.$$

Enfin, si l'on met la variable y au lieu de x, et qu'on change le signe du radical $\sqrt{ab}$, on aura la réduction aux fonctions elliptiques de la seconde somme d'intégrales, à savoir

$$\int\frac{dy_0}{(y_0-g)\sqrt{R(y_0)}}+\int\frac{dy_1}{(y_1-g)\sqrt{R(y_1)}}=-\frac{a+b-\sqrt{ab}+abg}{c(1+ag)(1+bg)}\int\frac{dy}{\Delta(y,l)}$$
$$+\frac{\Delta(h,l)}{\sqrt{R(g)}}\int\frac{dy}{(y-h)\Delta(y,l)}.$$

Les quantités X et Y, qui ont été obtenues par l'emploi du théorème d'Abel, ont donc le rôle que nous avons annoncé, et le résultat auquel nous venons de parvenir s'accorde bien avec la nature logarithmique des intégrales abéliennes de troisième espèce, car, en multipliant par le facteur $\sqrt{R(g)}$, on obtient cette formule

$$\int\frac{\sqrt{R(g)}\,dX}{(X-g)\sqrt{R(X)}}+\int\frac{\sqrt{R(g)}\,dY}{(Y-g)\sqrt{R(Y)}}$$
$$=\log\frac{F(g)+\sqrt{R(g)}}{F(g)-\sqrt{R(g)}}+A\int\frac{dx}{\Delta(x,k)}+B\int\frac{dy}{\Delta(y,l)}$$
$$-\int\frac{\Delta(h,k)\,dx}{(x-h)\Delta(x,k)}-\int\frac{\Delta(h,l)\,dy}{(y-h)\Delta(y,l)},$$

où les constantes A et B ont pour valeurs

$$A=\frac{a+b+\sqrt{ab}+abg}{c(1+ag)(1+bg)}\sqrt{R(g)},$$
$$B=\frac{a+b-\sqrt{ab}+abg}{c(1+ag)(1+bg)}\sqrt{R(g)}.$$

Je ne chercherai pas ici à la rapprocher des expressions données par M. Weierstrass, et qui sont l'une des plus belles découvertes de l'illustre géomètre; je me bornerai à remarquer qu'il est facile d'en conclure la réduction aux fonctions elliptiques des intégrales plus générales

$$\int\frac{f(X)\,dX}{\sqrt{R(X)}}+\int\frac{f(Y)\,dY}{\sqrt{R(Y)}}.$$

Effectivement, toute fonction rationnelle $f(x)$ s'exprime linéairement, d'une part, au moyen des quantités $\frac{1}{x-g}$, de leurs dérivées par rapport à g et de l'autre par les puissances entières de la variable. Or, on obtiendra ces dernières intégrales qui appartiennent à la catégorie des fonctions de première et de seconde espèce, en égalant dans les deux membres les coefficients de leurs développements suivant les puissances décroissantes de h. C'est le calcul que je vais faire afin de parvenir aux valeurs des fonctions inverses de nos intégrales abéliennes, exprimées par des fonctions algébriques de sinus d'amplitude.

III.

Considérons d'abord le terme

$$\log\frac{F(g)+\sqrt{R(g)}}{F(g)-\sqrt{R(g)}},$$

que j'écrirai ainsi

$$\log\left[1+\frac{\sqrt{R(g)}}{F(g)}\right]-\log\left[1-\frac{\sqrt{R(g)}}{F(g)}\right].$$

Nous avons dit précédemment que $F(g)$ est du troisième degré en g, et, comme $R(g)$ est du cinquième, on voit qu'elle s'évanouit pour g infini. Passons ensuite aux intégrales

$$\int\frac{\Delta(h,k)\,dx}{(x-h)\Delta(x,k)},\quad\int\frac{\Delta(h,l)\,dy}{(y-l)\Delta(y,l)};$$

la formule $h=\frac{c^2 g}{(1+ag)(1+bg)}$, donnant $h=\frac{c^2}{ab}$ pour g infini, fait voir que ces quantités sont dans cette supposition l'une et l'autre finies. De la relation proposée, résulte donc, après avoir divisé les deux membres par $\sqrt{\mathrm{R}(g)}$, que les termes en $\frac{1}{g}$ et en $\frac{1}{g^2}$ sont les mêmes, dans les développements des quantités

$$\int \frac{d\mathrm{X}}{(\mathrm{X}-g)\sqrt{\mathrm{R}(\mathrm{X})}} + \int \frac{d\mathrm{Y}}{(\mathrm{Y}-g)\sqrt{\mathrm{R}(\mathrm{Y})}}$$

