qu'il existera une partie entière $\mathrm{H}(x)$, dont voici le calcul. Partant de cette identité

$$z^{n-m}\frac{z^{2m}-1}{z^{2n}-1} = z^{m-n} + z^{n-m} + z^{m-3n} + z^{3n-m} + \ldots$$
$$+ z^{m-(2k-1)n} + z^{(2k-1)n-m} + \frac{z^{(2k+1)n-m} - z^{m-(2k-1)n}}{z^{2n}-1},$$

je prends pour k l'entier immédiatement supérieur à $\frac{m-n}{2n}$, de sorte qu'on ait

$$k = \frac{m-n}{2n} + \varepsilon,$$

ε étant positif et moindre que l'unité. Il en résulte que

$$(2k+1)n - m = 2\varepsilon n \qquad \text{et} \qquad m-(2k-1)n = 2(1-\varepsilon)n;$$

ainsi, dans la fraction du second membre, le numérateur est de degré inférieur au dénominateur. L'identité employée se vérifie d'ailleurs sur-le-champ, car, en remplaçant z par l'exponentielle $e^{x\sqrt{-1}}$, elle se transforme dans l'équation bien connue

$$\frac{\sin mx}{\sin nx} = 2\cos(m-n)x + 2\cos(m-3n)x + \ldots$$
$$+ 2\cos[m-(2k-1)n]x - \frac{\sin(2kn-m)x}{\sin nx}.$$

Nous obtenons ainsi

$$\mathrm{H}(x) = 2\cos(m-n)x + 2\cos(m-3n)x + \ldots + 2\cos[m-(2k-1)n]x$$

et

$$\Phi(x) = -\frac{\sin(2kn-m)x}{\sin nx},$$

ou simplement

$$\Phi(x) = -\frac{\sin mx}{\sin nx},$$

en supposant maintenant m inférieur à n, en valeur absolue.

Cela établi, les racines de l'équation $z^{2n}-1=0$ sont données par la formule $z = e^{\frac{k\pi}{n}\sqrt{-1}}$, k prenant les valeurs $0, 1, 2, \ldots, 2n-1$, et si l'on fait $\alpha = \frac{k\pi}{n}$, le résidu de la fonction $\frac{\sin mx}{\sin nx}$ correspondant à $x=\alpha$ sera $\frac{\sin m\alpha}{\sin n\alpha} = \frac{(-1)^k \sin m\alpha}{n}$; et nous obtenons, par conséquent,

$$\frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{1}{2n}\sum(-1)^k \sin m\alpha \cot\tfrac{1}{2}(x-\alpha).$$

Mais ayant

$$\Phi(x+\pi) = (-1)^{m+n}\Phi(x),$$

la fonction appartiendra à l'espèce $\Theta(x)$ ou $\mathrm{H}(x)$, suivant que $m+n$ sera pair ou impair, de sorte qu'il vient, pour le premier cas,

$$\frac{\sin nx}{\sin mx} = \frac{1}{2n}\sum(-1)^k \sin m\alpha \cot(x-\alpha),$$

et pour le second,

$$\frac{\sin mx}{\sin nx} = \frac{1}{2n}\sum\frac{(-1)^k \sin m\alpha}{\sin(x-\alpha)}.$$

Or, dans les deux cas, les termes des sommes qui correspondent aux valeurs k et $k+n$ sont égaux; on peut donc, en doublant, se borner à prendre $k = 1, 2, \ldots, n-1$, le résidu relatif à $k=0$ étant nul.

Soit encore l'expression

$$\cot(x-\alpha)\cot(x-\beta)\ldots\cot(x-\lambda);$$

en désignant par n le nombre des quantités $\alpha, \beta, \ldots, \varkappa, \lambda$ et faisant $a = e^{\alpha\sqrt{-1}}$, $b = e^{\beta\sqrt{-1}}$, $\ldots$, $l = e^{\lambda\sqrt{-1}}$, on aura, pour transformée en z,

$$(\sqrt{-1})^n \frac{(z^2+a^2)(z^2+b^2)\ldots(z^2+l^2)}{(z^2-a^2)(z^2-b^2)\ldots(z^2-l^2)}.$$

On voit que le numérateur et le dénominateur sont de même degré; ainsi il n'existe pas de partie entière et nous avons seulement à calculer $\Phi(x)$. Or, les $2n$ racines du dénominateur sont, d'une part, $e^{\alpha\sqrt{-1}}, e^{\beta\sqrt{-1}}, \ldots, e^{\lambda\sqrt{-1}}$, et, en outre, ces mêmes quantités changées de signe, c'est-à-dire $e^{(\alpha+\pi)\sqrt{-1}}, e^{(\beta+\pi)\sqrt{-1}}, e^{(\lambda+\pi)\sqrt{-1}}$; d'ailleurs, ayant $\Phi(x+\pi) = \Phi(x)$, la fonction proposée appartient au type $\Theta(x)$ et ses éléments simples, où figurent les arguments α et $\alpha+\pi$, β et $\beta+\pi$, $\ldots$, se réduiront à ceux-ci :

$$\cot(x-\alpha), \quad \cot(x-\beta), \quad \ldots, \quad \cot(x-\lambda).$$

Nous aurons, en conséquence,

$$\Phi(x) = C + \mathcal{A}\cot(x-\alpha) + \mathcal{B}\cot(x-\beta) + \ldots + \mathcal{L}\cot(x-\lambda),$$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots, \mathcal{L}$ étant les résidus de $\Phi(x)$ pour $x=\alpha, x=\beta, \ldots, x=\lambda$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \cot(\alpha-\beta)\cot(\alpha-\gamma)\ldots\cot(\alpha-\lambda),\\
\mathcal{B} &= \cot(\beta-\alpha)\cot(\beta-\gamma)\ldots\cot(\beta-\lambda),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathcal{L} &= \cot(\lambda-\alpha)\cot(\lambda-\beta)\ldots\cot(\lambda-\varkappa).
\end{aligned}$$

Enfin la constante C s'obtient par l'équation établie page 63, $C = \frac{1}{2}(G+H)$, au moyen des valeurs

$$G = (-\sqrt{-1})^n, \qquad H = (\sqrt{-1})^n,$$

que prend la transformée en z, pour z nul et infini, ce qui donne simplement $C = \cos\frac{n\pi}{2}$.

On traitera de la même manière l'expression plus générale

$$\frac{F(\sin x, \cos x)}{\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots\sin(x-\lambda)},$$

où le numérateur est un polynome entier en $\sin x$ et $\cos x$, et, si nous supposons qu'il soit homogène et de degré $n-1$, on sera amené à la relation suivante :

$$\begin{aligned}
&\frac{F(\sin x, \cos x)}{\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots\sin(x-\lambda)}\\
&\quad = \frac{F(\sin\alpha, \cos\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\ldots\sin(\alpha-\lambda)}\,\frac{1}{\sin(x-\alpha)}\\
&\quad + \frac{F(\sin\beta, \cos\beta)}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)\ldots\sin(\beta-\lambda)}\,\frac{1}{\sin(x-\beta)}\\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\quad + \frac{F(\sin\lambda, \cos\lambda)}{\sin(\lambda-\alpha)\sin(\lambda-\beta)\ldots\sin(\lambda-\varkappa)}\,\frac{1}{\sin(x-\lambda)}.
\end{aligned}$$

Nous en déduirons, en chassant le dénominateur,

$$\begin{aligned}
F(\sin x, \cos x) = {} & \frac{\sin(x-\beta)\sin(x-\gamma)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)\ldots\sin(\alpha-\lambda)}F(\sin\alpha, \cos\alpha)\\
& + \frac{\sin(x-\alpha)\sin(x-\gamma)\ldots\sin(x-\lambda)}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)\ldots\sin(\beta-\lambda)}F(\sin\beta, \cos\beta)\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& + \frac{\sin(x-\alpha)\sin(x-\beta)\ldots\sin(x-\varkappa)}{\sin(\lambda-\alpha)\sin(\lambda-\beta)\ldots\sin(\lambda-\varkappa)}F(\sin\lambda, \cos\lambda),
\end{aligned}$$

résultat qui se rapporte à la théorie de l'interpolation comme donnant l'expression de la fonction $F(\sin x, \cos x)$, où entrent n coefficients arbitraires, au moyen de n valeurs qu'elle prend pour $x=\alpha, x=\beta, \ldots, x=\lambda$.

V. C'est pour obtenir l'intégrale de la fonction transcendante $f(\sin x, \cos x)$ qu'a été établie la formule de décomposition en éléments simples, dont je ne multiplierai pas davantage les applications; sous ce point de vue, voici maintenant les conséquences à tirer de la formule générale

$$f(\sin x, \cos x) = \Pi(x) + \Phi(x).$$

En premier lieu, et à l'égard de

$$\Pi(x) = \Sigma a_k(\cos kx + \sqrt{-1}\sin kx),$$

nous observons qu'on a

$$\frac{d\sin kx}{dx} = k\cos kx, \qquad \frac{d\cos kx}{dx} = -k\sin kx,$$

d'où, par conséquent,

$$\int \cos kx\,dx = \frac{\sin kx}{k}, \qquad \int \sin kx\,dx = -\frac{\cos kx}{k}.$$

Ainsi l'intégration reproduit une expression de même forme que la fonction proposée, sauf un terme proportionnel à la variable provenant de la partie constante qu'elle peut contenir.

