EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. CH. HERMITE

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^\pi \left(\frac{\sin^2 x}{1 - 2a\cos x + a^2}\right)^m dx.$

Nouvelle Correspondance mathématique, t. I, 1874, p. 33-35.

Permettez-moi de vous adresser une seconde détermination de l'intégrale de Poisson

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin^2 x}{1 - 2a\cos x + a^2}\right)^m dx,$$

qui offre l'application la plus importante du théorème de M. Liouville, dont vous avez donné la démonstration.

Soit, pour abréger,

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - 2a\cos x + a^2}.$$

Je désigne par ε une constante telle que la série

$$\varepsilon f(x) + \varepsilon^2 f^2(x) + \ldots + \varepsilon^m f^m(x) + \ldots$$

soit convergente : elle aura pour somme

$$\frac{\varepsilon f(x)}{1 - \varepsilon f(x)};$$

ce qui conduit à chercher la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\pi \frac{\varepsilon f(x)\,dx}{1 - \varepsilon f(x)},$$

dont il suffira ensuite d'effectuer le développement en série, suivant les puissances croissantes de ε. Or, en faisant pour un mo-

ment $\cos x = z$, la décomposition en fractions simples de la fraction rationnelle

$$\frac{\varepsilon f(x)}{1 - \varepsilon f(x)} = \frac{\varepsilon(1 - z^2)}{1 - 2az + a^2 - \varepsilon(1 - z^2)}$$

donne immédiatement le résultat ; car, en écrivant

$$\frac{\varepsilon(1 - z^2)}{1 - 2az + a^2 - \varepsilon(1 - z^2)} = -1 + \frac{G}{g - z} + \frac{H}{h - z},$$

vous voyez que nous sommes ramenés à l'intégrale connue

$$\int_0^\pi \frac{dx}{g - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{g^2 - 1}}.$$

Cela posé, on obtient, en résolvant l'équation du second degré

$$1 - 2az + a^2 - \varepsilon(1 - z^2) = 0,$$

$$g = \frac{a + \sqrt{(1 - \varepsilon)(a^2 - \varepsilon)}}{\varepsilon}, \qquad h = \frac{a - \sqrt{(1 - \varepsilon)(a^2 - \varepsilon)}}{\varepsilon}.$$

On a ensuite

$$G = \varepsilon\frac{g^2 - 1}{g - h}, \qquad H = \varepsilon\frac{h^2 - 1}{h - g},$$

$$\sqrt{g^2 - 1} = \pm\frac{a\sqrt{1 - \varepsilon} - \sqrt{a^2 - \varepsilon}}{\varepsilon},$$

$$\sqrt{h^2 - 1} = \pm\frac{a\sqrt{1 - \varepsilon} + \sqrt{a^2 - \varepsilon}}{\varepsilon},$$

comme il est facile de le vérifier en élevant les deux membres au carré. Mais il est nécessaire, avant d'employer ces formules, de choisir les signes $\pm$ de manière que les radicaux aient bien les déterminations qui leur conviennent dans les relations

$$\int_0^\pi \frac{dx}{g - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{g^2 - 1}}, \qquad \int_0^\pi \frac{dx}{h - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{h^2 - 1}}.$$

Revenant, à cet effet, à la condition de convergence de la série $\Sigma\varepsilon^m f^m(x)$, j'observe que le maximum de $f(x)$ est l'unité pour $a < 1$, et $\frac{1}{a^2}$ pour $a > 1$; on doit donc supposer $\varepsilon < 1$ dans le premier cas et $\varepsilon < a^2$ dans le second, de manière à avoir $\varepsilon f(x) < 1$, pour toutes les valeurs de la variable. De l'inégalité $1 - \varepsilon f(x) > 0$, résulte que l'équation

$$1 - \varepsilon f(x) = 0$$

n'admet aucune racine réelle par rapport à x; cependant on peut toujours supposer g et h réels, en prenant dans les deux cas, ce qui est permis, ε moindre que la plus petite des quantités 1 et a^2. Effectivement le radical $\sqrt{(1-\varepsilon)(a^2-\varepsilon)}$ sera réel, et, si l'on admet que a soit positif ainsi que ε, l'équation

$$1-2az+a^2-\varepsilon(1-z^2)=0$$

fait voir que les racines seront, l'une et l'autre, positives. De là résulte que, dans les relations précédentes,

$$\int_0^\pi \frac{dx}{g-\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{g^2-1}}, \qquad \int_0^\pi \frac{dx}{h-\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{h^2-1}},$$

les radicaux ont le signe $+$; par suite, on doit prendre

$$\sqrt{g^2-1}=\frac{a\sqrt{1-\varepsilon}-\sqrt{a^2-\varepsilon}}{\varepsilon},$$

si l'on suppose $a<1$; et

$$\sqrt{g^2-1}=\frac{\sqrt{a^2-\varepsilon}-a\sqrt{1-\varepsilon}}{\varepsilon},$$

dans le cas de $a>1$. Ayant toujours d'ailleurs

$$\sqrt{h^2-1}=\frac{a\sqrt{1-\varepsilon}+\sqrt{a^2-\varepsilon}}{\varepsilon},$$

on obtient, dans le premier cas,

$$\int_0^\pi \frac{\varepsilon \sin^2 x\, dx}{1-2a\cos x+a^2-\varepsilon\sin^2 x}=\pi\left[-1+(1-\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}\right],$$

et, dans le second,

$$\int_0^\pi \frac{\varepsilon \sin^2 x\, dx}{1-2a\cos x+a^2-\varepsilon\sin^2 x}=\pi\left[-1+\left(1-\frac{\varepsilon}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Vous voyez que ces formules donnent bien le résultat de Poisson, en faisant usage du développement

$$(1-\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\quad+\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots2m}\varepsilon^m+\ldots.$$

EXTRAIT

D'UNE

LETTRE DE M. CH. HERMITE A M. BORCHARDT,

SUR LA

TRANSFORMATION DES FORMES QUADRATIQUES TERNAIRES EN ELLES-MÊMES.

Journal de Crelle, t. 78, 1874, p. 325-328.

Permettez-moi de répondre à une objection très fondée qui a été faite par M. *P. Bachmann*, à mes formules pour la transformation des formes quadratiques ternaires en elles-mêmes, dans son travail intitulé : *Untersuchungen über quadratische Formen*, tome LXXVI de votre journal, page 331. L'analyse indirecte dont j'ai fait usage ne prouve pas en effet qu'elles comprennent, sans aucune exception, toutes les substitutions qui reproduisent une forme donnée; or un point aussi essentiel demande à être complètement éclairci, et c'est ce que je vais essayer de faire. Désignant la forme proposée par $f(x,y,z)$, et posant la condition

$$f(x,y,z)=f(X,Y,Z),$$

je l'écris de la manière suivante :

$$x\frac{df}{dx}+y\frac{df}{dy}+z\frac{df}{dz}=X\frac{df}{dX}+Y\frac{df}{dY}+Z\frac{df}{dZ},$$

ou pour abréger

$$\Sigma x\frac{df}{dx}=\Sigma X\frac{df}{dX}.$$

Cela posé, je joins à cette condition la relation identique

$$\Sigma x \frac{df}{dX} = \Sigma X \frac{df}{dx},$$

et j'ajoute les deux égalités membre à membre, ce qui donnera

$$\Sigma x\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dX}\right) = \Sigma X\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dX}\right),$$

ou bien

$$\Sigma(x-X)\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dX}\right) = 0.$$

Soit maintenant

$$\begin{aligned} U &= x - X, & U' &= \frac{df}{dx}+\frac{df}{dX},\\ V &= y - Y, & V' &= \frac{df}{dy}+\frac{df}{dY},\\ W &= z - Z, & W' &= \frac{df}{dz}+\frac{df}{dZ}. \end{aligned}$$

Vous voyez que des expressions de x, y, z en X, Y, Z résulteront pour ces diverses quantités des fonctions linéaires de ces trois indéterminées, telles qu'on ait identiquement

$$UU' + VV' + WW' = 0.$$

Cherchons ces fonctions, et pour cela considérons un premier cas dans lequel nous supposerons qu'il soit possible d'obtenir inversement X, Y, Z en U, V, W. Il est clair que U′, V′, W′ seront alors des quantités linéaires en U, V, W, et un calcul facile donne sur-le-champ, pour la solution de l'équation proposée, les formules

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} U' &= \nu V - \mu W,\\ V' &= \lambda W - \nu U,\\ W' &= \mu U - \lambda V, \end{aligned}\right.$$

où λ, μ, ν sont des constantes. Or on en tire les relations suivantes :

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} \mu z - \nu y + \frac{df}{dx} &= \mu Z - \nu Y - \frac{df}{dX},\\ \nu x - \lambda z + \frac{df}{dy} &= \nu X - \lambda Z - \frac{df}{dY},\\ \lambda y - \mu x + \frac{df}{dz} &= \lambda Y - \mu X - \frac{df}{dZ}, \end{aligned}\right.$$

d'une forme bien différente de celles que j'avais d'abord obtenues, à savoir

$$(\mathrm{II})\qquad \left\{\begin{aligned} x - \nu\frac{df}{dy} + \mu\frac{df}{dz} &= X + \nu\frac{df}{dY} - \mu\frac{df}{dZ},\\ y - \lambda\frac{df}{dz} + \nu\frac{df}{dx} &= Y + \lambda\frac{df}{dZ} - \nu\frac{df}{dX},\\ z - \mu\frac{df}{dx} + \lambda\frac{df}{dy} &= Z + \mu\frac{df}{dX} - \lambda\frac{df}{dY}, \end{aligned}\right.$$

et qui résulteraient des équations

$$\begin{aligned} U &= \nu V' - \mu W',\\ V &= \lambda W' - \nu U',\\ W &= \mu U' - \lambda V'. \end{aligned}$$

Mais un de mes élèves, M. *Tannery*, agrégé de l'Université, a fait la remarque ingénieuse qu'en remplaçant λ, μ, ν par $\frac{1}{D}\frac{dg}{d\lambda}$, $\frac{1}{D}\frac{dg}{d\mu}$, $\frac{1}{D}\frac{dg}{d\nu}$, où $g(\lambda, \mu, \nu)$ désigne la forme adjointe de $f(\lambda, \mu, \nu)$, D son déterminant, et changeant X, Y, Z en $-X$, $-Y$, $-Z$, les équations (I) donnent les relations (II).