et

$$\frac{a+b+\sqrt{ab}}{c(1+ag)(1+bg)}\int \frac{dx}{\Delta(x,k)} + \frac{a+b-\sqrt{ab}}{c(1+ag)(1+bg)}\int \frac{dy}{\Delta(y,l)},$$

suivant les puissances descendantes de g. On obtient ainsi les relations auxquelles nous voulions parvenir, à savoir :

$$\int \frac{d\mathrm{X}}{\sqrt{\mathrm{R}(\mathrm{X})}} + \int \frac{d\mathrm{Y}}{\sqrt{\mathrm{R}(\mathrm{Y})}} = -\frac{1}{c}\int \frac{dx}{\Delta(x,k)} - \frac{1}{c}\int \frac{dy}{\Delta(y,l)},$$

$$\int \frac{\mathrm{X}\,d\mathrm{X}}{\sqrt{\mathrm{R}(\mathrm{X})}} + \int \frac{\mathrm{Y}\,d\mathrm{Y}}{\sqrt{\mathrm{R}(\mathrm{Y})}} = -\frac{1}{c\sqrt{ab}}\int \frac{dx}{\Delta(x,k)} + \frac{1}{c\sqrt{ab}}\int \frac{dy}{\Delta(y,l)}.$$

Qu'on définisse donc les fonctions inverses de nos intégrales abéliennes, en posant les équations

$$\int \frac{c(1+\sqrt{ab}\,\mathrm{X})\,d\mathrm{X}}{2\sqrt{\mathrm{R}(\mathrm{X})}} + \int \frac{c(1+\sqrt{ab}\,\mathrm{Y})\,d\mathrm{Y}}{2\sqrt{\mathrm{R}(\mathrm{Y})}} = u,$$

$$\int \frac{c(1-\sqrt{ab}\,\mathrm{X})\,d\mathrm{X}}{2\sqrt{\mathrm{R}(\mathrm{X})}} + \int \frac{c(1-\sqrt{ab}\,\mathrm{Y})\,d\mathrm{Y}}{2\sqrt{\mathrm{R}(\mathrm{Y})}} = v.$$

On voit qu'on aura

$$u = -\int \frac{dx}{\Delta(x,k)}, \qquad v = -\int \frac{dy}{\Delta(y,l)}.$$

Par conséquent, les quantités X et Y, fonctions algébriques de x et y, s'expriment en u et v par des fonctions algébriques de $\sin\operatorname{am}(u,k)$ et de $\sin\operatorname{am}(v,l)$.

Cette conclusion donne beaucoup d'intérêt au calcul des valeurs de X et Y, et je terminerai cette Note en indiquant succinctement la marche que j'ai suivie pour l'effectuer.

Revenons, à cet effet, à l'équation

$$\mathrm{F}^2(z) - \mathrm{R}(z) = 0,$$

et à la détermination de $\mathrm{F}(z)$ par les conditions posées au paragraphe I. Ce polynome étant du troisième degré, je lui donnerai la forme suivante, où P, Q, R, S sont quatre coefficients arbitraires

$$\mathrm{F}(z) = \frac{(1+az)(1+bz)}{c}[\mathrm{P}abz + \mathrm{P}(a+b) + \mathrm{Q}] + c(\mathrm{R}z + \mathrm{S}).$$

Cela posé, ces coefficients devront être déterminés de manière à avoir

$$\mathrm{F}(z) = \sqrt{\mathrm{R}(z)},$$

en prenant pour z, d'abord les racines de l'équation

$$x(1+az)(1+bz) - c^2 z = 0,$$

avec la condition

$$\sqrt{\mathrm{R}(z)} = \Delta(x,k)\frac{(1+az)^2(1+bz)^2}{c(1-\sqrt{ab}\,z)},$$

qu'on transforme facilement ainsi

$$\sqrt{\mathrm{R}(z)} = \Delta(x,k)\frac{cz(1-\sqrt{ab}\,z)}{x(1-k^2x)},$$

puis en second lieu, les racines de l'équation

$$y(1+az)(1+bz) - c^2 z = 0,$$

avec la condition correspondante

$$\sqrt{\mathrm{R}(z)} = \Delta(g,l)\frac{(1+az)^2(1+bz)^2}{c(1+\sqrt{ab}\,z)},$$

ou plutôt

$$\sqrt{\mathrm{R}(z)} = \Delta(y,l)\frac{cz(1+\sqrt{ab}\,z)}{y(1-l^2y)}.$$

Or, en remplaçant dans le premier membre $\frac{(1+az)(1+bz)}{c}$ par $\frac{cz}{x}$, et z^2 dans le second membre par

$$\frac{1}{ab}\left[-(a+b)z - 1 + \frac{c^2}{x}\right],$$

on obtient une équation en z du premier degré, qui doit être par conséquent identique, et donne les égalités

$$S x - P = \frac{\Delta(x, k)}{\sqrt{ab}(1 - k^2 x)},$$

$$R x + Q + c^2 S = \frac{(a + b + \sqrt{ab})\,\Delta(x, k)}{\sqrt{ab}\,(1 - k^2 x)}.$$

