or, l'intégrale

$$\int e^{(a+b)x}\, \mathfrak{F}\left(\cot\frac{x}{2},\ 2a\right) \mathfrak{F}\left(\cot\frac{x}{2},\ 2b\right) dx,$$

ou encore celle-ci, qui s'y ramène

$$\int e^{(a+b)x}\, \mathfrak{F}(\cot x,\ a)\, \mathfrak{F}(\cot x,\ b)\, dx,$$

s'expriment toujours sous forme finie explicite.

De l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sin x,\ \cos x), f_1(x)\, dx$.

I. Je supposerai que $f(\sin x,\ \cos x)$ soit une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$, et $f_1(x)$ une fonction rationnelle de x, sans partie entière; faisant ensuite, pour abréger,

$$\varphi(x) = f(\sin x,\ \cos x)\, f_1(x),$$

nous éviterons la considération de l'infini *a priori,* comme il s'offre dans l'expression proposée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx,$$

en la remplaçant par celle-ci

$$\int_{-\varepsilon}^{+\eta} \varphi(x)\, dx,$$

en cherchant sa limite lorsqu'on fait croître indéfiniment ε et η. En adoptant en outre pour ces quantités ces formes particulières

$$\varepsilon = 2m\pi, \qquad \eta = 2(n+1)\pi.$$

où m et n sont des nombres entiers, je me fonderai sur une transformation remarquable et importante qui a été donnée par Legendre dans les *Exercices de Calcul intégral,* et par Poisson dans son *Mémoire sur les intégrales définies* (*Journal de l'École Polytechnique,* XVII[e] Cahier, p. 630). Elle consiste à décomposer l'intégrale en une somme d'autres de même forme dont les limites

soient des multiples consécutifs de 2π, en écrivant

$$\begin{aligned}\int_{-2m\pi}^{+2(n+1)\pi} \varphi(x)\, dx = & \int_{-2m\pi}^{-2(m-1)\pi} \varphi(x)\, dx \\ & + \int_{-2(m-1)\pi}^{-2(m-2)\pi} \varphi(x)\, dx + \ldots \\ & + \int_{-2\pi}^{0} \varphi(x)\, dx + \int_{0}^{2\pi} \varphi(x)\, dx \\ & + \int_{2\pi}^{4\pi} \varphi(x)\, dx + \ldots + \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \varphi(x)\, dx,\end{aligned}$$

ou bien, pour abréger,

$$\int_{-2m\pi}^{+2(n+1)\pi} \varphi(x)\, dx = \sum_{k=-m}^{k=+n} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \varphi(x)\, dx.$$

Cela étant, nous ferons dans le second membre $x = z + 2k\pi$, ce qui donnera

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \varphi(x)\, dx = \int_{0}^{2\pi} \varphi(z + 2k\pi)\, dz,$$

et, par conséquent,

$$\int_{-2m\pi}^{+2(n+1)\pi} \varphi(x)\, dx = \sum_{k=-m}^{k=+n} \int_{0}^{2\pi} \varphi(z + 2k\pi)\, dz,$$

ou encore

$$\int_{-2m\pi}^{+2(n+1)\pi} \varphi(x)\, dx = \int_{0}^{2\pi} \Phi(x)\, dx,$$

en posant

$$\Phi(x) = \sum_{k=-m}^{k=+n} \varphi(x + 2k\pi).$$

Nous rencontrons ainsi l'expression analytique d'une fonction périodique qui a été indiquée dans l'Introduction, et sous la condition qu'en faisant croître indéfiniment m et n, la série

$$\begin{aligned}\Phi(x) = \varphi(x) + \varphi(x + 2\pi) + \ldots + \varphi(x + 2n\pi) \\ + \varphi(x - 2\pi) + \ldots + \varphi(x - 2m\pi)\end{aligned}$$

soit convergente, nous aurons

$$\Phi(x + 2\pi) = \Phi(x).$$

Or, cette transformation donne la valeur de l'intégrale définie proposée; je dis, en effet, que $\Phi(x)$ s'exprime par une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$, lorsqu'on suppose, comme nous l'avons admis,

