ou, pour abréger l'écriture (¹),

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \sum \frac{A}{x-a} + \sum \frac{A_1}{(x-a)^2} + \ldots + \sum \frac{A_n}{(x-a)^{n+1}}.$$

On en déduit immédiatement cette expression de l'intégrale de toute fonction rationnelle

$$\int \frac{F_1(x)}{F(x)}\,dx = \sum A \log(x-a) - \sum \frac{A_1}{x-a} - \ldots - \frac{1}{n}\sum \frac{A_n}{(x-a)^n},$$

où l'on voit figurer une partie transcendante et une partie algébrique qui donnent lieu aux remarques suivantes.

I. Nous observerons d'abord qu'en supposant réels les polynomes $F(x)$ et $F_1(x)$, les racines du dénominateur peuvent être imaginaires, de sorte qu'il est nécessaire de mettre le résultat obtenu sous une forme explicitement réelle. Or, on sait que les racines imaginaires seront conjuguées deux à deux; de plus, qu'elles seront de même ordre de multiplicité, et qu'en les désignant par a et b les numérateurs des fractions simples correspondantes

$$\frac{A_i}{(x-a)^{i+1}}, \quad \frac{B_i}{(x-b)^{i+1}}$$

seront respectivement exprimés de la même manière en fonction rationnelle de a et b. Ce seront donc aussi des quantités imaginaires conjuguées, et les termes qui en résultent dans la partie algébrique de l'intégrale, à savoir

$$-\frac{1}{i}\frac{A_i}{(x-a)^i}, \quad -\frac{1}{i}\frac{B_i}{(x-b)^i},$$

donnent, par les réductions ordinaires, une somme réelle. Mais, dans la partie transcendante, il sera nécessaire, pour effectuer cette réduction, d'employer l'expression des logarithmes des quantités imaginaires

$$\log(x-\alpha-\beta\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\log[(x-\alpha)^2+\beta^2] + \sqrt{-1}\,\text{arc tang}\,\frac{x-\alpha}{\beta},$$

(¹) On supposera que n soit le plus grand des nombres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, et qu'on attribue des valeurs nulles à ceux des numérateurs $A_n, B_n, \ldots, L_n$ dont les indices surpasseraient respectivement $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$.

et, en faisant

$$a = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad A = P + Q\sqrt{-1},$$
$$b = \alpha - \beta\sqrt{-1}, \qquad B = P - Q\sqrt{-1},$$

on trouvera facilement

$$\begin{aligned} &A\log(x-a) + B\log(x-b) \\ &\quad = P\log[(x-\alpha)^2+\beta^2] - 2Q\,\text{arc tang}\,\frac{x-\alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

Ce résultat peut également s'obtenir par l'intégration directe de la somme des fractions imaginaires conjuguées

$$\frac{P+Q\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} + \frac{P-Q\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}} = \frac{2P(x-\alpha)-2Q\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Écrivant, en effet,

$$\int \frac{2P(x-\alpha)-2Q\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = P\int \frac{2(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} - 2Q\int \frac{\beta\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2},$$

on a d'abord

$$\int \frac{2(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \int \frac{d[(x-\alpha)^2+\beta^2]}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \log[(x-\alpha)^2+\beta^2];$$

faisant ensuite $x-\alpha = \beta z$, il viendra

$$\int \frac{\beta\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \int \frac{dz}{z^2+1} = \text{arc tang}\,z,$$

et, par suite,

$$\int \frac{\beta\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \text{arc tang}\,\frac{x-\alpha}{\beta},$$

de sorte que nous aurons, comme précédemment,

$$\int \frac{2P(x-\alpha)-2Q\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = P\log[(x-\alpha)^2+\beta^2] - 2Q\,\text{arc tang}\,\frac{x-\alpha}{\beta}.$$

II. La formule

$$\int \frac{F_1(x)}{F(x)}\,dx = \sum A\log(x-a) - \sum \frac{A_1}{x-a} - \ldots - \frac{1}{n}\sum \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

montre que le second membre sera simplement algébrique, lorsque les constantes A, B, ..., L seront toutes nulles. Ces conditions, qui sont suffisantes, sont évidemment nécessaires; car, si l'on égale pour un instant à une fraction rationnelle la quantité

$$\sum \mathrm{A} \log(x-a) = \int \sum \frac{\mathrm{A}}{x-a}\,dx,$$

et qu'on prenne la dérivée de cette fonction rationnelle après l'avoir décomposée en fractions simples, on fera ainsi disparaître toutes les fractions partielles dont les dénominateurs sont du premier degré. On ne pourra donc reproduire l'expression $\sum \frac{\mathrm{A}}{x-a}$, la décomposition en fractions simples n'étant possible que d'une seule manière.

Remarquons aussi que la partie algébrique de l'intégrale est de la forme $\frac{\mathfrak{F}(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}}$, $\mathfrak{F}(x)$ étant un polynome entier qu'on peut facilement obtenir, comme on va le voir, à l'aide des développements en série suivant les puissances décroissantes de la variable, de l'intégrale et de la partie transcendante. On forme le premier en supposant qu'on ait, par la division algébrique,

$$\frac{\mathrm{F}_1(x)}{\mathrm{F}(x)} = \frac{\omega}{x} + \frac{\omega_1}{x^2} + \frac{\omega_2}{x^3} + \ldots;$$

de là, nous tirons, en effet, en intégrant les deux membres,

$$\int \frac{\mathrm{F}_1(x)}{\mathrm{F}(x)}\,dx = \omega \log x - \frac{\omega_1}{x} - \frac{\omega_2}{2x^2} - \ldots.$$

Quant au second, il suffit d'employer la série élémentaire

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} + \ldots,$$

pour en conclure

$$\sum \frac{\mathrm{A}}{x-a} = \frac{\Sigma \mathrm{A}}{x} + \frac{\Sigma \mathrm{A}a}{x^2} + \frac{\Sigma \mathrm{A}a^2}{x^3} + \ldots,$$

puis, en intégrant,

$$\Sigma \mathrm{A} \log(x-a) = \Sigma \mathrm{A} \log x - \frac{\Sigma \mathrm{A}a}{x} - \frac{\Sigma \mathrm{A}a^2}{2x^2} - \ldots$$

Nous obtenons ainsi la relation

$$\frac{\mathfrak{F}(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}} = (\Sigma \mathrm{A} - \omega)\log x + \frac{\omega_1 - \Sigma \mathrm{A}a}{x} + \frac{\omega_2 - \Sigma \mathrm{A}a^2}{2x^2} + \ldots,$$

où le terme logarithmique, dans le second membre, doit nécessairement disparaître, un tel terme ne pouvant provenir du développement d'une fonction rationnelle suivant les puissances descendantes de la variable. Nous avons donc la condition

$$\Sigma \mathrm{A} = \omega,$$

dont il est souvent fait usage, surtout dans le cas où le degré de $\mathrm{F}_1(x)$ étant inférieur de deux unités à celui de $\mathrm{F}(x)$, on a $\omega = 0$ (¹).