Supposons, en second lieu, qu'il ne soit pas possible d'exprimer X, Y, Z en U, V, W ; en désignant alors par θ, θ', θ'' trois indéterminées, je proposerai d'une part

$$U = \theta, \qquad V = \theta', \qquad W = a\theta - b\theta'$$

et de l'autre

$$\begin{aligned} U' &= A\theta + A'\theta' + A''\theta'',\\ V' &= B\theta + B'\theta' + B''\theta'',\\ W' &= C\theta + C'\theta' + C''\theta''. \end{aligned}$$

Cela étant, la condition proposée $UU' + VV' + WW' = 0$ donne les relations

$$\begin{aligned} A + aC &= 0, & B' - bB' &= 0,\\ A'' + aC'' &= 0, & B'' - bC'' &= 0 \end{aligned}$$

et

$$A' + B + aC' - bC = 0.$$

En remplaçant cette dernière par les deux suivantes où c est une indéterminée

$$A' + aC' = c, \qquad B - bC = -c,$$

on conclura

$$\begin{aligned} A &= -aC, & B &= bC - c, \\ A' &= -aC' + c, & B' &= bC', \\ A'' &= -aC'', & B'' &= bC'', \end{aligned}$$

et il en résulte que

$$\begin{aligned} U' &= -a(C\theta + C'\theta' + C''\theta'') + c\theta' = cV - aW', \\ V' &= b(C\theta + C'\theta' + C''\theta'') - c\theta = bW' - cU. \end{aligned}$$

Ayant ailleurs $W = aU - bV$, il est clair que la nouvelle solution obtenue se déduit des équations (1) en permutant W et W'. Or les relations auxquelles elle conduit entre x, y, z et X, Y, Z, à savoir

$$\begin{gathered} cx + \frac{df}{dy} - b\frac{df}{dz} = cX - \frac{df}{dY} + b\frac{df}{dZ}, \\ cy - a\frac{df}{dz} - \frac{df}{dx} = cY + a\frac{df}{dZ} + \frac{df}{dX}, \\ ax - by - z = aX - bY - Z, \end{gathered}$$

se ramènent au type (II) si l'on fait

$$a = -\frac{\lambda}{\nu}, \qquad b = \frac{\mu}{\nu}, \qquad c = -\frac{1}{\nu},$$

car l'équation

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \lambda X + \mu Y + \nu Z$$

s'en déduit comme conséquence.

Il ne reste plus qu'à examiner un dernier cas dans lequel U, V, W dépendraient d'une seule indéterminée au lieu de deux, de sorte qu'on aurait $U = \alpha W$, $V = \beta W$, et par conséquent $\alpha U' + \beta V' + W' = 0$. Nous aurons alors les relations

$$\begin{gathered} x - \alpha z = X - \alpha Z, \\ y - \beta z = Y - \beta Z, \\ \alpha\frac{df}{dx} + \beta\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz} = -\alpha\frac{df}{dX} - \beta\frac{df}{dY} - \frac{df}{dZ}, \end{gathered}$$

qui en remplaçant α et β par $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$ donnent les formules

$$\begin{aligned} x &= X - \frac{\alpha}{f(\alpha, \beta, \gamma)}\left(\alpha\frac{df}{dX} + \beta\frac{df}{dY} + \gamma\frac{df}{dZ}\right), \\ y &= Y - \frac{\beta}{f(\alpha, \beta, \gamma)}\left(\alpha\frac{df}{dX} + \beta\frac{df}{dY} + \gamma\frac{df}{dZ}\right) \\ z &= Z - \frac{\gamma}{f(\alpha, \beta, \gamma)}\left(\alpha\frac{df}{dX} + \beta\frac{df}{dY} + \gamma\frac{df}{dZ}\right) \end{aligned}$$

Je m'y arrête un moment pour observer qu'en désignant la substitution ainsi obtenue par S, on aura $S^{-1} = S$, d'où $S^2 = 1$. Cette circonstance m'avait fait penser un instant qu'elles constitueraient une exception au type général, mais j'ai ensuite remarqué que les relations (I) donnant la suivante :

$$\lambda\frac{df}{dx} + \mu\frac{df}{dy} + \nu\frac{df}{dz} = -\lambda\frac{df}{dX} - \mu\frac{df}{dY} - \nu\frac{df}{dZ},$$

il suffisait pour les obtenir de poser $\lambda = \alpha\nu$, $\mu = \beta\nu$, puis de faire ν infini. Je pense, mon cher ami, avoir ainsi rempli la lacune que présentaient mes anciennes recherches.

EXTRAIT

D'UNE

LETTRE DE M. CH. HERMITE A M. BORCHARDT,

SUR LA

RÉDUCTION DES FORMES QUADRATIQUES TERNAIRES.

Journal de Crelle, t. 79, 1874, p. 17-20.

Deux géomètres russes extrêmement distingués, M. *Korkine* et M. *Zolotareff*, ont récemment publié dans les *Annales de Mathématiques*, de M. *Neumann*, des recherches approfondies ayant pour objet, entre autres choses, le théorème de *Seeber*, sur la limitation du produit des coefficients des carrés des variables dans les formes quadratiques ternaires réduites. L'importance du sujet rend peut-être utile de multiplier les points de vue sous lesquels on peut le traiter, et, après la méthode de ces deux auteurs, je proposerai la suivante.

Soit

$$D = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2;$$

il s'agit d'établir dans deux cas distincts que la condition $aa'a'' < 2D$ est vérifiée, le premier supposant les conditions

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \qquad\qquad b > 0, \quad b' > 0, \quad b'' > 0, \\ a < a' < a''; \quad 2b'' < a, \quad 2b' < a, \quad 2b < a', \end{cases}$$

et le second cet autre système

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \qquad\qquad b < 0, \quad b' < 0, \quad b'' < 0, \\ a < a' < a'', \quad -2b'' < a, \quad -2b' < a, \quad -2b < a', \\ \qquad\qquad a + a' + 2(b + b' + b'') > 0. \end{cases}$$

Considérant à cet effet a, a' et a'' comme constants dans l'expression

$$2D - aa'a'' = aa'a'' + 4bb'b'' - 2ab^2 - 2a'b'^2 - 2a''b''^2,$$

j'observe qu'il suffira de prouver qu'elle est positive quand on attribue à b'' par exemple sa plus petite et sa plus grande valeur. Effectivement dans les deux cas que nous avons à traiter, b'' parcourt des valeurs toujours du même signe, positives dans le premier, négatives dans le second, à partir de $b'' = 0$. Or l'expression est un trinome du second degré en b'' dont le terme du second degré est affecté d'un coefficient négatif, et, si le terme constant qui est donné pour $b'' = 0$ est positif, ses racines seront réelles et de signes contraires. On voit par là qu'à l'égard d'une série de valeurs du même signe, il suffit bien de vérifier que l'expression est positive aux limites, pour être assuré qu'elle l'est aussi pour les valeurs intermédiaires. Cela posé, faisons en premier lieu $b'' = 0$ et $b'' = \frac{a}{2}$ dans l'expression de $2D - aa'a''$. Je remarque que les quantités auxquelles on sera conduit, et qu'il faut démontrer être positives, seront à l'égard de b' des trinomes du second degré dont le terme du second degré sera encore négatif, et que cette variable sera de même assujettie à parcourir une série de valeurs de même signe, de sorte que le raisonnement précédent leur sera applicable. Sans le répéter davantage, on voit clairement que notre objet est maintenant de donner les limites de ces intervalles que parcourent b, b', b'', sous les conditions (I) et (II), et de calculer les valeurs correspondantes de $2D - aa'a''$. Or elles sont pour le premier cas :

$$b'' = 0 \begin{cases} b' = 0 \begin{cases} b = 0, & aa'a'', \\ b = \frac{a'}{2}, & aa'a'' - \frac{aa'^2}{2}, \end{cases} \\ b' = \frac{a}{2} \begin{cases} b = 0, & aa'a'' - \frac{a^2a'}{2}, \\ b = \frac{a'}{2}, & aa'a'' - \frac{aa'^2}{2} - \frac{a^2a'}{2}, \end{cases} \end{cases}$$

$$b'' = \frac{a}{2} \begin{cases} b' = 0 \begin{cases} b = 0, & aa'a'' - \frac{a^2a''}{2}, \\ b = \frac{a'}{2}, & aa'a'' - \frac{a^2a''}{2} - \frac{aa'^2}{2}, \end{cases} \\ b' = \frac{a}{2} \begin{cases} b = 0, & aa'a'' - \frac{a^2a'}{2} - \frac{a^2a''}{2}, \\ b = \frac{a'}{2}, & aa'a'' - \frac{aa'^2}{2} - \frac{a^2a''}{2}. \end{cases} \end{cases}$$

Dans l'autre cas on aura ce second Tableau :

$$
\begin{array}{ll}
b''=0 & \left\{\begin{array}{ll}
b'=0 & \left\{\begin{array}{ll} b=0, & aa'a'', \\[4pt] b=-\dfrac{a'}{2}, & aa'a''-\dfrac{aa'^2}{2}, \end{array}\right. \\[14pt]
b'=-\dfrac{a}{2} & \left\{\begin{array}{ll} b=0, & aa'a''-\dfrac{a^2a'}{2}, \\[4pt] b=-\dfrac{a'}{2}, & aa'a''-\dfrac{aa'^2}{2}-\dfrac{a^2a'}{2}, \end{array}\right.
\end{array}\right. \\[30pt]
b''=-\dfrac{a}{2} & \left\{\begin{array}{ll}
b'=0 & \left\{\begin{array}{ll} b=0, & aa'a''-\dfrac{a^2a''}{2}, \\[4pt] b=-\dfrac{a'}{2}, & aa'a''-\dfrac{a^2a''}{2}-\dfrac{aa'^2}{2}, \end{array}\right. \\[14pt]
b'=-\dfrac{a}{2} & \left\{\begin{array}{ll} b=0, & aa'a''-\dfrac{a^2a'}{2}-\dfrac{a^2a''}{2}, \\[4pt] b=-\dfrac{a'-a}{2}, & aa'a''-\dfrac{aa'^2}{2}-\dfrac{a^2a''}{2}, \end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}
$$

et à première vue on reconnaît que ces quantités sont positives sous les conditions

$$a < a' < a''.$$

Mais cette démonstration toute élémentaire est loin de l'élégance et de la profondeur de celle que *Gauss* tire dans le premier cas, par exemple, de cette identité

$$
\begin{aligned}
2\mathrm{D} = {} & aa'a'' + ab(a'-2b) + a'b'(a''-2b') + a''b''(a-2b'') \\
& + b(a-2b')(a'-2b'') + b'(a'-2b'')(a''-2b) \\
& + b''(a''-2b)(a-2b') + (a-2b')(a'-2b'')(a''-2b).
\end{aligned}
$$