$$\varphi(x) = f(\sin x, \cos x)\, f_1(x).$$

II. Je me servirai pour le faire voir de la formule suivante, qui sera démontrée dans le Cours de seconde année, savoir :

$$\sum_{k=-m}^{k=+n} \frac{1}{x + 2k\pi} = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} + \frac{1}{2\pi}\log\frac{n}{m} + \frac{x+\pi}{4m\pi} + \frac{x-\pi}{4n\pi} + \ldots,$$

où les termes non écrits contiennent en dénominateur le carré et les puissances plus élevées de m et n. Elle fait voir que la série du premier membre appartient à l'espèce des suites semi-convergentes, de sorte qu'elle ne représentera $\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}$ qu'en supposant le rapport $\frac{m}{n}$ égal à l'unité pour m et n infinis. Mais, en général, soit λ la limite de la constante $\frac{1}{2\pi}\log\frac{n}{m}$ lorsqu'on fait croître indéfiniment m et n, ce qui donnera

$$\sum_{k=-m}^{k=+n} \frac{1}{x + 2k\pi} = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} + \lambda;$$

nous remarquerons que cette quantité disparaît dans l'expression des dérivées successives du premier membre, qui sont ainsi des séries absolument convergentes, dont la formule nous donne les valeurs, à savoir :

$$\sum_{k=-m}^{k=+n} \frac{d(x+2k\pi)^{-1}}{dx} = \frac{1}{2}\,\frac{d\cot\frac{x}{2}}{dx},$$

$$\sum_{k=-m}^{k=+n} \frac{d^2(x+2k\pi)^{-1}}{dx^2} = \frac{1}{2}\,\frac{d^2\cot\frac{x}{2}}{dx^2}.$$

Cela étant, il suffit d'observer qu'ayant, par la décomposition en fractions simples,

$$f_1(x) = \sum \frac{A}{x-a} + \sum \frac{A_1}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \sum \frac{A_n}{(x-\alpha)^n},$$

ou plutôt

$$f_1(x) = \sum A(x-\alpha)^{-1} + \sum A_1 \frac{d(x-\alpha)^{-1}}{dx} + \ldots + \sum A_n \frac{d^n(x-\alpha)^{-1}}{dx^n},$$

on en conclut sur-le-champ

$$\begin{aligned}\sum_{k=-m}^{k=+n} f_1(x + 2k\pi) = \lambda \sum A &+ \frac{1}{2}\sum A \cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\\ &+ \frac{1}{2}\sum A_1 \frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx} + \ldots\\ &+ \frac{1}{2}\sum A_n \frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^n}.\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$; or, ayant

$$\varphi(x) = f(\sin x, \cos x)\, f_1(x),$$

d'où

$$\Phi(x) = f(\sin x, \cos x) \sum_{k=-m}^{k=+n} f_1(x + 2k\pi),$$

on voit que $\Phi(x)$ est aussi une expression de même nature. Ajoutons que, dans l'intégrale $\int_0^{2\pi} \Phi(x)\,dx$, à laquelle se trouve ramenée la proposée, la quantité indéterminée λ a pour coefficient

$$\sum A \int_0^{2\pi} (f \sin x, \cos x)\,dx;$$

elle aura donc une valeur entièrement déterminée sous l'une ou l'autre de ces deux conditions

$$\sum A = 0 \qquad \text{ou} \qquad \int_0^{2\pi} f(\sin x, \cos x)\,dx = 0.$$

Il ne sera pas inutile, avant de faire des applications de ce résultat, de présenter sur l'intégrale indéfinie

$$\int f(\sin x, \cos x)\, f_1(x)\, dx$$

quelques remarques qui montreront comment elle diffère de celles que nous avons précédemment considérées.