Soit maintenant, pour abréger,

$$\frac{\omega_n - \Sigma \mathrm{A}a^n}{n} = \pi_n,$$

le polynome $\mathfrak{F}(x)$, que nous nous proposons de déterminer, sera donné par cette expression

$$\mathfrak{F}(x) = (x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}\left(\frac{\pi_1}{x} + \frac{\pi_2}{x^2} + \frac{\pi_3}{x^3} + \ldots\right),$$

où il est nécessaire que les termes en nombre infini contenant x en dénominateur se détruisent, de sorte qu'il suffira d'en extraire la partie entière. Soit, à cet effet,

$$(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda} = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m;$$

on trouve sur-le-champ

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(x) = {} & \pi_2(x^{m-1} + p_1 x^{m-2} + \ldots + p_{m-1}) \\ & + \pi_2(x^{m-2} + p_1 x^{m-3} + \ldots + p_{m-2}) + \ldots + \pi_{m-1}(x + p_1) + \pi_m,\end{aligned}$$

et nous voyons qu'on pourra s'arrêter dans les développements de

(¹) Les quantités A, B, ..., L étant les résidus de la fonction $\frac{\mathrm{F}_1(x)}{\mathrm{F}(x)}$ correspondant aux diverses racines du dénominateur, la somme $\Sigma \mathrm{A}$ a reçu de Cauchy la dénomination de *résidu intégral* de cette fonction.

l'intégrale et de la partie transcendante aux termes en $\frac{1}{x^m}$. Mais nous allons reprendre, par une méthode plus approfondie, cette recherche importante de la partie algébrique de l'intégrale

$$\int \frac{F_1(x)}{F(x)}\,dx.$$

Nous nous proposons, en effet, de la déterminer de manière à obtenir la somme effectuée des fractions simples données par la formule générale, de sorte que la connaissance des racines de l'équation $F(x) = 0$ ne sera plus nécessaire que pour former la partie transcendante $\sum A \log(x - a)$.

III. Dans ce but, on commencera par mettre le dénominateur au moyen de la théorie des racines égales, sous la forme

$$F(x) = N^{n+1} P^{p+1} Q^{q+1} \ldots S^{s+1},$$

N, P, Q, ..., S étant des polynomes tels que l'équation

$$NPQ \ldots S = 0$$

n'ait que des racines simples. Nous remplaçons ensuite la décomposition en fractions simples par celle-ci :

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{\mathcal{N}}{N^{n+1}} + \frac{\mathcal{P}}{P^{p+1}} + \frac{\mathcal{Q}}{Q^{q+1}} + \ldots + \frac{\mathcal{S}}{S^{s+1}},$$

où $\mathcal{N}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, ..., $\mathcal{S}$ sont des fonctions entières qu'on obtient par la méthode suivante.

Je me fonderai sur le procédé algébrique que je vais rappeler, et par lequel, étant donnés deux polynomes premiers entre eux U et V, on peut en déterminer deux autres A et B, tels qu'on ait

$$AV + BU = 1,$$

et, par conséquent,

$$\frac{A}{U} + \frac{B}{V} = \frac{1}{UV}.$$

Effectuons sur U et V la recherche du plus grand commun diviseur de manière à obtenir ces relations, où Q, Q_1, Q_2, ... sont les quotients, et R, R_1, R_2, ... les restes successifs, savoir

$$\begin{aligned} U &= VQ + R, \\ V &= RQ_1 + R_1, \\ R &= R_1 Q_2 + R_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Les valeurs qu'on en tire, savoir

$$\begin{aligned} R &= U - VQ, \\ R_1 &= V(1 + QQ_1) - UQ_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

montrent qu'un reste de rang quelconque s'exprime au moyen des polynomes U et V par une combinaison de la forme

$$AV + BU,$$

où A et B sont des fonctions entières. Or, le dernier de ces restes est, dans l'hypothèse admise, une simple constante, ce qui démontre et donne le moyen de former la relation annoncée.

Cela posé, soit

$$U = N^{n+1}, \qquad V = P^{p+1} Q^{q+1} \ldots S^{s+1};$$

nous pouvons écrire

$$\frac{1}{UV} = \frac{1}{F(x)} = \frac{A}{N^{n+1}} + \frac{B}{P^{p+1} Q^{q+1} \ldots S^{s+1}},$$

puis, en multipliant par $F_1(x)$, et faisant $\mathcal{N} = AF_1(x)$,

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{\mathcal{N}}{N^{n+1}} + \frac{BF_1(x)}{P^{p+1} Q^{q+1} \ldots S^{s+1}}.$$

Maintenant il est clair qu'en opérant sur la fraction

$$\frac{BF_1(x)}{P^{p+1} Q^{q+1} \ldots S^{s+1}},$$

comme sur la proposée, on la décomposera pareillement en un terme $\frac{\mathcal{P}}{P^{p+1}}$ et une nouvelle fraction dont le dénominateur ne renfermera que les facteurs de $F(x)$ autres que N^{n+1} et P^{p+1}. Continuant donc les mêmes opérations jusqu'à l'épuisement complet de ces facteurs, on réalisera ainsi la décomposition que nous voulions obtenir de $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ sous la forme

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{\mathfrak{M}}{N^{n+1}} + \frac{\mathfrak{P}}{P^{p+1}} + \ldots + \frac{\mathfrak{S}}{S^{s+1}}.$$

On en tire

$$\int \frac{F_1(x)}{F(x)}\,dx = \int \frac{\mathfrak{M}}{N^{n+1}}\,dx + \int \frac{\mathfrak{P}}{P^{p+1}}\,dx + \ldots + \int \frac{\mathfrak{S}}{S^{s+1}}\,dx,$$

les intégrations portant, comme on voit, sur des expressions toutes semblables, qu'on traite de la manière suivante.

IV. J'observe que N, n'ayant pas de facteurs multiples, est premier avec la dérivée N'; de sorte qu'on pourra déterminer deux polynomes A et B remplissant la condition

$$BN - N'A = 1.$$

Cela étant, nous formerons deux séries de fonctions entières

$$\begin{gathered} V_0,\quad V_1,\quad \ldots,\quad V_{n-1},\\ \mathfrak{M}_1,\quad \mathfrak{M}_2,\quad \ldots,\quad \mathfrak{M}_n, \end{gathered}$$

par ces relations, où $K, K_1, \ldots, K_{n-1}$ sont des polynomes entièrement arbitraires, savoir

$$\begin{aligned} nV_0 &= A\mathfrak{M} - NK,\\ (n-1)V_1 &= A\mathfrak{M}_1 - NK_1,\\ (n-2)V_2 &= A\mathfrak{M}_2 - NK_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ V_{n-1} &= A\mathfrak{M}_{n-1} - NK_{n-1}, \end{aligned}$$

puis, en second lieu,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= B\mathfrak{M} - N'K - V'_0,\\ \mathfrak{M}_2 &= B\mathfrak{M}_1 - N'K_1 - V'_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \mathfrak{M}_n &= B\mathfrak{M}_{n-1} - N'K_{n-1} - V'_{n-1}. \end{aligned}$$

Je vais maintenant prouver qu'en faisant

$$\begin{gathered} U = \mathfrak{M}_n,\\ V = V_0 + NV_1 + N^2V_2 + \ldots + N^{n-1}V_{n-1}, \end{gathered}$$

on a identiquement

$$\frac{\mathfrak{M}}{N^{n+1}} = \frac{U}{N} + \frac{d}{dx}\left(\frac{V}{N^n}\right),$$

d'où

$$\int \frac{\mathfrak{M}}{N^{n+1}}\,dx = \int \frac{U}{N}\,dx + \frac{V}{N^n},$$

de sorte que $\frac{V}{N^n}$ est la partie algébrique de l'intégrale, et $\int \frac{U}{N}\,dx$ la partie transcendante.

