SUR L'ÉQUATION DE LAMÉ [1].

Extrait des feuilles autographiées du *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, par M. Hermite, 1re Division, 1872-1873, 32e leçon.

Dans la théorie de la chaleur, Lamé a été conduit à considérer l'équation différentielle suivante :

$$4X\frac{d^2y}{dx^2}+2X'\frac{dy}{dx}=(ax+b)y,$$

dans laquelle X est un polynome du troisième degré de la forme

$$X=x(1-x)(1-K^2x).$$

Dans le cas où $a=n(n+1)K^2$, n étant un nombre entier, il se trouve qu'on peut satisfaire à l'équation de Lamé en prenant pour y un polynome entier de degré n, pourvu que b ait pour valeur un certain polynome entier également de degré n. Nous ne traiterons pas cette question et nous nous bornerons à supposer $a=n(n+1)K^n$, b restant complètement arbitraire.

En appelant u et v deux solutions particulières de l'équation de Lamé, la solution la plus générale de l'équation est

$$y=cu+c'v,$$

c et c' étant deux constantes arbitraires.

Je dis que, si u et v sont convenablement choisies, le produit uv

(1) Nous avons retrouvé dans les feuilles lithographiées destinées aux élèves de l'École Polytechnique, une leçon faite par Hermite pendant l'hiver 1872-1873 sur l'équation de Lamé. Nous reproduisons cette leçon, qui, à notre connaissance, fait connaître les premières recherches de Hermite sur une question qu'il devait approfondir queiques années après. E. P.

est un polynome entier en x. En posant $z=y^2$, ou

$$z=c^2u^2+2cc'uv+c'^2v^2,$$

je vois qu'il sera démontré que uv est un polynome entier en x, de degré n, si je prouve que z est un polynome entier de degré n, puisque u^2 et v^2 sont des valeurs particulières de z; je pose donc $z=y^2$, et je cherche la transformée en z de l'équation de Lamé, ou, en me plaçant à un point de vue plus général, de l'équation

$$4Ay''+2A'y'=By,$$

dans laquelle A et B sont deux polynomes entiers quelconques en x. J'aurai

$$\frac{dz}{dx}=2yy',$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=2(yy''+y'^2).$$

En multipliant par $2A$,

$$2Az''=4Ayy''+4Ay'^2=y(By-2A'y')+4Ay'^2,$$

ou

$$2Az''=Bz-2A'yy'+4Ay'^2,$$

et, comme

$$2yy'=z',$$

$$2Az''+A'z'-Bz=4Ay'^2.$$

En différentiant de nouveau

$$\begin{aligned}[2Az''+A'z'-Bz]'&=8Ay'y''+4A'y'^2\\&=2y'(4Ay''+2A'y'),\end{aligned}$$

et comme

$$4Ay''+2A'y=By,$$

$$[2Az''+A'z'-Bz]'=2Byy',$$

$$[2Az''+A'z'-Bz]'=Bz'.$$

Telle est la transformée en z. Si maintenant je développe le premier membre, il vient

$$2Az'''+3A'z''+(A''-2B)z'-B'z=0.$$

Je différentie n fois cette équation, et je pose

$$u=\frac{d^nz}{dx^n}.$$

Il vient, en supposant A du troisième degré et B du premier degré, comme dans l'équation de Lamé,

$$\begin{array}{r|l|l|l}
2\mathrm{A}u''' + 2n\mathrm{A}' & u'' + n(n-1)\mathrm{A}'' & u' + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3}\mathrm{A}''' & u = 0. \\
+3n\mathrm{A}' & \quad +3n\mathrm{A}'' & \quad + \dfrac{3n(n-1)}{2}\mathrm{A}''' & \\
 & \quad +\mathrm{A}'' - 2\mathrm{B} & \quad + n(\mathrm{A}''' - 2\mathrm{B}') & \\
 & & \qquad - \ \mathrm{B}' &
\end{array}$$

Considérons le coefficient du terme en u et effectuons les réductions dans ce terme. Il vient

$$n\mathrm{A}'''\left[\frac{(n-1)(n-2)}{3} + \frac{3(n-1)}{2} + 1\right] - (2n+1)\mathrm{B}',$$

$$n\mathrm{A}'''\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - (2n+1)\mathrm{B}'.$$

Or, on a

$$\mathrm{A} = x(1-x)(1-\mathrm{K}^2x),$$

d'où

$$\mathrm{A}''' = \mathrm{K}^2 \times 1.2.3;$$

$$\mathrm{B} = n(n+1)\mathrm{K}^2x + b,$$

d'où

$$\mathrm{B}' = n(n+1)\mathrm{K}^2.$$

On voit donc que le coefficient de u se réduit à zéro. Par suite, l'équation transformée en u est satisfaite quand on donne à u une valeur constante quelconque. Donc

$$\frac{d^n z}{dx^n} = c.$$

En intégrant n fois, on arrivera pour la valeur de z à un polynome entier de degré n, ce qu'il fallait démontrer. Donc le produit uv de deux solutions particulières convenables de l'équation de Lamé est un polynome entier en x de degré n,

$$uv = \mathrm{F}(x).$$

Nous allons maintenant chercher à déterminer u et v. Considérons le déterminant fonctionnel

$$z = u'v - uv'.$$

D'où

$$z' = u''v - uv'',$$

$$4\mathrm{A}z' = v \times 4\mathrm{A}u'' - u \times 4\mathrm{A}v'',$$

$$4\mathrm{A}z' = v(\mathrm{B}u - 2\mathrm{A}'u') - u(\mathrm{B}v - 2\mathrm{A}'v'),$$

ou

$$4\mathrm{A}z' = 2\mathrm{A}'(v'u - vu'),$$

$$4\mathrm{A}z' = -2\mathrm{A}'z,$$

$$2\mathrm{A}z' + \mathrm{A}'z = 0;$$

A est le polynome figurant dans l'équation de Lamé. Par suite,

$$2\mathrm{X}z' + \mathrm{X}'z = 0.$$

Le premier membre est la dérivée de $\mathrm{X}z^2$; il en résulte que $\mathrm{X}z^2 = \text{const.}$,

$$z = \frac{c}{\sqrt{\mathrm{X}}},$$

$$u'v - v'u = \frac{c}{\sqrt{\mathrm{X}}}.$$

On a d'ailleurs, puisque $uv = \mathrm{F}(x)$,

$$u'v + v'u = \mathrm{F}'(x).$$

D'où les deux équations

$$\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} = \frac{c}{\mathrm{F}(x)\sqrt{\mathrm{X}}},$$

$$\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} = \frac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}(x)},$$

ou

$$\frac{u'}{u} = \frac{1}{2}\left[\frac{c}{\mathrm{F}\sqrt{\mathrm{X}}} + \frac{\mathrm{F}'}{\mathrm{F}}\right],$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{1}{2}\left[\frac{-c}{\mathrm{F}\sqrt{\mathrm{X}}} + \frac{\mathrm{F}'}{\mathrm{F}}\right].$$

En intégrant

$$\mathrm{Log}\,u = \mathrm{Log}\sqrt{\mathrm{F}} + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{C}\,dx}{\mathrm{F}\sqrt{\mathrm{X}}},$$

$$\mathrm{Log}\,v = \mathrm{Log}\sqrt{\mathrm{F}} - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{C}\,dx}{\mathrm{F}\sqrt{\mathrm{X}}},$$

$$u = \sqrt{\mathrm{F}(x)}\,e^{\frac{c}{2}\int\frac{dx}{\mathrm{F}(x)\sqrt{\mathrm{X}}}},$$

$$v = \sqrt{\mathrm{F}(x)}\,e^{-\frac{c}{2}\int\frac{dx}{\mathrm{F}(x)\sqrt{\mathrm{X}}}}.$$

Nous avons donc la solution complète de l'équation de Lamé au moyen des fonctions elliptiques, puisque X est un polynome du troisième degré.