III. Soit, en partant de la formule de décomposition en éléments simples,

$$f(\sin x, \cos x) = \Pi(x) + \Phi(x),$$

nous en conclurons

$$\int f(\sin x, \cos x)\, f_1(x)\, dx = \int \Pi(x)\, f_1(x)\, dx + \int \Phi(x)\, f_1(x)\, dx;$$

or, la première partie

$$\int \Pi(x)\, f_1(x)\, dx$$

nous est déjà connue, et il a été établi (p. 92) qu'elle s'exprime au moyen de fonctions explicites et des transcendantes

$$\int \frac{\cos mx\, dx}{x-\alpha}, \quad \int \frac{\sin mx\, dx}{x-\alpha},$$

m étant un nombre entier, et les quantités α désignant les racines du dénominateur de $f_1(x)$ égalé à zéro. A l'égard de la seconde intégrale

$$\int \Phi(x)\, f_1(x)\, dx,$$

nous ferons, en admettant pour plus de généralité une partie entière,

$$f_1(x) = F(x) + \sum A(x-\alpha)^{-1} + \sum A_1 \frac{d(x-\alpha)^{-1}}{dx} + \ldots + \sum A_n \frac{d^n(x-\alpha)^{-1}}{dx^n},$$

et elle se trouvera décomposée en termes de ces deux formes,

savoir :

$$\int F(x)\,\Phi(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int \frac{d^m(x-\alpha)^{-1}}{dx^m}\Phi(x)\, dx,$$

Ces deux termes se décomposeront eux-mêmes si l'on emploie la formule

$$\Phi(x) = \sum \mathcal{A} \cot\frac{1}{2}(x-a) + \sum \mathcal{A}_1 \frac{d\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx} + \sum \mathcal{A}_2 \frac{d^2\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx^2} + \ldots,$$

dans les suivants

$$\int F(x) \frac{d^n \cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx^n}\, dx, \qquad \int \frac{d^m(x-\alpha)^{-1}}{dx^m}\, \frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx^n}\, dx.$$

On tire enfin de l'intégration par parties, c'est-à-dire de la relation

$$\int U \frac{d^n V}{dx^n}\, dx = \Theta + (-1)^n \int V \frac{d^n U}{dx^n}\, dx$$

une dernière résolution donnant, d'une part, des fonctions explicites de la variable, et de l'autre les intégrales

$$\int \cot\frac{1}{2}(x-a)\frac{d^n F(x)}{dx^n}\, dx, \qquad \int \cot\frac{1}{2}(x-a)\frac{d^{m+n}(x-\alpha)^{-1}}{dx^{m+n}}\, dx.$$

Les éléments simples auxquels nous sommes amenés, si l'on observe que $\frac{d^n F(x)}{dx^n}$ est un polynome entier dont le degré peut être quelconque, sont donc les divers termes de ces deux séries

$$\int \cot\frac{1}{2}(x-a)x\, dx, \quad \int \cot\frac{1}{2}(x-a)x^2\, dx, \quad \int \cot\frac{1}{2}(x-a)x^3\, dx, \quad \ldots,$$

$$\int \frac{\cot\frac{1}{2}(x-a)\, dx}{x-\alpha}, \quad \int \frac{\cot\frac{1}{2}(x-a)\, dx}{(x-\alpha)^2}, \quad \int \frac{\cot\frac{1}{2}(x-a)\, dx}{(x-\alpha)^3}, \quad \ldots,$$

dont les uns rappellent la forme analytique des intégrales elliptiques et abéliennes de première et de seconde espèce, les autres celle des fonctions de troisième espèce. Mais on ne connaît entre eux aucune relation qui permette de les ramener les uns aux autres, et ils constituent sans doute des transcendantes distinctes.

Nous voyons par là combien l'intégrale

$$\int f(\sin x, \cos x)\, f_1(x)\, dx$$

est d'une nature analytique plus complexe que toutes celles dont nous nous sommes déjà occupés; toutefois, les calculs par lesquels nous la réduisons généralement aux éléments simples définis précédemment en donneront la valeur sous forme finie explicite lorsqu'ils disparaîtront du résultat. On en tire aussi cette conclusion que l'intégrale définie prise entre limites $-\infty$ et $+\infty$ dépend uniquement des quantités