Éliminons, à cet effet, A et B entre les trois égalités

$$\begin{aligned} (n-i)V_i &= A\mathfrak{M}_i - NK_i,\\ \mathfrak{M}_{i+1} &= B\mathfrak{M}_i - N'K_i - V'_i,\\ 1 &= BN - N'A, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$N\mathfrak{M}_{i+1} = \mathfrak{M}_i + (n-i)N'V_i - NV'_i.$$

Nous mettrons cette relation sous la forme suivante :

$$\frac{\mathfrak{M}_i}{N^{n-i+1}} - \frac{\mathfrak{M}_{i+1}}{N^{n-i}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{V_i}{N^{n-i}}\right),$$

et, supposant ensuite $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, nous en conclurons, en ajoutant membre à membre,

$$\frac{\mathfrak{M}}{N^{n+1}} - \frac{\mathfrak{M}_n}{N} = \frac{d}{dx}\left(\frac{V_0}{N^n} + \frac{V_1}{N^{n-1}} + \ldots + \frac{V_{n-1}}{N}\right),$$

ce qui fait bien voir qu'on satisfait à la condition proposée

$$\frac{\mathfrak{M}}{N^{n+1}} = \frac{U}{N} + \frac{d}{dx}\left(\frac{V}{N^n}\right)$$

par les expressions

$$\begin{gathered} U = \mathfrak{M}_n,\\ V = V_0 + NV_1 + N^2V_2 + \ldots + N^{n-1}V_{n-1}, \end{gathered}$$

comme il s'agissait de le démontrer.

J'ai dit que les polynomes $K, K_1, \ldots, K_{n-1}$ étaient arbitraires; on pourra donc en disposer de manière que les degrés de $V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}$ soient moindres que le degré de N; on pourra aussi les supposer tous nuls, ce qui donne, par exemple,

$$\begin{aligned} n\mathrm{V}_0 &= \mathfrak{N}\mathrm{A}, \\ n(n-1)\mathrm{V}_1 &= \mathfrak{N}\mathrm{A}(n\mathrm{B}-\mathrm{A}') - \mathfrak{N}'\mathrm{A}^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ces deux suppositions se concilient dans le cas de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^{n+1}},$$

que je choisis comme application de la méthode. Nous aurons alors

$$\mathrm{N} = x^2 - 1, \qquad \mathrm{N}' = 2x,$$

$$\mathrm{A} = -\frac{x}{2}, \qquad \mathrm{B} = -1,$$

puis successivement

$$\begin{aligned} n\mathrm{V}_0 &= -\frac{x}{2}, \\ (n-1)\mathrm{V}_1 &= +\frac{2n-1}{2n}\,\frac{x}{2}, \\ (n-2)\mathrm{V}_2 &= -\frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}\,\frac{x}{2}, \\ (n-3)\mathrm{V}_3 &= +\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}{2n(2n-2)(2n-4)}\,\frac{x}{2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_1 &= -\frac{2n-1}{2n}, \\ \mathfrak{N}_2 &= +\frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}, \\ \mathfrak{N}_3 &= -\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}{2n(2n-2)(2n-4)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

d'où ces valeurs, qu'on retrouvera bientôt par une autre voie,

$$\mathrm{U} = \mathfrak{N}_n = (-1)^n \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots3.1}{2n(2n-2)\ldots4.2},$$

$$\begin{aligned} \mathrm{V} &= \mathrm{V}_0 + \mathrm{N}\mathrm{V}_1 + \mathrm{N}^2\mathrm{V}_2 + \ldots + \mathrm{N}^{n-1}\mathrm{V}_{n-1} \\ &= -\frac{x}{2}\Bigg[\frac{1}{n} - \frac{2n-1}{2n}\,\frac{x^2-1}{n-1} + \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}\,\frac{(x^2-1)^2}{n-2} - \ldots \\ &\qquad + (-1)^n \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots3}{2n(2n-2)\ldots4}(x^2-1)^{n-1}\Bigg]. \end{aligned}$$

De l'intégrale $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$.

1. Des notions importantes d'Analyse se rattachent à cette expression, qui va nous servir d'exemple pour l'application des méthodes générales d'intégration des fonctions rationnelles. J'observe d'abord qu'on aura pour la partie transcendante et la partie algébrique ces expressions

$$\mathrm{A}\log(x-a) + \mathrm{B}\log(x+a), \qquad \frac{\mathfrak{F}(x)}{(x^2-a^2)^n},$$

et que, dans la série

$$\frac{\omega}{x} + \frac{\omega_1}{x^2} + \frac{\omega_2}{x^3} + \ldots,$$

les coefficients $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_{2n}$ s'évanouissent. En écrivant, en effet,

$$\frac{1}{(x^2-a^2)^{n+1}} = \frac{1}{x^{2n+2}}\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)^{-(n+1)},$$

la formule du binome donne

$$\frac{1}{(x^2-a^2)^{n+1}} = \frac{1}{x^{2n+2}} + \frac{(n+1)a^2}{x^{2n+4}} + \ldots,$$

d'où

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} = -\frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} - \frac{(n+1)a^2}{(2n+3)x^{2n+3}} - \ldots.$$

La première conséquence à tirer de là, c'est qu'ayant

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0,$$

la partie transcendante est simplement

$$\mathrm{A}\log\frac{x-a}{x+a},$$

et la seconde, c'est que le produit du développement en série de l'intégrale par le facteur $(x^2-a^2)^n$, ne contenant aucune puissance positive de la variable, le polynome $\mathfrak{F}(x)$ se réduit à la partie entière de l'expression $\mathrm{A}\log\frac{x-a}{x+a}(x^2-a^2)^n$.

Maintenant A est donné par le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement suivant les puissances croissantes de cette quantité, de la fraction $\frac{1}{(x^2-a^2)^{n+1}}$, lorsqu'on y a fait $x = a + z$. Or, ayant

$$\frac{1}{(x^2-a^2)^{n-1}} = \frac{1}{z^{n+1}}(2a+z)^{-n-1},$$

nous sommes amenés à chercher le coefficient de z^n dans le développement de $(2a+z)^{-n-1}$. Partant, à cet effet, de la formule du binome

$$(\alpha+z)^m = \alpha^m + \frac{m}{1}\alpha^{m-1}z + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}\alpha^{m-n}z^n + \ldots,$$

il suffira de supposer, dans le terme général,

$$\alpha = 2a, \qquad m = -n-1,$$

pour obtenir la valeur

$$\mathrm{A} = \frac{(-1)^n}{(2a)^{2n+1}}\,\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2\ldots n},$$

où je remarquerai que le facteur numérique $\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2\ldots n}$ est aussi le coefficient du terme moyen dans le développement de la puissance $2n$ du binome. On peut donc lui substituer la quantité $2^{2n}\alpha_n$, en posant

