SUR

LA FONCTION EXPONENTIELLE.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LXXVII, 1873, p. 18-24, 74-79, 226-233, 285-293.

I. Étant donné un nombre quelconque de quantités numériques $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, on sait qu'on peut en approcher simultanément par des fractions de même dénominateur, de telle sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{A_1}{A} + \frac{\delta_1}{A\sqrt{A}}, \\ \alpha_2 &= \frac{A_2}{A} + \frac{\delta_2}{A\sqrt[n]{A}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_n &= \frac{A_n}{A} + \frac{\delta_n}{A\sqrt[n]{A}}, \end{aligned}$$

$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ ne pouvant dépasser une limite qui dépend seulement de n. C'est, comme on voit, une extension du mode d'approximation résultant de la théorie des fractions continues, qui correspondrait au cas le plus simple de $n = 1$. Or, on peut se proposer une généralisation semblable de la théorie des fractions continues algébriques, en cherchant les expressions approchées de n fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ par des fractions rationnelles $\frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)}, \frac{\Phi_2(x)}{\Phi(x)}, \ldots, \frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)}$, de manière que les développements en série suivant les puissances croissantes de la variable coïncident jusqu'à une puissance déterminée x^M. Voici d'abord, à cet égard, un premier résultat qui s'offre immédiatement. Supposons que les

fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ soient toutes développables en séries de la forme $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots$ et faisons

$$\Phi(x) = A x^m + B x^{m-1} + \ldots + K x + L.$$

On pourra, en général, disposer des coefficients A, B, ..., L de manière à annuler dans les n produits $\varphi_i(x)\Phi(x)$ les termes en

$$x^M, \quad x^{M-1}, \quad \ldots, \quad x^{M-\mu_i+1},$$

μ_i étant un nombre entier arbitraire. Nous poserons ainsi un nombre d'équations homogènes de premier degré égal précisément à μ_i, et l'on aura

$$\varphi_i(x)\Phi(x) = \Phi_i(x) + \varepsilon_1 x^{M+1} + \varepsilon_2 x^{M+2} + \ldots,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ étant des constantes, $\Phi_i(x)$ un polynome entier de degré $M - \mu_i$. Or, cette relation donnant

$$\varphi_i(x) = \frac{\Phi_i(x)}{\Phi(x)} + \frac{\varepsilon_1 x^{M+1} + \varepsilon_2 x^{M+2} + \ldots}{\Phi(x)},$$

on voit que les développements en série de la fraction rationnelle et de la fonction seront, en effet, les mêmes jusqu'aux termes en x^M, et, comme le nombre total des équations posées est $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$, il suffit d'assujettir à la seule condition

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = m$$

les entiers μ_i restés jusqu'ici absolument arbitraires. C'est cette considération si simple qui a servi de point de départ à l'étude de la fonction exponentielle que je vais exposer, me proposant d'en faire l'application aux quantités

$$\varphi_1(x) = e^{ax}, \quad \varphi_2(x) = e^{bx}, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x) = e^{hx}.$$

II. Soit, pour abréger, $M - m = \mu$; je compose avec les constantes $a, b, \ldots, h$ le polynome

$$F(z) = z^{\mu}(z-a)^{\mu_1}(z-b)^{\mu_2}\ldots(z-h)^{\mu_n},$$

de degré $\mu + \mu_1 + \ldots + \mu_n = M$, et j'envisage les n intégrales définies

$$\int_0^a e^{-zx} F(z)\,dz, \qquad \int_0^b e^{-zx} F(z)\,dz, \qquad \ldots, \qquad \int_0^h e^{-zx} F(z)\,dz,$$

qu'il est facile d'obtenir sous forme explicite. Faisant, en effet,

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{F(z)}{x} + \frac{F'(z)}{x^2} + \ldots + \frac{F^{(M)}(z)}{x^{M+1}},$$

nous aurons

$$\int e^{-zx}\,F(z)\,dz = -\,e^{-zx}\,\mathfrak{F}(z),$$

et, par conséquent,

$$\int_0^a e^{-zx}\,F(z)\,dz = \mathfrak{F}(0) - e^{-ax}\,\mathfrak{F}(a),$$

$$\int_0^b e^{-zx}\,F(z)\,dz = \mathfrak{F}(0) - e^{-bx}\,\mathfrak{F}(b),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Or l'expression de $\mathfrak{F}(z)$ donne immédiatement, sous forme de polynomes ordonnés suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$, les diverses quantités $\mathfrak{F}(0)$, $\mathfrak{F}(a)$, $\mathfrak{F}(b)$, ..., et si l'on observe qu'on a

$$F(0) = 0, \qquad F'(0) = 0, \qquad \ldots, \qquad F^{(\mu-1)}(0) = 0,$$

puis successivement,

$$F(a) = 0, \qquad F'(a) = 0, \qquad \ldots, \qquad F^{(\mu_1-1)}(a) = 0,$$
$$F(b) = 0, \qquad F'(b) = 0, \qquad \ldots, \qquad F^{(\mu_2-1)}(b) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

nous en conclurons les résultats suivants

$$\mathfrak{F}(0) = \frac{\Phi(x)}{x^{M+1}}, \qquad \mathfrak{F}(a) = \frac{\Phi_1(x)}{x^{M+1}}, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{F}(h) = \frac{\Phi_n(x)}{x^{M+1}},$$

où le polynome entier $\Phi(x)$ est du degré $M - \mu = m$, et les autres $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, ..., $\Phi_n(x)$, des degrés $M - \mu_1$, $M - \mu_2$, ..., $M - \mu_n$. Cela posé, nous écrirons

$$e^{ax}\,\Phi(x) - \Phi_1(x) = x^{M+1} e^{ax} \int_0^a e^{-zx}\,F(z)\,dz,$$

$$e^{bx}\,\Phi(x) - \Phi_2(x) = x^{M+1} e^{bx} \int_0^b e^{-zx}\,F(z)\,dz,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$e^{hx}\,\Phi(x) - \Phi_n(x) = x^{M+1} e^{hx} \int_0^h e^{-zx}\,F(z)\,dz;$$

or, les intégrales définies se développant en séries de la forme $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots$, on voit que les conditions précédemment posées comme définitions du nouveau mode d'approximation des fonctions se trouvent entièrement remplies. Nous avons ainsi obtenu, dans toute sa généralité, le système des fractions rationnelles $\frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)}$, $\frac{\Phi_2(x)}{\Phi(x)}$, ..., $\frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)}$, de même dénominateur, représentant les fonctions e^{ax}, e^{bx}, ..., e^{hx}, aux termes près de l'ordre x^{M+1}.

III. Soit, comme application, $n = 1$, et supposons de plus $\mu = \mu_1 = m$, ce qui donnera

$$M = 2m, \qquad F(z) = z^m (z-1)^m;$$

les dérivées de $F(z)$ pour $z = 0$ se tirent sur-le-champ du développement par la formule du binome

$$F(z) = z^{2m} - \frac{m}{1} z^{2m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} z^{2m-2} - \ldots + (-1)^m z^m,$$

et l'on obtient

$$\frac{F^{(2m-k)}(0)}{1.2.3\ldots 2m-k} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2.3\ldots k}(-1)^k,$$

d'où, par suite,

$$\frac{\Phi(x)}{1.2.3\ldots m} = 2m(2m-1)\ldots(m+1) - (2m-1)(2m-2)\ldots(m+1)\frac{m}{1}x$$
$$+ (2m-2)(2m-3)\ldots(m+1)\frac{m(m-1)}{1.2}x^2 - \ldots + (-1)^m x^m.$$

Pour avoir, en second lieu, les valeurs des dérivées quand on suppose $z = 1$, nous poserons $z = 1 + h$, afin de développer suivant les puissances de h le polynome $F(1+h) = h^m (h+1)^m$. Or les coefficients précédemment obtenus se reproduisant, sauf le signe, on voit qu'on aura

$$\Phi_1(x) = \Phi(-x).$$

Ces résultats conduisent à introduire, au lieu de $\Phi(x)$ et $\Phi_1(x)$, les polynomes

$$\Pi(x) = \frac{\Phi(x)}{1.2.3\ldots m}, \qquad \Pi_1(x) = \frac{\Phi_1(x)}{1.2.3\ldots m},$$

dont les coefficients sont des nombres entiers; on aura ainsi

$$\begin{aligned} e^x \Pi(x) - \Pi_1(x) &= \frac{x^{2m+1}}{1.2.3\ldots m} e^x \int_0^1 e^{-zx} z^m (z-1)^m \, dz \\ &= (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{1.2.3\ldots m} \int_0^1 e^{x(1-z)} z^m (1-z)^m \, dz, \end{aligned}$$

et l'on met en évidence que le premier membre peut devenir, pour une valeur suffisamment grande de m, plus petit que toute quantité donnée. Nous savons effectivement que le facteur $\frac{x^{2m+1}}{1.2.3\ldots m}$ a zéro pour limite, et il en est de même de l'intégrale, la quantité $z^m(1-z)^m$ étant toujours inférieure à son maximum $\left(\frac{1}{2}\right)^m$ qui décroît indéfiniment quand m augmente. Il résulte de là qu'en supposant x un nombre entier, l'exponentielle e^x ne peut avoir une valeur commensurable; car si l'on fait $e^x = \frac{b}{a}$, on parvient, après avoir chassé le dénominateur, à l'égalité

$$b\,\Pi(x) - a\,\Pi_1(x) = (-1)^m \frac{a x^{2m+1}}{1.2.3\ldots m} \int_0^1 e^{x(1-x)} z^m (1-z)^m \, dz,$$

dont le second membre peut devenir moindre que toute grandeur donnée, et sans jamais s'évanouir, tandis que le premier est un nombre entier. Lambert, à qui l'on doit cette proposition, ainsi que la seule démonstration, jusqu'à ce jour obtenue, de l'irrationnalité du rapport de la circonférence au diamètre et de son carré, a tiré ces importants résultats de la fraction continue

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \ldots}}}$$

à laquelle nous parviendrons plus tard. Laissant entièrement de côté le rapport de la circonférence au diamètre, je vais maintenant tenter d'aller plus loin à l'égard du nombre e, en établissant l'impossibilité d'une relation de la forme

$$\mathrm{N} + e^a \mathrm{N}_1 + e^b \mathrm{N}_2 + \ldots + e^h \mathrm{N}_n = 0,$$

$a, b, \ldots, h$ étant des nombres entiers, ainsi que les coefficients N, $\mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_n$.