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx\, dx}{x-\alpha}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx\, dx}{x-\alpha},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cot \frac{1}{2}(x-a) \frac{d^n (x-\alpha)^{-1}}{dx^n}\, dx,$$

en excluant l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \cot \frac{1}{2}(x-\alpha)\, x^n\, dx$, qui est amenée par la partie entière $\mathrm{F}(x)$ de la fonction $f_1(x)$, et dont la valeur serait infinie ou indéterminée. Or on peut leur substituer, comme nous avons vu, celles-ci :

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos mx \cot \frac{1}{2}(x-\alpha)\, dx, \qquad \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin mx \cot \frac{1}{2}(x-\alpha)\, dx,$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cot \frac{1}{2}(x-a) \frac{d^n \cot \frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^n}\, dx,$$

dont voici la détermination.

IV. Nous considérerons en même temps les deux premières, et j'appliquerai, comme s'il s'agissait d'obtenir les intégrales indéfinies, la méthode générale exigeant qu'on mette sous la forme $\Pi(x) + \Phi(x)$ les fonctions

$$\cos mx \cot \frac{1}{2}(x-a), \quad \sin mx \cot \frac{1}{2}(x-a),$$

afin de donner un dernier exemple de ces transformations. Formant pour cela la combinaison

$$\cos mx \cot \frac{1}{2}(x-a) + \sqrt{-1} \sin mx \cot \frac{1}{2}(x-a),$$

dont la transformée en $z = e^{x\sqrt{-1}}$ sera

$$z^m \frac{z+a_1}{z-a_1} \sqrt{-1},$$

si l'on fait $a_1 = e^{a\sqrt{-1}}$, nous n'aurons qu'à extraire la partie entière de la fraction en écrivant

$$z^m \frac{z+a_1}{z-a_1} = z^m + 2a_1 z^{m-1} + 2a_1^2 z^{m-2} + \ldots + 2a_1^m + \frac{2a_1^{m+1}}{z-a_1}.$$

Qu'on remplace maintenant z et a_1 par leurs valeurs, la quantité $\frac{2a_1^{m+1}}{z-a_1}$ par

$$-a_1^m \left[1 + \sqrt{-1} \cot \frac{1}{2}(x-a)\right],$$

en égalant les parties réelles et les parties imaginaires, il viendra aisément

$$\begin{aligned} \cos mx \cot \frac{1}{2}(x-a) = {} & + \sin mx + 2\sin[(m-1)x + a] \\ & + 2\sin[(m-2)x + 2a] + \ldots + 2\sin[x + (m-1)a] \\ & + \sin ma - \cos ma \cot \frac{1}{2}(x-a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin mx \cot \frac{1}{2}(x-a) = {} & - \cos mx - 2\cos[(m-1)x + a] \\ & - 2\cos[(m-2)x + 2a] - \ldots - 2\cos[x + (m-1)a] \\ & - \cos ma - \sin ma \cot \frac{1}{2}(x-a). \end{aligned}$$

Nous tirons de ces égalités

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cot \frac{1}{2}(x-a)\, dx = +2\pi \sin ma - \cos ma \int_0^{2\pi} \cot \frac{1}{2}(x-a)\, dx,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cot \frac{1}{2}(x-a)\, dx = -2\pi \cos ma - \sin ma \int_0^{2\pi} \cot \frac{1}{2}(x-a)\, dx.$$

Or on a établi (p. 79) qu'en supposant

$$a = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \cot\frac{1}{2}(x-a)\,dx$$

a pour valeur $+2\pi\sqrt{-1}$ ou $-2\pi\sqrt{-1}$, suivant que β est positif ou négatif; dans le premier cas nous aurons donc