$$\alpha_n = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n},$$

ce qui donnera

$$\mathrm{A} = \frac{(-1)^n\alpha_n}{2a^{2n+1}}.$$

Cela posé, il ne nous reste plus qu'à déterminer la partie rationnelle de l'intégrale, en formant le polynome $\mathfrak{F}(x)$ au moyen des termes entiers en x du produit

$$\mathrm{A}\log\frac{x+a}{x-a}(x^2-a^2)^n.$$

Mais le calcul et le résultat sont plus simples en employant, à

la place de la série

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{x+a}{x-a}\right) = \frac{a}{x} + \frac{1}{3}\frac{a^3}{x^3} + \frac{1}{5}\frac{a^5}{x^5} + \ldots,$$

celle-ci,

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{x+a}{x-a}\right) = x\left[\frac{a}{x^2-a^2} - \frac{2}{3}\frac{a^3}{(x^2-a^2)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{2.4}{3.5}\frac{a^5}{(x^2-a^2)^3} - \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{a^7}{(x^2-a^2)^4} + \ldots\right],$$

qu'on démontre facilement en prenant les dérivées des deux membres, et employant cette identité

$$\frac{d}{da}\left[\frac{a^{2n-1}}{(x^2-a^2)^n}\right] = \frac{(2n-1)a^{2n-2}}{(x^2-a^2)^n} + \frac{2a^{2n}}{(x^2-a^2)^{n+1}}.$$

La partie entière qui résulte de la multiplication par $(x^2-a^2)^n$ se présente, en effet, sous la forme

$$x\left[a(x^2-a^2)^{n-1} - \frac{2}{3}a^3(x^2-a^2)^{n-2}\right.$$
$$\left. + \frac{2.4}{3.5}a^5(x^2-a^2)^{n-3} - \ldots - (-1)^n\frac{2.4\ldots 2n-2}{3.5\ldots 2n-1}a^{2n-1}\right],$$

et il vient, par suite,

$$\mathfrak{F}(x) = 2\mathrm{A}x\left[(x^2-a^2)^{n-1} - \frac{2}{3}a^2(x^2-a^2)^{n-2}\right.$$
$$\left. + \frac{2.4}{3.5}a^4(x^2-a^2)^{n-3} - \ldots - (-1)^n\frac{2.4\ldots 2n-2}{3.5\ldots 2n-1}a^{2n-2}\right],$$

ou, en employant le facteur A sous la forme

$$\mathrm{A} = \frac{(-1)^n}{2a^{2n+1}}\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n},$$

et renversant l'ordre des termes,

$$\mathfrak{F}(x) = -\frac{x}{2}\left[\frac{1}{na^2} - \frac{2n-1}{2n}\,\frac{x^2-a^2}{(n-1)a^4} + \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)a^6}\,\frac{(x^2-a^2)^2}{n-2} - \ldots\right];$$

c'est précisément le résultat trouvé précédemment, dans le cas de $a = 1$.

II. L'intégrale $\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$ peut encore s'obtenir au moyen d'un changement de variables en posant

$$\frac{x-a}{x+a} = y.$$

Cette substitution donne en effet

$$x = a\frac{1+y}{1-y}, \qquad dx = \frac{2a\,dy}{(1-y)^2},$$

d'où, par conséquent,

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} = \frac{1}{(2a)^{2n+1}} \int \frac{(y-1)^{2n}\,dy}{y^{n+1}},$$

et l'intégration relative à la nouvelle variable s'effectue aisément comme il suit. Soit en désignant, pour abréger, les coefficients numériques par N_1, N_2, N_3, ...,

$$(y-1)^{2n} = y^{2n} + N_1 y^{2n-1} + N_2 y^{2n-2} + \ldots + N_1 y + 1,$$

nous écrirons, en rapprochant les termes équidistants des extrêmes et isolant le terme du milieu y^n,

$$(y-1)^{2n} = (y^{2n}+1) + N_1(y^{2n-1}+y) + N_2(y^{2n-2}+y^2) + \ldots + N_n y^n,$$

de sorte qu'il viendra

$$\begin{aligned}\frac{(y-1)^{2n}}{y^{n+1}} = \left(y^{n-1} + \frac{1}{y^{n+1}}\right) &+ N_1\left(y^{n-2} + \frac{1}{y^n}\right)\\ &+ N_2\left(y^{n-3} + \frac{1}{y^{n-1}}\right) + \ldots + \frac{N_n}{y},\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\int \frac{(y-1)^{2n}\,dy}{y^{n+1}} = \frac{1}{n}\left(y^n - \frac{1}{y^n}\right) &+ \frac{N_1}{n-1}\left(y^{n-1} - \frac{1}{y^{n-1}}\right)\\ &+ \frac{N_2}{n-2}\left(y^{n-2} - \frac{1}{y^{n-2}}\right) + \ldots + N_n \log y.\end{aligned}$$

Cette formule doit coïncider, en y remplaçant y par $\frac{x-a}{x+a}$, avec celle que donne la première méthode, et, en effet, la partie logarithmique est la même, car le coefficient moyen N_n de la puissance $(y-1)^{2n}$ a précisément pour valeur

$$(-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2\ldots n}.$$

Quant à l'égalité des parties rationnelles, elle conduit, en posant

$$x = a\sqrt{-1}\cot\frac{1}{2}\varphi,$$

d'où

$$y = \cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi,$$

à l'identité suivante :

$$\begin{aligned}&\frac{\sin n\varphi}{n} + N_1\frac{\sin(n-1)\varphi}{n-1} + N_2\frac{\sin(n-2)\varphi}{n-2} + \ldots\\ &= (-1)^{n-1}\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2\ldots n}\cot\frac{1}{2}\varphi\\ &\times\left(\sin^2\frac{1}{2}\varphi + \frac{2}{3}\sin^4\frac{1}{2}\varphi + \frac{2.4}{3.5}\sin^6\frac{1}{2}\varphi + \ldots\right.\\ &\left.\qquad + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}\sin^{2n}\frac{1}{2}\varphi\right);\end{aligned}$$

mais, sans m'y arrêter, voici un troisième procédé entièrement différent des précédents, et qui servira de transition pour arriver aux méthodes propres essentiellement à l'intégration des fonctions algébriques.