IV. Je considère, à cet effet, parmi les divers systèmes de fractions rationnelles $\frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)}, \frac{\Phi_2(x)}{\Phi(x)}, \ldots, \frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)}$, celui qu'on obtient lorsqu'on suppose $\mu = \mu_1 = \ldots = \mu_n$, ce qui donne

$$m = n\mu, \qquad \mathrm{M} = (n+1)\mu \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F}(z) = f^\mu(z),$$

en faisant

$$f(z) = z(z-a)(z-b)\ldots(z-h).$$

Soit alors, comme tout à l'heure,

$$\Pi(x) = \frac{\Phi(x)}{1.2.3\ldots\mu}, \qquad \Pi_1(x) = \frac{\Phi_1(x)}{1.2.3\ldots\mu}, \qquad \ldots, \qquad \Pi_n(x) = \frac{\Phi_n(x)}{1.2.3\ldots\mu};$$

ces nouveaux polynomes auront encore, pour leurs coefficients, des nombres entiers, et conduiront aux relations suivantes :

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} e^{ax}\Pi(x) - \Pi_1(x) = \varepsilon_1, \\ e^{bx}\Pi(x) - \Pi_2(x) = \varepsilon_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e^{hx}\Pi(x) - \Pi_n(x) = \varepsilon_n, \end{array} \right.$$

en écrivant, pour abréger,

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{x^{\mathrm{M}+1} e^{ax}}{1.2.3\ldots\mu} \int_0^a e^{-zx} \mathrm{F}(z)\, dz = \int_0^a e^{x(a-z)} \frac{f^\mu(z) x^{(n+1)\mu+1}}{1.2.3\ldots\mu} dz, \\ \varepsilon_2 &= \frac{x^{\mathrm{M}+1} e^{bx}}{1.2.3\ldots\mu} \int_0^b e^{-zx} \mathrm{F}(z)\, dz = \int^b e^{x(b-z)} \frac{f^\mu(z) x^{(n+1)\mu+1}}{1.2.3\ldots\mu} dz, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Cela posé, j'observe en premier lieu que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ deviennent, pour une valeur suffisamment grande de μ, plus petits que toute quantité donnée; car, le polynome $f(z)$ ne dépassant jamais une certaine limite λ dans l'intervalle parcouru par la variable, le facteur $\frac{f^\mu(z) x^{(n+1)\mu+1}}{1.2.3\ldots\mu}$, qui multiplie l'exponentielle sous le signe d'intégration, est constamment inférieur à la quantité $\frac{(\lambda x^{n+1})^\mu x}{1.2.3\ldots\mu}$, qui a zéro pour limite.

Je suppose maintenant $x = 1$ dans les équations (A), et, désignant alors par P_i la valeur correspondante de $\Pi_i(x)$ qui sera un nombre entier dans l'hypothèse admise à l'égard de $a, b, \ldots, h$, elles deviendront

$$\begin{gathered} e^a \mathrm{P} - \mathrm{P}_1 = \varepsilon_1, \\ e^b \mathrm{P} - \mathrm{P}_2 = \varepsilon_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ e^h \mathrm{P} - \mathrm{P}_n = \varepsilon_n, \end{gathered}$$

et la relation supposée

$$\mathrm{N} + e^a \mathrm{N}_1 + e^b \mathrm{N}_2 + \ldots + e^h \mathrm{N}_n = 0$$

donnera facilement celle-ci,

$$\mathrm{NP} + \mathrm{N}_1 \mathrm{P}_1 + \ldots + \mathrm{N}_n \mathrm{P}_n = -(\mathrm{N}_1 \varepsilon_1 + \mathrm{N}_2 \varepsilon_2 + \ldots + \mathrm{N}_n \varepsilon_n),$$

dont le premier membre est essentiellement entier, le second, d'après ce qui a été établi relativement à $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ pouvant, lorsque μ augmente, devenir plus petit que toute grandeur donnée. On aura donc nécessairement, à partir d'une certaine valeur de μ et pour toutes les valeurs plus grandes,

$$\mathrm{NP} + \mathrm{N}_1 \mathrm{P}_1 + \ldots + \mathrm{N}_n \mathrm{P}_n = 0.$$

Supposons, en conséquence, que, μ devenant successivement $\mu + 1, \mu + 2, \ldots, \mu + n$, P_i se change en $\mathrm{P}'_i, \mathrm{P}''_i, \ldots, \mathrm{P}^{(n)}_i$; on aura de même

$$\begin{array}{l} \mathrm{NP}' + \mathrm{N}_1 \mathrm{P}'_n + \ldots + \mathrm{N}_n \mathrm{P}'_n = 0, \\ \mathrm{NP}'' + \mathrm{N}_1 \mathrm{P}''_1 + \ldots + \mathrm{N}_n \mathrm{P}''_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{NP}^{(n)} + \mathrm{N}_1 \mathrm{P}^{(n)}_1 + \ldots + \mathrm{N}_n \mathrm{P}^{(n)}_n = 0. \end{array}$$

Ces relations entraînent la condition suivante :

$$\begin{vmatrix} \mathrm{P} & \mathrm{P}_1 & \ldots & \mathrm{P}_n \\ \mathrm{P}' & \mathrm{P}'_1 & \ldots & \mathrm{P}'_n \\ \mathrm{P}'' & \mathrm{P}''_1 & \ldots & \mathrm{P}''_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{P}^{(n)} & \mathrm{P}^{(n)}_1 & \ldots & \mathrm{P}^{(n)}_n \end{vmatrix} = 0.$$

En prouvant donc que ce déterminant est différent de zéro, on

démontrera l'impossibilité de la relation admise

$$\mathrm{N} + e^a \mathrm{N}_1 + e^b \mathrm{N}_2 + \ldots + e^h \mathrm{N}_n = 0.$$

J'observerai dans ce but qu'on peut substituer aux termes d'une même ligne horizontale des combinaisons linéaires semblables pour toutes ces lignes, et que j'indiquerai en considérant, par exemple, la première. Elle consiste à remplacer respectivement P, $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}, \mathrm{P}_n$ par $\mathrm{P} - e^{-a}\mathrm{P}_1$, $e^{-a}\mathrm{P}_1 - e^{-b}\mathrm{P}_2, \ldots$, $e^{-g}\mathrm{P}_{n-1} - e^{-h}\mathrm{P}_n$, $e^{-h}\mathrm{P}_n$; il est alors aisé de voir que, si l'on multiplie toutes ces quantités par $1.2.3\ldots\mu$, elles deviennent précisément les intégrales

$$\int_0^a e^{-z} f^{\mu}(z)\,dz, \quad \int_a^b e^{-z} f^{\mu}(z)\,dz, \quad \ldots,$$
$$\int_g^h e^{-z} f^{\mu}(z)\,dz, \quad \int_h^{\infty} e^{-z} f^{\mu}(z)\,dz.$$

Maintenant les autres lignes se déduisent de celle-là par le changement de μ en $\mu + 1, \mu + 2, \ldots, \mu + n$, et le déterminant transformé sur lequel nous allons raisonner est le suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \displaystyle\int_0^a e^{-z} f^{\mu}(z)\,dz, & \displaystyle\int_a^b e^{-z} f^{\mu}(z)\,dz, & \ldots, & \displaystyle\int_h^{\infty} e^{-z} f^{\mu}(z)\,dz \\ \displaystyle\int_0^a e^{-z} f^{\mu+1}(z)\,dz, & \displaystyle\int_a^b e^{-z} f^{\mu+1}(z)\,dz, & \ldots, & \displaystyle\int_h^{\infty} e^{-z} f^{\mu+1}(z)\,dz \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \displaystyle\int_0^a e^{-z} f^{\mu+n}(z)\,dz, & \displaystyle\int_a^b e^{-z} f^{\mu+n}(z)\,dz, & \ldots, & \displaystyle\int_h^{\infty} e^{-z} f^{\mu+n}(z)\,dz \end{vmatrix}.$$