Si l'on pose

$$x = \sin^2 am t,$$

l'équation prend la forme sous laquelle Lamé l'a étudiée.

On aura

$$\frac{dx}{dt} = 2 \sin am t \, \frac{d(\sin am t)}{dt}.$$

Or, en posant

$$u = \sin am t,$$

on a

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{(1-u^2)(1-\mathrm{K}^2 u^2)}.$$

Donc

$$\frac{dx}{dt} = 2u\sqrt{(1-u^2)(1-\mathrm{K}^2u^2)} = 2\sqrt{u^2(1-u^2)(1-\mathrm{K}^2u^2)} = 2\sqrt{\mathrm{X}}.$$

Formons maintenant la transformée en t. On a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt}\,\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{X}}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\,\frac{1}{4\mathrm{X}} + \frac{dy}{dt}\,\frac{d\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{X}}}}{dx}.$$

Or

$$\frac{d\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{X}}}}{dx} = \frac{-1}{2\mathrm{X}}\,\frac{d\sqrt{\mathrm{X}}}{dx} = \frac{-1}{2\mathrm{X}}\,\frac{\mathrm{X}'}{2\sqrt{\mathrm{X}}} = \frac{-\mathrm{X}'}{4\mathrm{X}\sqrt{\mathrm{X}}}.$$

D'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{4\mathrm{X}}\,\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\mathrm{X}'}{4\mathrm{X}\sqrt{\mathrm{X}}}\,\frac{dy}{dt}.$$

D'où la transformée

$$4\mathrm{X}\left[\frac{1}{4\mathrm{X}}\,\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\mathrm{X}'}{4\mathrm{X}\sqrt{\mathrm{X}}}\,\frac{dy}{dt}\right] + 2\mathrm{X}'\,\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{X}}}\,\frac{dy}{dt} = [n(n+1)\mathrm{K}^2 x + \alpha]y,$$

ou enfin

$$\frac{d^2y}{dt^2} = [n(n+1)\mathrm{K}^2 \sin^2 am t + \alpha]y.$$

ON AN APPLICATION

OF THE

THEORY OF UNICURSAL CURVES.

Proceedings of the London mathematical Society, t. IV, p. 343-345.

Extract from a letter to Prof. Cayley (Read May 8th, 1873).

Prof. Cayley communicated to the Society a letter, dated 28th March, 1873, which he had received from M. Hermite. In connexion which some investigations on elliptic functions which Prof. Cayley is engaged with, M. Hermite calls attention to the question of determining all the quantities

$$\operatorname{sinam} \frac{4m\mathrm{K} + 4m'i\mathrm{K}'}{n}$$

in terms of the $n+1$ roots of the modular equation

$$\mathrm{F}(u, v) = 0,$$

without, as said Jacobi, the resolution of any equation. Is it necessary, for this purpose, to make use of the singular equations indicated by Abel between the quantities

$$\operatorname{sinam} \frac{l}{n}(4m\mathrm{K} + 4m'i\mathrm{K}') \qquad \text{for} \qquad l = 1, 2, \ldots, \overline{n-1}$$

and the nth roots of unity?

And after referring to a remark on the employment of the theory of unicursal curves in his *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, and noticing that it is not only in the commencement of the Integral Calculus that these find an application, M. Hermite proceeds as follows: I have remarked that they give rise to a method of integration of equations of the form

$$F\left(\frac{du}{dx}, u\right) = 0,$$

treated of by MM. Briot and Bouquet, in the *Journal de l'École Polytechnique*.

Suppose, in fact, that the question is to determine the integral when it is an algebraic function of the independent variable.

The question is easely resolved in all the cases where the number which determines the nature of this function is $= 0$; that is, if it is possible to take rationally

$$u = \varphi(t), \qquad x = \psi(t).$$

In fact, from this hypothesis, it follows that

$$\frac{du}{dx} = \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)},$$

is also rational in t; wherefore it is necessary (although not sufficient) that, assuming

$$\frac{du}{dx} = v,$$

the curve

$$F(v, u) = 0$$

should be unicursal. Deriving then, from this relation the rational expressions

$$v = \Phi(t), \qquad u = \varphi(t),$$

we obtain

$$dx = \frac{du}{v} = \frac{\varphi'(t)}{\Phi(t)}\,dt$$

and thence

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\Phi(t)}\,dt.$$

But this integral can always be obtained rationally, and, in the case where the logarithms disappear, gives the value of x in the assumed form.

In the case where u is of the form

$$u = \varphi(\operatorname{tang} x),$$

φ being rational; making $\operatorname{tang} x = t$, we obtain

$$\frac{du}{dx} = \varphi'(t)(1 + t^2);$$

therefore the equation

$$F(v, u) = 0,$$

must give an unicursal curve; and a solution of this form presents itself when the integral

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\Phi(t)}\,dt$$

reduces itself to

$$x = \operatorname{arc\,tang} t.$$

Again, lastly, assuming

$$u = \varphi\left(\operatorname{sinam} x, \frac{d \operatorname{sinam} x}{dx}\right)$$

φ denoting a rational function of the sine-amplitude, and its derived function (this being the hypothetis of MM. Briot and Bouquet); it is clear that, writing $\operatorname{sinam} x = t$, the derivative $\frac{du}{dx}$ as well as u must be a rational function of t and of the radical

$$\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}.$$

Consequently, the equation

$$F(v, u) = 0$$

denotes a curve of the species (deficiency) 1.

Thus the example XI of these authors,

$$v^5 + (u^2 - 1)v^4 - a u^2 (u^2 - 1)^4 = 0$$

$\left(v \text{ denoting } \frac{du}{dx}\right)$, $\left(\text{where } a = \frac{4^4}{5^5}\right)$ on writing

$$v = (u^2 - 1)t,$$

gives

$$u^2 = \frac{t^5 + t^4}{t^5 + t^4 - a} = \frac{t^5 + t^4}{\left(t + \frac{4}{5}\right)^2 \left(t^3 - \frac{3}{5}t^2 + \frac{8}{5^2}t - \frac{4^2}{5^3}\right)}.$$

If then

$$T=(t+1)\left(t^3-\frac{3}{5}t^2+\frac{8}{5^2}t-\frac{4^2}{5^3}\right),$$

we have

$$u=\frac{t^2(t+1)}{t+\frac{4}{5}}\,\frac{1}{\sqrt{T}},\qquad\text{then}\qquad v=\frac{4^4}{5^5}\,\frac{(t+1)\,t}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2 T},$$

whence

$$dx=\frac{du}{v}=\frac{5}{2}\,\frac{dt}{\sqrt{T}},$$

whence

$$x=-\frac{5}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{T}}.$$

Consequently the question is integrable by elliptic functions The other examples are contained in the type

$$v^3+3Pv^2+4Q=0$$

(with the condition $P^3+Q=R^2$).