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cos mx \cot\frac{1}{2}(x-a)\,dx \\
&\quad = 2\pi(+\sin ma - \sqrt{-1}\cos ma) = -2\pi\sqrt{-1}\,e^{ma\sqrt{-1}}, \\
&\int_0^{2\pi} \sin mx \cot\frac{1}{2}(x-a)\,dx \\
&\quad = -2\pi(\cos ma + \sqrt{-1}\sin ma) = -2\pi e^{ma\sqrt{-1}},
\end{aligned}$$

et dans le second

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cos mx \cot\frac{1}{2}(x-a)\,dx \\
&\quad = 2\pi(+\sin ma + \sqrt{-1}\cos ma) = +2\pi\sqrt{-1}\,e^{-ma\sqrt{-1}}, \\
&\int_0^{2\pi} \sin mx \cot\frac{1}{2}(x-a)\,dx \\
&\quad = -2\pi(\cos ma - \sqrt{-1}\sin ma) = -2\pi e^{-ma\sqrt{-1}}.
\end{aligned}$$

Considérant ensuite l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx^n}\,dx,$$

nous partirons, en supposant d'abord $n=0$, de la formule

$$\begin{aligned}
&\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\cot\frac{1}{2}(x-a) \\
&\quad = -1 + \cot\frac{1}{2}(\alpha-a)\left[\cot\frac{1}{2}(x-\alpha) - \cot\frac{1}{2}(x-a)\right];
\end{aligned}$$

on en tirera, en désignant par (a) et (α) des quantités égales à l'unité en valeur absolue, et du signe des coefficients de $\sqrt{-1}$ dans a et α,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cot\frac{1}{2}(x-a)\cot\frac{1}{2}(x-a)\,dx \\
&\quad = -2\pi + 2\pi\cot\frac{1}{2}(\alpha-a)[(\alpha)-(a)]\sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

Supposant ensuite $n>0$, la partie entière qui était tout à l'heure une constante n'existe plus, et la décomposition en éléments simples donne l'égalité

$$\begin{aligned}
&\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx^n} \\
&\quad = \mathcal{A}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha) + \mathrm{A}\cot\frac{1}{2}(x-a) \\
&\qquad + \mathrm{A}_1\frac{d\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx} + \ldots + \mathrm{A}_n\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx^n},
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} \cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx^n}\,dx = 2\pi[\mathcal{A}(\alpha) + \mathrm{A}(a)]\sqrt{-1}.$$

Or, la relation générale établie page 63,

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \ldots + \mathcal{L} = -\frac{\mathrm{G}-\mathrm{H}}{2}\sqrt{-1},$$

conduit, dans le cas actuel, à la condition $\mathcal{A} + \mathrm{A} = 0$, les quantités G et H étant nulles quand n est égal ou supérieur à l'unité. Ayant donc immédiatement

$$\mathcal{A} = \frac{d^n\cot\frac{1}{2}(\alpha-a)}{d\alpha^n},$$

on en conclut la valeur suivante :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx^n}\,dx \\
&\quad = 2\pi\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(\alpha-a)}{d\alpha^n}[(\alpha)-(a)]\sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

Mais le cas particulier de $a=\alpha$ fait exception, car alors on doit poser

$$\begin{aligned}
&\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-a)}{dx^n} \\
&\quad = \mathcal{A}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha) + \mathcal{A}_1\frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx} + \ldots + \mathcal{A}_{n+1}\frac{d^{n+1}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^{n+1}};
\end{aligned}$$

or, un calcul très facile donne $\mathcal{A} = 0$, l'intégrale, dans ce cas, est donc toujours nulle, sauf le cas unique de $n = 0$, où la relation

$$\cot^2 \frac{1}{2}(x - \alpha) = -1 - 2 \frac{d \cot \frac{1}{2}(x - \alpha)}{dx}$$

conduit à la valeur

$$\int_0^{2\pi} \cot^2 \frac{1}{2}(x - \alpha)\, dx = -2\pi.$$

V. Pour passer des résultats que nous venons d'obtenir aux valeurs des intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx\, dx}{x - a}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx\, dx}{x - a},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cot \frac{1}{2}(x - \alpha) \frac{d^n \cot \frac{1}{2}(x - a)}{dx^n}\, dx,$$

il ne nous reste plus qu'à considérer le coefficient de l'indéterminée λ, afin de reconnaître si elles ont, en effet, une valeur entièrement déterminée. Or, à l'égard des deux premières, les facteurs

$$\int_0^{2\pi} \cos mx\, dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin mx\, dx$$