V. Nous devons supposer, comme on l'a vu précédemment, que μ est un grand nombre ; c'est ce qui conduit à déterminer, au moyen de la belle méthode donnée par Laplace (*De l'intégration par approximation des différentielles qui renferment des facteurs élevés à de grandes puissances* dans la *Théorie analytique des Probabilités*, p. 88), l'expression asymptotique des intégrales

$$\int_0^a e^{-z} f^{\mu}(z)\,dz, \quad \int_a^b e^{-z} f^{\mu}(z)\,dz, \quad \ldots, \quad \int_h^{\infty} e^{-z} f^{\mu}(z)\,dz,$$

afin d'en conclure pour Δ une valeur approchée, dont le rapport à la valeur exacte soit l'unité pour μ infini. Admettant, à cet effet, que les nombres entiers $a, b, \ldots, h$ soient tous positifs et rangés par ordre croissant de grandeur, de sorte que, dans chaque intégrale, la fonction $e^{-z} f^{\mu}(z)$, qui s'annule aux limites, ne présente, dans l'intervalle, qu'un seul maximum, je considérerai en premier lieu l'équation

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{\mu},$$

dont dépendent tous ces maxima. Or on sait que ses racines sont réelles et comprises, la première z_1 entre zéro et a, la seconde z_2 entre a et b, et ainsi de suite, la plus grande z_{n+1} étant supérieure à h. Envisagées comme fonctions de μ, il est aisé de voir qu'elles croissent lorsque μ augmente, et qu'en désignant par $p, q, \ldots, s$ les racines de l'équation dérivée $f'(z) = 0$, rangées par ordre croissant de grandeur, on aura, si l'on néglige $\frac{1}{\mu^2}$,

$$z_1 = p + \frac{1}{\mu} \frac{f(p)}{f''(p)}, \qquad z_2 = q + \frac{1}{\mu} \frac{f(q)}{f''(q)}, \qquad \ldots, \qquad z_n = s + \frac{1}{\mu} \frac{f(s)}{f''(s)},$$

et, en dernier lieu,

$$z_{n+1} = (n+1)\mu + \frac{a+b+\ldots+h}{n+1},$$

une approximation plus grande n'étant pas alors nécessaire. Cela posé, si l'on écrit pour un instant

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{\sqrt{f'^2(z) - f(z)f''(z)}},$$

les valeurs cherchées seront

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\mu}}\, e^{-z_1} f^{\mu}(z_1)\,\varphi(z_1), \quad \sqrt{\frac{2\pi}{\mu}}\, e^{-z_2} f^{\mu}(z_2)\,\varphi(z_2), \quad \ldots,$$
$$\sqrt{\frac{2\pi}{\mu}}\, e^{-z_{n+1}} f^{\mu}(z_{n+1})\,\varphi(z_{n+1});$$

mais ces quantités se simplifient, comme on va le voir.

Considérant la première pour fixer les idées, j'observe que nous avons

$$z_1 = p + \frac{1}{\mu} \frac{f(p)}{f''(p)},$$

où p satisfait à la condition $f'(p) = 0$; on en conclut $f(x_1) = f(p)$, en négligeant seulement $\frac{1}{\mu^2}$. Par conséquent, si l'on pose

$$f(z_1) = f(p)\left(1 + \frac{\alpha}{\mu^2} + \frac{\alpha'}{\mu^3} + \ldots\right),$$

puis d'une manière analogue

$$\varphi(z_1) = \varphi(p)\left(1 + \frac{\beta}{\mu} + \frac{\beta'}{\mu^2} + \ldots\right),$$

on aura d'abord

$$f^{\mu}(z_1) = f^{\mu}(p)\left(1 + \frac{\alpha}{\mu} + \ldots\right),$$

et l'on en tire aisément

$$f^{\mu}(z_1)\,\varphi(z_1) = f^{\mu}(p)\,\varphi(p)\left(1 + \frac{\gamma}{\mu} + \frac{\gamma'}{\mu^2} + \ldots\right).$$

Ainsi, en négligeant seulement des quantités infiniment petites par rapport au terme conservé, nous pouvons écrire

$$\int_0^a e^{-z} f^{\mu}(z)\,dz = \sqrt{\frac{2\pi}{\mu}}\, e^{-p} f^{\mu}(p)\,\varphi(p),$$

et l'on aura de même

$$\int_a^b e^{-z} f^{\mu}(z)\,dz = \sqrt{\frac{2\pi}{\mu}}\, e^{-q} f^{\mu}(q)\,\varphi(q),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\int_g^h e^{-z} f^{\mu}(z)\,dz = \sqrt{\frac{2\pi}{\mu}}\, e^{-s} f^{\mu}(s)\,\varphi(s).$$

Mais la dernière intégrale $\int_h^{\infty} e^{-z} f^{\mu}(z)\,dz$ est d'une forme analytique différente, en raison de la valeur $z_{n+1} = (n+1)\mu$ qui devient infinie avec μ. Pour y parvenir, je développerai, suivant les puissances descendantes de la variable, l'expression

$$\log[e^{-z} f^{\mu}(z)\,\varphi(z)],$$

en négligeant les termes en $\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \ldots$, ce qui permet d'écrire

$$\log f(z) = (n+1)\log z, \qquad \log \varphi z = \log \frac{z^{n+1}}{\sqrt{(n+1)z^{2n} + \ldots}} = \log \frac{z}{\sqrt{n+1}},$$

et, par suite,

$$\log[e^{-z} f^{\mu}(z)\varphi(z)] = (n\mu + \mu + 1)\log z - z - \tfrac{1}{2}\log(n+1).$$

Après avoir substitué la valeur de z_{n+1}, une réduction facile nous donnera, en faisant, pour abréger,

$$\theta(\mu) = (n\mu + \mu + 1)\log(n+1)\mu - (n+1)\mu - \tfrac{1}{2}\log(n+1),$$

cette expression semblable à celle des intégrales eulériennes de première espèce

$$\int_h^{\infty} e^{-z} f^{\mu}(z)\,dz = \sqrt{\frac{2\pi}{\mu}}\,e^{\theta(\mu)}.$$

Maintenant on va voir comment les résultats ainsi obtenus conduisent aisément à la valeur du déterminant Δ.

VI. J'effectuerai d'abord une première simplification en supprimant, dans les termes de la ligne horizontale de rang i, le facteur $\sqrt{\dfrac{2\pi}{\mu+i}}$, puis une seconde, en divisant tous les termes d'une même colonne verticale par le premier d'entre eux. Le nouveau déterminant ainsi obtenu, si l'on fait, pour abréger,

$$P = f(p), \qquad Q = f(q), \qquad \ldots, \qquad S = f(s),$$

sera évidemment

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ P & Q & S & e^{\theta(\mu+1)-\theta(\mu)} \\ P^2 & Q^2 & S^2 & e^{\theta(\mu+2)-\theta(\mu)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P^n & Q^n & S^n & e^{\theta(\mu+n)-\theta(\mu)} \end{vmatrix}.$$

Or, on voit que μ ne figure plus que dans une colonne, dont les termes croissent d'une telle manière que le dernier $e^{\theta(\mu+n)-\theta(\mu)}$ est infiniment plus grand que tous les autres. Nous avons, en effet,

$$\begin{aligned} \theta(\mu+i) &= \theta(\mu) + i\theta'(\mu) + \frac{i^2}{2}\theta''(\mu) + \ldots \\ &= \theta(\mu) + i\left[\frac{1}{\mu} + (n+1)\log(n+1)\mu\right] \\ &\quad + \frac{i^2}{2}\left(-\frac{1}{\mu^2} + \frac{n+1}{\mu}\right) + \ldots, \end{aligned}$$

et, par conséquent, si l'on néglige $\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu^2}, \ldots,$

$$\theta(\mu+i) - \theta(\mu) = i(n+1)\log(n+1)\mu,$$

d'où

$$e^{\theta(\mu+i)-\theta(\mu)} = [(n+1)\mu]^{i(n+1)}.$$

En ne conservant donc dans le déterminant que le terme en μ de l'ordre le plus élevé, il se réduit simplement à cette expression

$$[(n+1)\mu]^{n(n+1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ P & Q & S \\ P^2 & Q^2 & S^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P^{n-1} & Q^{n-1} & S^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Il en résulte qu'on ne peut, en général, admettre que le déterminant proposé Δ s'annule, car les quantités $P = f(p)$, $Q = f(q)$, ..., fonctions entières semblables des racines $p, q, \ldots$ de l'équation dérivée $f'(x) = 0$, seront, comme ces racines, différentes entre elles. C'est ce qu'il fallait établir pour démontrer l'impossibilité de toute relation de la forme

$$N + e^a N_1 + e^b N_2 + \ldots + e^h N_n = 0,$$

et arriver ainsi à prouver que *le nombre e ne peut être racine d'une équation algébrique de degré quelconque à coefficients entiers.*

Mais une autre voie conduira à une seconde démonstration plus rigoureuse; on peut, en effet, comme on va le voir, étendre aux fractions rationnelles

$$\frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)}, \quad \frac{\Phi_2(x)}{\Phi(x)}, \quad \ldots, \quad \frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)}$$

le mode de formation des réduites donné par la théorie des fractions continues, et par là mettre plus complètement en évidence le caractère arithmétique d'une irrationnelle non algébrique. Dans cet ordre d'idées, M. Liouville a déjà obtenu un théorème remarquable qui est l'objet de son travail intitulé : *Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni* *même réductible à des irrationnelles algébriques* [1], et je rappellerai aussi que l'illustre géomètre a démontré le premier la proposition qui est le sujet de ces recherches pour les cas de l'équation du second degré et de l'équation bicarrée [*Note sur l'irrationnalité du nombre e* (*Journal de Mathématiques*, t. V, p. 192)]. Sous le point de vue auquel je me suis placé, voici la première proposition à établir :