En réfléchissant à cette étonnante transformation j'ai fait la remarque qu'elle peut être généralisée de cette manière :

$$
\begin{aligned}
2\alpha\alpha'\alpha''\mathrm{D} = {} & (2\alpha\alpha'\alpha''-1)aa'a'' + \alpha ab(a'-2\alpha'\alpha''b) + \alpha'a'b'(a''-2\alpha\alpha''b') \\
& + \alpha''a''b''(a-2\alpha\alpha'b'') + \alpha b(a-2\alpha'b')(a'-2\alpha''b'') \\
& + \alpha'b'(a'-2\alpha''b'')(a''-2\alpha b) + \alpha''b''(a''-2\alpha b)(a-2\alpha'b') \\
& + (a-2\alpha'b')(a'-2\alpha''b'')(\alpha''-2\alpha b).
\end{aligned}
$$

On vérifie aisément en effet que le second membre s'évanouit si l'on fait $\alpha = 0$; par un changement de lettres on conclut qu'il s'annule aussi pour $\alpha' = 0$ et $\alpha'' = 0$; la formule est donc démontrée

en général; puisqu'elle coïncide avec celle de *Gauss*, en supposant $\alpha = 1$, $\alpha' = 1$, $\alpha'' = 1$.

Enfin je remarque qu'en permutant x et y par exemple dans la forme proposée, ce qui revient à échanger a et a' d'une part, b et b' de l'autre, l'invariant conserve la même valeur. Il en résulte que cette seconde relation donnée par *Gauss*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D} = {} & aa'a'' + ab(a''-2b) + a'b'(a-2b') + a''b''(a'-2b'') \\
& + b(a-2b'')(a''-2b') + b'(a'-2b)(a-2b'') \\
& + b''(a''-2b')(a'-2b) + (a-2b'')(a'-2b)(a''-2b')
\end{aligned}
$$

est simplement une conséquence de la première et qu'elle se généralise de la même manière.

Saint-Sauveur (Hautes-Pyrénées), 25 juin 1874.

EXTRAIT

D'UNE

LETTRE DE M. CH. HERMITE DE PARIS A M. L. FUCHS DE GÖTTINGUE,

SUR

QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

Journal de Crelle, t. 79, 1875, p. 324-338.

... J'ai pris en effet pour point de départ l'intégrale suivante

$$y = \int (z - z_0)^{\mu_0 - 1} (z - z_1)^{\mu_1 - 1} \dots (z - z_n)^{\mu_n - 1} (x - z)^{n-p}\, dz,$$

qui comprend les transcendantes hyperelliptiques, et dont je tire facilement une équation linéaire d'ordre $n+1$ analogue à celle qui définit la série de *Gauss*.

Soit en effet

$$f(z) = (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_n),$$

puis

$$f_1(z) = \frac{\mu_0 f(z)}{z - z_0} + \frac{\mu_1 f(z)}{z - z_1} + \dots + \frac{\mu_n f(z)}{z - z_n};$$

on trouve aisément la relation

$$\begin{aligned} f(x)\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} &+ \frac{p}{1} f'(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{p(p-1)}{1.2} f''(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots \\ &- f_1(x)\frac{d^n y}{dx^n} - \frac{(p-1)}{1} f_1'(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} f_1''(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} - \dots \\ &= \pm (p-1)(p-2)\dots(p-n)(z-z_0)^{\mu_0}(z-z_1)^{\mu_1}\dots(z-z_n)^{\mu_n}(x-z)^{-p}. \end{aligned}$$

Or, en supposant les exposants $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$ positifs, le second membre s'évanouit pour $z = z_0, z_1, \dots, z_n$, et, si l'on convient de désigner par Z l'une quelconque des n quantités $z_1, z_2, \dots, z_n$, les diverses intégrales

$$\int_0^Z \mathfrak{f}(z)(x - z)^{n-p}\, dz,$$

où j'ai écrit pour abréger

$$\mathfrak{f}(z) = (z - z_0)^{\mu_0 - 1}(z - z_1)^{\mu_1 - 1}\dots(z - z_n)^{\mu_n - 1},$$

satisfont à l'équation linéaire sans second membre. Mais il est un autre point de vue que celui de l'application de vos théorèmes généraux sous lequel cette équation me paraît encore offrir quelque intérêt. Ces rapports de la théorie des fractions continues avec certaines équations du second ordre que nous ont fait connaître les belles recherches de M. *Heine* et de M. *Christoffel* se trouvent en effet susceptibles d'extension, et vous allez voir comment l'équation linéaire d'ordre $n+1$ se lie aux modes nouveaux d'approximations simultanées de plusieurs fonctions, dont j'ai donné un premier exemple en considérant les quantités e^{ax}, e^{bx} ... [*Sur la fonction exponentielle* (*Comptes rendus*, 1873)]. Soit d'abord, en effet, en supposant m un nombre entier positif,

$$\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_n = m + 1$$

et

$$p = m + n + 1;$$

on sera conduit à l'équation

$$\begin{aligned} f(x)\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} &+ n f'(x)\frac{d^n y}{dx^n} - \frac{1}{2}(m+n)(m-n+1) f''(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \\ &- \frac{1}{2.3}(m+n)(m+n-1)(2m-n+2) f'''(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} - \dots = 0, \end{aligned}$$

dont n solutions représentées par les intégrales

$$y = \int_{z_0}^{Z} \frac{f^m(z)}{(x - z)^{m+1}}\, dz$$

s'obtiennent comme il suit sous forme finie explicite. Dans la formule élémentaire

$$\int \mathrm{U}\,\frac{d^m\mathrm{V}}{dz^m}\,dz = \Theta + (-1)^m \int \mathrm{V}\,\frac{d^m\mathrm{U}}{dz^m}\,dz,$$

où

$$\Theta = \mathrm{U}\,\frac{d^{m-1}\mathrm{V}}{dz^{m-1}} - \frac{d\mathrm{U}}{dz}\,\frac{d^{m-2}\mathrm{V}}{dz^{m-2}} + \ldots + (-1)^{m-1}\,\frac{d^{m-1}\mathrm{U}}{dz^{m-1}}\,\mathrm{V},$$

je fais

$$\mathrm{U} = f^m(z), \qquad \mathrm{V} = \frac{1}{x-z},$$

et observant qu'aux limites $z = z_0$, $z = \mathrm{Z}$ la quantité Θ s'évanouit, puisque la dérivée d'ordre $m-1$ de $f^m(z)$ contient encore le facteur $f(z)$, j'en tire en négligeant un coefficient numérique

$$y = \int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{d^m f^m(z)}{dz^m}\,\frac{dz}{x-z}.$$

Soit pour abréger

$$\Phi(z) = \frac{d^m f^m(z)}{dz^m};$$

on pourra écrire encore

$$y = \int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{\Phi(z)}{x-z}\,dz = \Phi(x)\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{dz}{x-z} - \int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{\Phi(x)-\Phi(z)}{x-z}\,dz,$$

de sorte qu'en désignant par $\Phi_i(x)$ l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_i} \frac{\Phi(x)-\Phi(z)}{x-z}\,dz,$$

qui est un polynome entier en x d'un degré inférieur d'une unité au degré de $\Phi(x)$, les expressions cherchées sont

$$y_1 = \Phi(x)\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{x-z} - \Phi_1(x),$$

$$y_2 = \Phi(x)\int_{z_0}^{z_2} \frac{dz}{x-z} - \Phi_2(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$y_n = \Phi(x)\int_{z_0}^{z_n} \frac{dz}{x-z} - \Phi_n(x).$$

Cela posé, on voit immédiatement, en revenant à l'intégrale

$$\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{f^m(z)}{(x-z)^{m+1}}\,dz.$$

dont elles ont été déduites, qu'elles donnent des développements suivant les puissances descendantes de la variable commençant par un terme en

$$\frac{1}{x^{m+1}}.$$

Les fractions de même dénominateur

$$\frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)}, \quad \frac{\Phi_2(x)}{\Phi(x)}, \quad \ldots, \quad \frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)}$$

représentent donc les quantités

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{x-z} = \log\frac{x-z_0}{x-z_1}, \qquad \int_{z_0}^{z_2} \frac{dz}{x-z} = \log\frac{x-z_0}{x-z_2}, \qquad \ldots,$$
$$\int_{z_0}^{z_n} \frac{dz}{x-z} = \log\frac{x-z_0}{x-z_n}$$

aux termes près de l'ordre

$$\frac{1}{x^{mn+m+1}},$$

ou si l'on veut de l'ordre de

$$\frac{1}{\Phi(x)\sqrt[n]{\Phi(x)}},$$

afin de nous rapprocher de l'arithmétique, et elles doivent être regardées comme analogues aux réduites de la théorie des fractions continues. Pour le mieux faire voir, supposons que $\Phi(x)$ représente le polynome le plus général de degré mn; tous les coefficients se trouveront déterminés sauf un facteur constant, en s'imposant pour conditions, que les développements suivant les puissances descendantes de la variable des n fonctions

$$\Phi(x)\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{x-z}, \quad \Phi(x)\int_{z_0}^{z_2} \frac{dz}{x-z}, \quad \ldots, \quad \Phi(x)\int_{z_0}^{z_n} \frac{dz}{x-z}$$