Soit $u = (x^2-a^2)^m$, l'exposant m étant quelconque, on aura, en différentiant deux fois de suite,

$$\frac{1}{2m}\frac{du}{dx} = x(x^2-a^2)^{m-1},$$

$$\frac{1}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} = (x^2-a^2)^{m-1} + (2m-2)x^2(x^2-a^2)^{m-2}.$$

Or, on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m}\frac{d^2u}{dx^2} &= (x^2-a^2)^{m-1} + (2m-2)(x^2-a^2+a^2)(x^2-a^2)^{m-2}\\ &= (2m-1)(x^2-a^2)^{m-1} + a^2(2m-2)(x^2-a^2)^{m-2}.\end{aligned}$$

de sorte qu'il vient, en multipliant les deux membres par dx et intégrant,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m}\frac{du}{dx} &= x(x^2-a^2)^{m-1}\\ &= (2m-1)\int(x^2-a^2)^{m-1}\,dx + a^2(2m-2)\int(x^2-a)^{m-2}\,dx.\end{aligned}$$

Faisons maintenant

$$m = 1-n,$$

et l'on obtiendra

$$\frac{x}{(x^2-a^2)^n} = -(2n-1)\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^n} - 2na^2\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}},$$

ou bien

$$2na^2\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} = -(2n-1)\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^n} - \frac{x}{(x^2-a^2)^n},$$

et, par conséquent, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\begin{aligned}
2a^2\int\frac{x}{(x^2-a^2)^2} &= -\int\frac{dx}{x^2-a^2} - \frac{x}{x^2-a^2},\\
4a^2\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^3} &= -3\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^2} - \frac{x}{(x^2-a^2)^2},\\
6a^2\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^4} &= -5\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^3} - \frac{x}{(x^2-a^2)^3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ces relations successives conduisent évidemment à exprimer l'intégrale relative à un exposant quelconque $\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$, au moyen de celle-ci $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$, et d'une fonction rationnelle de x; un calcul facile donne en effet pour résultat

$$a^{2n}\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} = (-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\left[\int\frac{dx}{x^2-a^2} + f_n(x)\right],$$

en posant

$$\begin{aligned}
f_n(x) = x\Bigg[\frac{1}{x^2-a^2} - \frac{2}{3}\frac{a^2}{(x^2-a^2)^2} + \frac{2.4}{3.5}\frac{a^4}{(x^2-a^2)^3} - \ldots\\
- (-1)^n\frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}\frac{a^{2n-2}}{(x^2-a^2)^n}\Bigg].
\end{aligned}$$

Et, si l'on veut le démontrer, on observera qu'en changeant n en $n-1$, il vient

$$a^{2n-2}\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^n} = (-1)^{n-1}\frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots(2n-2)}\left[\int\frac{dx}{x^2-a^2} + f_{n-1}(x)\right],$$

de sorte qu'en substituant dans la relation générale

$$2na^2\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} = -(2n-1)\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^n} - \frac{x}{(x^2-a^2)^n},$$

nous obtenons la condition

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) - (-1)^n\frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}\frac{a^{2n-2}x}{(x^2-a^2)^n},$$

qui est satisfaite d'elle-même. La fonction $f_n(x)$ donne ainsi, pour la partie rationnelle de l'intégrale proposée, l'intégrale

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^n}{a^{2n}}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n}\frac{x}{(x^2-a^2)^n}\\
&\quad\times\left[(x^2-a^2)^{n-1} - \frac{2}{3}a^2(x^2-a^2)^{n-2} + \frac{2.4}{3.5}a^4(x^2-a^2)^{n-3} - \ldots\right],
\end{aligned}$$

qui, d'après l'expression du coefficient A, coïncide bien avec celle qui a été obtenue précédemment sous la forme $\frac{\mathfrak{F}(x)}{(x^2-a^2)^n}$, et quant à la partie transcendante, l'identité

$$\frac{2a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}$$

donne sur-le-champ

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a}.$$

III. La détermination du polynome $\mathfrak{F}(x)$, dans l'équation

$$\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}} = \mathrm{A}\log\frac{x-a}{x+a} + \frac{\mathfrak{F}(x)}{(x^2-a^2)^n},$$

a été obtenue par cette remarque très simple qu'en l'écrivant ainsi

$$\mathfrak{F}(x) = \mathrm{A}(x^2-a^2)^n\log\frac{x+a}{x-a} + (x^2-a^2)^n\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}},$$

le développement suivant les puissances descendantes de la variable de l'expression $(x^2-a^2)^n\int\frac{dx}{(x^2-a^2)^{n+1}}$ est de la forme $\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \cdots$, sans contenir aucune partie entière en x. Or, il résulte encore de cette remarque une conséquence importante que voici. Faisons, pour plus de simplicité, $a = 1$, et prenons les dérivées d'ordre n des deux membres dans la relation

$$\mathfrak{F}(x) = \mathrm{A}(x^2-1)^n\log\frac{x+1}{x-1} + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \ldots.$$

A l'égard du produit $(x^2-1)^n \log\frac{x+1}{x-1}$, il faudra, en posant

$$\mathrm{U}=(x^2-1)^n, \qquad \mathrm{V}=\log\frac{x+1}{x-1},$$

appliquer la formule

$$\frac{d^n\mathrm{UV}}{dx^n}=\frac{d^n\mathrm{U}}{dx^n}\mathrm{V}+\frac{n}{1}\frac{d^{n-1}\mathrm{U}}{dx^{n-1}}\frac{d\mathrm{V}}{dx}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^{n-2}\mathrm{U}}{dx^{n-2}}\frac{d^2\mathrm{V}}{dx^2}+\ldots,$$

dont le premier terme $\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\log\frac{x+1}{x-1}$ sera seul à dépendre du logarithme, les autres étant tous rationnels et même entiers. On a effectivement

$$\frac{d^a\log\frac{x+1}{x-1}}{dx^a}=\frac{d^a}{dx^a}[\log(x+1)-\log(x-1)]$$
$$=(-1)^{a-1}1.2\ldots(a-1)\left[\frac{1}{(x+1)^a}-\frac{1}{(x-1)^a}\right],$$

et comme $\frac{d^{n-a}(x^2-1)^n}{dx^{n-a}}$ contient en facteur $(x^2-1)^a$, le produit est entier en x. Réunissant ces termes au polynome $\frac{d^n\mathcal{F}(x)}{dx^n}$, en les faisant passer dans le premier membre, que je désignerai alors par $\mathrm{F}_n(x)$, nous parviendrons à cette relation.

$$\mathrm{F}_n(x)=\mathrm{A}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}\log\frac{x+1}{x-1}$$
$$+(-1)^n 1.2\ldots n\left[\frac{\alpha}{x^{n+1}}-\frac{(n+1)\beta}{x^{n+2}}+\ldots\right],$$

à laquelle je m'arrêterai un moment. Elle montre qu'en multipliant par le polynome du $n^{\text{ième}}$ degré $\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ la série infinie

$$\log\frac{x+1}{x-1}=2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots\right),$$

le produit manque des puissances $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \ldots, \frac{1}{x^n}$, et il en résulte qu'en divisant $\mathrm{F}_n(x)$ par $\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$, le quotient, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de la variable, coïncide avec cette série, aux termes près de l'ordre $\frac{1}{x^{2n+1}}$. Cet exemple de

l'approximation d'une transcendante par une fonction rationnelle, qui est intéressant en lui-même, recevra plus tard une application importante. Il met en évidence une propriété entièrement caractéristique des expressions $\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$ auxquelles on donne le nom de *polynomes de Legendre*, et qu'on désigne par X_n en posant

$$\mathrm{X}_n=\frac{1}{2.4.6\ldots 2n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Ces fonctions, introduites en Analyse par l'illustre géomètre à l'occasion de ses recherches sur l'attraction des sphéroïdes et la figure des planètes, sont d'une grande importance, et donnent lieu à plusieurs théorèmes remarquables, dont l'un nous servira de nouvelle application du procédé de l'intégration par parties, fondé sur la formule

$$\int \mathrm{U}\frac{d^{n+1}\mathrm{V}}{dx^{n+1}}dx=\Theta-(-1)^n\int\mathrm{V}\frac{d^{n+1}\mathrm{U}}{dx^{n+1}}dx$$

où

$$\Theta=\mathrm{U}\frac{d^n\mathrm{V}}{dx^n}-\frac{d\mathrm{U}}{dx}\frac{d^{n-1}\mathrm{V}}{dx^{n-1}}+\frac{d^2\mathrm{U}}{dx^2}\frac{d^{n-2}\mathrm{V}}{dx^{n-2}}+\ldots.$$