VII. *Soient* $\mathrm{F}(z)$, $\mathrm{F}_1(z)$, …, $\mathrm{F}_{n+1}(z)$ *les polynomes déduits de l'expression*

$$z^{\mu}(z-a)^{\mu_1}(z-b)^{\mu_2}\ldots(z-h)^{\mu_n},$$

lorsqu'on attribue aux exposants μ, μ_1, …, μ_n, $n+2$ *systèmes différents de valeurs entières et positives. En représentant, en général, par* $\dfrac{\Phi_i^k(x)}{\Phi^k(x)}$ *les fractions convergentes vers les exponentielles, qui correspondent à l'un quelconque d'entre eux* $\mathrm{F}_k(z)$, *on pourra toujours déterminer les quantités* A, B, C, …, L *par les équations suivantes :*

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}\Phi(x)+\mathrm{B}\Phi^1(x)+\mathrm{C}\Phi^2(x)+\ldots+\mathrm{L}\Phi^{n+1}(x)=0,\\
&\mathrm{A}\Phi_1(x)+\mathrm{B}\Phi_1^1(x)+\mathrm{C}\Phi_1^2(x)+\ldots+\mathrm{L}\Phi_1^{n+1}(x)=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mathrm{A}\Phi_n(x)+\mathrm{B}\Phi_n^1(x)+\mathrm{C}\Phi_n^2(x)+\ldots+\mathrm{L}\Phi_n^{n+1}(x)=0.
\end{aligned}$$

Mais, au lieu de conclure de telles relations des polynomes $\Phi_i^k(x)$ supposés connus, notre objet est de les obtenir directement et *a priori*; je vais établir pour cela qu'il existe, entre les intégrales indéfinies

$$\int e^{-zx}\mathrm{F}(z)\,dz,\quad \int e^{-zx}\mathrm{F}_1(z)\,dz,\quad \ldots,\quad \int e^{-zx}\mathrm{F}_{n+1}(z)\,dz,$$

une équation de la forme

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\int e^{-zx}\mathrm{F}(z)\,dz+\mathcal{B}\int e^{-zx}\mathrm{F}_1(z)\,dz+\ldots&\\
+\mathcal{L}\int e^{-zx}\mathrm{F}_{n+1}(z)\,dz&=e^{-zx}\Theta(z),
\end{aligned}$$

[1] *Comptes rendus*, t. XVIII, p. 883 et 910.

les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, …, $\mathcal{L}$ étant indépendants de z, et $\Theta(z)$ un polynome entier divisible par $f(z)$. Si l'on fait, en effet,

$$\mathcal{F}_k(z)=\frac{\mathrm{F}_k(z)}{x}+\frac{\mathrm{F}'_k(z)}{x^2}+\frac{\mathrm{F}''_k(z)}{x^3}+\ldots,$$

on aura

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}\int e^{-zx}\mathrm{F}(z)\,dz+\mathcal{B}\int e^{-zx}\mathrm{F}_1(z)\,dz+\ldots+\mathcal{L}\int e^{-zx}\mathrm{F}_{n+1}(z)\,dz\\
&\quad=-e^{-zx}[\mathcal{A}\mathcal{F}(z)+\mathcal{B}\mathcal{F}_1(z)+\ldots+\mathcal{L}\mathcal{F}_{n+1}(z)],
\end{aligned}$$

et il est clair que les rapports $\dfrac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}$, $\dfrac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}}$, …, $\dfrac{\mathcal{L}}{\mathcal{A}}$ pourront être déterminés, et d'une seule manière, par la condition supposée que le polynome

$$\Theta(z)=-[\mathcal{A}\mathcal{F}(z)+\mathcal{B}\mathcal{F}_1(z)+\ldots+\mathcal{L}\mathcal{F}_{n+1}(z)]$$

contienne comme facteur

$$f(z)=z(z-a)(z-b)\ldots(z-h).$$

Nous conclurons de là en prenant les intégrales entre les limite $z=0$ et $z=a$, par exemple,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}\int_0^a e^{-zx}\mathrm{F}(z)\,dz+\mathcal{B}\int_0^a e^{-zx}\mathrm{F}_1(z)\,dz+\ldots&\\
+\mathcal{L}\int_0^a e^{-zx}\mathrm{F}_{n+1}(z)\,dz&=0.
\end{aligned}$$

Maintenant, les relations

$$\begin{aligned}
&\int_0^a e^{-zx}\mathrm{F}(z)\,dz=\frac{e^{ax}\Phi(x)-\Phi_1(x)}{e^{ax}x^{\mathrm{M}+1}},\\
&\int_0^a e^{-zx}\mathrm{F}_1(z)\,dz=\frac{e^{ax}\Phi_1(x)-\Phi'_1(x)}{e^{ax}x^{\mathrm{M}_1+1}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

donneront, en égalant séparément à zéro le terme algébrique et le coefficient de l'exponentielle e^{ax}, si l'on fait, pour abréger,

$$\mathrm{A}=\frac{\mathcal{A}}{x^{\mathrm{M}+1}},\qquad \mathrm{B}=\frac{\mathcal{B}}{x^{\mathrm{M}_1+1}},\qquad \ldots,\qquad \mathrm{L}=\frac{\mathcal{L}}{x^{\mathrm{M}_{n+1}+1}},$$

les égalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}\,\Phi(x) + \mathrm{B}\,\Phi^1(x) + \ldots + \mathrm{L}\,\Phi^{n+1}(x) = 0,\\
&\mathrm{A}\,\Phi_1(x) + \mathrm{B}\,\Phi_1^1(x) + \ldots + \mathrm{L}\,\Phi_1^{n+1}(x) = 0.
\end{aligned}
$$

Or, on aura de même, en prenant pour limites supérieures des intégrales $z = b, c, \ldots, h$,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}\,\Phi_2(x) + \mathrm{B}\,\Phi_2^1(x) + \ldots + \mathrm{L}\,\Phi_2^{n+1}(x) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mathrm{A}\,\Phi_n(x) + \mathrm{B}\,\Phi_n^1(x) + \ldots + \mathrm{L}\,\Phi_n^{n+1}(x) = 0,
\end{aligned}
$$

et il est aisé de voir que les coefficients A, B, ..., L pourront être supposés des polynomes entiers en x. L'intégrale

$$\int_0^1 e^{-zx} z^m (z-1)^m \, dz,$$

qui figure dans la relation précédemment considérée (p. 154),

$$e^x \Pi(x) - \Pi_1(x) = \frac{x^{2m+1} e^x}{1.2.3\ldots m} \int_0^1 e^{-zx} z^m (z-1)^m \, dz,$$

nous servira d'abord d'exemple.

VIII. Dans ce cas facile, où l'on a simplement

$$f(z) = z(z-1),$$

je partirai, en supposant

$$\Theta(z) = x f^{m+1}(z) + (m+1) f^m(z) f'(z),$$

de l'identité suivante :

$$
\begin{aligned}
\frac{d[e^{-zx}\Theta(z)]}{dz} &= e^{-zx}[\Theta'(z) - x\Theta(z)]\\
&= e^{-zx}[-x^2 f^{m+1}(z) + (m+1) f^m(z) f''(z)\\
&\qquad + m(m+1) f^{m-1} f'^2(z)],
\end{aligned}
$$

et j'observerai que

$$f'^2(z) = 4z^2 - 4z + 1 = 4f(z) + 1, \qquad f''(z) = 2,$$

ce qui permet de l'écrire ainsi :

$$
\begin{aligned}
\frac{d[e^{-zx}\Theta(z)]}{dx} = e^{-zx}[&-x^2 f^{m+1}(z)\\
&+ (2m+1)(2m+2) f^m(z) + m(m+1) f^{m-1}(z)].
\end{aligned}
$$

Nous aurons donc, en intégrant,

$$
\begin{aligned}
e^{-zx}\Theta(z) = -x^2 \int e^{-zx} f^{m+1}(z)\,dz &+ (2m+1)(2m+2)\int e^{-zx} f^m(z)\,dz\\
&+ m(m+1)\int e^{-zx} f^{m-1}(z)\,dz,
\end{aligned}
$$

et ensuite, si nous prenons pour limites $z = 0$ et $z = 1$,

$$
\begin{aligned}
x^2 \int_0^1 e^{-zx} f^{m+1}(z)\,dz = (2m+1)(2m+2) &\int_0^1 e^{-zx} f^m(z)\,dz\\
+ m(m+1) &\int_0^1 e^{-zx} f^{m-1}(z)\,dz.
\end{aligned}
$$

Soit maintenant

$$\varepsilon_m = \frac{x^{2m+1} e^x}{1.2\ldots m} \int_0^1 e^{-zx} z^m (z-1)^m \, dz,$$

et cette relation deviendra

$$\varepsilon_{m+1} = (4m+2)\varepsilon_m + x^2 \varepsilon_{m-1}.$$

C'est le résultat auquel nous voulions parvenir; en y supposant successivement $m = 1, 2, 3, \ldots$, les équations qu'on en tire