ne contiennent aucune des puissances

$$\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{x^m}.$$

Et si l'on désigne les parties entières de ces produits qui sont de degré $mn - 1$, par

$$\Phi_1(x), \quad \Phi_2(x), \quad \ldots, \quad \Phi_n(x),$$

on atteint précisément, mais sans la dépasser, l'approximation que nous avions obtenue pour les quantités

$$\Phi(x)\int_{z_0}^{z_i} \frac{dz}{x-z} - \Phi_i(x),$$

dont les développements commencent par un terme en

$$\frac{1}{x^{m+1}};$$

on voit donc que cette approximation est bien en effet de l'ordre le plus élevé possible, en supposant

$$\Phi(x) = \frac{d^m f^m(x)}{dx^m}.$$

J'achèverai enfin de mettre en évidence le lien de l'équation différentielle avec ce nouveau mode d'approximation des fonctions, en établissant que $\Phi(x)$ en est une solution, et ce sera aussi en un point essentiel compléter son analogie avec le polynome X_n de *Legendre*. Remarquons à cet effet que, rien ne spécifiant, à l'égard de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{f^m(z)\,dz}{(x-z)^{m+1}},$$

le chemin suivi par la variable entre les limites z_0, Z, on est maître d'introduire dans une des solutions, telle que

$$\Phi(x)\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{x-z} - \Phi_1(x),$$

les déterminations multiples du logarithme. Or on obtient de nouvelles solutions, dont se tire immédiatement, par différence, le polynome $\Phi(x)$.

Des résultats semblables aux précédents s'offrent dans des circonstances un peu moins simples, lorsqu'on fait la supposition suivante :

$$\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_n = m + \frac{1}{2}$$

et

$$p = m + n + 1,$$

m étant encore un nombre entier positif. L'équation différentielle est alors

$$f(x)\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \left(n+\frac{1}{2}\right)f'(x)\frac{d^n y}{dx^n} - \frac{1}{2}(m+n)(m-n)f''(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$
$$- \frac{1}{2.3}(m+n)(m+n-1)\left(2m-n+\frac{3}{2}\right)f'''(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} - \ldots = 0,$$

et elle admet pour solutions les intégrales

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{f^{m-\frac{1}{2}}(z)}{(x-z)^{m+1}}\,dz,$$

qui, en opérant comme plus haut, se ramènent à la forme

$$y = \int_{z_0}^{Z} \frac{d^m f^{m-\frac{1}{2}}(z)}{dz^m}\,\frac{dz}{x-z}.$$

Posons

$$\frac{d^m f^{m-\frac{1}{2}}(z)}{dz^m} = \frac{\Phi(z)}{\sqrt{f(z)}},$$

de sorte que $\Phi(z)$ soit un polynome entier de degré mn ; la relation suivante

$$y = \int_{z_0}^{Z} \frac{\Phi(z)}{(x-z)\sqrt{f(z)}} = \Phi(x)\int_{z_0}^{Z} \frac{dz}{(x-z)\sqrt{f(z)}} - \int_{z_0}^{Z} \frac{\Phi(x)-\Phi(z)}{x-z}\,\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$$

met en évidence les intégrales hyperelliptiques

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{dz}{(x-z)\sqrt{f(z)}} \quad \text{et} \quad \int_{z_0}^{Z} \frac{\Phi(x)-\Phi(z)}{x-z}\,\frac{dz}{\sqrt{f(z)}},$$

que je vais exprimer par leurs éléments simples.

A cet effet et en considérant d'abord la première, soit

$$f(z) = A_0 z^{n+1} + A_1 z^n + \ldots + A_{n+1};$$

posons ensuite pour abréger

$$\lambda_k(z) = (2k+1-n)A_0 z^k + (2k-n)A_1 z^{k-1}$$
$$+ (2k-1-n)A_2 z^{k-2} + \ldots + (k+1-n)A_k$$

et

$$[\mathrm{Z}]_i = \frac{1}{2}\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{z^i\,dz}{\sqrt{f(z)}};$$

on aura, comme conséquence du théorème sur l'échange de l'argument et du paramètre,

$$\begin{aligned}&\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{\sqrt{f(x)}\,dz}{(x-z)\sqrt{f(z)}}\\ &\quad= [\mathrm{Z}]_{n-1}\int_{z_0}^{x} \frac{\lambda_0\,dx}{\sqrt{f(x)}} + [\mathrm{Z}]_{n-2}\int_{z_0}^{x} \frac{\lambda_1(x)\,dx}{\sqrt{f(x)}} + \ldots + [\mathrm{Z}]_0\int_{z_0}^{x} \frac{\lambda_{n-1}(x)\,dx}{\sqrt{f(x)}}.\end{aligned}$$

Quant à la seconde, où figure le polynome entier

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(z)}{x-z},$$

elle se ramène au moyen des réductions élémentaires connues à une combinaison linéaire de

$$[\mathrm{Z}]_0,\quad [\mathrm{Z}]_1,\quad \ldots,\quad [\mathrm{Z}]_{n-1},$$

et sera par conséquent de cette forme

$$\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{\Phi(x)-\Phi(z)}{x-z}\,\frac{dz}{\sqrt{f(z)}} = [\mathrm{Z}]_{n-1}\,\Phi_1(x) + [\mathrm{Z}]_{n-2}\,\Phi_2(x) + \ldots + [\mathrm{Z}]_0\,\Phi_n(x),$$

$\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\ldots$, $\Phi_n(x)$ étant des polynomes entiers en x de degré $mn-1$. Ces résultats donnent la transformation cherchée

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{\Phi(z)\,dz}{(x-z)\sqrt{f(z)}} = {} & [\mathrm{Z}]_{n-1}\left[\frac{\Phi(x)}{\sqrt{f(x)}}\int_{z_0}^{x} \frac{\lambda_0\,dx}{\sqrt{f(x)}} - \Phi_1(x)\right]\\ & + [\mathrm{Z}]_{n-2}\left[\frac{\Phi(x)}{\sqrt{f(x)}}\int_{z_0}^{x} \frac{\lambda_1(x)\,dx}{\sqrt{f(x)}} - \Phi_2(x)\right]\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & + [\mathrm{Z}]_0\left[\frac{\Phi(x)}{\sqrt{f(x)}}\int_{z_0}^{x} \frac{\lambda_{n-1}(x)\,dx}{\sqrt{f(x)}} - \Phi_n(x)\right],\end{aligned}$$

dont voici les conséquences :

Remarquons d'abord que le premier membre conduit, comme on le voit, si l'on revient à l'expression

$$\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{f^{m-\frac{1}{2}}(z)\,dz}{(x-z)^{m+1}},$$

à un développement suivant les puissances décroissantes de x, commençant par le terme

$$\frac{1}{x^{m+1}}.$$

Supposons ensuite successivement

$$\mathrm{Z} = z_1,\qquad \mathrm{Z} = z_2,\qquad \ldots,\qquad \mathrm{Z} = z_n,$$

en observant à l'égard des relations ainsi obtenues, que le déterminant

$$\begin{vmatrix} [z_1]_0 & [z_1]_1 & \ldots & [z_1]_{n-1}\\ [z_2]_0 & [z_2]_1 & \ldots & [z_2]_{n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ [z_n]_0 & [z_n]_1 & \ldots & [z_n]_{n-1}\end{vmatrix}$$

n'est point nul; on en conclut que le développement des n fonctions

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\Phi(x)}{\sqrt{f(x)}}\int_{z_0}^{x} \frac{\lambda_0\,dx}{\sqrt{f(x)}} - \Phi_1(x),\\ y_2 &= \frac{\Phi(x)}{\sqrt{f(x)}}\int_{z_0}^{x} \frac{\lambda_1(x)\,dx}{\sqrt{f(x)}} - \Phi_2(x),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ y_n &= \frac{\Phi(x)}{\sqrt{f(x)}}\int_{z_0}^{x} \frac{\lambda_{n-1}(x)\,dx}{\sqrt{f(x)}} - \Phi_n(x),\end{aligned}$$

commence de même par le terme $\frac{1}{x^{m+1}}$. C'est exactement à l'égard des transcendantes

$$\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\int_{z_0}^{x} \frac{\lambda_k(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx$$

le résultat obtenu par la quantité $\log\frac{x-z_0}{x-z_k}$, et il en résulte que les intégrales hyperelliptiques

$$\int_{z_0}^{x} \frac{\lambda_0\,dx}{\sqrt{f(x)}},\quad \int_{z_0}^{x} \frac{\lambda_1(x)\,dx}{\sqrt{f(x)}},\quad \ldots,\quad \int_{z_0}^{x} \frac{\lambda_{n-1}(x)\,dx}{\sqrt{f(x)}}$$

sont représentées par les expressions

$$\frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)}\sqrt{f(x)},\quad \frac{\Phi_2(x)}{\Phi(x)}\sqrt{f(x)},\quad \ldots,\quad \frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)}\sqrt{f(x)}$$

aux quantités près de l'ordre

$$\frac{1}{x^{\left(m-\frac{1}{2}\right)(n+1)+1}}.$$

Relativement à l'équation différentielle, je remarque enfin que les solutions données en premier lieu par les quantités

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{f^{m-\frac{1}{2}}(z)\,dz}{(x-z)^{m+1}}$$

ont été mises ensuite sous la forme

$$y_k = \frac{\Phi(x)}{\sqrt{f(x)}} \int_{z_0}^{x} \frac{\lambda_{k-1}(x)\,dx}{\sqrt{f(x)}} - \Phi_k(x),$$

où il est permis d'introduire les déterminations multiples de l'intégrale

$$\int_{z_0}^{x} \frac{\lambda_{k-1}(x)\,dx}{\sqrt{f(x)}};$$

et cette considération, précédemment employée, conduit à la nouvelle solution purement algébrique

$$\frac{\Phi(x)}{\sqrt{f(x)}}, \quad \text{ou, si l'on veut,} \quad \frac{d^m f^{m-\frac{1}{2}}(x)}{dx^m}.$$