Soit, en effet, $\mathrm{V}=(x^2-1)^{n+1}$, en supposant que U soit un polynome arbitraire de degré n, l'intégrale du second membre disparaîtra, et nous obtiendrons d'abord

$$\int\mathrm{U}\frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}}dx=\Theta.$$

J'observe ensuite que, les dérivées successives de $(x^2-1)^{n+1}$ jusqu'à celle d'ordre n, contenant en facteur x^2-1, Θ s'évanouit pour $x=1$ et $x=-1$, et il en résulte que l'intégrale définie

$$\int_{-1}^{+1}\mathrm{U}\frac{d^{n+1}(x^2-1)^{n+1}}{dx^{n+1}}dx,$$

différence des valeurs de Θ pour $x=1$ et $x=-1$, est nulle.

Le théorème exprimé par l'équation

$$\int_{-1}^{+1}\mathrm{UX}_{n+1}\,dx=0$$

appartient exclusivement aux polynomes de Legendre; car, en désignant un moment par $F(x)$ une autre fonction entière de degré $n+1$, telle que l'on ait aussi

$$\int_{-1}^{+1} UF(x)\,dx = 0,$$

on en conclurait, quelle que soit la constante k,

$$\int_{-1}^{+1} UF(x)\,dx - k\int_{-1}^{+1} UX_{n+1}\,dx = 0,$$

ou bien

$$\int_{-1}^{+1} U[F(x) - kX_{n+1}]\,dx = 0.$$

Or, en prenant k, de manière que $F(x) - kX_{n+1}$ s'abaisse au $n^{\text{ième}}$ degré, en posant alors

$$U = F(x) - kX_{n+1},$$

nous trouvons la condition suivante :

$$\int_{-1}^{+1} U^2\,dx = 0.$$

Elle exige évidemment que U s'évanouisse identiquement; car autrement, l'intégrale ne serait jamais nulle, tous les éléments étant positifs, et il en résulte

$$F(x) = kX_{n+1}.$$

INTÉGRATION
DES
FONCTIONS TRANSCENDANTES.

Sur l'intégrale des fonctions circulaires (*Proceedings of the London mathematical Society*, t. IV, 1872, pp. 164-175).
Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, 1873, pp. 320-351.

En désignant par $f(x)$ une fonction rationnelle de la variable, et par $f(\sin x, \cos x)$ une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$, les seules expressions, dans le champ infini des quantités transcendantes, dont nous puissions aborder l'intégration sont celles-ci :

$$f(\sin x, \cos x), \quad e^{\omega x} f(x), \quad e^{\omega x} f(\sin x, \cos x),$$

et nous n'aurons point, pour parvenir à notre but, à exposer des principes nouveaux, ni des méthodes propres qui en soient la conséquence. On va retrouver, en effet, d'une part la décomposition en fractions simples, et de l'autre le procédé pour obtenir, lorsqu'elle est possible sous forme algébrique, l'intégrale d'une fonction dépendant de la racine carrée d'un polynome. Il ne sera pas toutefois sans profit d'employer ainsi, dans des conditions différentes, les méthodes qui nous sont déjà familières; elles recevront de ces applications un nouveau jour qui en fera mieux saisir la portée et le caractère. On verra surtout comment cette recherche des procédés d'intégration conduit naturellement à approfondir, au point de vue de l'Analyse générale, la nature des expressions $(f \sin x, \cos x)$, qui sont le type des fonctions périodiques, en préparant ainsi ce que nous aurons à dire, dans la seconde partie du Cours, des fonctions à double période.

De l'intégrale $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$.

I. Nous partirons de la transformation en une fonction rationnelle de la quantité transcendante $f(\sin x, \cos x)$, qu'on obtient en posant

$$e^{x\sqrt{-1}} = z.$$

De là résulte, en effet,

$$\sin x = \frac{z^2 - 1}{2z\sqrt{-1}}, \qquad \cos x = \frac{z^2+1}{2z},$$

de sorte qu'on peut faire

$$f(\sin x, \cos x) = \frac{F_1(z)}{F(z)};$$

$F(z)$ et $F_1(z)$ désignent des polynomes entiers en z. Cela posé, je vais montrer que de la décomposition en fractions simples de la fraction rationnelle $\frac{F_1(z)}{F(z)}$ résulte une décomposition en éléments simples, de la fonction transcendante qui en donnera semblablement et d'une manière immédiate l'intégration. Considérant, dans ce but, la quantité $\frac{1}{(z-a)^n}$, qui est le type des fractions simples, je pose

$$a = e^{\alpha\sqrt{-1}},$$

ce qui sera toujours possible en exceptant le cas de $a = 0$, et je remarque qu'on aura

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{e^{x\sqrt{-1}} - e^{\alpha\sqrt{-1}}} = \frac{e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2}\left(-1 - i\cot\frac{x-\alpha}{2}\right);$$

c'est une conséquence, en effet, de la relation

$$\cot\frac{x}{2} = \sqrt{-1}\,\frac{e^{x\sqrt{-1}}+1}{e^{x\sqrt{-1}}-1},$$

mise sous la forme

$$\frac{1}{e^{x\sqrt{-1}}-1} = \frac{1}{2}\left(- \;\; - i\cot\frac{x}{2}\right),$$

quand on y change x en $x - \alpha$. De là résulte une première transformation du groupe des fractions partielles

$$\frac{A}{z-a} + \frac{A}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(z-a)^{n+1}}$$

en un polynome entier et du degré $n+1$ en $\cot\frac{x-\alpha}{2}$; mais nous pouvons faire

$$\cot^2 x = -1 - \frac{d\cot x}{dx},$$
$$\cot^3 x = -\cot x + \frac{1}{2}\frac{d^2\cot x}{dx^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et la relation identique

$$\cot^{k+1} x = -\cot^{k-1} x - \frac{1}{k}\frac{d\cot^k x}{dx}$$

montre que, de proche en proche, on exprimera linéairement $\cot^n x$ au moyen des dérivées successives de $\cot x$ jusqu'à celle d'ordre $n-1$. Nous parvenons donc à ce nouveau résultat, savoir

$$\frac{A}{z-a} + \frac{A_1}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(z-a)^{n+1}}$$
$$= C + \mathcal{A}\cot\frac{1}{2}(x-\alpha) + \mathcal{A}_1\frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx} + \ldots + \mathcal{A}_n\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^n},$$

les constantes $C, \mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ dépendant linéairement des divers numérateurs $A, A_1, \ldots, A_n$. Ce point établi, je mettrai en évidence, si elles existent, les racines nulles du polynome $F(z)$ en faisant

$$F(z) = z^{m+1}(z-a)^{n+1}(z-b)^{p+1}\ldots(z-l)^{s+1},$$

et je modifierai la formule générale de décomposition en fractions simples en réunissant à la partie entière du quotient $\frac{F_1(z)}{F(z)}$ les fractions partielles en $\frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \ldots, \frac{1}{z^{m-1}}$, de manière à avoir