Soit, par exemple, $\Pi(x) = \cos^n x$; l'égalité $2\cos x = \frac{z^2+1}{z}$ donnera, en l'élevant à la puissance n, et rapprochant les termes équidistants des extrêmes,

$$2^n\cos^n x = z^n + \frac{1}{z^n} + \frac{n}{1}\left(z^{n-2} + \frac{1}{z^{n-2}}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(z^{n-4} + \frac{1}{z^{n-4}}\right) + \ldots.$$

Distinguons maintenant les deux cas de n pair et impair; nous aurons, dans le premier, avec le terme constant,

$$\begin{aligned}
2^{n-1}\cos^n x = {} & \cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x + \ldots\\
& + \frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}},
\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$2^{n-1}\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin nx}{n} + \frac{n}{1}\,\frac{\sin(n-2)x}{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{\sin(n-4)x}{n-4} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}}\,x;$$

dans le second, il viendra

$$2^{n-1}\cos^n x = \cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n-1}{2}}\cos x,$$

d'où cette formule où la variable ne sort plus du signe sinus

$$2^{n-1}\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin nx}{n} + \frac{n}{1}\,\frac{\sin(n-2)x}{n-2} + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+1}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n-1}{2}}\sin x.$$

On traitera de même l'expression plus générale

$$\sin^a x\cos^b x = \left(\frac{z^2-1}{2z\sqrt{-1}}\right)^a\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^b;$$

mais l'intégrale $\int \sin^a\cos^b x\,dx$ s'obtient encore par un autre procédé fondé sur l'identité suivante :

$$\begin{aligned}\frac{d\sin^{a-1}x\cos^{b+1}x}{dx} &= (a-1)\sin^{a-2}x\cos^{b+2}x - (b+1)\sin^a x\cos^b x\\ &= (a-1)\sin^{a-2}x\cos^b x(1-\sin^2 x) - (b+1)\sin^a x\cos^b x\\ &= (a-1)\sin^{a-2}x\cos^b x - (a+b)\sin^a x\cos^b x.\end{aligned}$$

Nous tirons en effet

$$(a+b)\int \sin^a x\cos^b x\,dx = (a-1)\int \sin^{a-2}x\cos^b x\,dx - \sin^{a-1}x\cos^{b+1}x,$$

ce qui permettra de ramener, de proche en proche, la quantité

$$\int \sin^a x\cos^b x\,dx$$

à celle-ci

$$\int \sin^{a-2n}\cos^b x\,dx,$$

où n est un entier quelconque. Si l'on suppose a impair, le calcul est terminé, car, en faisant $a = 2n+1$, on obtient immédiatement

$$\int \sin x\cos^b x\,dx = -\frac{\cos^{b+1}x}{b+1}.$$

Dans le cas de a pair, nous prendrons $2n = a$, et l'on opérera ensuite sur l'intégrale $\int \cos^b x\,dx$, au moyen de la relation

$$b\int \cos^b x\,dx = (b-1)\int \cos^{b-2}x\,dx + \sin x\cos^{b-1}x,$$

qui ramène, soit à $\int \cos x\,dx = \sin x$, soit à $\int dx = x$.

En considérant en second lieu l'expression $\int \Phi(x)\,dx$, j'écrirai pour abréger, comme à propos des fonctions rationnelles, p. 36,

$$\Phi(x) = \mathrm{C} + \sum \mathcal{A}\cot\tfrac{1}{2}(x-\alpha) + \sum \mathcal{A}_1\frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx} + \ldots$$
$$+ \sum \mathcal{A}_n\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^n};$$

maintenant on voit comment la composition de cette formule conduit immédiatement au résultat. Nous n'avons, en effet, qu'à déterminer la seule intégrale $\int \cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\,dx$; or, on a

$$\cot\frac{x-\alpha}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(x-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)} = 2\,\frac{d\log\sin\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx},$$

et, par conséquent,

$$\int \cot\frac{x-\alpha}{2}\,dx = 2\log\sin\tfrac{1}{2}(x-\alpha),$$

de sorte que

$$\int \Phi(x)\,dx = Cx + 2\sum \mathcal{A} \log \sin \frac{1}{2}(x-\alpha) + \sum \mathcal{A}_1 \cot \frac{1}{2}(x-\alpha) + \ldots$$
$$+ \sum \mathcal{A}_n \frac{d^{n-1} \cot \frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^{n-1}}.$$

Les relations

$$\Theta(x) = \sum \mathcal{A} \cot(x-\alpha) + \sum \mathcal{A}_1 \frac{d \cot(x-\alpha)}{dx} + \ldots$$
$$+ \sum \mathcal{A}_n \frac{d^n \cot(x-\alpha)}{dx^n},$$

$$\mathrm{H}(x) = \sum \mathcal{A} \operatorname{coséc}(x-\alpha) + \sum \mathcal{A}_1 \frac{d \operatorname{coséc}(x-\alpha)}{dx} + \ldots$$
$$+ \sum \mathcal{A}_n \frac{d^n \operatorname{coséc}(x-\alpha)}{dx^n}$$

donneront pareillement

$$\int \Theta(x)\,dx = \sum \mathcal{A} \log \sin(x-\alpha) + \sum \mathcal{A}_1 \cot(x-\alpha) + \ldots$$
$$+ \sum \mathcal{A}_n \frac{d^{n-1} \cot(x-\alpha)}{dx^{n-1}},$$

$$\int \mathrm{H}(x)\,dx = \sum \mathcal{A} \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-\alpha) + \sum \mathcal{A}_1 \operatorname{coséc}(x-\alpha) + \ldots$$
$$+ \sum \mathcal{A}_n \frac{d^{n-1} \operatorname{coséc}(x-\alpha)}{dx^{n-1}}.$$

En effet, nous avons déjà

$$\int \cot(x-\alpha)\,dx = \log \sin(x-\alpha),$$

et, quant à l'intégrale

$$\int \operatorname{coséc}(x-\alpha)\,dx = \int \frac{dx}{\sin(x-\alpha)},$$

elle s'obtient, soit par l'équation

$$\frac{1}{\sin(x-\alpha)} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-\alpha) + \cot \frac{1}{2}(x-\alpha)\right],$$

soit en posant

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-\alpha) = t,$$

car il vient ainsi

$$\frac{1}{\sin(x-\alpha)} = \frac{1+t^2}{2t}, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2},$$

d'où

$$\frac{dx}{\sin(x-\alpha)} = \int \frac{dt}{t} = \log t = \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(x-\alpha).$$

Voici quelques remarques sur ces résultats.

VI. Les expressions qui, en dehors des termes logarithmiques, à savoir

$$\mathcal{A}_1 \cot(x-\alpha) + \mathcal{A}_2 \frac{d \cot(x-\alpha)}{dx} + \ldots + \mathcal{A}_n \frac{d^{n-1} \cot(x-\alpha)}{dx^{n-1}}$$

et

$$\mathcal{A}_1 \operatorname{coséc}(x-\alpha) + \mathcal{A}_2 \frac{d \operatorname{coséc}(x-\alpha)}{dx} + \ldots + \mathcal{A}_n \frac{d^{n-1} \operatorname{coséc}(x-\alpha)}{dx^{n-1}},$$

composent, avec diverses valeurs des constantes $\mathcal{A}$ et α, les intégrales $\int \Theta(x)\,dx$, $\int \mathrm{H}(x)\,dx$, ont respectivement la même périodicité que $\Theta(x)$ et $\mathrm{H}(x)$. La première, comme on l'a vu au paragraphe I, équivaut à un polynome entier du degré n en $\cot(x-\alpha)$, la seconde donne lieu à la transformation suivante. Soit, pour un moment,

$$\operatorname{coséc}(x-\alpha) = u \qquad \text{et} \qquad \cot(x-\alpha) = t;$$

nous remarquerons qu'on peut écrire

$$u = -\sin(x-\alpha)\frac{dt}{dx},$$

de sorte qu'il vient successivement

$$\frac{du}{dx} = -\sin(x-\alpha)\frac{d^2 t}{dx^2} - \cos(x-\alpha)\frac{dt}{dx},$$
$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(x-\alpha)\left(\frac{d^3 t}{dx^3} - \frac{dt}{dx}\right) - 2\cos(x-\alpha)\frac{d^2 t}{dx^2},$$

et, en général,

$$\frac{d^k u}{dx^k} = -\sin(x-\alpha)\left[\frac{d^{k+1} t}{dx^{k+1}} - \frac{k(k-1)}{1.2}\frac{d^{k-1} t}{dx^{k-1}} + \ldots\right]$$
$$- \cos(x-\alpha)\left[\frac{k}{1}\frac{d^k t}{dx^k} - \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}\frac{d^{k-2} t}{dx^{k-2}} + \ldots\right].$$

Il en résulte qu'on peut donner à l'expression

$$\mathcal{A}_1 u + \mathcal{A}_2 \frac{du}{dx} + \ldots + \mathcal{A}_n \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}}$$

d'abord la forme

$$\sin(x-\alpha)\left(G \frac{d^n t}{dx^n} + G_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots\right) + \cos(x-\alpha)\left(H \frac{d^{n-1} t}{dx^{n-1}} + H_1 \frac{dx^{n-2} t}{dx^{n-2}} + \ldots\right),$$

les coefficients G et H étant constants; ensuite celle-ci

$$\sin(x-\alpha)\, F(t) + \cos(x-\alpha)\, F_1(t),$$

en désignant par $F(t)$ et $F_1(t)$ des polynomes en t des degrés $n+1$ et n; enfin au moyen des valeurs

$$\sin(x-\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos(x-\alpha) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

on écrira

$$\mathcal{A}_1 u + \mathcal{A}_2 \frac{du}{dx} + \ldots + \mathcal{A}_n \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} = \frac{\mathfrak{F}(t)}{\sqrt{1+t^2}},$$

ce nouveau polynome $\mathfrak{F}(t)$ étant du degré $n+1$. Sous ces formes nouvelles, les quantités qui entrent dans les deux intégrales sont parfois d'une détermination plus facile, et j'en donnerai quelques exemples.