En rencontrant ainsi, comme un élément nécessaire de l'intégration de certaines équations linéaires, ces approximations des fonctions par des fractions rationnelles analogues aux réduites de la théorie des fractions continues, j'ai dû songer à chercher à leur égard un algorithme semblable à la loi de formation de ces réduites. Mais avant de m'engager dans cette voie, et pour m'éclairer sur la question, je me suis proposé, dans le cas de ces équations, à savoir

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - m(m+1)y = 0,$$

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} - (m^2-1)y \quad = 0,$$

de tirer directement, des intégrales définies qui y satisfont, les

relations propres aux fonctions X_m dans le premier cas, et aux quantités $\frac{\sin m(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ dans le second. Pour plus de généralité, je remplacerai ces équations par les suivantes :

$$f(x)\frac{d^2y}{dx^2} + f'(x)\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}m(m+1)f''(x)y = 0,$$

$$f(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3}{2}f'(x)\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}(m^2-1)f''(x)y = 0,$$

où je suppose

$$f(x) = (x-a)(x-b),$$

de sorte que les solutions seront

$$y = \int_a^b \frac{f^m(z)}{(x-z)^{m+1}}\,dz, \qquad y = \int_a^b \frac{f^{m-\frac{1}{2}}(z)}{(x-z)^{m+1}}\,dz.$$

Cela posé, je pars de ces identités faciles à former :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{x-z}\right]^{m+1} = &-2(m+1)\left[\frac{f(z)}{x-z}\right]^m \\
&+(m+1)(2x-a-b)\frac{f^m(z)}{(x-z)^{m+1}} + (m+1)\frac{f^{m+1}(z)}{(x-z)^{m+2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left[\frac{f^m(z)f'(z)}{(x-z)^m}\right] = &\,2(m+1)\left[\frac{f(z)}{x-z}\right]^m \\
&+ m(a-b)^2\frac{f^{m-1}(z)}{(x-z)^m} + m(2x-a-b)\frac{f^m(z)}{(x-z)^{m+1}},
\end{aligned}$$

et je les ajoute membre à membre afin d'éliminer le terme $\left(\frac{f(z)}{x-z}\right)^m$. Il vient ainsi

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)+(x-z)f'(z)}{(x-z)^{m+1}}\right]f^m(z) \\
&\quad = m(a-b)^2\frac{f^{m-1}(z)}{(x-z)^m} \\
&\qquad + (2m+1)(2x-a-b)\frac{f^m(z)}{(x-z)^{m+1}} + (m+1)\frac{f^{m+1}(z)}{(x-z)^{m+2}}.
\end{aligned}$$

En intégrant entre les limites $z=a$, $z=b$ et posant

$$\frac{1}{2^m}\int_a^b \frac{f^m(z)}{(x-z)^{m+1}}\,dz = (-1)^m u_m,$$

on en tire la relation

$$(m+1)u_{m+1} = \left(m+\frac{1}{2}\right)(2x-a-b)u_m - \frac{1}{4}m(a-b)^2 u_{m-1}.$$

C'est bien le résultat connu lorsqu'on suppose

$$f(x) = x^2 - 1,$$

pour le polynome de *Legendre;* mais on voit de plus qu'en faisant

$$u_m = \mathrm{X}_m \log\frac{x+1}{x-1} - \mathrm{P}_m,$$

elle se partage en deux et que P_m, comme l'a trouvé M. *Christoffel*, satisfait à la même équation.

Je considérerai en second lieu les identités suivantes :

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f^{m+\frac{1}{2}}(z)}{(x-z)^{m+1}}\right] = -(2m+1)\frac{f^{m-\frac{1}{2}}(z)}{(x-z)^m}$$
$$+\left(m+\frac{1}{2}\right)(2x-a-b)\frac{f^{m-\frac{1}{2}}(z)}{(x-z)^{m+1}} + (m+1)\frac{f^{m+\frac{1}{2}}(z)}{(x-z)^{m+2}},$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f^{m-\frac{1}{2}}(z)f'(z)}{(x-z)^m}\right] = 2m\frac{f^{m-\frac{1}{2}}(z)}{(x-z)^m}$$
$$+m(2x-a-b)\frac{f^{m-\frac{1}{2}}(z)}{(x-z)^{m+1}} + \left(m-\frac{1}{2}\right)(a-b)^2\frac{f^{m-\frac{3}{2}}(z)}{(x-z)^m}.$$

L'élimination de $\dfrac{f^{m-\frac{1}{2}}(z)}{(x-z)^m}$ donne

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)f^{m-\frac{1}{2}}(z)f'(z)}{(x-z)^m} + m\frac{f^{m+\frac{1}{2}}(z)}{(x-z)^{m+1}}\right] = \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{f^{m-\frac{1}{2}}(z)}{(x-z)^m}\right]$$
$$= (a-b)^2\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\frac{f^{m-\frac{3}{2}}(z)}{(x-z)^m}$$
$$+ m(2m+1)(2x-a-b)\frac{f^{m-\frac{1}{2}}(z)}{(x-z)^{m+1}} + m(m+1)\frac{f^{m+\frac{1}{2}}(z)}{(x-z)^{m+2}}.$$

Intégrons de nouveau de $z=a$ à $z=b$; on en déduit, en

posant

$$\frac{1.2\ldots m}{1.3.5\ldots 2m-1}\int_a^b \frac{f^{m-\frac{1}{2}}(z)\,dz}{(x-z)^{m+1}} = (-1)^m v_m,$$

$$v_{m+1} = (2x-a-b)v_m - \frac{1}{4}(a-b)^2 v_{m-1},$$

d'où encore un résultat connu dans le cas de

$$f(z) = z^2 - 1.$$

Je viens maintenant au cas général, en me posant cette question : trouver un algorithme qui permette de calculer de proche en proche les termes de cette série

$$\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{\mathfrak{f}(z)\,dz}{(x-z)^{m+1}}, \quad \int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{\mathfrak{f}(z)f(z)\,dz}{(x-z)^{m+2}}, \quad \ldots, \quad \int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{\mathfrak{f}(z)f^k(z)\,dz}{(x-z)^{m+k+1}},$$

où je suppose

$$\mathfrak{f}(z) = (z-z_0)^{\mu_0-1}(z-z_1)^{\mu_1-1}\ldots(z-z_n)^{\mu_n-1},$$
$$f(z) = (z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_n).$$

Soit pour abréger

$$\mathrm{F}(z) = \mathfrak{f}(z)f^k(z) = (z-z_0)^{\nu_0}(z-z_1)^{\nu_1}\ldots(z-z_n)^{\nu_n}$$

et

$$m+k=p,$$

de sorte que le terme général devienne

$$\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{\mathrm{F}(z)\,dz}{(x-z)^{p+1}};$$

je remarquerai qu'en intégrant entre les limites $z=z_0$ et $z=\mathrm{Z}$ les deux membres de cette identité

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\mathrm{F}(z)}{(x-z)^p}\right] = \frac{p\,\mathrm{F}(z)}{(x-z)^{p+1}} + \frac{\mathrm{F}'(z)}{(x-z)^p}$$

on en conclut

$$\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{\mathrm{F}(z)\,dz}{(x-z)^{p+1}} = -\frac{1}{p}\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{\mathrm{F}'(z)\,dz}{(x-z)^p},$$

et, par suite, d'après la formule

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{\nu_0}{z-z_0} + \frac{\nu_1}{z-z_1} + \ldots + \frac{\nu_n}{z-z_n},$$

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{F(z)\,dz}{(x-z)^{p+1}} = -\frac{\nu_0}{p}\int_{z_0}^{Z} \frac{F(x)}{z-z_0}\,\frac{dz}{(x-z)^p}$$
$$-\frac{\nu_1}{p}\int_{z_0}^{Z} \frac{F(z)}{z-z_1}\,\frac{dz}{(x-z)^p} - \ldots - \frac{\nu_n}{p}\int_{z_0}^{Z} \frac{F(z)}{z-z_n}\,\frac{dz}{(x-z)^p}.$$

De cette manière l'intégrale proposée est décomposée en $n+1$ autres qu'on peut représenter par

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{F(z)}{z-\zeta}\,\frac{dz}{(x-z)^p},$$

ζ désignant successivement les racines $z_0, z_1, \ldots, z_n$, et il en sera de même de celle-ci

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{F(z)\,f(z)\,dz}{(x-z)^{p+1}},$$

qui est le terme suivant dans la série, et qui aura pour éléments les quantités

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{F(z)\,f(z)}{z-\zeta}\,\frac{dz}{(x-z)^{p+1}}.$$

Or ce sont les éléments ainsi définis qui donnent lieu à un système de relations récurrentes, faciles à obtenir, comme vous allez voir, en suivant, sans y rien changer en quelque sorte, la méthode que j'ai appliquée aux intégrales

$$\int_{z}^{Z} e^{-z}\,F(z)\,dz.$$

[*Sur la fonction exponentielle* (*Comptes rendus*, 1873).]