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_2 &= 6\varepsilon_1 + x^2\varepsilon_0,\\
\varepsilon_3 &= 10\varepsilon_2 + x^2\varepsilon_1,\\
\varepsilon_4 &= 14\varepsilon_3 + x^2\varepsilon_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

donnent aisément la fraction continue

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = -\cfrac{x^2}{6 + \cfrac{x^2}{10 + \cfrac{x^2}{14 + \ldots}}},$$

et il suffit d'employer les valeurs

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= x e^x \int_0^1 e^{-zx}\,dz = e^x - 1,\\
\varepsilon_1 &= x^3 e^x \int_0^1 e^{-zx} z(z-1)\,dz = e^x(2-x) - 2 - x,
\end{aligned}
$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} = 2 - \frac{e^x + 1}{e^x - 1} x,$$

pour retrouver, sauf le changement de x en $\frac{x}{2}$, le résultat de Lambert (¹)

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \cfrac{x}{2 + \cfrac{x^2}{6 + \cfrac{x^2}{10 + \cfrac{x^2}{14 + \ldots}}}}$$

En abordant maintenant le cas général et me proposant d'obtenir, à l'égard des intégrales définies

$$\int_0^a e^{-z} f^m(z)\, dz, \quad \int_0^b e^{-z} f^m(z)\, dz, \quad \ldots, \quad \int_0^h e^{-z} f^m(z)\, dz,$$

un algorithme qui permette de les calculer de proche en proche, pour toutes les valeurs du nombre entier m, j'introduirai, afin de rendre les calculs plus symétriques, les modifications suivantes dans les notations précédemment admises. Je ferai

$$f(z) = (z - z_0)(z - z_1)\ldots(z - z_n),$$

au lieu de

$$f(z) = z(z - a)(z - b)\ldots(z - h),$$

de manière à considérer le polynome le plus général de degré $n + 1$; désignant ensuite par Z l'une quelconque des quantités $z_1, z_2, \ldots, z_n$, je raisonnerai sur l'intégrale

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z} f^m(z)\, dz,$$

qui donnera évidemment toutes celles que nous avons en vue, en faisant $z_0 = 0$. Cela étant, voici la remarque qui m'a ouvert la voie et conduit à la méthode que je vais exposer.

(¹) Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, année 1761, p. 265). *Voir* aussi la Note IV des *Éléments de Géométrie*, de Legendre, p. 288.

IX. En intégrant les deux membres de la relation identique

$$\frac{d[e^{-z} f^m(z)]}{dz} = e^{-z}[m f^{m-1}(z) f'(z) - f^m(z)],$$

on obtient

$$e^{-z} f^m(z) = m \int e^{-z} f^{m-1}(z) f'(z)\, dz - \int e^{-z} f^m(z)\, dz,$$

et, par conséquent,

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z} f^m(z)\, dz = m \int_{z_0}^{Z} e^{-z} f^{m-1}(z) f'(z)\, dz,$$

ou encore

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{Z} e^{-z} f^m(z)\, dz = {} & m \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_0}\, dz \\ & + m \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_1}\, dz + \ldots + m \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_n}\, dz, \end{aligned}$$

d'après la formule

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_0} + \frac{1}{z - z_1} + \ldots + \frac{1}{z - z_n}.$$

Or ce sont ces nouvelles intégrales

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_0}\, dz, \quad \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_1}\, dz, \quad \ldots, \quad \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_n}\, dz$$

qui donnent lieu à un système de relations récurrentes de la forme

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^{m+1}(z)}{z - z_0}\, dz = {} & (00) \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_0}\, dz \\ & + (01) \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_1}\, dz + \ldots + (0n) \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_n}\, dz, \\ \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^{m+1}(z)}{z - z_1}\, dz = {} & (10) \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_0}\, dz \\ & + (11) \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_1}\, dz + \ldots + (1n) \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_n}\, dz, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^{m+1}(z)}{z - z_n}\, dz = {} & (n0) \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_0}\, dz \\ & + (n1) \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_1}\, dz + \ldots + (nn) \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z - z_n}\, dz, \end{aligned}$$

où les coefficients (ik), ainsi que leur déterminant, s'obtiennent d'une manière facile, comme nous verrons.

C'est donc en opérant sur les éléments au nombre de $n+1$, dans lesquels a été décomposée l'intégrale $\int_{z_0}^{Z} e^{-z} f^m(z)\,dz$, que nous parvenons à sa détermination, au lieu de chercher, comme une analogie naturelle aurait paru l'indiquer, une expression linéaire de $\int_{z_0}^{Z} e^{-z} f^{m+n+1}(z)\,dz$, au moyen de

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z} f^m(z)\,dz, \qquad \int_{z_0}^{Z} e^{-z} f^{m+1}(z)\,dz, \qquad \ldots, \qquad \int_{z_0}^{Z} e^{-z} f^{m+n}(z)\,dz.$$

Mais soit, d'une manière plus générale, pour des valeurs entières quelconques des exposants,

$$F(z) = (z-z_0)^{\mu_0}(z-z_1)^{\mu_1}\ldots(z-z_n)^{\mu_n};$$

en intégrant les deux membres de l'identité

$$\frac{d[e^{-z}F(z)]}{dz} = e^{-z}[F'(z) - F(z)],$$

on aura

$$e^{-z}F(z) = \int e^{-z}F'(z)\,dz - \int e^{-z}F(z)\,dz,$$

d'où

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z}F(z)\,dz = \int_{z_0}^{Z} e^{-z}F'(z)\,dz.$$

Maintenant la formule

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{\mu_0}{z-z_0} + \frac{\mu_1}{z-z_1} + \ldots + \frac{\mu_n}{z-z_n}$$

donne la décomposition suivante,

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z}F(z)\,dz = \mu_0 \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}F(z)\,dz}{z-z_0} + \mu_1 \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}F(z)\,dz}{z-z_1} + \ldots + \mu_n \int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z}F(z)\,dz}{z-z_0},$$

qui conduira pareillement au calcul des divers termes de la suite

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z}F(z)\,dz, \qquad \int_{z_0}^{Z} e^{-z}F(z)f(z)\,dz, \qquad \ldots, \qquad \int_{z_0}^{Z} e^{-z}F(z)f^k(z)\,dz;$$

effectivement, les éléments de décomposition de l'un quelconque d'entre eux s'expriment en fonction linéaire des quantités semblables qui se rapportent au terme précédent, ainsi qu'on va le montrer.

X. J'établirai pour cela qu'on peut toujours déterminer deux polynomes entiers de degré n, $\Theta(z)$ et $\Theta_1(z)$, tels qu'on ait, en désignant par ζ l'une des racines $z_0, z_1, \ldots, z_n$, la relation suivante :

$$\int \frac{e^{-z}F(z)f(z)}{z-\zeta}\,dz = \int \frac{e^{-z}F(z)\Theta_1(z)}{f(z)}\,dz - e^{-z}F(z)\Theta(z).$$

En effet, si, après avoir différentié les deux membres, nous multiplions par le facteur $\frac{f(z)}{F(z)}$, il vient

$$\frac{f(z)}{z-\zeta}f(z) = \Theta_1(z) + \left[1 - \frac{F'(z)}{F(z)}\right] f(z)\Theta(z) - f(z)\Theta'(z).$$

Or, $f(z)$ étant divisible par $z-\zeta$, le premier membre de cette égalité est un polynome entier de degré $2n+1$; le second est du même degré, d'après la supposition admise à l'égard de $\Theta(z)$ et $\Theta_1(z)$, et, puisque chacun de ces polynomes renferme ainsi $n+1$ coefficients indéterminés, on a bien le nombre nécessaire égal à $2n+2$ de constantes arbitraires pour effectuer l'identification. Ce point établi, j'observe qu'en supposant $z = z_i$ la fraction rationnelle $\frac{F'(z)f(z)}{F(z)}$ a pour valeur $\mu_i f'(z_i)$; on a, par conséquent, ces conditions

$$\begin{aligned}
\Theta_1(z_0) &= \mu_0 f'(z_0)\Theta(z_0),\\
\Theta_1(z_1) &= \mu_1 f'(z_1)\Theta(z_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Theta_1(z_n) &= \mu_n f'(z_n)\Theta(z_n),
\end{aligned}$$

qui permettent, par la formule d'interpolation, de calculer immédiatement $\Theta_1(z)$, lorsque $\Theta(z)$ sera connu. Nous avons de cette manière, en effet, l'expression suivante,

$$\frac{\Theta_1(z)}{f(z)} = \frac{\mu_0\,\Theta(z_0)}{z-z_0} + \frac{\mu_1\,\Theta(z_1)}{z-z_1} + \ldots + \frac{\mu_n\,\Theta(z_n)}{z-z_n},$$

dont nous ferons bientôt usage. Pour obtenir maintenant $\Theta(z)$, je reprends la relation proposée, en divisant les deux membres par $f(z)$, ce qui donne

$$\frac{f(z)}{z-\zeta} = \frac{\Theta_1(z)}{f(z)} + \left[1 - \frac{F'(z)}{F(z)}\right]\Theta(z) - \Theta'(z),$$

et je remarque que, la fraction $\frac{\Theta_1(z)}{f(z)}$ n'ayant pas de partie entière, on est amené à cette conséquence, que le polynome cherché doit être tel que la partie entière de l'expression