Soit d'abord l'intégrale

$$\int \cot^{n+1} x\, dx,$$

l'exposant n étant entier et positif; d'après la méthode générale, on posera

$$\cot^{n+1} x = C + \mathcal{A} \cot x + \mathcal{A}_1 \frac{d \cot x}{dx} + \ldots + \mathcal{A}_n \frac{d^n \cot x}{dx^n},$$

et les coefficients s'obtiendront, soit au moyen des relations

$$\cot^2 x = -1 - \frac{d \cot x}{dx},$$

$$\cot^3 x = -\cot x + \frac{1}{2} \frac{d^2 \cot x}{dx^2},$$

$$\cot^4 x = 1 + \frac{4}{3} \frac{d \cot x}{dx} - \frac{1}{6} \frac{d^3 \cot x}{dx^3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

soit en formant la puissance $n+1$ ainsi que les dérivées de la série

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \ldots,$$

et substituant dans l'équation pour identifier.

Or, la variable $\cot x = t$, qui est indiquée par la forme connue d'avance de l'intégrale, en donne facilement la valeur, car ayant

$$\int \cot^{n+1} x\, dx = -\int \frac{t^{n+1}\, dt}{1+t^2},$$

il suffira d'extraire la partie entière de la fraction $\frac{t^{n+1}}{1+t^2}$; si n est impair, on formera ainsi l'égalité

$$\frac{t^{n+1}}{1+t^2} = t^{n-1} - t^{n-3} + t^{n-5} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} - \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{1+t^2},$$

d'où

$$\int \frac{t^{n+1}\, dt}{1+t^2} = \frac{t^n}{n} - \frac{t^{n-2}}{n-2} + \frac{t^{n-4}}{n-4} - \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} t - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{arc\,tang} t,$$

et, par conséquent,

$$\int \cot^{n+1} x\, dx = -\frac{\cot^n x}{n} + \frac{\cot^{n-2} x}{n-2} - \frac{\cot^{n-4} x}{n-4} - \ldots - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cot x - (-1)^{\frac{n-1}{2}} x.$$

Dans le cas de n pair, il viendra semblablement

$$\frac{t^{n+1}}{1+t^2} = t^{n-1} - t^{n-2} + t^{n-5} - \ldots - (-1)^{\frac{n}{2}} t + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} t}{1+t^2};$$

on en conclura alors

$$\int \cot^{n+1} x\, dx = -\frac{\cot^n x}{n} + \frac{\cot^{n-2} x}{n-2} - \frac{\cot^{n-4} x}{n-4} + \ldots + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\cot^2 x}{2} + (-1)^{\frac{n}{2}} \log \sin x.$$

Rapprochant ces résultats de l'expression donnée par la méthode générale, à savoir :

$$\int \cot^{n+1} x\, dx = Cx + \mathcal{A} \log \sin x + \ldots + \mathcal{A}_1 \cot x + \ldots + \mathcal{A}_n \frac{d^{n-1} \cot x}{dx^{n-1}},$$

nous en tirons cette conséquence qu'on a $\mathcal{A} = (-1)^{\frac{n}{2}}$ ou $\mathcal{A} = 0$, suivant que n est pair ou impair; et je m'y arrêterai un moment pour montrer en peu de mots comment cette seule connaissance du résidu $\mathcal{A}$ relatif à la valeur $x = 0$ de la fonction $\cot^{n+1} x$ suffit pour la détermination complète de la série

$$\cot x = \frac{a}{x} + b + cx + dx^2 + \ldots.$$

Et d'abord, de ce que le terme en $\frac{1}{x}$ manque dans le carré, la quatrième puissance et toutes les puissances paires, on conclut de proche en proche les conditions $b = 0$, $d = 0$, $\ldots$, c'est-à-dire que le développement ne contient que des puissances impaires de la variable, et a la forme

$$\cot x = \frac{\alpha}{x} + \beta x + \gamma x^3 + \ldots.$$

De ce que le coefficient du même terme est $+1, -1, +1, \ldots,$ dans la première, la troisième, la cinquième puissance, etc., on tire aisément les égalités

$$\alpha = 1, \qquad 3\alpha^2\beta = -1, \qquad 5\alpha^4\gamma + 10\alpha^3\beta^2 = 1, \qquad \ldots,$$

d'où

$$\beta = -\frac{1}{3}, \qquad \gamma = -\frac{1}{45}, \qquad \ldots.$$

Le développement de $\cot x$, auquel nous parvenons ainsi, est d'une grande importance en Analyse; en l'écrivant de cette manière

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1 x}{1.2} - \frac{2^4 B_2 x^3}{1.2.3.4} - \frac{2^6 B_3 x^5}{1.2.3.4.5.6} - \ldots,$$

les coefficients

$$B_1 = \frac{1}{6}, \qquad B_2 = \frac{1}{30}, \qquad B_3 = \frac{1}{42}, \qquad \ldots$$

sont appelés les *nombres de Bernoulli* (¹), et l'on a de même

$$\tang x = \frac{2^2(2^2-1)B_1 x}{1.2} + \frac{2^4(2^4-1)B_2 x^3}{1.2.3.4} + \frac{2^6(2^6-1)B_3 x^5}{1.2.3.4.5.6} + \ldots,$$

$$\operatorname{coséc} x = \frac{1}{x} + \frac{(2^2-2)B_1 x}{1.2} + \frac{(2^4-2)B_2 x^3}{1.2.3.4} + \frac{(2^6-2)B_3 x^5}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

(¹) BERTRAND, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, t. I, p. 347. — SERRET, *Cours de calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 217.

Soit encore l'expression $\frac{1}{\sin^{\alpha+1} x \cos^{\beta+1} x}$, qui, en supposant $\alpha + \beta$ un nombre pair, aura, comme la précédente, la périodicité de $\Theta(x)$. Au lieu de déduire l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sin^{\alpha+1} x \cos^{\beta+1} x}$$

de la relation

$$\frac{1}{\sin^{\alpha+1} x \cos^{\beta+1} x} = C + \mathcal{A} \cot x + \mathcal{A}_1 \frac{d \cot x}{dx} + \ldots + \mathcal{A}_\alpha \frac{d \cot x}{dx}$$
$$+ \mathcal{B} \tang x + \mathcal{B}_1 \frac{d \tang x}{dx} + \ldots + \mathcal{B}_\beta \frac{d \tang x}{dx},$$

nous ferons toujours $\cot x = t$, et l'on voit que la transformée

$$\int \frac{(1+t^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{t^{\beta+1}} dt$$

s'obtiendra facilement en développant la puissance $(1+t^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$, dont l'exposant est entier dans l'hypothèse admise. Si nous faisons en particulier $\beta = -1$, $\alpha = 2n+1$, nous trouvons, en désignant par $n_1, n_2, \ldots$ les coefficients de la puissance n du binome

$$\int \frac{dx}{\sin^{2n+2} x} = -\cot x - \frac{n_1}{3}\cot^3 x - \frac{n_2}{5}\cot^5 x - \ldots - \frac{1}{2n+1}\cot^{2n+1} x,$$

puis, en changeant x en $\frac{\pi}{2} - x$,

$$\int \frac{dx}{\cos^{2n-2} x} = \tang x + \frac{n_1}{3}\tang^3 x + \frac{n_2}{5}\tang^5 x + \ldots + \frac{1}{2n+1}\tang^{2n+1} x.$$

VII. L'intégrale $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$ se ramenant par la substitution $\sin x = X$ à cette forme

$$\int f(X, \sqrt{1-X^2}) \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}},$$

qui a été l'objet d'une étude antérieure, nous devrions maintenant comparer les deux procédés d'intégration, et les résultats auxquels ils conduisent. A cet égard, je me bornerai à remarquer qu'en faisant $\sin x = \mathrm{X}$ dans la formule générale

$$\int \Phi(x)\,dx = \mathrm{C}x + 2\sum \mathcal{A} \log \sin \frac{1}{2}(x-\alpha)$$
$$+ \sum \mathcal{A}_1 \cot \frac{1}{2}(x-\alpha) + \ldots + \sum \mathcal{A}_n \frac{d^{n-1} \cot \frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^{n-1}},$$

la partie transcendante est donnée par les termes $\mathrm{C}x$ et

$$\int \cot \frac{1}{2}(x-\alpha)\,dx = 2 \log \sin \frac{1}{2}(x-\alpha),$$

dont le dernier prendra la forme suivante. Soient

$$\mathrm{Y} = \sqrt{1-\mathrm{X}^2}, \qquad a = \sin\alpha, \qquad b = \cos\alpha,$$

on aura

$$\int \cot \frac{1}{2}(x-\alpha)\,dx = \int \frac{\sin(x-\alpha)}{1-\cos(x-\alpha)}\,dx = \int \frac{b\mathrm{X} - a\mathrm{Y}}{1 - a\mathrm{X} - b\mathrm{Y}} \frac{d\mathrm{X}}{\mathrm{Y}},$$

de sorte qu'au lieu de la fonction de troisième espèce amenée par la méthode d'intégration des radicaux carrés, à savoir :

$$\int \frac{b\,dx}{(x-a)y} = \log\left(\frac{1-ax-by}{x-a}\right),$$

nous sommes conduits à la quantité

$$\int \frac{bx-ay}{1-ax-by} \frac{dx}{y} = \log(1-ax-by).$$

Mais j'arrive, sans insister sur ce point [1], à une dernière considération, à la détermination de l'intégrale définie

$$\int_0^{2\pi} f(\sin x, \cos x)\,dx.$$

[1] On a, d'une manière plus générale,

$$\int \frac{(cb'-bc')x + (ac'-ca')y + ab'-ba'}{(ax+by+c)(a'x+b'y+c')} \frac{dx}{y} = \log \frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'},$$

et l'on doit remarquer les cas particuliers dans lesquels cette intégrale ne devient indéfinie que pour deux valeurs de la variable. Ils se présentent lorsque les droites $ax+by+c=0$, $a'x+b'x+c'=0$ se coupent sur le cercle $x^2+y^2=1$, ou lui sont tangentes.