P, Q, R being integral functions of u of the degrees 2, 6, 3.

But this equation may be writen

$$(v+2P)^2(v-P)=-4(P^3+Q)=-4R^2,$$

and on writing

$$v+2P=-\frac{2R}{w}$$

becomes simply

$$w^3-3Pw-2R=0.$$

And this transformed equation being of the degree 3 in w, u, these two quantities, and consequently also v, u, can be expressed as rational functions of t and of an elliptic radical.

The equation $F\left(\frac{d^2u}{dx^2}, u\right)$ gives rise to similar substitutions.

SUR L'IRRATIONALITÉ

DE LA

BASE DES LOGARITHMES HYPERBOLIQUES.

Report of the British Association for Advancement of Science (43th meeting, p. 22-23, 1873).

On reconnaîtra volontiers que, dans le domaine mathématique, la possession d'une vérité importante ne devient complète et définitive qu'autant qu'on a réussi à l'établir par plus d'une méthode.

A cet égard la théorie des fonctions elliptiques offre un exemple célèbre, présent à tous les esprits, mais qui est loin d'être unique dans l'Analyse.

Je citerai encore le théorème de Sturm, resté comme enveloppé d'une sorte de mystère jusqu'à la mémorable découverte de M. Sylvester, qui a ouvert, pour pénétrer au cœur de la question, une voie plus facile et plus féconde que celle du premier inventeur. Telles sont encore, dans l'Arithmétique supérieure, les lois de réciprocité entre deux nombres premiers, auxquelles est attaché le nom à jamais illustre d'Eisenstein. Mais dans cette même science et pour des questions du plus haut intérêt, comme la détermination du nombre des classes de formes quadratiques de même invariant, on a été moins heureux, et jusqu'ici le mérite de la première découverte est resté sans partage à Dirichlet. Enfin, et pour en venir à l'objet de cette Note, je citerai encore dans le champ de l'Arithmétique, la proposition de Lambert sur l'irrationalité du rapport de la circonférence au diamètre, et des puissances de la base des logarithmes hyperboliques. Ayant été récemment conduit à m'occuper de ce dernier nombre, j'ai l'honneur de soumettre à la réunion de l'Association Britannique une démonstration nouvelle du théorème de Lambert, où n'intervient plus le Calcul intégral, et qui, je l'espère, paraîtra entièrement élémentaire. Je pars simplement de la série

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

et posant pour un instant

$$\mathrm{F}(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n},$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{e^x - \mathrm{F}(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{1.2\ldots n+1} + \frac{x}{1.2\ldots n+2} + \ldots = \sum \frac{x^k}{1.2\ldots n+k+1},$$

il suffira, comme on va voir, de prendre les dérivées d'ordre n des deux membres de cette relation. Effectivement, on obtient d'abord

$$\mathrm{D}_x^n \frac{e^x}{x^{n+1}} = \frac{e^x \Phi(x)}{x^{2n+1}},$$

où $\Phi(x)$ est un polynome à coefficients entiers du degré n, dont il n'est aucunement nécessaire d'avoir l'expression qu'il serait d'ailleurs aisé de former. Nous remarquerons ensuite, à l'égard du terme $\frac{\mathrm{F}(x)}{x^{n+1}}$, que la différentiation, effectuée n fois de suite, fait disparaître les dénominateurs des coefficients, de sorte qu'il vient

$$\mathrm{D}_x^n \frac{\mathrm{F}(x)}{x^{n+1}} = \frac{\Phi_1(x)}{x^{2n+1}},$$

$\Phi_1(x)$ étant un polynome dont tous les coefficients sont des nombres entiers. De la relation proposée, nous tirons donc la suivante :

$$\frac{e^x \Phi(x) - \Phi_1(x)}{x^{2n+1}} = \sum_0^\infty{}_k \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)x^k}{1.2\ldots k+2n+1},$$

ou bien sous une autre forme

$$e^x \Phi(x) - \Phi_1(x) = x^{2n+1} \sum \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)x^k}{1.2\ldots k+2n+1}$$
$$= \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots n} \sum \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)x^k}{n+1.n+2\ldots k+2n+1}.$$

Or je dis qu'en faisant croître n, le second membre qui jamais ne peut s'évanouir deviendra plus petit que toute grandeur donnée. Il en est effectivement ainsi du facteur $\frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots n}$, et d'autre part, la série infinie $\sum \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)x^k}{n+1.n+2\ldots k+2n+1}$ étant mise sous la forme $\sum \frac{1.2\ldots k+n}{n+1.n+2\ldots k+2n+1} \, \frac{x^k}{1.2\ldots k}$, on reconnaît qu'elle a pour limite supérieure $e^x = \sum \frac{x^k}{1.2\ldots k}$, car le facteur

$$\frac{1.2\ldots k+n}{n+1.n+2\ldots k+2n+1}$$

est inférieur à l'unité.

De là résulte qu'en supposant x un nombre entier, e^x ne peut être une quantité commensurable $\frac{b}{a}$; car on aurait

$$e^x \Phi(x) - \Phi_1(x) = \frac{b\,\Phi(x) - a\,\Phi_1(x)}{a},$$

et cette fraction dont le numérateur est essentiellement entier, d'après ce qui a été établi à l'égard des polynomes $\Phi(x)$ et $\Phi_1(x)$, ne peut, sans être nulle, descendre au-dessous de $\frac{1}{a}$.

L'expression découverte par Lambert

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \ldots}},$$

que j'évite ainsi d'employer, n'en reste pas moins un résultat du plus grand prix et qui ouvre la voie à des recherches curieuses et intéressantes. En supposant par exemple $x = 2$, on peut présumer qu'il restera quelque chose, de la série si simple des fractions intégrantes ayant pour numérateurs le nombre constant 4, dans la fraction continue ordinaire équivalente, dont les numérateurs seraient l'unité.

En effet, il paraît que, de distance en distance, viennent alors s'offrir des quotients incomplets continuellement croissants. C'est du moins ce qu'indique le résultat suivant, dû à M. G. Forestier, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Rochefort.

Prenant l'expression que nous avons en vue, à partir du terme où les fractions intégrantes sont inférieures à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire la quantité

$$\cfrac{4}{9+\cfrac{4}{11+\cfrac{4}{13+\ldots}}}$$

M. Forestier a trouvé pour la fraction continue ordinaire équivalente

$$\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''+\ldots}}},$$

la série suivante, des quotients incomplets, q, q', q'', ..., à savoir : 2, 2, 1, 20, 1, 10, 19, 1, 2, 11, 7, 1, 3, 1, 5, 1, 1, 1, 20, 3, 1, 3, 67, 2, 2, 3, 1, 5, 1, 3, 3, 147, ...