$$\left[1 - \frac{F'(z)}{F(z)}\right]\Theta(z) - \Theta'(z)$$

soit égale au quotient $\frac{f(z)}{z-\zeta}$. C'est ce qui conduit aisément à la détermination de $\Theta(z)$. Soit d'abord, à cet effet,

$$f(z) = z^{n+1} + p_1 z^n + p_2 z^{n-1} + \ldots + p_{n+1},$$

ce qui donnera

$$\frac{f(z)}{z-\zeta} = \begin{array}{r|r|r} z^n + \zeta & z^{n-1} + \zeta^2 & z^{n-2} + \ldots + \zeta^n \\ +\,p_1 & +\,p_1\zeta & +\,p_1\zeta^{n-1} \\ & +\,p_2 & +\,p_2\zeta^{n-2} \\ & & \ldots\ldots\ldots \\ & & +\,p_n, \end{array}$$

ou plutôt

$$\frac{f(z)}{z-\zeta} = z^n + \zeta_1 z^{n-1} + \zeta_2 z^{n-2} + \ldots + \zeta_n,$$

en écrivant, pour abréger,

$$\zeta_i = \zeta^i + p_1\zeta^{i-1} + p_2\zeta^{i-2} + \ldots + p_i.$$

Soit encore

$$\Theta(z) = \alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \ldots + \alpha_n,$$

et développons la fonction $\frac{F'(z)}{F(z)}$ suivant les puissances descendantes

de la variable, afin d'obtenir la partie entière du produit $\frac{F'(z)}{F(z)}\Theta(z)$. Il viendra ainsi, en posant $s_i = \mu_0 z_0^i + \mu_1 z_1^i + \mu_2 z_2^i + \ldots + \mu_n z_n^i$,

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} + \ldots,$$

et, par conséquent,

$$\frac{F'(z)}{F(z)}\Theta(z) = \begin{array}{r|r|l} \alpha_0 s_0 z^{n-1} + \alpha_1 s_0 & z^{n-2} + \alpha_2 s_0 & z^{n-3} + \ldots. \\ +\,\alpha_0 s_1 & +\,\alpha_1 s_1 & \\ & +\,\alpha_0 s_2 & \end{array}$$

Les équations en $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$, auxquelles nous sommes amené par l'identification, sont donc

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_0, \\ \zeta_1 &= \alpha_1 - \alpha_0(s_0 + n), \\ \zeta_2 &= \alpha_2 - \alpha_1(s_0 + n - 1) - \alpha_0 s_1, \\ \zeta_3 &= \alpha_3 - \alpha_2(s_0 + n - 2) - \alpha_1 s_1 - \alpha_0 s_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Elles donnent

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1, \\ \alpha_1 &= \zeta_1 + s_0 + n, \\ \alpha_2 &= \zeta_2 + (s_0 + n - 1)\zeta_1 + (s_0 + n)(s_0 + n - 1) + s_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et montrent que $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont des polynomes en ζ ayant pour coefficients des fonctions entières et à coefficients entiers de $s_0, s_1, s_2, \ldots$ et par suite des racines $z_0, z_1, \ldots, z_n$. On voit de plus que α_i est un polynome de degré i dans lequel le coefficient de ζ^i est égal à l'unité; ainsi, en posant pour plus de clarté

$$\alpha_i = \theta_i(\zeta),$$

et écrivant désormais $\Theta(z, \zeta)$ au lieu de $\Theta(z)$, afin de mettre ζ en évidence, nous aurons

$$\Theta(z, \zeta) = z^n + \theta_1(\zeta) z^{n-2} + \theta_2(\zeta) z^{n-3} + \ldots + \theta_n(\zeta).$$

De là résulte, pour le polynome $\Theta_1(z)$, la formule

$$\frac{\Theta_1(z)}{f(z)} = \frac{\mu_0\,\Theta(z_0, \zeta)}{z-z_0} + \frac{\mu_1\,\Theta(z_1, \zeta)}{z-z_1} + \ldots + \frac{\mu_n\,\Theta(z_n, \zeta)}{z-z_n},$$

et l'on en tire immédiatement le résultat que nous nous sommes proposé d'obtenir. Il suffit, en effet, de prendre les intégrales entre les limites z_0 et Z dans la relation

$$\int \frac{e^{-z}\,\mathrm{F}(z)\,f(z)}{z-\zeta}\,dz = \int \frac{e^{-z}\,\mathrm{F}(z)\,\Theta_1(z)}{f(z)}\,dz - e^{-z}\,\mathrm{F}(z)\,\Theta(z),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{e^{-z}\,\mathrm{F}(z)\,f(z)}{z-\zeta}\,dz &= \int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{e^{-z}\,\mathrm{F}(z)\,\Theta_1(z)}{f(z)}\,dz \\ &= \mu_0\,\Theta(z_0,\zeta)\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{e^{-z}\,\mathrm{F}(z)}{z-z_0}\,dz. \\ &+ \mu_1\,\Theta(z_1,\zeta)\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{e^{-z}\,\mathrm{F}(z)}{z-z_1}\,dz, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &+ \mu_n\,\Theta(z_n,\zeta)\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{e^{-z}\,\mathrm{F}(z)}{z-z_n}\,dz.\end{aligned}$$

C'est surtout dans le cas où l'on suppose

$$\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_n = m,$$

que nous ferons usage de cette équation; si l'on fait alors

$$m\,\Theta(z_i, z_k) = (ik),$$

et qu'on prenne ζ successivement égal à $z_0, z_1, \ldots, z_n$, on en conclut, comme on voit, les relations précédemment énoncées, qui résultent de celle-ci,

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{e^{-z}\,f^{m+1}(z)}{z-z_i}\,dz &= (io)\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{e^{-z}\,f^m(z)}{z-z_0}\,dz \\ &+ (i1)\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{e^{-z}\,f^m(z)}{z-z_1}\,dz + \ldots + (in)\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{e^{-z}\,f^m(z)}{z-z_n}\,dz,\end{aligned}$$

pour $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Je resterai encore cependant dans le cas général pour établir la proposition suivante :

X. *Soient* Δ *et* δ *les déterminants*

$$\begin{vmatrix} \Theta(z_0, z_0) & \Theta(z_1, z_0) & \ldots & \Theta(z_n, z_0) \\ \Theta(z_0, z_1) & \Theta(z_1, z_1) & \ldots & \Theta(z_n, z_1) \\ \dots\dots & \dots\dots & \ldots & \dots\dots \\ \Theta(z_0, z_n) & \Theta(z_1, z_n) & \ldots & \Theta(z_n, z_n) \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_0 & z_1 & \ldots & z_n \\ z_0^2 & z_1^2 & \ldots & z_n^2 \\ \dots & \dots & \ldots & \dots \\ z_0^n & z_1^n & \ldots & z_n^n \end{vmatrix};$$

je dis qu'on a

$$\Delta = \delta^2.$$

Effectivement, l'expression de $\Theta(z, \zeta)$ sous la forme

$$\Theta(z,\zeta) = z^n + \theta_1(\zeta)\,z^{n-1} + \theta_2(\zeta)\,z^{n-2} + \ldots + \theta_n(\zeta)$$

montre que Δ est le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ z_0 & z_1 & \ldots & z_n \\ z_0^2 & z_1^2 & \ldots & z_n^2 \\ \dots & \dots & \ldots & \dots \\ z_0^n & z_1^n & \ldots & z_n^n \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \theta_1(z_0) & \theta_1(z_1) & \ldots & \theta_1(z_n) \\ \theta_2(z_0) & \theta_2(z_1) & \ldots & \theta_2(z_n) \\ \dots\dots & \dots\dots & \ldots & \dots\dots \\ \theta_n(z_0) & \theta_n(z_1) & \ldots & \theta_n(z_n) \end{vmatrix}.$$

Mais $\theta_i(\zeta)$ étant un polynome en ζ du degré i seulement, de sorte qu'on peut faire

$$\theta_i(\zeta) = \zeta^i + r\,\zeta^{i-1} + s\,\zeta^{i-2} + \ldots,$$

cette seconde quantité, d'après les théorèmes connus, se réduit simplement à la première, et l'on a bien, comme nous voulions l'établir,

$$\Delta = \delta^2.$$

Cela posé, soient

$$\varepsilon_m = \frac{1}{1.2\ldots m}\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} e^{-z}\,f^m(z)\,dz,$$

$$\varepsilon_m^i = \frac{1}{1.2\ldots m-1}\int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \frac{e^{-z}\,f^m(z)}{z-z_i}\,dz;$$

la relation établie page 167

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z} f^m(z)\,dz = m\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z-z_0}\,dz + m\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z-z_1}\,dz + \ldots + m\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z-z_n}\,dz$$

deviendra plus simplement

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m^0 + \varepsilon_m^1 + \ldots + \varepsilon_m^n;$$

et celle-ci,

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^{m+1}(z)}{z-\zeta}\,dz = m\,\Theta(z_0,\zeta)\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z-z_0}\,dz + m\,\Theta(z_1,\zeta)\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z-z_1}\,dz + \ldots + m\,\Theta(z_n,\zeta)\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f^m(z)}{z-z_n}\,dz,$$

en supposant successivement $\zeta = z_0, z_1, \ldots, z_n$, nous donnera la substitution suivante, que je désignerai par S_m, à savoir