Reprenant, à cet effet, l'expression

$$f(\sin x, \cos x = \Pi(x) + \Phi(x),$$

j'observe d'abord que la fonction $\Phi(x)$ devra être finie pour toutes les valeurs de la variable comprise de zéro à 2π, c'est-à-dire quel que soit x, puisqu'on a $\Phi(x+2\pi) = \Phi(x)$; ainsi dans les éléments simples $\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)$, aucune des constantes α ne sera réelle. Ceci posé, les termes périodiques de l'intégrale indéfinie des fonctions $\Pi(x)$ et $\Phi(x)$, reprenant la même valeur aux limites $x=0$ et $x=2\pi$, ne figureront point dans le résultat, et nous aurons seulement à considérer le terme $\mathrm{C}x$, ainsi que la partie logarithmique $\sum \mathcal{A} \log \sin \frac{1}{2}(x-\alpha)$. Du premier résulte immédiatement la quantité $\mathrm{C}2\pi$; mais les termes transcendants demandent une attention particulière. Comme dans le cas plus simple de l'expression

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}},$$

la relation

$$\int \cot \frac{1}{2}(x-\alpha)\,dx = 2 \log \sin \frac{x-\alpha}{2}$$

ne détermine pas sur-le-champ, à cause des valeurs multiples des logarithmes, l'intégrale définie prise entre des limites données x_0, x_1, et j'indiquerai d'abord de quelle manière on y parvient avant de supposer $x_0 = 0$ et $x_1 = 2\pi$.

Soient

$$\alpha = a + b\sqrt{-1}, \qquad \sin \frac{1}{2}(x-\alpha) = \mathrm{X} + \mathrm{Y}\sqrt{-1}.$$

Envisageant X et Y comme les coordonnées OP et MP d'un point M rapporté à deux axes rectangulaires $\mathrm{O}x$ et $\mathrm{O}y$, je figure la courbe MM′ qui sera le lieu de ces points lorsque la variable x croîtra de x_0 à x_1. De cette manière, le rayon vecteur $\mathrm{OM} = \mathrm{R}$ et l'angle $\mathrm{MO}x = \theta$ seront, à partir du point M, correspondant à $x = x_0$, des fonctions continues entièrement déterminées de la variable x. Remplaçant donc $\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)$ par la dérivée logarithmique de

$$\sin \frac{1}{2}(x-\alpha) = \mathrm{X} + \mathrm{Y}\sqrt{-1} = \mathrm{R}(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

il vient

$$\frac{1}{2}\int \cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\,dx = \int\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}} + \int d\theta\sqrt{-1},$$

maintenant on a, sans aucune ambiguïté,

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{d\mathrm{R}}{\mathrm{R}} = \log \mathrm{OM}' - \log \mathrm{OM}, \qquad \int_{x_0}^{x_1} d\theta = \mathrm{M}'\mathrm{O}x - \mathrm{MO}x,$$

et l'intégrale proposée se trouve déterminée. Mais arrivons aux limites zéro et 2π; si nous faisons pour un moment

$$\mathrm{A} = \cos\frac{b}{2}\sqrt{-1} = \frac{e^b+1}{2e^{\frac{1}{2}b}},$$

$$\mathrm{B} = \frac{\sin\frac{b}{2}\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{e^b-1}{2e^{\frac{1}{2}b}},$$

nous aurons

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}\sin\frac{1}{2}(x-a), \qquad \mathrm{Y} = -\mathrm{B}\cos\frac{1}{2}(x-a),$$

d'où

$$\frac{\mathrm{X}^2}{\mathrm{A}^2} + \frac{\mathrm{Y}^2}{\mathrm{B}^2} = 1;$$

de sorte que la courbe MM′ est une ellipse. Remarquant que A est toujours positif, je distingue deux cas, suivant que B sera positif ou négatif. Dans le premier, je pose

$$\frac{x-a}{2} = \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

d'où

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}\cos\varphi, \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{B}\sin\varphi;$$

cela étant, lorsque x croîtra de zéro à 2π, cette ellipse sera décrite dans le sens direct depuis un point M (*fig.* 30) jusqu'au point M′ situé sur le prolongement du diamètre OM. En second lieu, lorsque B est négatif, je fais

$$\frac{x-a}{2} = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

ce qui donne

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}\cos\varphi, \qquad \mathrm{Y} = -\mathrm{B}\sin\varphi;$$

c'est alors du point M au point M′ la seconde moitié de la courbe

qui sera décrite dans le sens inverse. Cela étant, dans le premier cas, l'angle croît avec x, et nous avons

$$\mathrm{M}'\mathrm{O}x = \mathrm{MO}x + \pi;$$

dans le second, au contraire, il décroît, et nous passons de la valeur $\mathrm{MO}x$ à $\mathrm{M}'\mathrm{O}x = \mathrm{MO}x - \pi$; les deux rayons vecteurs OM et OM′ sont d'ailleurs égaux, ce qui fait disparaître la partie logarithmique; par conséquent, en désignant par (b) une quantité égale à l'unité en valeur absolue et du signe de b, nous aurons

$$\int_0^{2\pi}\cot\frac{1}{2}\left(x-a-b\sqrt{-1}\right)dx = 2(b)\sqrt{-1}.$$

Voici quelques applications de cette formule :

Posons

$$\lambda = \alpha\sqrt{-1}$$

dans la relation

$$\frac{2\sin\lambda}{\cos\lambda-\cos x} = \cot\frac{x-\lambda}{2} - \cot\frac{x+\lambda}{2}$$

établie page 62, et soit $a = e^\alpha$; elle prendra cette forme

$$\frac{2(1-a^2)}{1-2a\cos x+a^2} = \sqrt{-1}\left(\cot\frac{x-\alpha\sqrt{-1}}{2} - \cot\frac{x+\alpha\sqrt{-1}}{2}\right),$$

et nous en conclurons successivement pour $\alpha < 0$ et $\alpha > 0$, c'est-à-dire en supposant $a < 1$ et $a > 1$,

$$\int_0^{2\pi}\frac{(1-a^2)\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = 2\pi \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi}\frac{(1-a^2)\,dx}{1-2a\cos 2+a^2} = -2\pi.$$

Le second cas se déduit d'ailleurs immédiatement du premier par le changement de a en $\frac{1}{a}$.

Soit encore l'expression plus générale

$$\frac{\cos mx}{\cos\lambda-\cos x},$$

m étant un nombre entier quelconque; en faisant

$$e^{x\sqrt{-1}} = z,$$

elle devient

$$-\frac{z^{2m}+1}{z^{m-1}(1-2z\cos\lambda+z^2)},$$

et contient par conséquent une partie entière qui s'obtient ainsi. Je pars de ces deux identités, faciles à vérifier,

$$\frac{\sin\lambda}{1-2z\cos\lambda+z^2} = \sin\lambda + z\sin 2\lambda + z^2\sin 3\lambda + \ldots$$
$$+ z^{m-2}\sin(m-1)\lambda + z^{m-1}\frac{\sin m\lambda - z\sin(m-1)\lambda}{1-2z\cos\lambda+z^2},$$

$$\frac{\sin\lambda}{1-2z\cos\lambda+z^2} = \frac{\sin\lambda}{z^2} + \frac{\sin 2\lambda}{z^3} + \frac{\sin 3\lambda}{z^4} + \ldots$$
$$+ \frac{\sin m\lambda}{z^{m+1}} + \frac{1}{z^{m+1}}\,\frac{z\sin(m+1)\lambda - \sin m\lambda}{1-2z\cos\lambda+z^2},$$

et je les ajoute membre à membre après avoir divisé la première par z^{m-1}, et multiplié la seconde par z^{m+1}; il vient

$$\frac{(z^{2m}+1)\sin\lambda}{z^{m-1}(1-2z\cos+z^2)} = (z^{m-1}+z^{1-m})\sin\lambda + (z^{m-2}+z^{2-m})\sin 2\lambda + \ldots$$
$$+ (z+z^{-1})\sin(m-1)\lambda + \sin m\lambda$$
$$+ \frac{z[\sin(m+1)\lambda - \sin(m-1)\lambda]}{1-2z\cos\lambda+z^2},$$

et, par conséquent, si l'on remplace z par l'exponentielle $e^{x\sqrt{-1}}$, nous aurons

$$\frac{\cos mx\sin\lambda}{\cos x - \cos\lambda} = \Pi(x) + \frac{\cos m\lambda\sin\lambda}{\cos x - \cos\lambda},$$

en faisant

$$\pi(x) = 2\sin\lambda\cos(m-1)x + 2\sin 2\lambda\cos(m-2)x + \ldots$$
$$+ 2\sin(m-1)\lambda\cos x + \sin m\lambda.$$

Le terme constant de la partie entière est $\sin m\lambda$; on en conclura, en faisant comme plus haut, $\lambda = \alpha\sqrt{-1}$, $e^\alpha = a$, ce qui donne

$$\sin m\lambda = \frac{1-a^{2m}}{2a^m\sqrt{-1}}, \qquad \cos m\lambda = \frac{1+a^{2m}}{2a^m},$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{(1-a^2)\cos mx\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = 2\pi a^m \qquad \text{pour} \qquad a<1,$$

et

$$\int_0^{2\pi}\frac{(1-a^2)\cos mx\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = -\frac{2\pi}{a^m} \qquad \text{pour} \qquad a>1.$$

Je considère en dernier lieu la quantité

$$\frac{\sin^2 x}{(\cos\lambda-\cos x)(\cos\mu-\cos x)};$$

la décomposition en éléments simples conduit d'abord à la relation

$$\frac{\sin^2 x}{(\cos\lambda-\cos x)(\cos\mu-\cos x)} = -1 + \mathcal{A}\left(\cot\frac{x-\lambda}{2} - \cot\frac{x+\lambda}{2}\right)$$
$$+ \mathcal{B}\left(\cot\frac{x-\mu}{2} - \cot\frac{x-\mu}{2}\right),$$

en posant

$$2\mathcal{A} = \frac{\sin\lambda}{\cos\mu-\cos\lambda}, \qquad 2\mathcal{B} = \frac{\sin\mu}{\cos\lambda-\cos\mu}.$$