$$\begin{aligned}\frac{F_1(z)}{F(z)} = \mathcal{F}(z) &+ \frac{A}{z-a} + \frac{A_1}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(z-a)^{n+1}}\\ &+ \frac{B}{z-b} + \frac{B_1}{(z-b)^2} + \ldots + \frac{B_p}{(z-b)^{p+1}}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ \frac{L}{z-l} + \frac{L_1}{(z-l)^2} + \ldots + \frac{L_s}{(z-l)^{s+1}},\end{aligned}$$

où $\mathcal{F}(z)$ sera, par conséquent, de la forme $\sum a_k z^k$ avec des puissances entières, mais positives ou négatives, de z. Maintenant nous conclurons de cette formule élémentaire, en revenant à la valeur $z = e^{x\sqrt{-1}}$, l'expression suivante de la fonction $f(\sin x, \cos x)$. La quantité $\mathcal{F}(x)$, devenant d'abord

$$a_k e^{kx\sqrt{-1}} = \Sigma a_k(\cos kx + \sqrt{-1}\sin kx),$$

nous donne une première partie, que je désignerai par $\Pi(x)$, et qui en sera considérée comme la partie entière. Les fractions partielles donnent ensuite une seconde partie $\Phi(x)$, qui, en posant

$$a = e^{\alpha\sqrt{-1}}, \qquad b = e^{\beta\sqrt{-1}}, \qquad \ldots, \qquad l = e^{\lambda\sqrt{-1}},$$

aura la forme suivante :

$$\begin{aligned}\Phi(x) = \text{const.} &+ \mathcal{A}\cot\tfrac{1}{2}(x-\alpha) + \mathcal{A}_1 \frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx} + \ldots + \mathcal{A}_n \frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^n} \\ &+ \mathcal{B}\cot\tfrac{1}{2}(x-\beta) + \mathcal{B}_1 \frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\beta)}{dx} + \ldots + \mathcal{B}_p \frac{d^p\cot\frac{1}{2}(x-\beta)}{dx^p} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \mathcal{L}\cot\tfrac{1}{2}(x-\lambda) + \mathcal{L}_1 \frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\lambda)}{dx} + \ldots + \mathcal{L}_s \frac{d^s\cot\frac{1}{2}(x-\lambda)}{dx^s}.\end{aligned}$$

La détermination des coefficients $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots, \mathcal{L}, \mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \ldots$ rendra plus complète encore l'analogie de la formule que nous venons d'obtenir

$$f(\sin x, \cos x) = \Pi(x) + \Phi(x),$$

avec celle de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples.

II. Je ferai, dans ce but, en ayant en vue le groupe des coefficients $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$, $x = \alpha + h$, et je développerai les deux membres suivant les puissances croissantes de h. Or, les séries provenant ainsi de la partie entière et de $\cot\frac{1}{2}(x-\beta), \ldots, \cot\frac{1}{2}(x-\lambda)$ ne contiendront que des puissances entières et positives de h, tandis que la quantité $\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)$ et ses dérivées donneront un nombre fini et limité de puissances négatives. Nous avons, en effet,

$$\cot\frac{x-\alpha}{2} = \cot\frac{h}{2} = \frac{2}{h} - \frac{h}{6} - \frac{h^3}{360} - \ldots,$$

et, comme la dérivée de h prise par rapport à x est l'unité, on déduira successivement de cette relation

$$\frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx} = -\frac{2}{h^2} - \frac{1}{6} - \frac{h^2}{120} - \ldots,$$

$$\frac{d^2\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^2} = +\frac{4}{h^3} - \frac{h}{60} - \ldots,$$

et, en général, si l'on n'écrit point les puissances positives de h,

$$\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^n} = (-1)^n 1.2\ldots n \frac{2}{h^{n+1}}.$$

Le développement du second membre $\Pi(x) + \Phi(x)$ se composant ainsi des termes

$$2\left[\frac{\mathcal{A}}{h} - \frac{\mathcal{A}_1}{h^2} + \frac{1.2\mathcal{A}_2}{h^3} - \ldots + (-1)^n \frac{1.2\ldots n\mathcal{A}_n}{h^{n+1}}\right]$$

et d'une série infinie de puissances positives de h, nous obtiendrons les coefficients $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$, en formant la partie du développement du premier membre $f(\sin x, \cos x)$ qui est composée des seules puissances négatives de h. Supposons à cet effet

$$f[\sin(\alpha+h), \cos(\alpha+h)] = \frac{A}{h} - \frac{A_1}{h^2} + \frac{1.2A_2}{h^3} - \ldots + (-1)^n \frac{1.2\ldots nA_n}{h^{n+1}},$$

on aura immédiatement

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}A, \qquad \mathcal{A}_1 = \frac{1}{2}A_1, \qquad \ldots, \qquad \mathcal{A}_n = \frac{1}{2}A_n,$$

et j'ajoute que, si l'on multiplie membre à membre l'égalité précédente avec celle-ci, que donne le théorème de Taylor,

$$\begin{aligned}\cot\tfrac{1}{2}(x-\alpha-h) &= \cot\tfrac{1}{2}(x-\alpha)-\frac{h}{1}\,\frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx}+\frac{h^2}{1.2}\,\frac{d^2\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^2}-\ldots\\ &\quad+(-1)^n\frac{h^n}{1.2\ldots n}\,\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^n}+\ldots,\end{aligned}$$

on trouve pour le coefficient divisé par deux, du terme en $\frac{1}{h}$, précisément

$$\mathcal{A}\cot\tfrac{1}{2}(x-\alpha)+\mathcal{A}_1\frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx}+\ldots+\mathcal{A}_n\frac{d^n\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx^n}.$$

Le groupe total des *éléments simples*, se rapportant à la quantité $x=\alpha$ qui rend infinie la fonction proposée, est ainsi le demi-résidu correspondant à $h=0$, de l'expression

$$f[\sin(\alpha+h),\ \cos(\alpha+h)]\cot\frac{x-\alpha-h}{2};$$

résultat analogue, comme on voit, à un théorème de Lagrange.