Or, on y voit figurer les termes 19, 20, 67, 147, qui semblent justifier cette prévision (1).

(1) Les nombres indiqués ne sont pas exacts. M. Bourget, ayant exécuté deux fois les calculs, a trouvé la suite 2, 2, 1, 20, 1, 10, 19, 1, 3, 1, 2, 2, 2, 70, 18, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, 3, 2, 5, 1, 2, 35, 1, 14, 4, ... E. P.

SUR UNE ÉQUATION TRANSCENDANTE.

Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques, t. IV, 1873, p. 61.

Soit $f(x)$ une fonction rationnelle de la forme suivante :

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\ldots+\frac{L}{x-l},$$

les quantités $a, b, \ldots, l$ étant toutes réelles, et les coefficients A, B, ..., L réels et positifs; je dis en premier lieu que l'équation

$$\log\alpha\frac{1+x}{1-x}-f(x)=0,$$

où α est une constante positive, possède $n+1$ racines réelles, n désignant le nombre des quantités $a, b, \ldots, l$, comprises entre -1 et $+1$. Soit, en effet, pour un instant,

$$F(x)=\log\alpha\frac{1+x}{1-x}-f(x),$$

et désignons par g et h deux termes consécutifs de la série

$$a,\ b,\ c,\ \ldots,\ l,$$

en supposant les termes rangés par ordre croissant de grandeur, de sorte que la fonction rationnelle $f(x)$ soit finie et continue lorsque la variable est comprise entre les limites g et h.

Cela étant, la fonction $\log\alpha\frac{1+x}{1-x}$, et, par suite, $F(x)$ sera elle-même réelle et continue entre ces limites, si on les suppose inférieures en valeur absolue à l'unité; or, ayant pour ε infiniment petit et positif

$$F(g+\varepsilon) = -\frac{G}{\varepsilon}, \qquad F(h-\varepsilon) = +\frac{H}{\varepsilon},$$

c'est-à-dire deux résultats de signes contraires, nous en concluons pour l'équation proposée l'existence d'une racine réelle comprise entre g et h. J'ajoute qu'il n'y en a qu'une; car, en prenant la dérivée de $F(x)$, on obtient cette expression positive pour toutes les valeurs de x entre -1 et $+1$, savoir

$$F'(x) = \frac{2}{1-x^2} + \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{L}{(x-l)^2},$$

de sorte que $F(x)$ va continuellement en croissant depuis $-\frac{G}{\varepsilon}$ jusquà $+\frac{H}{\varepsilon}$, et ne s'annule par conséquent qu'une seule fois. En désignant donc par n le nombre des quantités $a, b, \ldots, l$, qui sont comprises entre -1 et $+1$, nous prouvons ainsi que l'équation proposée possède $n-1$ racines réelles; mais ayant

$$F(-1+\varepsilon) = \log\alpha\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon},$$

quantité infiniment grande et négative, on voit de plus qu'il existe encore une racine comprise entre -1 et le terme le plus voisin de la suite $a, b, \ldots, l$; enfin une dernière racine se trouve pareillement entre le terme le plus voisin de l'unité et l'unité, attendu que l'expression

$$F(1-\varepsilon) = \log\alpha\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$$

est infiniment grande et positive.

En second lieu, je dis que l'équation proposée ne peut admettre aucune racine imaginaire dont le module soit inférieur à l'unité. Soit, en effet, $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ une telle racine; on trouvera d'abord

$$\begin{aligned} f(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = {} & \frac{A(\alpha-a)}{(\alpha-a)^2+\beta^2} + \frac{B(\alpha-b)}{(\alpha-b)^2+\beta^2} + \ldots \\ & - \beta\sqrt{-1}\left[\frac{A}{(\alpha-a)^2+\beta^2} + \frac{B}{(\alpha-b)^2+\beta^2} + \ldots\right]. \end{aligned}$$

Pour calculer ensuite la valeur, que l'on sait être unique et entiè-

rement déterminée, de l'expression $\log\frac{1+x}{1-x}$, lorsque, conformément à la supposition faite, le module de $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ est inférieur à l'unité, j'emploierai la relation, aisée à vérifier,

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\frac{1}{x} - z}.$$

Or on en déduit, en faisant, pour un moment,

$$\frac{1}{\rho} = \alpha^2 + \beta^2,$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\frac{1}{x} - z} &= \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\rho(\alpha - \beta\sqrt{-1}) - z} \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{(\rho\alpha - z)\,dz}{(\rho\alpha - z)^2 + \beta^2} + \rho\beta\sqrt{-1}\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(\rho\alpha - z)^2 + \beta^2}, \end{aligned}$$

et l'on voit ainsi que le coefficient de $\beta\sqrt{-1}$ est la quantité essentiellement positive

$$\rho\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(\rho\alpha - z)^2 + \beta^2}.$$

Ayant donc, pour ce même coefficient dans l'expression de

$$-f(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$

une quantité qui est également positive, à savoir

$$\frac{A}{(\alpha-a)^2+\beta^2} + \frac{B}{(\alpha-b)^2+\beta^2} + \ldots,$$

nous reconnaissons que la partie imaginaire de $F(\alpha + \beta\sqrt{-1})$ ne peut jamais s'évanouir, de sorte que notre équation n'admet, comme nous voulions l'établir, que des racines réelles.

La relation précédemment employée, à savoir

$$\log\frac{1+x}{1-x} = \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\frac{1}{x} - z},$$

donne lieu à cette remarque que, en posant

$$\frac{1+x}{1-x}=a,$$

d'où

$$\log a=\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{\frac{a+1}{a-1}-z},$$

celle des valeurs en nombre infini du logarithme qui se trouve ainsi représentée par l'intégrale définie est l'intégrale $\int_1^a \frac{dz}{z}$, en supposant que la variable z décrive la ligne droite joignant les deux points qui ont pour affixes 1 et a.

EXTRAIT

D'UNE

LETTRE DE M. CH. HERMITE A M. PAUL GORDAN,

SUR L'EXPRESSION $U\sin x+V\cos x+W$.

Journal de Crelle, t. 76, p. 303-312.

... En attendant, c'est des fractions continues algébriques que je prends la liberté de vous entretenir, ou plutôt d'une extension de cette théorie, ayant cherché le système des polynomes entiers en x, U, V, W, tels que le développement de l'expression à trois termes

$$U\sin x+V\cos x+W$$

commence par la plus haute puissance possible de la variable. Ces polynomes forment une série doublement infinie, ainsi que pouvait le faire présumer l'analogie avec la théorie arithmétique des minima successifs de la quantité

$$x+ay+bz,$$

où a et b sont des constantes numériques, x, y, z des nombres entiers. Ces minima s'obtiennent, en effet, par la réduction continuelle de la forme quadratique ternaire :

$$(x+ay+bz)^2+\frac{y^2}{\alpha}+\frac{z^2}{\beta},$$

où entrent deux indéterminées α et β auxquelles doivent être attribuées toutes les valeurs de zéro à l'infini. La première série conduira à la fraction continue de Lambert :

$$\tang x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \dots}}}$$

et s'obtient ainsi.