Faisant encore

$$\lambda = \alpha\sqrt{-1}, \qquad \mu = \beta\sqrt{-1}, \qquad a = e^\alpha, \qquad b = e^\beta,$$

nous trouverons, en nous bornant, pour abréger, au seul cas de $\alpha<0$, $\beta<0$,

$$\int_0^{2\pi}\frac{4ab\sin^2 x\,dx}{(1-2a\cos x+a^2)(1-2b\cos x+b^2)}$$
$$= -2\pi - (\mathcal{A}+\mathcal{B})4\pi\sqrt{-1};$$

or, on a facilement

$$\mathcal{A}+\mathcal{B} = \frac{1}{2}\cot\frac{\lambda+\mu}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{-1}\,\frac{1+ab}{1-ab},$$

d'où cette formule

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x\,dx}{(1-2a\cos x+a^2)(1-2b\cos x+b^2)} = \frac{\pi}{1-ab},$$

qui donne un résultat important en développant les deux membres suivant les puissances de a et b. Si nous employons, à cet effet, les relations

$$\frac{\sin x}{1-2a\cos x+a^2} = \sum a^m\sin(m+1)x,$$
$$\frac{\sin x}{1+2b\cos x+b^2} = \sum b^n\sin(n+1)x,$$

où m et n reçoivent toutes les valeurs entières de zéro à l'infini, on parvient à l'égalité suivante :

$$\sum a^m b^m\int_0^{2\pi}\sin(m+1)x\sin(n+1)x\,dx = \pi(1+ab+a^2b^2+\ldots),$$

dont le second membre ne renferme que les puissances du produit ab. Nous avons donc

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0$$

lorsque m et n sont différents, tandis qu'il vient, si on les suppose égaux,

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi.$$

On trouve d'ailleurs directement ces relations au moyen des identités

$$2 \sin mx \sin nx = \cos(m-n)x - \cos(m+n)x,$$
$$2 \sin^2 mx = 1 - \cos 2mx,$$

qui donnent les intégrales indéfinies

$$\int \sin mx \sin nx \, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)},$$
$$\int \sin^2 mx \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2mx}{4m};$$

et, par suite, comme on voit,

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi.$$

En partant de celles-ci :

$$2 \sin mx \cos nx = \sin(m+n)x + \sin(m-n)x,$$
$$2 \cos mx \cos nx = \cos(m+n)x + \cos(m-n)x,$$

nous aurons semblablement

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0,$$

même dans le cas de $m = n$, puis

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 mx \, dx = \pi.$$

Ces intégrales définies, qu'on obtient si facilement, conduisent, comme nous allons voir, à d'importantes conséquences.

VIII. Les séries qui précèdent suivant les puissances entières et positives d'une ou de plusieurs variables ont pour caractère essentiel d'être continues lorsqu'elles sont convergentes, et c'est en admettant cette condition de continuité qu'elles ont été employées dans les applications géométriques, et en particulier dans les théories du contact et de la courbure des lignes et des surfaces. Mais l'analyse conduit à des séries d'une autre nature, qui, tout en restant convergentes afin d'avoir une limite déterminée, ne sont plus nécessairement continues, et peuvent, lorsque la variable croît par degrés insensibles, représenter diverses successions de valeurs appartenant à des fonctions de formes tout à fait différentes. Un premier exemple en a déjà été donné, et nous avons vu qu'en faisant

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots$$

on a

$$f(x) = \frac{\pi}{4},$$

lorsque la variable est comprise entre $2n\pi$ et $(2n+1)\pi$, tandis qu'on obtient

$$f(x) = -\frac{\pi}{4}$$

quand on la suppose comprise entre $(2n-1)\pi$ et $2n\pi$, n étant un nombre entier quelconque. Or, ce résultat se rattache à une formule générale donnant un nouveau mode d'expression des fonctions d'une grande importance en Analyse, et que je vais indiquer succinctement.

Soit $\mathcal{F}(x)$ une fonction donnée entre les limites $x = a$, $x = b$, avec la seule condition d'être toujours finie; la suivante :

$$f(x) = \mathcal{F}\left(a + \frac{b-a}{2\pi} x\right),$$

le sera de même depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 2\pi$, et l'on prouve qu'elle peut se représenter de la manière suivante :

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \ldots + A_m \cos mx + \ldots$$
$$+ B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots + B_m \sin mx + \ldots;$$

voici maintenant, la possibilité du développement admise [1], comment se déterminent les coefficients. Le premier s'obtient en multipliant les deux membres par dx, et intégrant entre les limites zéro et 2π; ayant, en effet,

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \, dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \sin mx \, dx = 0,$$

il vient ainsi

$$2\pi \mathrm{A}_0 = \int_0^{2\pi} f(x) \, dx.$$

J'opère ensuite d'une manière analogue en multipliant successivement par les facteurs $\cos mx \, dx$, $\sin mx \, dx$; les relations précédemment établies, à savoir :

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0$$

montrent que l'intégration entre les limites zéro et 2π éliminera tous les coefficients de la série, sauf A_m et B_m, qui seront respectivement multipliés par les quantités

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 mx \, dx = \pi, \qquad \int_0^{2\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi,$$

et nous trouverons, par conséquent,

$$\pi \mathrm{A}_m = \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx \, dx, \qquad \pi \mathrm{B}_m = \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx \, dx.$$

C'est cette expression de A_m et B_m, au moyen d'intégrales définies, qui donne le moyen de s'affranchir de la condition de continuité que suppose absolument le mode de détermination des coefficients de la série de Maclaurin

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1.2} f''(x_0) + \ldots,$$

[1] Je renverrai pour la démonstration rigoureuse au Mémoire célèbre de Dirichlet, sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données (*Journal de Crelle*, t. 4, p. 157).

où figurent toutes les dérivées de $f(x)$ pour $x = x_0$. D'après la nature même de l'opération d'intégration, rien n'empêche, en effet, d'admettre qu'entre les limites zéro et 2π, et dans un nombre quelconque d'intervalles de zéro à x_1, x_1 à x_2, …, x_{n-1} à 2π, $f(x)$ coïncide successivement avec n fonctions distinctes $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$, les expressions des coefficients devenant alors

$$2\pi \mathrm{A}_0 = \int_0^{x_1} f_1(x) \, dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) \, dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{2\pi} f_n(x) \, dx,$$

$$\pi \mathrm{A}_m = \int_0^{x_1} f_1(x) \cos mx \, dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) \cos mx \, dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{2\pi} f_n(x) \cos mx \, dx,$$

$$\pi \mathrm{B}_m = \int_0^{x_1} f_1(x) \sin mx \, dx + \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) \sin mx \, dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{2\pi} f_n(x) \sin mx \, dx.$$

Une circonstance qu'il importe aussi de ne pas omettre, c'est qu'à la limite de séparation de deux intervalles, pour $x = x_1$, par exemple, la série ne présente point l'ambiguïté de la fonction et a pour valeur $\frac{1}{2}[f_1(x_1) + f_2(x_1)]$; mais je me bornerai à énoncer ces résultats et à en faire l'application au cas d'une fonction $f(x)$ successivement égale à $+\frac{\pi}{4}$ entre $x = 0$, $x = \pi$, et à $-\frac{\pi}{4}$ entre $x = \pi$, $x = 2\pi$. On trouve alors immédiatement $\mathrm{A}_0 = 0$; observant ensuite qu'on a

$$\int_0^{\pi} \cos mx \, dx = 0, \qquad \int_{\pi}^{2\pi} \cos mx \, dx = 0,$$

nous en concluons semblablement $\mathrm{A}_m = 0$; enfin les expressions

$$\int_0^{\pi} \sin mx \, dx = \frac{1 - \cos m\pi}{m}, \qquad \int_{\pi}^{2\pi} \sin mx \, dx = \frac{\cos m\pi - 1}{m}$$

donnent

$$\pi \mathrm{B}_m = 2 \frac{1 - \cos m\pi}{m},$$

et l'on retrouve bien la série

$$f(x) = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots,$$

comme nous l'avions obtenue par une autre voie.

De l'intégrale $\int e^{\omega x} f(x)\, dx$.

I. Je me fonderai sur cette remarque que l'expression

$$e^{\omega x}\left(\mathrm{A}\, u + \mathrm{A}_1 \frac{du}{dx} + \mathrm{A}_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \ldots + \mathrm{A}_n \frac{d^n u}{dx^n}\right),$$

où u est une fonction quelconque de x, prend, si l'on pose

$$e^{\omega x} u = v,$$

la forme suivante :

$$\mathcal{A}\, v + \mathcal{A}_1 \frac{dv}{dx} + \mathcal{A}_2 \frac{d^2 v}{dx^2} + \ldots + \mathcal{A}_n \frac{d^n v}{dx^n}.$$

En effet, nous avons successivement $u = e^{-\omega x} v$,

$$\frac{du}{dx} = e^{-\omega x}\left(-\omega v + \frac{dv}{dx}\right), \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = e^{-\omega x}\left(\omega^2 v - 2\omega \frac{dv}{dx} + \frac{d^2 v}{dx^2}\right), \quad \ldots,$$

et la substitution conduit au résultat annoncé, les quantités $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$, ... ayant ces valeurs