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{m+1}^0 &= \Theta(z_0, z_0)\varepsilon_m^0 + \Theta(z_1, z_0)\varepsilon_m^1 + \ldots + \Theta(z_n, z_0)\varepsilon_m^n,\\
\varepsilon_{m+1}^1 &= \Theta(z_0, z_1)\varepsilon_m^0 + \Theta(z_1, z_1)\varepsilon_m^1 + \ldots + \Theta(z_n, z_1)\varepsilon_m^n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varepsilon_{m+1}^n &= \Theta(z_0, z_n)\varepsilon_m^0 + \Theta(z_1, z_n)\varepsilon_m^1 + \ldots + \Theta(z_n, z_n)\varepsilon_m^n.
\end{aligned}$$

Si l'on compose maintenant de proche $S_1, S_2, \ldots, S_{m-1}$, on en déduira les expressions de $\varepsilon_m^0, \varepsilon_m^1, \ldots, \varepsilon_m^n$ en $\varepsilon_1^0, \varepsilon_1^1, \ldots, \varepsilon_1^n$, que je représenterai ainsi :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_m^0 &= A_0\varepsilon_1^0 + A_1\varepsilon_1^1 + \ldots + A_n\varepsilon_1^n,\\
\varepsilon_m^1 &= B_0\varepsilon_1^0 + B_1\varepsilon_1^1 + \ldots + B_n\varepsilon_1^n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varepsilon_m^n &= L_0\varepsilon_1^0 + L_1\varepsilon_1^1 + \ldots + L_n\varepsilon_1^n,
\end{aligned}$$

et le déterminant de cette nouvelle substitution, étant égal au produit des déterminants des substitutions composantes, sera $\delta^{2(m-1)}$. Il nous reste encore à remplacer $\varepsilon_1^0, \varepsilon_1^1, \ldots, \varepsilon_1^n$ par leurs valeurs pour avoir les expressions des quantités ε_m^i sous la forme appropriée à notre objet. Ces valeurs s'obtiennent facilement, comme on va voir.

XII. J'applique à cet effet la formule générale

$$\int e^{-z}F(z)\,dz = -e^{-z}\mathfrak{F}(z),$$

en supposant

$$F(z) = \frac{f(z)}{z-\zeta},$$

c'est-à-dire

$$F(z) = z^n + \left.\begin{matrix}\zeta\\ +p_1\end{matrix}\right| z^{n-1} + \left.\begin{matrix}\zeta^2\\ +p_1\zeta\\ +p_2\end{matrix}\right| z^{n-2} + \ldots.$$

Il est aisé de voir alors que $\mathfrak{F}(z)$ devient une expression entière en z et ζ, entièrement semblable à $\Theta(z, \zeta)$, de sorte que, si on la désigne par $\Phi(z, \zeta)$, on a

$$\Phi(z,\zeta) = z^n + \varphi_1(\zeta)z^{n-1} + \varphi_2(\zeta)z^{n-2} + \ldots + \varphi_n(\zeta),$$

$\varphi_i(\zeta)$ étant un polynome en ζ de degré i, dans lequel le coefficient de ζ^i est l'unité. Ainsi l'on obtient, en particulier,

$$\begin{aligned}
\varphi_1(\zeta) &= \zeta + p_1 + n,\\
\varphi_2(\zeta) &= \zeta^2 + (p_1 + n - 1)\zeta + p_2 + (n-1)p_1 + n(n-1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et l'analogie de forme avec $\Theta(z, \zeta)$ montre que le déterminant

$$\begin{vmatrix}
\Phi(z_0, z_0) & \Phi(z_1, z_0) & \ldots & \Phi(z_n, z_0)\\
\Phi(z_0, z_1) & \Phi(z_1, z_1) & \ldots & \Phi(z_n, z_1)\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\
\Phi(z_0, z_n) & \Phi(z_1, z_n) & \ldots & \Phi(z_n, z_n)
\end{vmatrix}$$

est encore égal à δ^2. Cela posé, nous tirons de la relation

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{e^{-z} f(z)}{z-\zeta}\,dz = e^{-z_0}\Phi(z_0, \zeta) - e^{-Z}\Phi(Z, \zeta),$$

en supposant $\zeta = z_i$, la valeur cherchée

$$\varepsilon_1^i = e^{-z_0}\Phi(z_0, z_i) - e^{-Z}\Phi(Z, z_i).$$

Or, voici les expressions des quantités ε_m^i qui en résultent. Soient

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= A_0\Phi(Z, z_0) + A_1\Phi(Z, z_1) + \ldots + A_n\Phi(Z, z_n),\\
\mathcal{B} &= B_0\Phi(Z, z_0) + B_1\Phi(Z, z_1) + \ldots + B_n\Phi(Z, z_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathcal{L} &= L_0\Phi(Z, z_0) + L_1\Phi(Z, z_1) + \ldots + L_n\Phi(Z, z_n),
\end{aligned}$$

et convenons de représenter par $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0, \ldots, \mathcal{L}_0$ les valeurs obtenues pour $Z = z_0$; on aura

$$\begin{aligned}
\varepsilon_m^0 &= e^{-z_0}\mathcal{A}_0 - e^{-Z}\mathcal{A},\\
\varepsilon_m^1 &= e^{-z_0}\mathcal{B}_0 - e^{-Z}\mathcal{B},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varepsilon_m^n &= e^{-z_0}\mathcal{L}_0 - e^{-Z}\mathcal{L}.
\end{aligned}$$

Dans ces formules, Z désigne l'une quelconque des quantités z_1, $z_2, \ldots, z_n$; maintenant, si nous voulons mettre en évidence le résultat correspondant à $Z = z_k$, nous conviendrons, en outre, de représenter, d'une part, par $\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k, \ldots, \mathcal{L}_k$, et de l'autre par η_k^0, $\eta_k^1, \ldots, \eta_k^n$ les valeurs que prennent, dans ce cas, les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}, \ldots, \mathcal{L}$ et les quantités $\varepsilon_m^0, \varepsilon_m^1, \ldots, \varepsilon_m^n$. On obtient ainsi les équations

$$\begin{aligned}
\eta_k^0 &= e^{-z_0}\mathcal{A}_0 - e^{-z_k}\mathcal{A}_k,\\
\eta_k^1 &= e^{-z_0}\mathcal{B}_0 - e^{-z_k}\mathcal{B}_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\eta_k^n &= e^{-z_0}\mathcal{L}_0 - e^{-z_k}\mathcal{L}_k,
\end{aligned}$$

qui vont nous conduire à la seconde démonstration que j'ai annoncée de l'impossibilité d'une relation de la forme

$$e^{z_0}N_0 + e^{z_0}N_1 + \ldots + e^{z_n}N_n = 0,$$

les exposants $z_0, z_1, \ldots, z_n$ étant supposés entiers, ainsi que les coefficients $N_0, N_1, \ldots, N_n$.

XIII. Je dis en premier lieu que ε_m^i peut devenir plus petit que toute quantité donnée, pour une valeur suffisamment grande de m. Effectivement, l'exponentielle e^{-z} étant toujours positive, on a, comme on sait,

$$\int_{z_0}^{Z} e^{-z}F(z)\,dz = F(\xi)\int_{z_0}^{Z} e^{-z}\,dz = F(\xi)(e^{-z_0} - e^{-Z}),$$

$F(z)$ étant une fonction quelconque et ξ une quantité comprise entre les limites z_0 et Z de l'intégrale. Or, en supposant

$$F(z) = \frac{f^m(z)}{z - z_1},$$

on aura cette expression

$$\varepsilon_m^i = \frac{f^{m-1}(\xi)}{1.2\ldots m-1}\,\frac{f(\xi)}{\xi - z_i}(e^{-z_0} - e^{-Z}),$$

qui met en évidence la propriété énoncée. Cela posé, je tire des équations

$$\begin{aligned}
\eta_1^0 &= e^{-z_0}\mathcal{A}_0 - e^{-z_1}\mathcal{A}_1,\\
\eta_2^0 &= e^{-z_0}\mathcal{A}_0 - e^{-z_2}\mathcal{A}_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\eta_n^0 &= e^{-z_0}\mathcal{A}_0 - e^{-z_n}\mathcal{A}_n,
\end{aligned}$$

la relation suivante,

$$\begin{aligned}
&e^{z_1}\eta_1^0 N_1 + e^{z_2}\eta_2^0 N_2 + \ldots + e^{z_n}\eta_n^0 N_n\\
&\quad = e^{-z_0}(e^{z_1}N_1 + e^{z_2}N_2 + \ldots + e^{z_n}N_n)\mathcal{A}_0\\
&\qquad - (\mathcal{A}_1 N_1 + \mathcal{A}_2 N_2 + \ldots + \mathcal{A}_n N_n).
\end{aligned}$$

Si l'on introduit la condition

$$e^{z_0}N_0 + e^{z_1}N_1 + \ldots + e^{z_n}N_n = 0,$$

elle devient

$$\begin{aligned}
&e^{z_1}\eta_1^0 N_1 + e^{z_2}\eta_2^0 N_2 + \ldots + e^{z_n}\eta_n^0 N_n\\
&\quad = -(\mathcal{A}_0 N_0 + \mathcal{A}_1 N_1 + \ldots + \mathcal{A}_n N_n).
\end{aligned}$$