Soit

$$\mathrm{A} = \sin x,$$

puis successivement

$$\mathrm{A}_1 = \int_0^x \mathrm{A}x\,dx \;= \sin x - x\cos x,$$

$$\mathrm{A}_2 = \int_0^x \mathrm{A}_1 x\,dx = (3 - x^2)\sin x - 3x\cos x,$$

$$\mathrm{A}_3 = \int_0^x \mathrm{A}_2 x\,dx = (15 - 6x^2)\sin x - (15x - x^3)\cos x,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et, en général,

$$\mathrm{A}_{n+1} = \int_0^x \mathrm{A}_n x\,dx.$$

Les formules élémentaires

$$\int \cos x\,\mathrm{F}(x)\,dx = \sin x\,\mathfrak{F}(x) + \cos x\,\mathfrak{F}'(x),$$

$$\int \sin x\,\mathrm{F}(x)\,dx = \sin x\,\mathfrak{F}'(x) - \cos x\,\mathfrak{F}(x),$$

où l'on suppose $\mathrm{F}(x)$ un polynome entier et

$$\mathfrak{F}(x) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}''(x) + \mathrm{F}^{\text{IV}}(x) - \dots,$$

montrent que A_n est de la forme $\mathrm{U}\sin x + \mathrm{V}\cos x$, U et V étant des polynomes entiers dont l'un est du degré n et l'autre du degré $n - 1$. En second lieu, si l'on part du développement en série :

$$\mathrm{A} = \sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \dots,$$

on en conclura aisément

$$\mathrm{A}_n = \frac{x^{2n+1}}{1.3.5\dots 2n+1} - \frac{x^{2n+3}}{1.2.3.5\dots 2n+3} + \dots$$

ou encore

$$\mathrm{A}_n = x^{2n+1} \sum_0^k \frac{1}{(2k+1)(2k+3)\dots(2k+2n+1)}\,\frac{(-1)^k x^{2k}}{1.2.3\dots 2k}.$$

Le premier terme de cette série étant en x^{2n+1}, vous voyez que U et V sont bien les polynomes qui résultent de la théorie des fractions continues. Mais on peut y parvenir par une autre voie.

Soit

$$\mathfrak{A} = \frac{\sin x}{x},$$

puis successivement

$$\mathfrak{A}_1 = -\frac{1}{x}\,\frac{d\mathfrak{A}}{dx} = \frac{\sin x - x\cos x}{x^3},$$

$$\mathfrak{A}_2 = -\frac{1}{x}\,\frac{d\mathfrak{A}_1}{dx} = \frac{(3 - x^2)\sin x - 3x\cos x}{x^5},$$

$$\mathfrak{A}_3 = -\frac{1}{x}\,\frac{d\mathfrak{A}_2}{dx} = \frac{(15 - 6x^2)\sin x - (15x - x^3)\cos x}{x^7},$$

et, en général,

$$\mathfrak{A}_{n+1} = -\frac{1}{x}\,\frac{d\mathfrak{A}_n}{dx}.$$

On reconnaît immédiatement qu'on aura

$$\mathfrak{A}_n = \frac{\mathrm{U}\sin x + \mathrm{V}\cos x}{x^{2n+1}},$$

U et V étant encore des polynomes dont l'un est de degré n et l'autre de degré $n - 1$; on obtient aussi facilement la série

$$\mathfrak{A}_n = \frac{1}{1.3.5\dots 2n+1} - \frac{x^2}{2.3.5\dots 2n+3} + \dots.$$

Il s'ensuit que

$$\mathfrak{A}_n = \frac{\mathrm{A}_n}{x^{2n+1}};$$

et, par conséquent,

$$\frac{\mathrm{A}_{n+1}}{x^{2n+3}} = -\frac{1}{x}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{A}_n}{x^{2n+1}}\right),$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{A}_{n+1} = (2n+1)\mathrm{A}_n - \frac{d\mathrm{A}_n}{dx}x;$$

mais

$$\frac{dA_n}{dx} = A_{n-1}x,$$

et nous parvenons entre trois termes consécutifs à la relation

$$A_{n+1} = (2n+1)A_n - A_{n-1}x^2.$$

De là se tire la fraction continue de Lambert, et l'équation différentielle des transcendantes de Bessel. Il suffit, en effet, d'observer que

$$A_{n-1} = \frac{1}{x}\frac{dA_n}{dx}, \qquad A_{n-2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2A_n}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dA_n}{dx}\right)$$

pour passer de l'égalité

$$A_n = (2n-1)A_{n-1} - A_{n-2}x^2$$

à cette équation si connue

$$\frac{d^2A_n}{dx^2} - \frac{2n}{x}\frac{dA_n}{dx} + A_n = 0,$$

dont une seconde solution est donnée comme il est aisé de le voir par la formule

$$A_n = U\cos x - V\sin x.$$

Je vais maintenant sortir du domaine des fractions continues, et définir une seconde série de polynomes U, V, W, en posant

$$B_n = \int_0^x A_n\,dx,$$

puis successivement une troisième, une quatrième, etc., par les relations semblables

$$C_n = \int_0^x B_n\,dx, \qquad D_n = \int_0^x C_n\,dx, \qquad \ldots.$$

Les formules déjà employées

$$\int \cos x\,F(x)\,dx = \sin x\,\mathfrak{f}(x) + \cos x\,\mathfrak{f}'(x),$$

$$\int \sin x\,F(x)\,dx = \sin x\,\mathfrak{f}'(x) - \cos x\,\mathfrak{f}(x)$$

donnent la composition de ces quantités, et montrent qu'en désignant par P_n le terme général de la série de rang p, on aura

$$P_n = U\sin x + V\cos x + W,$$

U et V étant des polynomes entiers, l'un du degré n, l'autre du degré $n-1$, et W de degré $p-1$. Or le développement

$$P_n = x^{2n+p}\sum_0 {}_k \frac{(2k+2)(2k+4)\ldots(2k+2n)(-1)^k x^{2k}}{1.2.3\ldots 2k+2n+p},$$

dont le premier terme est de degré $2n+p$, a bien la forme voulue. Ces mêmes quantités peuvent s'obtenir d'une autre manière comme il suit. Posons, suivant que p est pair ou impair,

$$\mathfrak{p} = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}p}}{x^p}\left[\cos x - 1 + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}p}\frac{x^{p-2}}{1.2\ldots p-2}\right]$$

ou bien

$$\mathfrak{p} = \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{x^p}\left[\sin x - x + \frac{x^3}{1.2.3} - \ldots + (-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{x^{p-2}}{1.2\ldots p-2}\right]$$

et faisons successivement

$$\mathfrak{p}_1 = -\frac{1}{x}\frac{d\mathfrak{p}}{dx}, \qquad \mathfrak{p}_2 = -\frac{1}{x}\frac{d\mathfrak{p}_1}{dx}, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{p}_{n+1} = -\frac{1}{x}\frac{d\mathfrak{p}_n}{dx}.$$