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \mathrm{A} - \mathrm{A}_1 \omega + \mathrm{A}_2 \omega^2 - \mathrm{A}_3 \omega^3 + \ldots, \\
\mathcal{A}_1 &= \mathrm{A}_1 - 2 \mathrm{A}_2 \omega + 3 \mathrm{A}_3 \omega^2 - \ldots = -\frac{d\mathcal{A}}{d\omega}, \\
\mathcal{A}_2 &= \mathrm{A}_2 - 3 \mathrm{A}_3 \omega + \ldots = \frac{1}{2} \frac{d^2 \mathcal{A}}{d\omega^2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

qu'on obtient directement comme il suit. La fonction u étant quelconque, faisons en particulier $u = e^{hx}$, on en conclura $v = e^{(\omega + h)x}$, et la relation

$$\begin{aligned}
&e^{\omega x}\left(\mathrm{A}\, u + \mathrm{A}_1 \frac{du}{dx} + \mathrm{A}_2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \ldots + \mathrm{A}_n \frac{d^n v}{dx^n}\right) \\
&\quad = \mathcal{A}\, v + \mathcal{A}_1 \frac{dv}{dx} + \mathcal{A}_2 \frac{d^2 v}{dx^2} + \ldots + \mathcal{A}_n \frac{d^n v}{dx^n}
\end{aligned}$$

donne ainsi, après avoir supprimé dans les deux membres le facteur exponentiel,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A} + \mathrm{A}_1 h + \mathrm{A}_2 h^2 + \ldots + \mathrm{A}_n h^n \\
&\quad = \mathcal{A} + \mathcal{A}_1(\omega + h) + \mathcal{A}_2(\omega + h)^2 + \ldots + \mathcal{A}_n(\omega + h)^n.
\end{aligned}$$

Changeons maintenant h en $h - \omega$; nous en concluons

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A} + \mathrm{A}_1(-\omega + h) + \mathrm{A}_2(-\omega + h)^2 + \ldots + \mathrm{A}_n(-\omega + h)^n \\
&\quad = \mathcal{A} + \mathcal{A}_1 h + \mathcal{A}_2 h^2 + \ldots + \mathcal{A}_n h^n,
\end{aligned}$$

et l'on voit que le développement du premier membre suivant les puissances de h donne bien pour les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$, ... les valeurs précédemment obtenues.

Cela posé, nous tirerons de la décomposition en fractions simples de la fraction rationnelle $f(x)$ la transformation suivante de l'expression $e^{\omega x} f(x)$. Soit, à cet effet, en désignant la partie entière par $\mathrm{F}(x)$,

$$f(x) = \mathrm{F}(x) + \sum \frac{\mathrm{A}}{x - a} + \sum \frac{\mathrm{A}_1}{(x - a)^2} + \ldots + \sum \frac{\mathrm{A}_n}{(x - a)^{n+1}},$$

ou plutôt, après avoir modifié convenablement les constantes A_1, A_2, ..., A_n,

$$\begin{aligned}
f(x) = \mathrm{F}(x) &+ \sum \mathrm{A}(x - a)^{-1} \\
&+ \sum \mathrm{A}_1 \frac{d(x - a)^{-1}}{dx} + \ldots + \sum \mathrm{A}_n \frac{d^n (x - a)^{-1}}{dx^n};
\end{aligned}$$

je ferai, d'après la remarque précédente,

$$\begin{aligned}
&e^{\omega x}\left[\mathrm{A}(x - a)^{-1} + \mathrm{A}_1 \frac{d(x - a)^{-1}}{dx} + \ldots + \mathrm{A}_n \frac{d^n (x - a)^{-1}}{dx^n}\right] \\
&\quad = \mathcal{A}[e^{\omega x}(x - a)^{-1}] + \mathcal{A}_1 \frac{d}{dx}[e^{\omega x}(x - a)^{-1}] + \ldots \\
&\qquad + \mathcal{A}_n \frac{d^n}{dx^n}[e^{\omega x}(x - a)^{-1}].
\end{aligned}$$

Or, en ajoutant membre à membre les relations de même nature qui correspondent aux divers groupes de fractions simples, on trouvera cette expression

$$\begin{aligned} e^{\omega x} f(x) = e^{\omega x}\,\mathrm{F}(x) &+ \sum \mathcal{A}\,[e^{\omega x}(x-a)^{-1}] \\ &+ \sum \mathcal{A}_1 \frac{d}{dx}\,[e^{\omega x}(x-a)^{-1}] + \ldots \\ &+ \sum \mathcal{A}_n \frac{d^n}{dx^n}\,[e^{\omega x}(x-a)^{-1}], \end{aligned}$$

où les quantités $\dfrac{e^{\omega x}}{x-a}$ se montrent comme ayant, à l'égard de la fonction transcendante $e^{\omega x} f(x)$, le même rôle d'éléments simples que les fractions $\dfrac{1}{x-a}$ par rapport à la fonction rationnelle $f(x)$. Il en résulte que l'intégrale $\int e^{\omega x} f(x)\,dx$ se trouve exprimée d'une part au moyen de celle-ci $\int e^{\omega x}\,\mathrm{F}(x)\,dx$, précédemment obtenue sous cette forme :

$$\int e^{\omega x}\,\mathrm{F}(x)\,dx = e^{\omega x}\left[\frac{\mathrm{F}(x)}{\omega} - \frac{\mathrm{F}'(x)}{\omega^2} + \frac{\mathrm{F}''(x)}{\omega^3} - \ldots\right];$$

en second lieu, par les expressions également explicites

$$\sum \mathcal{A}_1\,[e^{\omega x}(x-a)^{-1}], \qquad \sum \mathcal{A}_2 \frac{d}{dx}\,[e^{\omega x}(x-a)^{-1}], \qquad \ldots,$$

et, enfin, par la quantité

$$\sum \mathcal{A} \int e^{\omega x}(x-a)^{-1}\,dx,$$

où figure au fond, comme nous allons voir, une seule et unique transcendante.

Soit, à cet effet, pour un instant,

$$\varphi(z) = \int \frac{e^z\,dz}{z};$$

en faisant

$$z = \omega(x-a),$$

on aura

$$\varphi[\omega(x-a)] = \int \frac{e^{\omega(x-a)}\,dx}{x-a},$$

d'où

$$\int \frac{e^{\omega x}\,dx}{x-a} = e^{\omega a}\,\varphi[\omega(x-a)],$$

et, par conséquent,

$$\sum \mathcal{A} \int \frac{e^{\omega x}\,dx}{x-a} = \sum \mathcal{A}\, e^{\omega a}\,\varphi[\omega(x-a)].$$

La transcendante $\int \frac{e^z\,dz}{z}$, si l'on fait $e^z = x$, prend la forme $\int \frac{dx}{\log x}$ et reçoit la dénomination de *logarithme intégral*. On a démontré l'impossibilité de la représenter par des combinaisons en nombre fini de fonctions algébriques, logarithmiques et exponentielles, d'où résulte qu'on doit l'envisager comme un élément analytique *sui generis,* dont la notion première s'est offerte, ainsi que celle des transcendantes elliptiques et abéliennes, par la voie du Calcul intégral. Elle a été l'objet de nombreux travaux, mais nous nous bornerons à mentionner à son égard une propriété singulière qui en montrera le rôle dans l'Arithmétique supérieure. Elle consiste en ce que l'intégrale définie $\int_a^b \frac{dx}{\log x}$ donne approximativement la valeur N du nombre des nombres premiers compris entre a et b, l'approximation étant d'autant plus grande que b est plus grand par rapport à a, et étant ainsi caractérisée que la limite du rapport de l'intégrale au nombre N est l'unité pour b infini.

II. Il existe une infinité de cas dans lesquels l'intégrale

$$\int e^{\omega x} f(x)\,dx$$

s'obtient sous forme finie explicite; il suffit pour cela que les diverses constantes $\mathcal{A}$ s'évanouissent. J'ajoute que ces conditions sont nécessaires si l'on veut que $\int e^{\omega x} f(x)\,dx$ s'exprime au moyen d'une fonction rationnelle multipliée par $e^{\omega x}$. Il est aisé, en effet, de reconnaître l'impossibilité d'une relation de la forme suivante :

$$\sum \mathcal{A} \int \frac{e^{\omega x}\,dx}{x-a} = e^{\omega x}\,\mathfrak{F}(x),$$

$\mathfrak{F}(x)$ étant en général une fonction algébrique, car en faisant $x = a + h$, et développant suivant les puissances croissantes de h, le premier membre contiendra la quantité $\mathcal{A} e^{\omega a} \log h$, et aucun terme logarithmique ne pourra, dans l'hypothèse admise, provenir du second membre. On voit par là toute l'importance des constantes $\mathcal{A}$; aussi nous allons en donner une détermination nouvelle, en déduisant à la fois et directement de la formule

$$\begin{aligned}e^{\omega x} f(x) = e^{\omega x}\,\mathrm{F}(x) &+ \sum \mathcal{A}[e^{\omega x}(x-a)^{-1}]\\ &+ \sum \mathcal{A}_1 \frac{d}{dx}[e^{\omega x}(x-a)^{-1}] + \ldots\end{aligned}$$

le groupe de coefficients $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$.