En opérant d'une manière semblable, avec les conditions concernant le second facteur, avec la variable y, on trouve

$$S y - P = -\frac{\Delta(y, l)}{\sqrt{ab}(1 - l^2 y)},$$

$$R y + Q + c^2 S = -\frac{(a + b - \sqrt{ab})\,\Delta(y, l)}{\sqrt{ab}\,(1 - l^2 y)}.$$

Ces équations entre les coefficients P, Q, R, S, sont simples et donnent aisément les valeurs suivantes, ou j'écris pour abréger :

$$\Delta(x, k) = \Delta, \qquad \alpha = a + b + \sqrt{ab},$$

$$\Delta(y, l) = \Delta_1, \qquad \beta = a + b - \sqrt{ab},$$

$$P = \frac{y(1 - l^2 y)\Delta + x(1 - k^2 x)\Delta_1}{\sqrt{ab}(1 - k^2 x)(1 - l^2 y)(y - x)},$$

$$Q = \frac{(\alpha y + c^2)(1 - l^2 y)\Delta + (\beta x + c^2)(1 - k^2 x)\Delta_1}{\sqrt{ab}(1 - k^2 x)(1 - l^2 y)(y - x)},$$

$$R = -\frac{\alpha(1 - l^2 y)\Delta + \beta(1 - k^2 x)\Delta_1}{\sqrt{ab}(1 - k^2 x)(1 - l^2 y)(y - x)},$$

$$S = -\frac{(1 - l^2 y)\Delta + (1 - k^2 x)\Delta_1}{\sqrt{ab}(1 - k^2 x)(1 - l^2 y)(y - x)};$$

le polynome $F(z)$ étant connu, j'emploierai l'identité

$$\begin{aligned} F^2(z) - R(z) = {} & C[x(1 + \alpha z)(1 + b z) - c^2 z] \\ & \times [y(1 + a z)(1 + b z) - c^2 z] \\ & \times [(z - X)(z - Y)], \end{aligned}$$

où l'on trouve que le facteur constant C a pour valeur

$$C = \frac{1}{xy}\left(\frac{P ab}{c}\right)^2,$$

et je ferai successivement z égal aux diverses racines du poly-

nome $R(z)$, de manière à obtenir les combinaisons des quantités X et Y que M. Weierstrass, en les considérant comme fonctions des variables u et v, représente par $\mathrm{al}(u, v)_\alpha$, avec un indice unique.

Ce calcul m'a donné pour résultat les formules suivantes :

$$\sqrt{ab}\,XY = \frac{y(1 - l^2 y)\Delta - x(1 - k^2 x)\Delta_1}{y(1 - l^2 y)\Delta + x(1 - k^2 x)\Delta_1},$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{ab(1 - X)(1 - Y)} \\ & \quad = \frac{(1 - \sqrt{ab})(1 - y)(1 - l^2 y)\Delta - (1 + \sqrt{ab})(1 - x)(1 - k^2 x)\Delta_1}{y(1 - l^2 y)\Delta + x(1 - k^2 x)\Delta_1} \\ & \quad\quad \times \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{(1 - x)(1 - y)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(1 - abX)(1 - abY)} \\ & \quad = \frac{(1 - \sqrt{ab})(1 - y)(1 - l^2 y)\Delta + (1 + \sqrt{ab})(1 - x)(1 - k^2 x)\Delta_1}{y(1 - l^2 y)\Delta + x(1 - k^2 x)\Delta_1} \\ & \quad\quad \times \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{(1 - x)(1 - y)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{b(1 - aX)(1 - aY)} \\ & \quad = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(1 - l^2 y)\Delta - (\sqrt{a} - \sqrt{b})(1 - k^2 x)\Delta_1}{y(1 - l^2 y)\Delta + x(1 - k^2 x)\Delta_1}\sqrt{xy}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{a(1 - bX)(1 - bY)} \\ & \quad = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(1 - l^2 y)\Delta + (\sqrt{a} - \sqrt{b})(1 - k^2 x)\Delta_1}{y(1 - l^2 y)\Delta + x(1 - k^2 x)\Delta_1}\sqrt{xy}. \end{aligned}$$

Elles ouvrent la voie à des recherches sur lesquelles je me propose de revenir dans une autre occasion.