Cette loi de formation donne très facilement le développement en série de $\mathfrak{p}_n$, en partant du développement de $\mathfrak{p}$, à savoir

$$\mathfrak{p} = \frac{1}{1.2\ldots p} - \frac{x^2}{1.2\ldots p+2} + \frac{x^4}{1.2\ldots p+4}\cdots$$

On retrouve ainsi

$$\mathfrak{p}_n = \sum_0 {}_k \frac{(2k+2)(2k+4)\ldots(2k+2n)(-1)^k x^{2k}}{1.2.3\ldots 2k+2n+p},$$

ce qui conduit à la relation

$$\mathfrak{p}_n = \frac{P_n}{x^{2n+p}},$$

d'où l'on tire, comme pour les quantités A_n, celle-ci :

$$P_{n+1} = (2n+p)P_n - \frac{dP_n}{dx}x.$$

Mais la dérivée $\frac{d\mathrm{P}_n}{dx}$ est le $n^{\text{ième}}$ terme de la $(p-1)^{\text{ième}}$ série; faisant donc

$$p = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,$$

nous aurons successivement

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_{n+1} &= (2n+2)\,\mathrm{B}_n - \mathrm{A}_n x,\\
\mathrm{C}_{n+1} &= (2n+3)\,\mathrm{C}_n - \mathrm{B}_n x,\\
\mathrm{D}_{n+1} &= (2n+4)\,\mathrm{D}_n - \mathrm{C}_n x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

J'ai calculé par ces formules et celles qui concernent A_n les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_1 &= \sin x - x\cos x,\\
\mathrm{A}_2 &= (3 - x^2)\sin x - 3x\cos x,\\
\mathrm{A}_3 &= (15 - 6x^2)\sin x - (15x - x^3)\cos x,\\
\mathrm{A}_4 &= (105 - 45x^2 + x^4)\sin x - (105x - 10x^3)\cos x,\\
\mathrm{A}_5 &= (945 - 420x^2 + 15x^4)\sin x - (945x - 105x^3 + x^5)\cos x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_0 &= -\cos x + 1,\\
\mathrm{B}_1 &= -x\sin x - 2\cos x + 2,\\
\mathrm{B}_2 &= -5x\sin x - (8 - x^2)\cos x + 8,\\
\mathrm{B}_3 &= -(33x - x^3)\sin x - (48 - 9x^2)\cos x + 48,\\
\mathrm{B}_4 &= -(279x - 14x^3)\sin x - (384 - 87x^2 + x^4)\cos x + 384,\\
\mathrm{B}_5 &= -(2895x - 185x^3 + x^5)\sin x - (3840 - 975x^2 + 20x^4)\cos x + 3840,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_0 &= -\sin x + x,\\
\mathrm{C}_1 &= -3\sin x + x\cos x + 2x,\\
\mathrm{C}_2 &= -(15 - x^2)\sin x + 7x\cos x + 8x,\\
\mathrm{C}_3 &= -(105 - 12x^2)\sin x + (57x - x^3)\cos x + 48x,\\
\mathrm{C}_4 &= -(945 - 141x^2 + x^4)\sin x + (561x - 18x^3)\cos x + 384x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_0 &= \cos x - 1 + \frac{x^2}{2},\\
\mathrm{D}_1 &= x\sin x + 4\cos x + x^2 - 4,\\
\mathrm{D}_2 &= 9x\sin x + (24 - x^2)\cos x + 4x^2 - 24,\\
\mathrm{D}_3 &= (87x - x^3)\sin x + (192 - 15x^2)\cos x + 24x^2 - 192,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

C'est maintenant, Monsieur, que se présente une question arithmétique d'un grand intérêt. Supposons $x = i$, en faisant pour abréger

$$h = \frac{\sin i}{i} = \frac{e - e^{-1}}{2}, \qquad h' = \cos i = \frac{e + e^{-1}}{2};$$

la quantité

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{U}\sin x + \mathrm{V}\cos x + \mathrm{W}$$

prendra la forme suivante,

$$i^{2n+p}(uh + vh' + w),$$

où u et v sont toujours des nombres entiers, w pouvant être fractionnaire, mais devenant également entier quand n croît au delà d'une certaine limite. On a, en effet,

$$\mathrm{W} = -(-1)^{\frac{1}{2}p} \sum \frac{(p-k)(p-k+2)\ldots(p-k+2n-2)(-1)^{\frac{1}{2}k} x^k}{1.2.3\ldots k},$$

en supposant $k = 0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ p-2$, si p est pair, et

$$\mathrm{W} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \sum \frac{(p-k)(p-k+2)\ldots(p-k+2n-2)(-1)^{\frac{k-1}{2}} x^k}{1.2.3\ldots k},$$

en faisant $k = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ p-2$, si p est impair; or, dans les deux cas, il est visible que le coefficient

$$\frac{(p-k)(p-k+2)\ldots(p-k+2n-2)}{1.2.3\ldots k}$$

finit par devenir entier. Cela posé, les divers systèmes des nombres

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = w$$

donneront-ils des minima de la fonction linéaire $xh + yh' + z$?

Vous connaissez la découverte mémorable de Dirichlet sur les minima des fonctions linéaires, à un nombre quelconque d'indéterminées; en arithmétique elle me semble, si je puis dire, aussi importante que la théorie des fonctions elliptiques pour l'Analyse. Mais, tandis que les fractions continues sont d'un emploi usuel, les applications numériques des théorèmes de Dirichlet restent comme impossibles, et à cet égard je reconnais n'avoir encore guère avancé la question, en déduisant ces théorèmes de la considération des formes quadratiques. Me plaçant toutefois en ce moment à mon point de vue, j'envisage les minima de la forme

$$f = (xh + yh' + z)^2 + \frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta},$$

où α et β sont positifs et dont l'invariant est $D = \frac{1}{\alpha\beta}$. Ces minima satisfont à la condition $f \leqq \sqrt{2D}$; or le produit $(hx + h'y + z)^2 \frac{x^2}{\alpha} \frac{y^2}{\beta}$ a pour maximum $\left(\frac{f}{3}\right)^3$, d'où cette relation indépendante de α et β, savoir :

$$(hx + h'y + z)xy < \sqrt{\frac{2}{27}}.$$

En appliquant ce critérium aux nombres donnés par les quantités B_n, on reconnaît immédiatement qu'ils ne peuvent convenir; mais dans les séries suivantes je trouve :

$$iC_2 = 16h - 7h' - 8 = \frac{1}{3.5.6.7} + \ldots,$$

$$D_2 = -9h + 25h' - 28 = \frac{1}{3.5.6.7.8} + \ldots,$$

$$D_3 = -88h + 207h' - 216 = -\frac{1}{3.5.7.8.9.10} - \ldots,$$

$$iE_3 = -333h + 124h' - 200 = \frac{1}{3.5.7.8.9.10.11} + \ldots,$$

$$F_3 = 166h - 501h' - 578 = \frac{1}{3.5.7.8.9.10.11.12} + \ldots,$$

$$F_4 = 2327h - 6136h' - 6736 = -\frac{1}{3.5.7.9.10.11.12.13.14} - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et vous voyez que la condition requise est complètement remplie, le calcul par logarithmes donnant dans le dernier cas