Soit à cet effet $x = a + h$; développons, comme tout à l'heure, suivant les puissances négatives; posons

$$e^{\omega h} f(a+h) = \mathrm{A}\,h^{-1} + \mathrm{A}_1 \frac{dh^{-1}}{dh} + \mathrm{A}_2 \frac{dh^{-2}}{dh^2} + \ldots,$$

d'où, par conséquent,

$$e^{\omega(\alpha+h)} f(a+h) = e^{\omega a}\left(\mathrm{A}\,h^{-1} + \mathrm{A}_1 \frac{dh^{-1}}{dh} + \mathrm{A}_2 \frac{dh^{-2}}{dh^2} + \ldots\right).$$

Or, dans le second membre, les termes en $\frac{1}{h}, \frac{1}{h^2}, \cdots$ ne peuvent provenir que de la quantité $e^{\omega x}(x-a)^{-1}$ et de ses dérivées, qui donnent, en effet, en négligeant les puissances positives,

$$\begin{aligned}e^{\omega x}(x-a)^{-1} &= e^{\omega a} h^{-1} + \ldots,\\ \frac{d}{dx}[e^{\omega x}(x-a)^{-1}] &= e^{\omega a} \frac{dh^{-1}}{dh} + \ldots,\\ \frac{d^2}{dx^2}[e^{\omega x}(x-a)^{-1}] &= e^{\omega a} \frac{d^2 h^{-1}}{dh^2} + \ldots,\\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

attendu que la dérivée de h par rapport à x est l'unité. L'expression suivante

$$e^{\omega a}\left(\mathcal{A}\,h^{-1} + \mathcal{A}_1 \frac{dh^{-1}}{dh} + \mathcal{A}_2 \frac{d^2 h^{-1}}{dh^2} + \ldots\right)$$

représente, par conséquent, la portion du développement du second membre qui renferme les puissances négatives de h, et l'on voit qu'on a

$$\mathcal{A} = \mathrm{A}, \qquad \mathcal{A}_1 = \mathrm{A}_1, \qquad \mathcal{A}_2 = \mathrm{A}_2, \qquad \ldots.$$

Soit, par exemple,

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{ax}\right)\left(1 - \frac{1}{bx}\right),$$

et prenons

$$\omega = a + b;$$

on multipliera le développement de l'exponentielle

$$e^{(a+b)h} = 1 + (a+b)h + (a+b)^2 \frac{h^2}{2} + \ldots$$

par la quantité

$$f(h) = \frac{1}{abh^2} - \frac{a+b}{abh} + 1,$$

ce qui donne

$$e^{(a+b)h} f(h) = \frac{1}{abh^2} - \frac{a^2+b^2}{2ab} + \ldots.$$

Or, le terme en $\frac{1}{h}$ manquant, nous sommes assurés que l'intégrale est possible sous forme finie explicite; on a, en effet,

$$\int e^{(a+b)x}\left(1 - \frac{1}{ax}\right)\left(1 - \frac{1}{bx}\right) dx = e^{(a+b)x}\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{abx}\right),$$

et l'on trouvera semblablement

$$\begin{aligned}&\int e^{(a+b)x}\left(1 - \frac{3}{ax} + \frac{3}{a^2x^2}\right)\left(1 - \frac{3}{bx} + \frac{3}{b^2x^2}\right) dx\\ &\quad = \frac{e^{(a+b)x}}{a+b} + \frac{3(a^2+b^2)}{2a^2b^2}\frac{e^{(a+b)x}}{x} - \frac{3}{2a^2b^2}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{e^{(a+b)x}}{x}\right)\\ &\quad = e^{(a+b)x}\left[\frac{1}{a+b} - \frac{3}{abx} + \frac{3(a+b)}{a^2b^2x^2} - \frac{3}{a^2b^2x^3}\right].\end{aligned}$$

III. J'ajouterai succinctement, en vue des intégrales

$$\int \cos\omega x\, f(x)\, dx, \qquad \int \sin\omega x\, f(x)\, dx;$$

les conséquences auxquelles conduit la relation générale

$$e^{\omega x} f(x) = e^{\omega x}\,\mathrm{F}(x) + \sum \mathcal{A}[e^{\omega x}(x-a)^{-1}] + \ldots,$$

lorsqu'on y change ω en $\omega\sqrt{-1}$. En supposant pour plus de simplicité que dorénavant ω soit réel, ainsi que $f(x)$ et les quantités a, je remplacerai les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$, ... par $\mathcal{A}+\mathcal{A}'\sqrt{-1}$, $\mathcal{A}_1+\mathcal{A}'_1\sqrt{-1}$, ... Cette équation donne alors les deux suivantes :

$$\begin{aligned}
&\cos\omega x\, f(x) \\
&\quad = \cos\omega x\, \mathrm{F}(x) + \sum \mathcal{A}[\cos\omega x(x-a)^{-1}] - \sum \mathcal{A}'[\sin\omega x(x-a)^{-1}] \\
&\qquad + \sum \mathcal{A}_1 \frac{d}{dx}[\cos\omega x(x-a)^{-1}] - \sum \mathcal{A}'_1 \frac{d}{dx}[\sin\omega x(x-a)^{-1}] \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sin\omega x\, f(x) \\
&\quad = \sin\omega x\, \mathrm{F}(x) + \sum \mathcal{A}[\sin\omega x(x-a)^{-1}] + \sum \mathcal{A}'[\cos\omega x(x-a)^{-1}] \\
&\qquad + \sum \mathcal{A}_1 \frac{d}{dx}[\sin\omega x(x-a)^{-1}] + \sum \mathcal{A}'_1 \frac{d}{dx}[\cos\omega x(x-a)^{-1}] \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On voit donc que les intégrales

$$\int \cos\omega x\, f(x)\, dx, \qquad \int \sin\omega x\, f(x)\, dx$$

s'expriment en général par les transcendantes

$$\int \frac{\cos\omega x\, dx}{x-a}, \qquad \int \frac{\sin\omega x\, dx}{x-a},$$

qui elles-mêmes se réduisent à celles-ci :

$$\int \frac{\cos z\, dz}{z}, \qquad \int \frac{\sin z\, dz}{z}.$$

Nous voyons aussi qu'on obtiendra à la fois pour l'une et pour l'autre, des valeurs sous forme finie explicite, lorsque les divers coefficients $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ s'évanouiront. Or, $\mathcal{A}+\mathcal{A}'\sqrt{-1}$ étant le coefficient de $\frac{1}{h}$ dans le développement de

$$e^{\omega h\sqrt{-1}} f(a+h) = (\cos\omega h + \sqrt{-1}\sin\omega h)\, f(a+h),$$

il en résulte qu'en supposant réelles, comme nous l'avons admis, les quantités ω et a, ainsi que la fonction $f(x)$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ seront aussi, à l'égard des fonctions

$$\cos\omega h\, f(a+h), \qquad \sin\omega h\, f(a+h),$$

les coefficients des termes en $\frac{1}{h}$.

Soit, comme application, l'intégrale

$$\int \left(\cos ax - \frac{\sin ax}{ax}\right)\left(\cos bx - \frac{\sin bx}{bx}\right) dx;$$

j'écrirai d'abord

$$\begin{aligned}
&2\left(\cos ax - \frac{\sin ax}{ax}\right)\left(\cos bx - \frac{\sin bx}{bx}\right) \\
&\quad = \cos(a+b)x\left(1 - \frac{1}{abx^2}\right) - \sin(a+b)x\,\frac{a+b}{abx} \\
&\qquad + \cos(a-b)x\left(1 + \frac{1}{abx^2}\right) + \sin(a-b)x\,\frac{a-b}{abx},
\end{aligned}$$

et nous serons conduits à une combinaison linéaire des quatre quantités

$$\int \frac{\cos(a+b)x\, dx}{x^2}, \qquad \int \frac{\sin(a+b)x\, dx}{x},$$

$$\int \frac{\cos(a-b)x\, dx}{x^2}, \qquad \int \frac{\sin(a-b)x\, dx}{x},$$

dont aucune ne peut s'obtenir, l'expression proposée s'exprimant néanmoins sous forme finie explicite. Supposons, en effet, dans les formules précédentes,

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad \omega = a+b;$$

on aura

$$\frac{\cos(a+b)x}{x^2} = -(a+b)\frac{\sin(a+b)x}{x} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\cos(a+b)x}{x}\right],$$

puis, en changeant b en $-b$,

$$\frac{\cos(a-b)x}{x^2} = -(a-b)\frac{\sin(a-b)x}{x} - \frac{d}{dx}\left[\frac{\cos(a-b)x}{x}\right].$$

Il en résulte, en intégrant,

$$\int \left[\frac{\cos(a+b)x}{x^2} + (a+b)\frac{\sin(a+b)x}{x}\right] dx = -\frac{\cos(a+b)x}{x},$$

$$\int \left[\frac{\cos(a-b)x}{x^2} + (a-b)\frac{\sin(a-b)x}{x}\right] dx = -\frac{\cos(a-b)x}{x},$$

et, par conséquent, ce résultat

$$2\int\left(\cos a x-\frac{\sin a x}{a x}\right)\left(\cos b x-\frac{\sin b x}{b x}\right) dx$$
$$=-\frac{\sin(a+b)x}{a+b}+\frac{\cos(a+b)x}{abx}$$
$$-\frac{\sin(a-b)x}{a-b}-\frac{\cos(a-b)x}{abx}.$$

C'est le cas le plus simple d'une proposition générale concernant les réduites successives

$$\frac{x}{1},\quad \frac{3x}{3-x^2},\quad \frac{15x-x^3}{15-6x^2},\quad \ldots$$

de la fraction continue de Lambert

$$\operatorname{tang} x=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\ldots}}}$$

Soit, en général, $\frac{P}{Q}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite, P et Q étant des polynomes entiers en x, et posons

$$\varphi(x)=\frac{P\cos x-Q\sin x}{x^n};$$

l'intégrale $\int \varphi(ax)\,\varphi(bx)\,dx$ pourra toujours être obtenue sous forme finie explicite. La fonction $\varphi(x)$ donne aussi ce résultat

$$\int\frac{dx}{\varphi^2(x)}=\frac{P\sin x+Q\cos x}{P\cos x+Q\sin x};$$

c'est, sous une forme très simple, la valeur d'une intégrale que nous n'avons point de méthode pour aborder, car elle n'appartient à aucune des catégories considérées jusqu'ici; on verra comment on y parvient facilement, dans le seconde partie du Cours.

Je remarquerai enfin que, en désignant par $F(\sin x, \cos x)$ un polynome entier en $\sin x$ et $\cos x$, l'intégrale

$$\int F(\sin x, \cos x)\,f(x)\,dx$$

rentre dans celles que nous venons de traiter, ce polynome pouvant être transformé en une fonction linéaire des sinus et cosinus des multiples de la variable. La quantité $\int\frac{\sin^n x}{x^m}\,dx$, par exemple, étant d'abord, abstraction faite d'un facteur constant, mise sous la forme

$$\int \sin^n x\,\frac{d^m(x^{-1})}{dx^m}\,dx,$$

sera immédiatement ramenée, au moyen de l'intégration par parties, à celle-ci :

$$\int\frac{d^m\sin^n x}{dx^m}\,\frac{dx}{x}.$$

Or, $\frac{d^m\sin^n x}{dx^m}$ est une somme de cosinus ou une somme de sinus de multiples de x, suivant que $m+n$ est pair ou impair; dans le premier cas, l'intégrale se réduit donc à $\int\frac{\cos z\,dz}{z}$, et dans le second à $\int\frac{\sin z}{z}\,dz$.