Or, en supposant que $z_0, z_1, \ldots, z_n$ soient entiers, il en est de même des quantités $\Theta(z_i, z_k)$, $\Phi(z_i, z_k)$, et, par conséquent, de $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$. Nous avons donc un nombre entier

$$\mathcal{A}_0 N_0 + \mathcal{A}_1 N_1 + \ldots + \mathcal{A}_n N_n,$$

qui décroît indéfiniment avec $\eta_1^0, \eta_1^1, \ldots, \eta_1^n$, lorsque m augmente; il en résulte que, à partir d'une certaine valeur de m, et pour toutes les valeurs plus grandes, on aura

$$\mathcal{A}_0 N_0 + \mathcal{A}_1 N_1 + \ldots + \mathcal{A}_n N_n = 0,$$

et, comme on obtient pareillement les conditions

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}_0 N_0 + \mathcal{B}_1 N_1 + \ldots + \mathcal{B}_n N_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\mathcal{L}_0 N_0 + \mathcal{L}_1 N_1 + \ldots + \mathcal{L}_n N_n = 0,
\end{aligned}$$

la relation

$$e^{z_0}N_0 + e^{z_1}N_1 + \ldots + e^{z_n}N_n = 0$$

a pour conséquence que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_0 & \mathcal{A}_1 & \dots & \mathcal{A}_n \\ \mathcal{B}_0 & \mathcal{B}_1 & \dots & \mathcal{B}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{L}_0 & \mathcal{L}_1 & \dots & \mathcal{L}_n \end{vmatrix}$$

doit nécessairement être nul. Mais, d'après les expressions des quantités $\mathcal{A}_k, \mathcal{B}_k, \dots, \mathcal{L}_k$, Δ est le produit de ces deux autres déterminants

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_n \\ B_0 & B_1 & \dots & B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_0 & L_1 & \dots & L_n \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} \Phi(z_0, z_0) & \Phi(z_1, z_0) & \dots & \Phi(z_n, z_0) \\ \Phi(z_0, z_1) & \Phi(z_1, z_1) & \dots & \Phi(z_n, z_1) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \Phi(z_0, z_n) & \Phi(z_1, z_n) & \dots & \Phi(z_n, z_n) \end{vmatrix},$$

dont le premier a pour valeur $\delta^{2(m-1)}$, et le second δ^2. On a donc $\Delta = \delta^{2m}$, et il est ainsi démontré, d'une manière entièrement rigoureuse, que la relation supposée est impossible, et que, par suite, le nombre e n'est point compris dans les irrationnelles algébriques.

XIV. Il ne sera pas inutile de donner quelques exemples du mode d'approximation des quantités auquel nous avons été conduits, et je considérerai d'abord le cas le plus simple, où l'on ne considère que la seule exponentielle e^x. En faisant alors $f(z) = z(z - x)$, nous aurons

$$\varepsilon_m = \frac{1}{1.2\dots m} \int_0^x e^{-z} z^m (z - x)^m \, dz$$

et

$$\varepsilon_m^0 = \frac{1}{1.2\dots m-1} \int_0^x e^{-z} z^{m-1} (z - x)^m \, dz,$$

$$\varepsilon_m^1 = \frac{1}{1.2\dots m-1} \int^x e^{-z} z^m (z - x)^{m-1} \, dz.$$

Or on obtient immédiatement

$$\Theta(z, \zeta) = z + \zeta + 2m + 1 - x,$$

d'où

$$\Theta(0, 0) = 2m + 1 - x, \qquad \Theta(x, 0) = 2m + 1,$$
$$\Theta(0, x) = 2m + 1, \qquad \Theta(x, x) = 2m + 1 + x,$$

et, par conséquent, ces relations

$$\varepsilon_{m+1}^0 = (2m + 1 - x)\varepsilon_m^0 + (2m + 1)\varepsilon_m^1,$$
$$\varepsilon_{m+1}^1 = (2m + 1)\varepsilon_m^0 + (2m + 1 + x)\varepsilon_m^1.$$

J'observerai maintenant qu'il vient, en retranchant membre à membre,

$$\varepsilon_{m+1}^1 - \varepsilon_{m+1}^0 = x(\varepsilon_m^0 + \varepsilon_m^1),$$

de sorte que, ayant

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m^0 + \varepsilon_m^1,$$

on en conclut

$$\varepsilon_{m+1}^1 - \varepsilon_{m+1}^0 = x\varepsilon_m.$$

Joignons à cette équation la suivante :

$$\varepsilon_{m+1}^1 + \varepsilon_{m+1}^0 = \varepsilon_{m+1};$$

nous en déduirons les valeurs

$$\varepsilon_{m+1}^1 = \frac{\varepsilon_{m+1} + x\varepsilon_m}{2}, \qquad \varepsilon_{m+1}^0 = \frac{\varepsilon_{m+1} - x\varepsilon_m}{2},$$

et, si l'on y change m en $m - 1$, une simple substitution, par exemple, dans la relation

$$\varepsilon_{m+1}^0 = (2m + 1 - x)\varepsilon_m^0 + (2m + 1)\varepsilon_m^1,$$

donnera le résultat précédemment obtenu (p. 165),

$$\varepsilon_{m+1} = (4m + 2)\varepsilon_m + x^2\varepsilon_{m-1}.$$

Soient, en second lieu,

$$n = 2, \qquad z_0 = 0, \qquad z_1 = 1, \qquad z_2 = 2,$$

d'où

$$f(z) = z(z - 1)(z - 2) = z^3 - 3z^2 + 2z;$$

on trouvera

$$\Theta(z, \zeta) = z^2 + (\zeta - 1)z + (\zeta - 1)^2 + 3m(z + \zeta + 1) + 9m^2,$$

et, par conséquent,

$$\begin{array}{lll} \Theta(0,0)=9m^2+3m+1, & \Theta(0,1)=9m^2+6m, & \Theta(0,2)=9m^2+9m+1, \\ \Theta(1,0)=9m^2+6m+1, & \Theta(1,1)=9m^2+9m+1, & \Theta(1,2)=9m^2+12m+3, \\ \Theta(2,0)=9m^2+9m+3, & \Theta(2,1)=9m^2+12m+4, & \Theta(2,2)=9m^2+15m+7. \end{array}$$

En particulier, pour $m=1$, nous aurons

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^0 &= 13\varepsilon_1^0+16\varepsilon_1^1+21\varepsilon_1^2, \\ \varepsilon_2^1 &= 15\varepsilon_1^0+19\varepsilon_1^1+25\varepsilon_1^2, \\ \varepsilon_2^2 &= 19\varepsilon_1^0+24\varepsilon_1^1+31\varepsilon_1^2; \end{aligned}$$

d'ailleurs il vient facilement

$$\Phi(z,\zeta)=z^2+(\zeta-1)z+(\zeta-1)^2,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= 1-e^{-Z}(Z^2-Z+1), \\ \varepsilon_1^1 &= -e^{-Z}Z^2, \\ \varepsilon_1^2 &= 1-e^{-Z}(Z^2+Z+1); \end{aligned}$$

on en conclut

$$\begin{aligned} \varepsilon_2^0 &= 34-e^{-Z}(50Z^2+8Z+34), \\ \varepsilon_2^1 &= 40-e^{-Z}(59Z^2+10Z+40), \\ \varepsilon_2^2 &= 50-e^{-Z}(74Z^2+12Z+50). \end{aligned}$$

De là résulte que

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_1^0+\varepsilon_1^1+\varepsilon_1^2 = 2-e^{-Z}(3Z^2+2), \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_2^0+\varepsilon_2^1+\varepsilon_2^2 = 124-e^{-Z}(183Z^2+30Z+124); \end{aligned}$$

et, si l'on fait successivement $Z=1$, $Z=2$, l'expression de ε_1 fournit les valeurs approchées

$$e=\frac{5}{2}, \qquad e^2=\frac{14}{2}=7,$$

et l'expression de ε_2 les suivantes :

$$e=\frac{337}{124}, \qquad e^2=\frac{916}{124},$$

où l'erreur ne porte que sur les dix-millièmes. En supposant en-

suite $m=2$, ce qui donnera [1]

$$\begin{aligned} \varepsilon_3^0 &= 43\varepsilon_2^0+49\varepsilon_2^1+57\varepsilon_2^2, \\ \varepsilon_3^1 &= 48\varepsilon_2^0+55\varepsilon_2^1+64\varepsilon_2^2, \\ \varepsilon_3^2 &= 55\varepsilon_2^0+63\varepsilon_2^1+73\varepsilon_2^2, \end{aligned}$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \varepsilon_3^0 &= 6272-e^{-Z}(9259Z^2+1518Z+6272), \\ \varepsilon_3^1 &= 7032-e^{-Z}(10381Z^2+1702Z+7032), \\ \varepsilon_3^2 &= 8040-e^{-Z}(11869Z^2+1946Z+8040), \end{aligned}$$

d'où

$$\varepsilon_3 = 21344-e^{-Z}(31509Z^2+5166Z+21344),$$

et, par suite,

$$e=\frac{58019}{21344}, \qquad e^2=\frac{157712}{21344},$$

l'erreur portant sur les dix-millionièmes.

(1) Dans le texte d'Hermite, on trouve au dernier terme du second membre de la troisième ligne le coefficient 75. M. Bourget, en refaisant les calculs, a trouvé le coefficient 73; cette rectification a amené des modifications assez importantes dans les valeurs de e et de e^2, dont l'approximation monte, de ce fait, aux dix-millionièmes. E. P.