étant nuls, ce coefficient s'évanouit, et nous avons par conséquent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx\, dx}{x - a} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos mx \cot \frac{1}{2}(x - a)\, dx = -\pi \sqrt{-1}\, e^{ma\sqrt{-1}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx\, dx}{x - a} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin mx \cot \frac{1}{2}(x - a)\, dx = -\pi e^{ma\sqrt{-1}},$$

ou bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx\, dx}{x - a} = +\sqrt{-1}\, e^{-ma\sqrt{-1}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx\, dx}{x - a} = -\pi e^{-ma\sqrt{-1}},$$

suivant que le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans a est positif ou négatif.

Relativement à la troisième intégrale, la quantité

$$\int_0^{2\pi} \cot \frac{1}{2}(x - \alpha)\, dx$$

est toujours différente de zéro; mais l'autre facteur, qui est l'unique résidu de $\frac{d^n (x - a)^{-1}}{dx^n}$ est nul pour toute valeur de n, sauf dans le cas de $n = 0$; l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cot \frac{1}{2}(x - \alpha)\, dx}{x - a}$$

est donc seule indéterminée, et l'on a généralement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cot \frac{1}{2}(x - \alpha) \frac{d^n (x - a)^{-1}}{dx^n}\, dx = \pi \frac{d^n \cot \frac{1}{2}(\alpha - a)}{d\alpha^n} [(\alpha) - (a)] \sqrt{-1}.$$

Observons enfin que les constantes a et α doivent être imaginaires pour que les quantités

$$\frac{1}{x - a} \cot \frac{1}{2}(x - \alpha)$$

ne deviennent point infinies entre les limites des intégrations. Une exception importante est toutefois à remarquer; elle concerne l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx}{x}\, dx,$$

la fonction $\frac{\sin mx}{x}$ restant finie pour $x = 0$. La valeur qu'on obtient alors, savoir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx}{x}\, dx = \pi,$$

offre cette circonstance, qu'il est aisé d'expliquer, d'être indépendante de m. Effectivement, si l'on fait $mx = z$, m disparaît et l'on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx}{x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz.$$

La même substitution permet semblablement de ramener les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx\,dx}{x-a}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx\,dx}{x-a},$$

où m est non seulement un nombre entier, mais une quantité réelle quelconque, au seul cas de $m=1$, car on en déduit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx\,dx}{x-a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos z\,dz}{z-ma}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx\,dx}{x-a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin z\,dz}{z-ma}.$$

Mais, en donnant, comme nous l'avons fait, à la transformée en z les limites $-\infty$ et $+\infty$, nous avons supposé implicitement m positif, et dans l'hypothèse contraire les limites doivent être interverties, de sorte qu'on aura alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx\,dx}{x} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\,dx}{x} = -\pi.$$

De là ce fait remarquable et important en Analyse, que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx\,dx}{x}$, envisagée comme fonction de m, est constante et égale à $+\pi$ ou à $-\pi$, suivant que la variable est positive ou négative. Mais voici d'autres exemples de fonctions discontinues obtenues sous forme d'intégrales définies. Considérons les expressions

$$\int \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx, \quad \int \frac{\sin ax \sin bx \sin cx}{x^3}\,dx,$$

que je vais d'abord réduire par la méthode générale à des quantités explicites et transcendantes

$$\int \frac{\cos mx\,dx}{x}, \quad \int \frac{\sin mx\,dx}{x},$$

Faisant, à cet effet, pour un instant

$$\mathrm{U} = \sin ax \sin bx, \qquad \mathrm{V} = \sin ax \sin bx \sin cx,$$

j'aurai d'abord

$$\int \frac{\mathrm{U}\,dx}{x^2} = -\int \mathrm{U}\,d(x^{-1}) = -x^{-1} + \int x^{-1}\frac{d\mathrm{U}}{dx}\,dx,$$