Effectivement il suffira de démontrer qu'on peut toujours satisfaire à la relation suivante

$$\int \frac{F(z)\,f(z)}{z-\zeta}\,\frac{dz}{(x-z)^{p+1}} = \int \frac{\Theta_1(z)}{f(z)}\,\frac{F(z)\,dz}{(x-z)^p} - \frac{\Theta(z)\,F(z)}{(x-z)^p},$$

en prenant pour $\Theta(z)$ et $\Theta_1(z)$ deux polynomes entiers du degré n,

et c'est ce qu'on reconnaît sur-le-champ; car la différentiation donne, après avoir multiplié par $\frac{f(z)}{F(z)}$,

$$\frac{f^2(z)}{z-\zeta} = (x-z)\,\Theta_1(z) - p\,\Theta(z)\,f(z)$$
$$-(x-z)\left[\Theta'(z)\,f(z) + \Theta(z)\,\frac{F'(z)\,f(z)}{F(z)}\right],$$

et l'on a précisément le nombre voulu de $2n+2$ constantes arbitraires, pour identifier les deux membres, qui sont des polynomes entiers de degré $2n+1$. Ce point établi, j'observe qu'en supposant

$$z = z_i$$

on obtient

$$\Theta_1(z_i) = \nu_i\,f(z_i)\,\Theta(z_i),$$

et que par suite $\Theta_1(z)$ se déduira de $\Theta(z)$, qui restera seul à déterminer au moyen de la formule

$$\Theta_1(z) = \nu_0\,\Theta(z_0)\,\frac{f(z)}{z-z_0} + \nu_1\,\Theta(z_1)\,\frac{f(z)}{z-z_1} + \ldots + \nu_n\,\Theta(z_n)\,\frac{f(z)}{z-z_n}.$$

Pour obtenir maintenant $\Theta(z)$, après avoir déduit de la relation ci-dessus proposée la condition

$$\Theta(x) = -\frac{1}{p}\,\frac{f(x)}{x-\zeta},$$

je l'écrirai comme il suit

$$\frac{f(z)}{(z-\zeta)(x-z)} = \frac{\Theta_1(z)}{f(z)} - \Theta(z)\left[\frac{p}{x-z} + \frac{F'(z)}{F(z)}\right] - \Theta'(z),$$

et de cette forme nouvelle, je conclurai en remarquant que la fraction $\frac{\Theta_1(z)}{f(z)}$ n'a pas de partie entière, que le polynome cherché doit être tel que les parties entières de ces deux expressions

$$\Theta(z)\left[\frac{p}{x-z} + \frac{F'(z)}{F(z)}\right] + \Theta'(z)$$

et

$$\frac{f(z)}{(z-\zeta)(z-x)}$$

coïncident. Soit donc pour en faire le calcul

$$\frac{p}{x-z} + \frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} + \ldots$$

en posant

$$\Theta(z) = \alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \ldots + \alpha_n;$$

nous aurons d'abord

$$\Theta(z)\left[\frac{p}{x-z} + \frac{F'(z)}{F(z)}\right] = \alpha_0 s_0 z^{n-1} + \left.\begin{array}{r}\alpha_1 s_0 \\ + \alpha_0 s_1\end{array}\right| z^{n-2} + \left.\begin{array}{r}\alpha_2 s_0 \\ + \alpha_1 s_1 \\ + \alpha_0 s_2\end{array}\right| z^{n-3} + \ldots$$

Soit ensuite

$$\frac{f(z)}{(z-\zeta)(z-x)} = z^{n-1} + p_1 z^{n-2} + p_2 z^{n-3} + \ldots + p_{n-1},$$

et nous obtiendrons les équations suivantes, au nombre de n, à savoir :

$$\begin{aligned}
1 &= \alpha_0(s_0 + n), \\
p_1 &= \alpha_1(s_0 + n - 1) + \alpha_0 s_1, \\
p_2 &= \alpha_2(s_0 + n - 2) + \alpha_1 s_1 + \alpha_0 s_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
p_{n-1} &= \alpha_{n-1}(s_0 + 1) + \alpha_{n-2} s_1 + \ldots + \alpha_0 s_{n-2}.
\end{aligned}$$

Elles déterminent de proche les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, et quant à α_n, qui seul reste à obtenir, c'est la condition précédemment remarquée

$$\Theta(x) = -\frac{1}{p}\,\frac{f(x)}{x-\zeta},$$

qui en donne la valeur. Revenant maintenant à la relation

$$\int \frac{F(z) f(z)}{z-\zeta}\,\frac{dz}{(x-z)^{p+1}} = \int \frac{\Theta_1(z)}{f(z)}\,\frac{F(z)\,dz}{(x-z)^p} - \frac{\Theta(z) F(z)}{(x-z)^p},$$

nous en déduirons d'abord

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{F(z) f(z)}{z-\zeta}\,\frac{dz}{(x-z)^{p+1}} = \int_{z_0}^{Z} \frac{\Theta_1(z)}{f(z)}\,\frac{F(z)\,dz}{(x-z)^p},$$

puis, en décomposant $\frac{\Theta_1(z)}{f(z)}$ en fractions simples,

$$\begin{aligned}
\int_{z_0}^{Z} \frac{F(z) f(z)}{z-\zeta}\,\frac{dz}{(x-z)^{p+1}} = {} & \frac{\Theta_1(z_0)}{f'(z_0)} \int_{z_0}^{Z} \frac{F(z)}{z-z_0}\,\frac{dz}{(x-z)^p} \\
& + \frac{\Theta_1(z_1)}{f'(z_1)} \int_{z_0}^{Z} \frac{F(z)}{z-z_1}\,\frac{dz}{(x-z)^p} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{\Theta_1(z_n)}{f'(z_n)} \int_{z_0}^{Z} \frac{F(z)}{z-z_n}\,\frac{dz}{(x-z)^p}.
\end{aligned}$$

Mais on a

$$\Theta_1(z_i) = .\,,\, f'(z_i)\,\Theta(z_i),$$

et si l'on écrit $\Theta(x, \zeta)$ au lieu de $\Theta(z)$ afin de mettre en évidence ζ, qui entre, comme il est aisé de voir, au premier degré dans α_1, au second dans α_2, et ainsi de suite, nous obtiendrons sous forme entièrement explicite

$$\begin{aligned}
\int_{z_0}^{Z} \frac{F(z) f(z)}{z-\zeta}\,\frac{dz}{(x-z)^{p+1}} = {} & \nu_0\, \Theta(z_0, \zeta) \int_{z_0}^{Z} \frac{F(z)}{z-z_0}\,\frac{dz}{(x-z)^p} \\
& + \nu_1\, \Theta(z_1, \zeta) \int_{z_0}^{Z} \frac{F(z)}{z-z_1}\,\frac{dz}{(x-z)^p} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \nu_n\, \Theta(z_n, \zeta) \int_{z_0}^{Z} \frac{F(z)}{z-z_n}\,\frac{dz}{(x-z)^p}.
\end{aligned}$$

Je ne ferai point, pour abréger, d'applications de ce résultat; j'observerai seulement qu'en considérant l'intégrale

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{f^m(z)}{(x-z)^{m+1}}\,dz,$$

on obtiendra, pour les éléments de décomposition, l'expression suivante :

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{f^m(z)}{z-\zeta}\,\frac{dz}{(x-z)^m} = \frac{f(x)}{x-\zeta}\,\Pi(x) \int_{z_0}^{Z} \frac{dz}{x-z} - \Pi_1(x),$$

$\Pi(x)$ et $\Pi_1(x)$ étant des polynomes entiers. On voit ainsi que le développement de l'intégrale suivant les puissances décroissantes de la variable commence par un terme en $\frac{1}{x^m}$, et il est facile de reconnaître que c'est l'ordre le plus élevé qu'on puisse obtenir pour un degré donné de $\Pi(x)$. Quant au facteur

$$\frac{f(x)}{x-\zeta},$$

il se trouve amené par la relation

$$\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left[\frac{f^m(x)}{x-\zeta}\right] = \frac{f(x)}{x-\zeta}\,\Pi(x),$$

qui définit $\Pi(x)$ à un facteur constant près (¹).

Les Sables-d'Olonne, 10 octobre 1874.

(¹) La lettre d'Hermite se termine par quelques remarques sur l'intégrale

$$\int_x^\infty \frac{(z-x)^m\,dz}{f^{m+1}(z)}.$$

Nous ne les reproduirons pas, car les résultats ne nous ont pas paru exacts.

E. P.

EXTRAIT

D'UNE

LETTRE DE M. CH. HERMITE A M. BORCHARDT

SUR

LES NOMBRES DE BERNOULLI.

Journal de Crelle, t. 81, 1876, p. 93-95.

...M. Clausen et M. Staudt ont découvert en même temps sur les nombres de Bernoulli une proposition extrêmement remarquable, qui donne pour B_n cette expression

$$(-1)^n B_n = A_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \ldots + \frac{1}{\lambda},$$

dans laquelle, A_n étant entier, les dénominateurs des fractions sont tous des nombres premiers tels que $\frac{\alpha-1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2}$, ..., $\frac{\lambda-1}{2}$ soient diviseurs de n. Ce beau théorème dont M. Staudt a donné la démonstration dans le Tome XXI, page 372 de ce journal (*Beweis eines Lehrsatzes, die Bernoullischen Zahlen betreffend*), conduit à rechercher directement les nombres entiers A_n, au moyen des relations qui servent au calcul des nombres de Bernoulli. Employant à cet effet l'équation

$$\begin{aligned}&(2n+1)_2 B_1 - (2n+1)_4 B_2 \\ &\quad + (2n+1)_6 B_3 - \ldots + (-1)^{n-1}(2n+1)_{2n} B_n = n - \frac{1}{2},\end{aligned}$$

où $(2n+1)_2$, $(2n+1)_4$, ... désignent les coefficients de x^2, x^4, ... dans le développement de la puissance $(1+x)^{2n+1}$, on en tire d'abord, en substituant les expressions de B_1, B_2, B_3, ...,

$$
\begin{aligned}
&(2n+1)_2\left(A_1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\\
&\quad+(2n+1)_4\left(A_2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\\
&\quad+(2n+1)_6\left(A_3+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad+(2n+1)_{2n}\left(A_n+\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\ldots+\frac{1}{\lambda}\right)\\
&\quad+n-\frac{1}{2}=0.
\end{aligned}
$$

Cela posé, les termes contenant en facteur $\frac{1}{2}$ sont

$$\frac{1}{2}[(2n+1)_2+(2n+1)_4+\ldots+(2n+1)_{2n}-1],$$

et comme on a

$$(2n+1)_2+(2n+1)_4+\ldots+(2n+1)_{2n}=2^{2n}-1,$$

ils se réduisent au nombre entier $2^{2n-1}-1$. Mais considérons, en général, ceux qui sont affectés du facteur $\frac{1}{p}$; ils proviennent des nombres de Bernoulli dont l'indice est un multiple de $\frac{1}{2}(p-1)$, et donnent cette somme

$$S_p=\frac{1}{p}[(2n+1)_{p-1}+(2n+1)_{2p-2}+(2n+1)_{3p-3}+\ldots]$$

que je vais montrer être aussi un nombre entier.