$$\frac{2327.6136}{3.5.7.9.10.11.12.13.14} = 0,06006.$$

Mais je reviens à l'Algèbre, pour considérer les expressions rationnelles approchées de $\sin x$ et $\cos x$ données par deux équations telles que

$$A_n = 0, \qquad B_n = 0$$

ou bien

$$B_n = 0, \qquad C_n = 0; \qquad C_n = 0, \qquad D_n = 0, \qquad \ldots.$$

Dans le premier cas, par exemple, on trouve pour $n = 1, 2, 3$ ces valeurs :

$$\sin x = \frac{2x}{2 + x^2} = \frac{24x}{24 + 4x^2 + x^4} = \frac{720x - 48x^3}{720 + 72x^2 + 6x^4 + x^6},$$

$$\cos x = \frac{2}{2 + x^2} = \frac{24 - 8x^2}{24 + 4x^2 + x^4} = \frac{720 - 288x^2}{720 + 72x^2 + 6x^4 + x^6},$$

et, en général, il est aisé de voir qu'elles seront de la forme

$$\cos x = \frac{S}{R}, \qquad \sin x = \frac{T}{R},$$

R, S et T étant des polynomes entiers dont les premiers renferment seulement des puissances paires et le troisième des puissances impaires de la variable. En déduisant d'abord des relations proposées

$$\cos x + i \sin x = \frac{S + iT}{R},$$

j'observe que, si l'on change x en $-ix$, on se trouve amené à une expression entièrement réelle de l'exponentielle e^x, par une fraction dont le dénominateur ne contient que des puissances paires. Sous ce point de vue plus simple, je remarque qu'en posant

$$\Phi(x) = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots + a_n x^{2n}$$

on peut, en général, disposer des coefficients $a_0, a_1, \ldots$ de manière que le produit $e^x \Phi(x)$ ordonné suivant les puissances croissantes de x manque des n termes en $x^{n+p+1}, x^{n+p+2}, \ldots, x^{2n+p}$, et soit de la forme

$$e^x \Phi(x) = \Pi(x) + \varepsilon x^{2n+p+1} + \varepsilon' x^{2n+p+2} + \ldots.$$

Il résulte qu'en faisant

$$\Pi_1(x) = \Pi(-x)$$

nous aurons, aux termes près de l'ordre $2n + p + 1$,

$$e^x = \frac{\Pi(x)}{\Phi(x)}, \qquad e^{-x} = \frac{\Pi_1(x)}{\Phi(x)},$$

et il suffira de changer x en ix pour retrouver sous forme réelle les expressions que j'ai eues d'abord en vue

$$\cos x = \frac{S}{R}, \qquad \sin x = \frac{T}{R}.$$

Or, ces polynomes $\Phi(x)$ et $\Pi(x)$, dont la considération me semble indispensable pour approfondir la question arithmétique difficile que j'ai seulement touchée, s'obtiennent comme il suit.

J'applique la formule

$$\int F(t) e^{-tx}\, dt = -e^{-tx} \mathfrak{F}(t),$$

où $F(t)$ est une fonction entière et $\mathfrak{F}$ la quantité

$$\mathfrak{F}(t) = \frac{F(t)}{x} + \frac{F'(t)}{x^2} + \frac{F''(t)}{x^3} + \ldots,$$

à la détermination de l'intégrale définie $\int_0^1 t^n (1-t^2)^p e^{-tx}\, dt$. Pour cela je remarque que la relation

$$\int_0^1 F(t) e^{-tx}\, dt = \mathfrak{F}(0) - e^{-x} \mathfrak{F}(1)$$

met en évidence deux termes, dont le premier se calcule au moyen du développement

$$F(t) = t^n (1-t^2)^p = t^n - \frac{p}{1} t^{n+2} + \frac{p(p-1)}{1.2} t^{n+4} - \ldots + (-1)^p t^{n+2p}$$

qui donne les valeurs des dérivées de $F(t)$ pour $t = 0$; on a donc immédiatement

$$\mathfrak{F}(0) = \frac{1.2.3\ldots n}{x^{n+1}} - \frac{p}{1} \frac{1.2.3\ldots n+2}{x^{n+3}} + \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{1.2.3\ldots n+2p}{x^{n+2p+1}} = \frac{1.2.3\ldots n}{x^{n+2p+1}} \Phi(x),$$

en posant

$$\Phi(x) = x^{2p} - \frac{p}{1}(n+1)(n+2) x^{2p-2}$$
$$+ \frac{p(p-1)}{1.2}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) x^{2p-4} - \ldots.$$

Soit en second lieu $t = 1 + h$; les dérivées de $F(t)$ pour $t = 1$ s'obtiendront en développant suivant les puissances de h la quantité

$$F(1+h) = (-1)^p h^p (1+h)^n (2+h)^p.$$

Faisons

$$(1+h)^n (2+h)^p = A + Bh + Ch^2 + \ldots + h^{n+p},$$

et l'on en conclura semblablement

$$\mathfrak{F}(1) = \frac{(-1)^p . 1.2.3\ldots p}{x^{n+2p+1}} \Pi(x),$$

en écrivant pour abréger

$$\Pi(x) = A x^{n+p} + pB x^{n+p-1} + p(p+1) C x^{n+p-2} + \ldots.$$

Ceci posé, et, en observant que l'intégrale $\int_0^1 t^n (1-t^2)^p e^{-tx}\, dt$ peut être évidemment développée sous la forme $\varepsilon + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 x^2 + \ldots$, la relation à laquelle nous sommes amenés, à savoir

$$\frac{1.2.3\ldots n}{x^{n+2p+1}} \Phi(x) - e^{-x} \frac{(-1)^p . 1.2.3\ldots p}{x^{n+2p+1}} \Pi(x) = \varepsilon + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 x^2 + \ldots,$$

donne facilement

$$e^x \Phi(x) - (-1)^p \frac{1.2.3\ldots p}{1.2.3\ldots n} \Pi(x) = \varepsilon' x^{n+2p+1} + \varepsilon'' x^{n+2p+2} + \ldots.$$

Les polynomes cherchés sont donc ainsi obtenus d'une manière générale, mais je n'en ai pas jusqu'ici fait l'étude approfondie. J'ai seulement remarqué que l'intégrale définie $\int_0^1 t^n (1-t^2)^p e^{-tx}\, dt$, et ces deux autres

$$\int_0^{-1} t^n (1-t^2)^p e^{-tx}\, dt, \qquad \int_0^{\infty} t^n (1-t^2)^p e^{-tx}\, dt,$$

satisfont à l'équation linéaire du troisième ordre

$$x \frac{d^3 y}{dx^3} + (n + 2p + 3) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - (n+1) y = 0.$$

EXTRAIT

D'UNE

LETTRE DE M. CH. HERMITE A M. BORCHARDT,

SUR

QUELQUES APPROXIMATIONS ALGÉBRIQUES.

Journal de Crelle, t. 76, p. 342-344, 1873.