$$\int \frac{\mathrm{V}\,dx}{x^3} = \frac{1}{2}\int \mathrm{V}\frac{d^2(x^{-1})}{dx^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\mathrm{V}\frac{d(x^{-1})}{dx} - \frac{d\mathrm{V}}{dx}x^{-1}\right] + \frac{1}{2}\int x^{-1}\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}\,dx,$$

et les identités

$$2\mathrm{U} = \cos(a-b)x - \cos(a+b)x,$$

$$\begin{aligned} 4\mathrm{V} = {} & \sin(a+b-c)x + \sin(b+c-a)x \\ & + \sin(c+a-b)x - \sin(a+b+c)x \end{aligned}$$

donneront immédiatement

$$2\frac{d\mathrm{U}}{dx} = -(a-b)\sin(a-b)x + (a+b)\sin(a+b)x,$$

$$\begin{aligned} 4\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2} = {} & -(a+b-c)^2\sin(a+b-c)x - (b+c-a)^2\sin(b+c-a)x \\ & -(c+a-b)^2\sin(c+a-b)x + (a+b+c)^2\sin(a+b+c)x. \end{aligned}$$

Nous tirerons de là, en observant que les quantités en dehors des intégrales s'évanouissent aux limites $x=-\infty$, $x=+\infty$,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx \\ & = -\frac{a-b}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(a-b)x}{x}\,dx + \frac{a+b}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(a+b)x}{x}\,dx; \end{aligned}$$

or, a et b étant positifs, on en conclura, pour $a-b>0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx = -\frac{a-b}{2}\pi + \frac{a+b}{2}\pi = b\pi,$$

et, pour $a-b<0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx = \frac{a-b}{2}\pi + \frac{a+b}{2}\pi = a\pi;$$

de sorte que l'intégrale a pour valeur le produit par π du plus petit des nombres a et b.

Maintenant, la relation

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax \sin bx \sin cx}{x^3}\, dx
&= -\frac{(a+b-c)^2}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(a+b-c)x}{x}\, dx \\
&\quad -\frac{(b+c-a)^2}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(b+c-a)x}{x}\, dx \\
&\quad -\frac{(c+a-b)^2}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(c+a-b)x}{x}\, dx \\
&\quad +\frac{(a+b+c)^2}{8}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(a+b+c)x}{x}\, dx
\end{aligned}$$

aura semblablement pour conséquence que l'intégrale du premier membre, sous les conditions

$$a+b-c>0, \qquad b+c-a>0, \qquad c+a-b>0,$$

sera la quantité

$$(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2)\frac{\pi}{4};$$

tandis qu'en renversant le premier, le second ou le troisième signe d'inégalité, elle aura pour valeur $ab\pi$, $bc\pi$, ou $ca\pi$. Les hypothèses faites sont d'ailleurs, comme on sait, les seules possibles, en admettant que les constantes a, b, c soient positives.

SUR L'ÉQUATION $x^3+y^3=z^3+u^3$.

Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série, t. XI, 1872, p. 5.

On doit à Euler les formules suivantes, qui vérifient identiquement cette équation :

$$\begin{aligned}
x &= +(f^2+3g^2)^2-(ff'+3gg'+3fg'-3f'g)(f'^2+3g'^2),\\
y &= -(f^2+3g^2)^2+(ff'+3gg'-3fg'+3f'g)(f'^2+3g'^2),\\
z &= -(f'^2+3g'^2)^2+(ff'+3gg'-3fg'+3f'g)(f^2+3g^2),\\
u &= +(f'^2+3g'^2)^2-(ff'+3gg'+3fg'-3f'g)(f^2+3g^2),
\end{aligned}$$

et M. Binet, dans une *Note sur une question relative à la théorie des nombres* (*Comptes rendus*, t. XII, p. 248), a observé qu'on pouvait, sans diminuer leur généralité, les réduire aux expressions plus simples :

$$\begin{aligned}
x &= +(a^2+3b^2)^2-a+3b,\\
y &= -(a^2+3b^2)^2+a+3b,\\
z &= +(a^2+3b^2)(a+3b)-1,\\
u &= -(a^2+3b^2)(a-3b)+1,
\end{aligned}$$