J'observe pour cela que, en désignant par ω les diverses racines de l'équation $x^{p-1}=1$, la somme $\sum(1+\omega)^{2n+1}$ a pour valeur

$$(p-1)[1+(2n+1)_{p-1}+(2n+1)_{2p-2}+(2n+1)_{3p-3}+\ldots].$$

Or, les racines ω, prises suivant le module premier p, sont les nombres entiers

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \ldots,\quad p-1;$$

les quantités $1+\omega$ seront donc

$$2,\quad 3,\quad 4,\quad \ldots,\quad p-1,\quad 0;$$

il en résulte que $\sum(1+\omega)^{2n+1}$ est, en lui ajoutant l'unité, la somme des puissances $2n+1$ des nombres $1, 2, \ldots, p-1$, qui est un multiple de p, attendu que l'exposant $2n+1$ n'est pas divisible par le nombre pair $p-1$. Ayant ainsi

$$\sum(1+\omega)^{2n+1}+1\equiv 0 \pmod{p},$$

on voit immédiatement que S_p se réduit bien à un nombre entier et nous obtenons pour le calcul direct des nombres A_n la relation suivante :

$$
\begin{aligned}
&(2n+1)_2A_1+(2n+1)_4A_2+\ldots+(2n+1)_{2n}A_n\\
&\quad=1-n-2^{2n-1}-S_3-S_5-\ldots-S_p
\end{aligned}
$$

où les quantités S_3, S_5, ..., S_p se rapportent à tous les nombres premiers jusqu'à $2n+1$.

Soit, par exemple, $n=4$, les nombres premiers jusqu'à 9 étant 3, 5, 7, on aura

$$S_3=\frac{1}{3}(36+126+84+9)=85,$$

$$S_5=\frac{1}{5}(126+9)=27,$$

$$S_7=\frac{1}{7}84=12,$$

et, par conséquent,

$$36A_1+126A_2+84A_3+9A_4=-255,$$

ou, en supprimant le facteur 3 commun aux deux membres,

$$12A_1+42A_2+28A_3+3A_4=-85.$$

Pour $n=1, 2, 3$, nous trouverions successivement

$$
\begin{aligned}
A_1&=-1,\\
2A_1+A_2&=-3,\\
3A_1+5A_2+A_3&=-9,
\end{aligned}
$$

et ces équations donnent facilement les valeurs

$$A_1=A_2=A_3=A_4=-1;$$

d'où

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \quad 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3} &&= \frac{1}{6},\\
B_2 &= -1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5} &&= \frac{1}{30},\\
B_3 &= \quad 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7} &&= \frac{1}{42},\\
B_4 &= -1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5} &&= \frac{1}{30}.
\end{aligned}
$$

On aura ensuite

$$
\begin{aligned}
B_5 &= \quad 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{11} &&= \frac{5}{66},\\
B_6 &= -1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{13} &&= \frac{691}{2730},\\
B_7 &= \quad 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3} &&= \frac{7}{6},\\
B_8 &= \quad 6+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{17} &&= \frac{3617}{510},\\
B_9 &= \quad 56-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-\frac{1}{19} &&= \frac{43867}{798},
\end{aligned}
$$

....

Vous remarquerez cette nouvelle fonction numérique attachée au nombre impair $2n+1$

$$S_3+S_5+\ldots+S_p,$$

à laquelle conduit le théorème de M. Clausen et de M. Staudt; elle vient se joindre à toutes celles dont la théorie des fonctions elliptiques a donné l'origine et les propriétés et peut être généralisée en substituant à S_p la somme suivante :

$$\mathfrak{S}_p=\frac{x^{2n+1}}{p}\left[\frac{(2n+1)_{p-1}}{x^{p-1}}+\frac{(2n+1)_{2p-2}}{x^{2p-2}}+\frac{(2n+1)_{3p-3}}{x^{3p-3}}+\ldots\right]$$

qui coïncide avec S_p pour $x=1$. On démontre, en effet, comme plus haut, que $\mathfrak{S}_p$ est un nombre entier pour toute valeur entière de x, p étant un nombre premier quelconque, non supérieur à $2n+1$.

LETTRE DE M. CH. HERMITE A M. BORCHARDT

SUR LA

FONCTION DE JACOB BERNOULLI.

Journal de Crelle, t. 79, 1875, p. 339-344.

Je viens au sujet d'un Mémoire de M. Raabe, sur la fonction de Jacob Bernoulli (t. XLII de ce Journal, p. 348) vous présenter quelques remarques. Soient $B''(x)$ et $B'(x)$ les coefficients de $\frac{\lambda^{2m}}{1.2\ldots 2m}$ et $\frac{\lambda^{2m+1}}{1.2\ldots 2m+1}$ dans le développement suivant les puissances croissantes de λ de la fonction $\frac{e^{\lambda x}-1}{e^{\lambda}-1}$, de sorte que l'on ait

$$
\begin{aligned}
B''(x)&=\frac{x^{2m+1}}{2m+1}-\frac{1}{2}x^{2m}+\frac{1}{2}(2m)_1 B_1 x^{2m-1}-\frac{1}{4}(2m)_3 B_2 x^{2m-3}+\ldots,\\
B'(x)&=\frac{x^{2m+2}}{2m+2}-\frac{1}{2}x^{2m+1}+\frac{1}{2}(2m+1)_1 B_1 x^{2m}-\frac{1}{4}(2m+1)_3 B_2 x^{2m-2}+\ldots.
\end{aligned}
$$

L'éminent géomètre donne parmi beaucoup de résultats entièrement nouveaux et d'un grand intérêt, cette expression sous forme d'intégrale définie de $B''(x)$, à savoir

$$(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}B''(x)=\sin 2\pi x\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u^{2m}\,du}{e^u+e^{-u}-2\cos 2\pi x}.$$

Peut-être n'est-il pas inutile de remarquer que la proposition importante démontrée par M. Malmsten (sur la formule

$$hu'_x=\Delta u_x-\frac{1}{2}h\Delta u'_x+\ldots,$$

t. XXXV, p. 55) que ce polynome ne change qu'une fois de signe, entre les limites $x=0$, $x=1$, est immédiatement mise en évidence dans l'expression de M. Raabe. Effectivement, l'intégrale

$$\int_{-x}^{+x} \frac{u^{2m}\,du}{e^u+e^{-u}-2\cos 2\pi x}$$

est une quantité essentiellement positive pour toutes les valeurs de x, de sorte qu'entre les limites considérées, $B''(x)$ aura le signe du facteur $(-1)^{m+1}\sin 2\pi x$, et ne s'annulera que pour $x=\frac{1}{2}$. C'est ce qui m'a engagé à en rechercher une démonstration directe et en même temps à obtenir une expression analogue pour le polynome $B'(x)$, qui mettrait aussi en évidence sa propriété caractéristique, d'être toujours de même signe de $x=0$ à $x=1$.

J'emploierai dans ce but, la forme suivante que prend la fonction $\frac{e^{\lambda x}-1}{e^{\lambda}-1}$, en changeant λ en $2i\lambda$; si l'on pose

$$\varphi(x)=\frac{\sin\lambda+\sin(2x-1)\lambda}{2\sin\lambda},$$

$$\psi(x)=\frac{\cos\lambda-\cos(2x-1)\lambda}{2\sin\lambda},$$

on trouve, en effet,

$$\frac{e^{2i\lambda x}-1}{e^{2i\lambda}-1}=\varphi(x)+i\,\psi(x),$$

et il en résulte que $B''(x)$ et $B'(x)$ peuvent être définis comme les coefficients de $\frac{(-1)^m(2\lambda)^{2m}}{1.2\ldots 2m}$ et de $\frac{(-1)^m(2\lambda)^{2m+1}}{1.2\ldots 2m+1}$ dans les développements de $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ suivant les puissances croissantes de λ. La considération de ces fonctions suffit déjà pour démontrer plusieurs des théorèmes de Raabe, au moyen de ces relations entièrement élémentaires, à savoir:

$$\varphi(1-x)=1-\varphi(x), \qquad \psi(1-x)=\psi(x),$$

$$\varphi(x)+\varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\varphi\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{2}n+\frac{\sin(2nx-1)\frac{\lambda}{n}}{2\sin\frac{\lambda}{n}},$$

$$\psi(x)+\psi\left(x+\frac{1}{n}\right)+\ldots+\psi\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=\frac{n\cos\lambda}{2\sin\lambda}-\frac{\cos(2nx-1)\frac{\lambda}{n}}{2\sin\frac{\lambda}{n}}.$$

Mais c'est leur expression sous forme d'intégrales définies qu'il importe surtout d'obtenir, et voici comment j'y suis parvenu:

Soit $f(e^x)$ une fonction rationnelle quelconque de e^x, et

$$\Phi(x)=e^{mx}f(e^x).$$

Je ferai usage de la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x)\,dx$, qui se détermine facilement comme vous allez voir. Ayant posé d'abord

$$\begin{aligned} f(z)=\Pi(z)&+\frac{A}{z-a}+\frac{A_1}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(z-a)^{\alpha+1}}\\ &+\frac{B}{z-b}+\frac{B_1}{(z-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(z-b)^{\beta+1}}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

en réunissant dans la quantité $\Pi(z)$, la partie entière ainsi que les fractions en $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2}$, $\ldots$, s'il en existe, je remarque que l'expression

$$e^{mx}\left[\frac{A}{e^x-a}+\frac{A_1}{(e^x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(e^x-a)^{\alpha+1}}\right]$$

peut se mettre sous cette nouvelle forme

$$\mathfrak{A}\left(\frac{e^{mx}}{e^x-a}\right)+\mathfrak{A}_1 D_x\left(\frac{e^{mx}}{e^x-a}\right)+\ldots+\mathfrak{A}_\alpha D_x^\alpha\left(\frac{e^{mx}}{e^x-a}\right).$$