De l'intégrale $\int e^{\omega x} f(\sin x, \cos x)\,dx$.

I. La propriété caractéristique de la transcendante

$$e^{\omega x} f(\sin x, \cos x),$$

où $f(\sin x, \cos x)$ désigne une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$, consiste en ce qu'elle se reproduit multipliée par un facteur constant $e^{2\omega\pi}$, lorsqu'on y change x en $x+2\pi$. Elle se rapproche ainsi des fonctions périodiques, et le procédé d'intégration résultera encore d'une décomposition en éléments simples, qu'on obtient comme il suit. Je pars, à cet effet, de la relation générale établie page 58, à savoir

$$f(\sin x, \cos x)=\Pi(x)+\Phi(x);$$

elle nous donne dans la fonction proposée une première partie $e^{\omega x}\Pi(x)$, qui en sera semblablement regardée comme la partie entière et dont l'intégration est immédiate. En effet, $\Pi(x)$ étant composée linéairement des quantités $\cos kx$, $\sin kx$, il suffit d'employer les formules

$$\int e^{\omega x} \cos kx\, dx = \frac{e^{\omega x}(\omega \cos kx + k \sin kx)}{\omega^2 + k^2},$$

$$\int e^{\omega x} \sin kx\, dx = \frac{e^{\omega x}(\omega \sin kx - k \cos kx)}{\omega^2 + k^2}.$$

Maintenant nous parviendrons aux éléments simples, propres à la nouvelle transcendante, en appliquant la relation de la page 86 à la seconde partie $e^{\omega x}\Phi(x)$, c'est-à-dire aux quantités suivantes :

$$e^{\omega x}\left[\mathcal{A} \cot\frac{1}{2}(x-\alpha) + \mathcal{A}_1 \frac{d \cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx} + \ldots + \mathcal{A}_n \frac{d^n \cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^n}\right],$$

qui, en conséquence, prendront cette nouvelle forme

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A} e^{\omega x} \cot\frac{1}{2}(x-\alpha) + \mathfrak{A}_1 \frac{d}{dx}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\right] + \ldots \\ &\qquad + \mathfrak{A}_n \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\right]. \end{aligned}$$

Or, en faisant la somme d'expressions semblables, pour les différents systèmes de valeurs constantes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, nous trouverons pour formule de décomposition

$$\begin{aligned} &e^{\omega x} f(\sin x, \cos x) \\ &\quad = e^{\omega x}(x) + \mathfrak{A}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\right] + \mathfrak{A}_1 \frac{d}{dx}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\right] + \ldots \\ &\qquad + \mathfrak{B}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\beta)\right] + \mathfrak{B}_1 \frac{d}{dx}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\beta)\right] + \ldots \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\qquad + \mathfrak{L}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\lambda)\right] + \mathfrak{L}_1 \frac{d}{dx}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\lambda)\right] + \ldots. \end{aligned}$$

C'est, à l'égard de notre fonction, l'équivalent de la décomposition en fractions simples des fractions rationnelles; les quantités qui jouent le rôle d'éléments simples étant

$$e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha), \quad e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\beta), \quad \ldots, \quad e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\lambda),$$

il en résulte qu'en faisant pour un instant

$$\varphi(x) = \int e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}x\, dx,$$

l'intégrale

$$\int e^{\omega x} f(\sin x, \cos x)\, dx$$

sera exprimée, d'une part, par la somme

$$\mathfrak{A} e^{\omega\alpha}\varphi(x-\alpha) + \mathfrak{B} e^{\omega\beta}\varphi(x-\beta) + \ldots + \mathfrak{L} e^{\omega\lambda}\varphi(x-\lambda),$$

et de l'autre, au moyen des fonctions explicites de la variable. Les conditions $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, $\ldots$, $\mathfrak{L} = 0$ sont donc suffisantes pour que la partie non explicite disparaisse, et la valeur même de l'intégrale sera connue au moyen des divers coefficients $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\ldots$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\ldots$. Il importe donc d'en avoir une détermination directe, et on l'obtient comme il suit.

II. En ayant, en vue, pour fixer les idées, le groupe des quantités $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\ldots$, $\mathfrak{A}_n$, nous ferons $x = \alpha + h$ dans la fonction proposée, et développant suivant les puissances ascendantes de h, nous représenterons les termes affectés des puissances négatives de cette quantité sous cette forme

$$\begin{aligned} &e^{\omega(\alpha+h)} f[\sin(\alpha+h), \cos(\alpha+h)] \\ &\quad = e^{\omega\alpha}\left(\mathrm{A}\, h^{-1} + \mathrm{A}_1 \frac{dh^{-1}}{dh} + \ldots + \mathrm{A}_n \frac{d^n h^{-1}}{dh^n}\right) + \ldots. \end{aligned}$$

Or, la relation

$$\begin{aligned} &e^{\omega x} f(\sin x, \cos x) \\ &\quad = e^{\omega x}\,\Pi(x) + \mathfrak{A}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\right] + \mathfrak{A}_1 \frac{d}{dx}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\right] + \ldots \\ &\qquad + \mathfrak{B}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\beta)\right] + \mathfrak{B}_1 \frac{d}{dx}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\beta)\right] + \ldots \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

montre que, pour $x = \alpha + h$, la partie suivante du second membre, savoir

$$\mathfrak{A}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\right] + \mathfrak{A}_1 \frac{d}{dx}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\right] + \ldots$$

sera seule à donner des puissances négatives de h. Maintenant on trouve

$$e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha) = e^{\omega\alpha}\left(\frac{2}{h} + 2\omega - \frac{h}{6} + \ldots\right),$$

puis, abstraction faite des puissances positives,

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{\omega x}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)\right] = 2e^{\omega\alpha}\frac{d^n h^{-1}}{dh^n},$$

la dérivée de h par rapport à x étant l'unité; nous en conclurons que l'expression

$$2e^{\omega\alpha}\left(\mathfrak{A}h^{-1}+\mathfrak{A}_1\frac{dh^{-1}}{dh}+\ldots+\mathfrak{A}_n\frac{d^n h^{-1}}{dh^n}\right)$$

représente dans le développement du second membre tous les termes contenant des puissances négatives de h, de sorte que l'on aura

$$\mathfrak{A}=\frac{1}{2}\mathrm{A}, \qquad \mathfrak{A}_1=\frac{1}{2}\mathrm{A}_1, \qquad \ldots, \qquad \mathfrak{A}_n=\frac{1}{2}\mathrm{A}_n.$$

Pour faire une application de ce résultat, nous considérerons la fonction

$$e^{(a+b)x}\left(a-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right),$$

qui devient infinie pour la seule valeur $x=0$, de sorte qu'il suffira de la développer suivant les puissances ascendantes de la variable. Or, on a

$$\begin{aligned} e^{ax}\left(a-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right) &= \left(1+ax+\frac{a^2x^2}{2}+\ldots\right)\left(-\frac{1}{x}+a+\frac{x}{12}+\ldots\right) \\ &= -\frac{1}{x}+\frac{1+6a^2}{12}x+\ldots, \end{aligned}$$

et pareillement

$$e^{bx}\left(b-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{x}+\frac{1+6b^2}{12}x+\ldots;$$

d'où, en multipliant membre à membre,

$$e^{(a+b)x}\left(a-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{x^2}+\ldots.$$

Le terme en $\frac{1}{x}$ manque, ainsi $\mathrm{A}=0$; mettant ensuite $\frac{1}{x^2}$ sous la forme $\frac{d(x^{-1})}{dx}$, on en conclut $\mathrm{A}_1=-1$; par conséquent

$$\mathfrak{A}=0, \qquad \mathfrak{A}_1=-\frac{1}{2}.$$

Maintenant nous devons calculer la partie entière $\Pi(x)$ de la fonction

$$\left(a-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right),$$

qui est simplement une constante. Or on a, d'après la règle établie page 63,

$$\mathrm{G}=\left(a+\frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)\left(b+\frac{1}{2}\sqrt{-1}\right), \qquad \mathrm{H}=\left(a-\frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)\left(b-\frac{1}{2}\sqrt{-1}\right),$$

donc

$$\Pi(x)=\frac{\mathrm{G}+\mathrm{H}}{2}=ab-\frac{1}{4},$$

et nous obtenons, en conséquence, la relation

$$\begin{aligned} & e^{(a+b)x}\left(a-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right) \\ &\quad = e^{(a+b)x}\left(ab-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(e^{(a+b)x}\cot\frac{x}{2}\right), \end{aligned}$$

d'où cette expression sous forme finie explicite de l'intégrale du premier membre, savoir

$$\int e^{(a+b)x}\left(a-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right)\left(b-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right)dx = e^{(a+b)x}\left[\frac{4ab-1}{4(a+b)}-\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\right].$$

Ce résultat est le cas le plus simple du théorème suivant, auquel nous serons amenés dans la seconde partie du Cours. Soit, en désignant par n un nombre entier quelconque,

$$\mathrm{F}(x)=(x-1)^a(x+1)^{-a}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^{n-a}(x+1)^{n+a}\right],$$

il est aisé de voir que $\mathrm{F}(x)$ est un polynome entier en x et en a du degré n; cela étant, je représenterai par $\mathfrak{F}(x,a)$ ce qu'il devient en y changeant x en $x\sqrt{-1}$ et a en $a\sqrt{-1}$, suppression faite du facteur $(\sqrt{-1})^n$. On aura ainsi pour $n=1$

$$\mathfrak{F}(x)=2(x-a),$$

pour $n=2$

$$\mathfrak{F}(x)=4(3x^2-3ax+a^2+1), \qquad \ldots;$$