où n'entrent que deux indéterminées a et b. Je me propose de tirer ces résultats comme une conséquence de la propriété générale des surfaces du troisième ordre, consistant en ce que leurs points peuvent se déterminer individuellement. Soit donc $u=1$; j'observe qu'en désignant par α une racine cubique imaginaire de l'unité, les droites

$$x=\alpha, \qquad x=\alpha^2,$$
$$y=\alpha^2 z, \qquad y=\alpha z$$

sont entièrement situées sur la surface

$$x^3+y^3=z^3+1.$$

Cela posé, une autre droite, représentée par les équations

$$x = az + b,$$
$$y = pz + q,$$

rencontrera chacune de ces génératrices, si l'on a les conditions

$$\frac{\alpha - b}{a} = \frac{q}{\alpha^2 - p},$$
$$\frac{\alpha^2 - b}{a} = \frac{q}{\alpha - p};$$

d'où l'on tire

$$p = b, \qquad q = \frac{b^2 + b + 1}{a},$$

et les coordonnées z_1, z_2 des points de rencontre seront respectivement les quantités

$$z_1 = \frac{\alpha - b}{a},$$
$$z_2 = \frac{\alpha^2 - b}{a}.$$

Or l'équation

$$(az + b)^3 + (pz + q)^3 = z^3 + 1$$

devra admettre pour solutions

$$z = z_1, \qquad z = z_2;$$

la troisième racine sera donc une fonction rationnelle des coefficients, qui s'obtient aisément comme il suit.

Développons l'équation en nous bornant aux termes en z^3 et z^2; nous en conclurons, pour la somme des racines, l'expression

$$z + z_1 + z_2 = 3\,\frac{a^2 b + p^3 q}{1 - a^3 - p^3}.$$

Mais on a

$$z_1 + z_2 = \frac{\alpha + \alpha^2 - 2b}{a} = -\frac{1 + 2b}{a};$$

donc

$$z = \frac{1 + 2b}{a} + 3\,\frac{a^2 b + p^2 q}{1 - a^3 - p^3}.$$

Il vient ensuite, si l'on remplace p et q par leurs valeurs en a et b,

$$z = \frac{(1 + b + b^2)^2 - a^3(1 - b)}{a(1 - a^3 - b^3)},$$

et de là résultent, pour x et y, les expressions

$$x = \frac{(1 + b + b^2)(1 + 2b) - a^3}{1 - a^3 - b^3},$$
$$y = \frac{(1 + b + b^2)^2 - a^3(1 + 2b)}{a(1 - a^3 - b^3)}.$$

Elles se simplifient, si l'on écrit, au lieu de a, $\frac{1}{a}$, et au lieu de b, $\frac{b}{a}$, en prenant ces nouvelles formes, savoir :

$$x = \frac{(a^2 + ab + b^2)(a + 2b) - 1}{a^3 - b^3 - 1},$$
$$y = \frac{(a^2 + ab + b^2)^2 - a - 2b}{a^3 - b^3 - 1},$$
$$z = \frac{(a^2 + ab + b^2)^2 - a + b}{a^3 - b^3 - 1};$$

et, en revenant à l'équation homogène

$$x^3 + y^3 = z^3 + u^3,$$

nous obtenons ainsi pour solution :

$$x = (a^2 + ab + b^2)(a + 2b) - 1,$$
$$y = (a^2 + ab + b^2)^2 - a - 2b,$$
$$z = (a^2 + ab + b^2)^2 - a + b,$$
$$u = a^3 - b^3 - 1 = (a^2 + ab + b^2)(a - b) - 1.$$

Or il suffit maintenant de changer b en $2b$ et a en $a - b$ pour que ces formules deviennent

$$x = (a^2 + 3b^2)(a + 3b) - 1,$$
$$y = (a^2 + 3b^2)^2 - a - 3b,$$
$$z = (a^2 + 3b^2)^2 - a + 3b,$$
$$u = (a^2 + 3b^2)(a - 3b) - 1.$$

Ce sont précisément celles d'Euler, sauf que x, y, z, u sont remplacés par z, $-y$, x, et $-u$.