Nous aurons en conséquence

$$\begin{aligned} \Phi(x)=e^{mx}\Pi(x)&+\mathfrak{A}\left(\frac{e^{mx}}{e^x-a}\right)+\mathfrak{A}_1 D_x\left(\frac{e^{mx}}{e^x-a}\right)+\ldots+\mathfrak{A}_\alpha D_x^\alpha\left(\frac{e^{mx}}{e^x-a}\right)\\ &+\mathfrak{B}\left(\frac{e^{mx}}{e^x-b}\right)+\mathfrak{B}_1 D_x\left(\frac{e^{mx}}{e^x-b}\right)+\ldots+\mathfrak{B}_\beta D_x^\beta\left(\frac{e^{mx}}{e^x-b}\right)\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et cette décomposition entièrement analogue à celle des fractions rationnelles en fractions simples, ramènera l'intégrale $\int\Phi(x)\,dx$ à la transcendante $\int\frac{e^{mx}\,dx}{e^x-a}$, et l'intégrale définie proposée à la quantité $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{mx}\,dx}{e^x-a}$. Avant d'en chercher la valeur, je remarque que la constante a doit être supposée négative quand elle est réelle; on est amené par là à poser : $a=-e^{g+ih}$, avec la condition que h soit compris entre les limites $-\pi$ et $+\pi$, sans atteindre ces limites. Cela étant, nous aurons

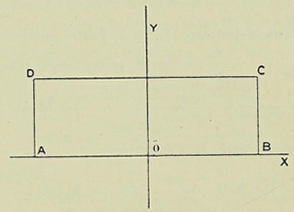
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{mx}\,dx}{e^x - a} = e^{-g-ih} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{mx}\,dx}{e^{x-g-ih}+1};$$

puis en remplaçant x par $x+g$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{mx}\,dx}{e^{x-g-ih}+1} = e^{mg} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{mx}\,dx}{e^{x-ih}+1},$$

et cette dernière quantité se détermine comme il suit :

Considérons l'intégrale d'une fonction quelconque effectuée en suivant le contour d'un rectangle ABCD, dont la base est sur l'axe



des abscisses, l'origine étant au milieu de cette base, et faisons $OB = a$, $BC = b$. Si l'on désigne par $\Phi(z)$ la fonction et par S la somme de ses résidus qui correspondent aux valeurs de z, comprises à l'intérieur du rectangle, on aura comme on sait

$$\int_{-a}^{+a} \Phi(x)\,dx + i\int_0^b \Phi(ix+a)\,dx$$
$$-\int_{-a}^{+a} \Phi(x+ib)\,dx - i\int_0^b \Phi(ix-a)\,dx = 2i\pi \mathrm{S}.$$

Cela étant, je fais $\Phi(z) = \frac{e^{mz}}{e^z+1}$, et je suppose la hauteur b comprise entre π et 3π, de manière qu'à l'intérieur du rectangle, l'équation $e^z + 1 = 0$ n'ait que la racine $z = i\pi$ et $\Phi(z)$ le seul résidu $-e^{im\pi}$. Faisons maintenant croître indéfiniment la constante a ; les deux quantités $\Phi(ix+a)$ et $\Phi(ix-a)$ tendront évidem-

ment vers zéro si m est inférieur en valeur absolue à l'unité, et l'on obtiendra

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x+ib)\,dx = -2i\pi e^{im\pi},$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x+ib)\,dx = \frac{\pi}{\sin m\pi} + 2i\pi e^{im\pi} = \frac{\pi e^{2im\pi}}{\sin m\pi},$$

et par conséquent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{mx}\,dx}{e^{x+ib}+1} = \frac{\pi e^{im(2\pi-b)}}{\sin m\pi}.$$

Mais on peut poser : $b = 2\pi - h$, h étant compris entre $-\pi$ et $+\pi$, et nous trouvons ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{mx}\,dx}{e^{x-ih}+1} = \frac{\pi e^{imh}}{\sin m\pi}.$$

Soit, en second lieu,

$$\Phi(z) = \frac{e^{mz} - e^{nz}}{e^z - 1},$$

les constantes m et n étant moindres que l'unité, de sorte que $\Phi(ix+a)$ et $\Phi(ix-a)$ soient nulles pour a infini. En supposant $b = \pi$, la fonction proposée restera finie à l'intérieur du rectangle et l'on aura $\mathrm{S} = 0$, d'où, par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x+i\pi)\,dx.$$

Mais nous avons

$$\Phi(x+i\pi) = -e^{im\pi}\frac{e^{mx}}{e^x+1} + e^{in\pi}\frac{e^{nx}}{e^x+1},$$

et de cette expression résulte immédiatement la valeur connue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{mx}-e^{nx}}{e^x-1}\,dx = \pi\left[\frac{e^{in\pi}}{\sin n\pi} - \frac{e^{im\pi}}{\sin m\pi}\right] = \pi(\cot n\pi - \cot m\pi).$$

J'arrive maintenant à mon objet en appliquant les résultats qui précèdent à la détermination des intégrales,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{mz}\sin h\,dz}{e^z+e^{-z}+2\cos h} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{mz}-e^{-mz})(1+\cos h)\,dz}{(e^z-1)(e^z+e^{-z}+\cos h)}.$$

A l'égard de la première, la relation

$$\frac{\sin h}{e^z + e^{-z} + 2\cos h} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{e^{z-ih}+1} - \frac{1}{e^{z+ih}+1}\right]$$

donnera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{mz}\sin h\,dz}{e^z + e^{-z} + 2\cos h} = \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{imh}}{\sin m\pi} - \frac{e^{-imh}}{\sin m\pi}\right] = \frac{\pi \sin mh}{\sin m\pi}.$$

Pour la seconde, j'emploierai la décomposition suivante :

$$\frac{4i\sin h(1+\cos h)}{(e^z-1)(e^z+e^{-z}+2\cos h)} = \frac{2i\sin h}{e^z-1} + \frac{e^{ih}+1}{e^{z+ih}+1} - \frac{e^{-ih}+1}{e^{z-ih}+1},$$

et nous en conclurons au moyen des formules

$$\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{e^{mz}-e^{-mz}}{e^z-1}\,dz = -2\pi\cot m\pi, \quad \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{e^{mz}-e^{-mz}}{e^{z+ih}+1}\,dz = \frac{2\pi\cos mh}{\sin m\pi},$$

la valeur cherchée

$$\int_{-x}^{+x} \frac{(e^{mz}-e^{-mz})(1+\cos h)}{(e^z-1)(e^z+e^{-z}+2\cos h)}\,dz = \pi\,\frac{\cos mh - \cos m\pi}{\sin m\pi}.$$

Ramenons encore ces intégrales à avoir pour limites zéro et l'infini, on obtiendra ces formules

$$\frac{\sin mh}{\sin m\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{(e^{mz}+e^{-mz})\sin h}{e^z+e^{-z}+2\cos h}\,dz,$$

$$\frac{\cos mh - \cos m\pi}{\sin m\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{(e^z+1)(e^{mz}-e^{-mz})(1+\cos h)}{(e^z-1)(e^z+e^{-z}+2\cos h)}\,dz,$$

où figurent des fonctions paires de la variable sous les signes d'intégration.

Elles donnent le résultat auquel je voulais arriver en faisant: $m = \frac{\lambda}{\pi}$ et $h = \pi(1-2x)$, de sorte que λ soit compris entre $-\pi$ et $+\pi$ et x entre zéro et l'unité. Il suffit, en effet, de remplacer z par πz, pour avoir

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\sin\lambda + \sin(2x-1)\lambda}{2\sin\lambda} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\pi x \int_0^\infty \frac{e^{\lambda z}+e^{-\lambda z}}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}-2\cos 2\pi x}\,dz, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{\cos\lambda - \cos(2x-1)\lambda}{2\sin\lambda} \\ &= -\sin^2\pi x \int_0^\infty \frac{(e^{\pi z}+1)(e^{\lambda z}-e^{-\lambda z})}{(e^{\pi z}-1)(e^{\pi z}+e^{-\pi z}-2\cos 2\pi x)}\,dz, \end{aligned}$$

et l'on voit immédiatement que le théorème de M. Raabe se tire de de la première égalité en égalant les coefficients de λ^{2m} dans les deux membres. Mais on parvient, en outre, à étendre de la manière suivante, les importantes propositions de M. Malmsten à l'égard des polygones $B''(x)$ et $B(x)$. Remarquant que les dérivées d'un ordre quelconque par rapport à λ, des deux intégrales

$$\int_0^\infty \frac{e^{\lambda z}+e^{-\lambda z}}{e^{\pi z}+e^{-\pi z}-2\cos 2\pi x}\,dz,$$

$$\int_0^\infty \frac{(e^{\pi z}+1)(e^{\lambda z}-e^{-\lambda z})}{(e^{\pi z}-1)(e^{\pi z}+e^{-\pi z}-2\cos 2\pi x)}\,dz,$$

sont essentiellement positives si λ est lui-même positif, nous en concluons, en effet, qu'en supposant λ compris entre zéro et π, si l'on fait croître x de zéro à l'unité, les dérivées de la fonction $\varphi(x)$ par rapport à λ, seront toutes positives de $x = 0$ à $x = \frac{1}{2}$ et négatives de $x = \frac{1}{2}$ à $x = 1$, tandis que la fonction $\psi(x)$ et ses dérivées par rapport à λ seront toujours négatives de $x = 0$ à $x = 1$.

Je rattacherai enfin les développements en séries de sinus et de cosinus des arcs multiples de $2\pi x$ que Raabe a donnés pour les fonctions de $B''(x)$ et $B'(x)$, à ces formules connues, et qui subsistent entre les limites $x = 0$ et $x = 1$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} + \pi\left[\frac{\sin 2\pi x}{\lambda^2-\pi^2} + \frac{2\sin 4\pi x}{\lambda^2-4\pi^2} + \frac{3\sin 6\pi x}{\lambda^2-9\pi^2} + \ldots\right],$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\cot\lambda - \frac{1}{2\lambda} - \pi\lambda\left[\frac{\cos 2\pi x}{\lambda^2-\pi^2} + \frac{\cos 4\pi x}{\lambda^2-4\pi^2} + \frac{\cos 6\pi x}{\lambda^2-9\pi^2} + \ldots\right].$$

Il suffit, en effet, pour y arriver, d'égaler les coefficients des mêmes puissances de λ dans les deux membres.

Paris, 1er novembre 1874.