III. Après avoir jusqu'ici suivi pas à pas la théorie de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, nous allons introduire une considération nouvelle qui a son origine dans la propriété caractéristique de la transcendante $f(\sin x, \cos x)$ d'être périodique. Je remarque que, d'après la relation

$$\cot\frac{x}{2}=\cot x+\operatorname{coséc} x,$$

la fonction $\Phi(x)$ s'exprime en termes de deux formes, à savoir

$$\frac{d^n\cot(x-\alpha)}{dx^n}\quad\text{et}\quad\frac{d^n\operatorname{coséc}(x-\alpha)}{dx^n},$$

les premiers ayant pour période π et les autres se reproduisant en signe contraire lorsqu'on change x en $x+\pi$. Or, à l'égard de

$$\Pi(x)=\Sigma a_k(\cos kx+\sqrt{-1}\sin kx),$$

si l'on fait

$$\theta(x)=\Sigma a_{2k}(\cos 2kx+\sqrt{-1}\sin 2kx)$$

et

$$\eta(x)=\Sigma a_{2k+1}[\cos(2k+1)x+\sqrt{-1}\sin(2k+1)x],$$

en réunissant d'une part les termes contenant les multiples pairs, et de l'autre les multiples impairs de la variable, on aura de même

$$\theta(x+\pi)=\theta(x),\qquad \eta(x+\pi)=-\eta(x).$$

De là résulte la décomposition de la fonction proposée en deux parties $\Theta(x)$, $\mathrm{H}(x)$, de sorte qu'on aura

$$f(\sin x,\ \cos x)=\Theta(x)+\mathrm{H}(x),$$

avec les conditions

$$\Theta(x+\pi)=\Theta(x),\qquad \mathrm{H}(x+\pi)=-\mathrm{H}(x),$$

les expressions des nouvelles fonctions introduites étant

$$\begin{aligned}\Theta(x)=\theta(x)&+\mathcal{A}\cot(x-\alpha)+\mathcal{A}_1\frac{d\cot(x-\alpha)}{dx}+\ldots+\mathcal{A}_n\frac{d^n\cot(x-\alpha)}{dx^n}\\ &+\mathcal{B}\cot(x-\beta)+\mathcal{B}_1\frac{d\cot(x-\beta)}{dx}+\ldots+\mathcal{B}_p\frac{d^p\cot(x-\beta)}{dx^p}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+\mathcal{L}\cot(x-\lambda)+\mathcal{L}_1\frac{d\cot(x-\lambda)}{dx}+\ldots+\mathcal{L}_s\frac{d^s\cot(x-\lambda)}{dx^s}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{H}(x)=\eta(x)&+\mathcal{A}\operatorname{coséc}(x-\alpha)+\mathcal{A}_1\frac{d\operatorname{coséc}(x-\alpha)}{dx}+\ldots+\mathcal{A}_n\frac{d^n\operatorname{coséc}(x-\alpha)}{dx^n}\\ &+\mathcal{B}\operatorname{coséc}(x-\beta)+\mathcal{B}_1\frac{d\operatorname{coséc}(x-\beta)}{dx}+\ldots+\mathcal{B}_p\frac{d^p\operatorname{coséc}(x-\beta)}{dx^p}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+\mathcal{L}\operatorname{coséc}(x-\lambda)+\mathcal{L}_1\frac{d\operatorname{coséc}(x-\lambda)}{dx}+\ldots+\mathcal{L}_s\frac{d^s\operatorname{coséc}(x-\lambda)}{dx^s}.\end{aligned}$$

Nous voyons donc apparaître deux éléments simples distincts, $\cot x$ et $\operatorname{coséc} x$ ou $\frac{1}{\sin x}$, appartenant en propre aux fonctions dont la périodicité est celle de $\Theta(x)$ ou $\mathrm{H}(x)$, au lieu de $\cot\frac{x}{2}$ qui, dans le cas général, a le rôle de la quantité $\frac{1}{x}$ à l'égard des fonctions rationnelles. C'est par les applications qu'on reconnaîtra surtout l'utilité de ces distinctions et, pour commencer par un cas facile, j'envisagerai d'abord la fonction $\frac{1}{\cos\alpha - \cos x}$.

J'observe en premier lieu qu'en introduisant la variable $z = e^{x\sqrt{-1}}$, il vient

$$\frac{1}{\cos\alpha - \cos x} = \frac{2z}{2z\cos\alpha - 1 - z^2}.$$

Or, les racines du dénominateur sont évidemment les quantités $e^{\alpha\sqrt{-1}}$, $e^{-\alpha\sqrt{-1}}$, le numérateur est seulement du premier degré ; ainsi la partie entière $\Pi(z)$ n'existe point, et nous aurons

$$\frac{1}{\cos\alpha - \cos x} = C + \mathcal{A}\cot\frac{x-\alpha}{2} + \mathcal{B}\cot\frac{x+\alpha}{2}.$$

Calculant maintenant les résidus pour $x = \alpha$ et $x = -\alpha$, j'obtiens les quantités

$$\frac{1}{\sin\alpha}, \qquad -\frac{1}{\sin\alpha},$$

et, par suite, en divisant par 2 les valeurs

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2\sin\alpha}, \qquad \mathcal{B} = -\frac{1}{2\sin\alpha},$$

de sorte qu'il vient

$$\frac{1}{\cos\alpha - \cos x} = C + \frac{1}{2\sin\alpha}\left(\cot\frac{x-\alpha}{2} - \cot\frac{x+\alpha}{2}\right).$$

On trouve d'ailleurs sans peine que $C = 0$; mais voici, pour des cas moins faciles, une détermination directe et immédiate de cette constante. Supposons, en général,

$$f(\sin x, \cos x) = \frac{F_1(z)}{F(z)};$$

$F(z)$ ne contenant point le facteur z et étant de degré au moins égal à celui de $F_1(z)$, la partie désignée par $\Phi(x)$ existera seule

dans l'expression de la fonction, qui sera ainsi

$$\begin{aligned} f(\sin x, \cos x) = C &+ \mathcal{A}\cot\tfrac{1}{2}(x-\alpha) + \mathcal{A}_1\frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\alpha)}{dx} + \ldots \\ &+ \mathcal{B}\cot\tfrac{1}{2}(x-\beta) + \mathcal{B}_1\frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\beta)}{dx} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \mathcal{L}\cot\tfrac{1}{2}(x-\lambda) + \mathcal{L}_1\frac{d\cot\frac{1}{2}(x-\lambda)}{dx} + \ldots. \end{aligned}$$

Or, je dis qu'en appelant G et H les valeurs de $\frac{F_1(z)}{F(z)}$ pour z nul et infini, on aura

$$C = \frac{1}{2}(G + H).$$

En effet, la relation

$$\cot\frac{x-\alpha}{2} = \sqrt{-1}\,\frac{e^{(x-\alpha)\sqrt{-1}} + 1}{e^{(x-\alpha)\sqrt{-1}} - 1} = \sqrt{-1}\,\frac{z e^{-\alpha\sqrt{-1}} + 1}{z e^{-\alpha\sqrt{-1}} - 1}$$

fait voir qu'en supposant z nul et infini toutes les quantités $\cot\frac{x-\alpha}{2}$ se réduisent à $-\sqrt{-1}$ et $+\sqrt{-1}$; elle montre aussi que leurs dérivées des divers ordres s'évanouissent ; nous avons donc

$$\begin{aligned} G &= C - (\mathcal{A} + \mathcal{B} + \ldots + \mathcal{L})\sqrt{-1}, \\ H &= C + (\mathcal{A} + \mathcal{B} + \ldots + \mathcal{L})\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \ldots + \mathcal{L} = -\frac{G-H}{2}\sqrt{-1}, \qquad C = \frac{G+H}{2}.$$

Dans l'exemple considéré tout à l'heure, on trouve sur-le-champ $G = 0$, $H = 0$, de sorte que C est nul comme nous l'avons dit.

Soit, en second lieu, l'expression

$$\frac{\sin mx}{\sin nx} = z^{n-m}\frac{z^{2m} - 1}{z^{2n} - 1},$$

les nombres m et n étant entiers. Si l'on suppose $m > n$, on voit