... Je ne me hasarderai point à la recherche d'une démonstration de la transcendance du nombre π. Que d'autres tentent l'entreprise, nul ne sera plus heureux que moi de leur succès, mais croyez-m'en, mon cher ami, il ne laissera pas que de leur en coûter quelques efforts. Tout ce que je puis, c'est de refaire ce qu'a déjà fait Lambert, seulement d'une autre manière, au moyen de cette égalité

$$A_n = U\sin x + V\cos x = \frac{x^{2n+1}}{2.4\ldots 2n}\int_0^1 (1-z^2)^n \cos xz\, dz,$$

où A_n, U et V désignent les mêmes quantités que dans ma lettre à M. Gordan. Vous savez que U est un polynome entier et à coefficients entiers en x^2 du degré $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n-1}{2}$ selon que n est pair ou impair; il en résulte dans le premier cas, par exemple, que pour $x = \frac{\pi}{2}$, en supposant que $\frac{\pi^2}{4}$ soit une fraction $\frac{b}{a}$, on aura

$$U = \frac{N}{a^{\frac{1}{2}n}},$$

où N est entier, et la relation proposée donne

$$\frac{N}{a^{\frac{1}{2}n}} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{a}\right)^n}{2.4\ldots 2n}\int_0^1 (1-z^2)^n \cos\frac{\pi z}{2}\, dz$$

ou bien

$$N = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^n}{2.4\ldots 2n}\int_0^1 (1-z^2)^n \cos\frac{\pi z}{2}\, dz.$$

Or, on met immédiatement une impossibilité en évidence, puisque le second membre devient, sans pouvoir jamais s'annuler, plus petit que toute quantité donnée quand n augmente, le premier étant un nombre entier.

Voici une autre conséquence de l'expression de A_n par une intégrale définie; on en tire aisément, sous forme d'intégrales doubles, les quantités

$$B_n = \int_0^x A_n\, dx, \qquad C_n = \int_0^x B_n\, dx, \qquad \ldots,$$

en employant les formules élémentaires

$$\int_0^x dx \int_0^x f(x)\, dx = \int_0^x (x-z) f(z)\, dz = x^2 \int_0^1 (1-\lambda) f(\lambda x)\, d\lambda,$$

$$\int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x f(x)\, dx = \int_0^x \frac{(x-z)^2}{1.2} f(z)\, dz$$
$$= \frac{x^3}{1.2}\int_0^1 (1-\lambda)^2 f(\lambda x)\, d\lambda,$$

. . . . ,

et il vient ainsi

$$P_n = \frac{x^{2n+p+1}}{1.2\ldots p - 1.2.4\ldots 2n}\int_0^1\int_0^1 (1-\lambda^2)^n (1-\lambda_1)^{p-1} \lambda_1^{2n+1} \cos\lambda\lambda_1 x\, d\lambda\, d\lambda_1.$$

Mais, sous un point de vue plus général, supposons les i polynomes : $\Phi_m(x)$, $\Phi_n(x)$, ..., $\Phi_r(x)$ des degrés m, n, ..., r déterminés de manière que le développement suivant les puissances croissantes de la variable de la fonction

$$f(x) = e^{\alpha x}\Phi_m(x) + e^{\beta x}\Phi_n(x) + \ldots + \Phi_r(x)$$

commence au terme du degré le plus élevé possible en $x^{m+n+\ldots+r+i-1}$. En multipliant par une nouvelle exponentielle, $e^{\omega x}$, et formant la suite des quantités

$$f_1(x) = \int_0^x e^{\omega x} f(x)\,dx, \qquad f_2(x) = \int_0^x f_1(x)\,dx, \qquad \ldots,$$
$$f_{s+1}(x) = \int_0^x f_s(x)\,dx,$$

il est clair que la dernière sera de la forme suivante,

$$f_{s+1}(x) = e^{(\alpha+\omega)x}\,\Psi_m(x) + e^{(\beta+\omega)x}\,\Psi_n(x) + \ldots + e^{\omega x}\,\Psi_r(x) + \Psi_s(x),$$

où $\Psi_m(x)$, $\Psi_n(x)$, $\ldots$, $\Psi_s(x)$ seront des polynomes entiers des degrés $m, n, \ldots, s$, et que son développement commencera par un terme de degré $m+n+\ldots+s+i$. On en conclut aisément que si l'on pose

$$\Theta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i) = (1-\lambda_1)^n (1-\lambda_2)^p \ldots (1-\lambda_i)^s \lambda_1^m \lambda_2^{m+n+1} \ldots \lambda_i^{m+n+\ldots+r+i-1}$$
$$\Lambda = (\alpha-\beta)\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_i + (\beta-\gamma)\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_i + (\gamma-\delta)\lambda_3\lambda_4\ldots\lambda_i + \ldots + \omega\lambda_i$$

on aura la relation

$$\int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1 \Theta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i) e^{\Lambda x}\,d\lambda_1\,d\lambda_2\ldots d\lambda_i$$
$$= \frac{e^{\alpha x}\,\Theta_m(x) + e^{\beta x}\,\Theta_n(x) + \ldots + e^{\omega x}\,\Theta_r(x) + \Theta_s(x)}{x^{m+n+\ldots+s+i}},$$

où $\Theta_m(x)$, $\Theta_n(x)$, $\ldots$, $\Theta_s(x)$ sont des polynomes entiers des degrés $m, n, \ldots, s$; c'est donc au moyen d'une intégrale multiple la définition du système des polynomes entiers de degrés donnés, qui donnent la plus grande approximation de la fonction linéaire composée avec les exponentielles $e^{\alpha x}$, $e^{\beta x}$, $\ldots$, $e^{\omega x}$.

Dans le courant de ces recherches, voici une question arithmétique qui m'a beaucoup préoccupé. En considérant pour une valeur entière de x la fraction continue

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \cfrac{x}{2 + \cfrac{x^2}{6 + \ldots}}$$

ne doit-il pas exister quelque caractère spécial, à l'égard de la

fraction continue ordinaire équivalente dans laquelle les numérateurs des fractions intégrantes sont l'unité? J'avais présumé qu'au moins de distance en distance, les quotients incomplets iraient en grandissant, et c'est ce qui se trouve jusqu'à un certain point confirmé, par le résultat suivant que je dois à l'obligeance de M. Forestier. Soit $x = 3$, et faisons

$$\frac{e^3 - 1}{e^3 + 1} = \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{q' + \cfrac{1}{q'' + \ldots}}};$$

la suite des nombres entiers $q, q', q'', \ldots$ est

1, 8, 1, 16, 2, 1, 1, 2, 4, 1, 2, 11, 2, 1, 2, 36, 1, 8, 4, 17, 9, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 90, ...

Malheureusement les calculs sont si longs et si pénibles qu'on ne peut espérer trouver quelque loi par la voie de l'induction (1).

(1) Le calcul, après deux vérifications, a donné à M. Bourget la suite différente de celle du texte 1, 9, 1, 1, 5, 2, 1, 8, 1, 1, 12, 2, 1, 7, 1, 3, 8, 4, 6, 1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1, ... E. P.